

**Implicações do conhecimento matemático para o ensino usando modelagem matemática:  
um olhar para as discussões de professores em formação continuada**

**Implications of mathematical knowledge for teaching using mathematical modelling: a  
look at the discussions of teachers in continuing education**

**Implicaciones del conocimiento matemático para la enseñanza utilizando la modelación  
matemática: una mirada a las discusiones de los profesores en formación continua**

**Implications des connaissances mathématiques pour l'enseignement utilisant la  
modélisation mathématique : un regard sur les discussions des enseignants en formation  
continue**

Karina Alessandra Pessoa da Silva <sup>1</sup>

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática

<http://orcid.org/0000-0002-1766-137X>

Emerson Tortola<sup>2</sup>

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática

<https://orcid.org/0000-0002-6716-3635>

## **Resumo**

Neste artigo trazemos reflexões para a questão: Quais as implicações do conhecimento matemático para o ensino usando modelagem matemática emergem das discussões de professores em formação continuada? Para isso, nos debruçamos nas discussões dos professores no papel de modeladores em uma atividade de modelagem matemática. A análise de conteúdo, de natureza qualitativa, foi subsidiada por gravações em áudio e vídeo de nove professores participantes de uma disciplina de Modelagem Matemática de um programa de mestrado profissional em Ensino de Matemática de uma universidade federal brasileira, no ano de 2022. Os resultados indicam que as implicações no ensino usando modelagem foram evidenciadas, principalmente, no que chamamos de discussões pedagógicas, e o conhecimento matemático para o ensino se revelou, principalmente, nas discussões matemáticas procedidas de forma conjunta entre a professora formadora e os professores em formação. Os questionamentos intencionais empreendidos pela professora formadora foram o mote para elucidar o conhecimento especializado do conteúdo, provocando implicações com relação à antecipação de conteúdos matemáticos que poderiam ser empreendidos em práticas ao se ensinar usando

---

<sup>1</sup> [karinasilva@utfpr.edu.br](mailto:karinasilva@utfpr.edu.br)

<sup>2</sup> [emersontortola@utfpr.edu.br](mailto:emersontortola@utfpr.edu.br)

modelagem. Esses resultados elucidaram a importância do compartilhamento de ideias entre os professores em formação continuada para que, em colaboração, aprimoramentos nos conhecimentos se façam presentes ao se discutir uma atividade de modelagem no âmbito da formação continuada de professores.

**Palavras-chave:** Conhecimento matemático para o ensino, Modelagem matemática, Modelo matemático, Função polinomial do segundo grau, Função definida por duas sentenças.

### **Abstract**

In this paper we bring reflections to the question What implications of mathematical knowledge for teaching using mathematical modelling emerge from discussions of teachers in continuing education? To this end, we focus on the discussions of teachers in the role of modellers in mathematical modelling activity. The Content Analysis, of a qualitative nature, was supported by audio and video recordings of nine teachers who participated in a Mathematical Modelling course in a professional master's program in Mathematics Teaching at a Brazilian federal university in 2022. The results indicated that the implications of teaching using modelling were mainly evidenced in what we call pedagogical discussions, and mathematical knowledge for teaching was mainly revealed in the mathematical discussions carried out jointly between the teacher educator and the teachers in continuing education. The intentional questions undertaken by the teacher educator were the key to elucidating the specialized content knowledge, provoking implications regarding the anticipation of mathematical content that could be employed in practices when teaching using modelling. These results elucidated the importance of sharing ideas among teachers in continuing education so that, in collaboration, improvements in knowledge are present when discussing a modelling activity within the scope of continuing teacher education.

**Keywords:** Mathematical knowledge for teaching, Mathematical modelling, Mathematical model, Second degree polynomial function, Function defined by two sentences.

### **Resumen**

En este artículo aportamos reflexiones sobre la pregunta ¿Qué implicaciones del conocimiento matemático para la enseñanza mediante modelación matemática emergen de las discusiones de los docentes en la educación continua? Para hacer esto, analizamos las discusiones de los profesores sobre el papel de los modeladores en una actividad de modelación matemática. El Análisis de Contenido, de naturaleza cualitativa, fue respaldado por grabaciones de audio y video de nueve profesores que participaron en una disciplina de Modelación Matemática de un

programa de maestría profesional en Enseñanza de Matemáticas de una universidad federal brasileña, en el año 2022. Los resultados indican que las implicaciones de la enseñanza usando modelación fueron evidenciadas, principalmente, en lo que llamamos discusiones pedagógicas, y el conocimiento matemático para la enseñanza se reveló, principalmente, en discusiones matemáticas llevadas a cabo de manera conjunta entre la profesora formadora y los profesores en formación. Las preguntas intencionales emprendidas por la profesora formadora fueron la clave para elucidar el conocimiento especializado del contenido, provocando implicaciones con respecto a la anticipación de contenidos matemáticos que podrían ser empleados en prácticas al enseñar usando modelación. Estos resultados elucidan la importancia del intercambio de ideas entre los profesores en formación continua para que, en colaboración, mejoras en los conocimientos estén presentes al discutir una actividad de modelación en el ámbito de la formación continua de profesores.

**Palabras clave:** Conocimientos matemáticos para la enseñanza, Modelación matemática, Modelo matemático, Función polinómica de segundo grado, Función definida por dos oraciones.

### Résumé

Dans cet article, nous apportons des réflexions à la question Quelles implications des connaissances mathématiques pour l'enseignement utilisant la modélisation mathématique émergent des discussions des enseignants de la formation continue ? Pour ce faire, nous avons regardé les discussions des enseignants sur le rôle des modélisateurs dans une activité de modélisation mathématique. L'Analyse de Contenu, de nature qualitative, a été soutenue par des enregistrements audio et vidéo de neuf enseignants ayant participé à une discipline de Modélisation Mathématique d'un programme de master professionnel en Enseignement des Mathématiques dans une université fédérale brésilienne, en 2022. Les résultats indiquent que les implications de l'enseignement en utilisant la modélisation ont été principalement mises en évidence dans ce que nous appelons des discussions pédagogiques, et que les connaissances mathématiques pour l'enseignement se sont révélées principalement dans des discussions mathématiques menées de manière conjointe entre la formatrice et les enseignants en formation. Les questions intentionnelles posées par la formatrice ont été la clé pour élucider les connaissances spécialisées du contenu, provoquant des implications concernant l'anticipation des contenus mathématiques qui pourraient être abordés dans les pratiques d'enseignement à travers la modélisation. Ces résultats ont mis en lumière l'importance du partage d'idées entre les enseignants en formation continue afin que, en collaboration, des améliorations des

connaissances soient présentes lorsqu'ils discutent d'une activité de modélisation dans le cadre de la formation continue des enseignants.

**Mots-clés** : Connaissances mathématiques pour l'enseignement, Modélisation mathématique, Modèle mathématique, Fonction polynomiale du deuxième degré, Fonction définie par deux phrases.

## **Implicações do conhecimento matemático para o ensino usando modelagem matemática: um olhar para as discussões de professores em formação continuada**

A investigação e a teorização a respeito da formação de professores datam do século passado, quando começaram a ser disseminadas teorias sobre conhecimento, aprendizagem, motivação, currículo e avaliação, focadas nos alunos ou nos recursos didáticos, incentivadas pela consideração do professor como um profissional que reflete, pensa e precisa construir sua própria prática. Dessa forma, passa a ser relevante para os programas de formação de professores “compreender o que e como pensam e conhecem os professores e, especialmente, como atuam” (Curi & Pires, 2008, p. 153).

Becker (2012), por exemplo, discute as implicações para o ensino a partir do modo como o professor concebe o conhecimento matemático. Shulman (2004) acredita que o ensino é uma das atividades mais complexas e desafiadoras criadas pela humanidade e dedicou-se a investigar como professores podem lidar com tais dificuldades. No que se refere ao conhecimento do professor, Shulman (1986) estruturou três tipos: conhecimento específico do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular. Em linhas gerais, o primeiro diz respeito aos conhecimentos específicos de sua área, o segundo à forma como lida com o ensino do conteúdo e as situações de sala de aula, e o terceiro aos programas curriculares e os meios pelos quais pode atendê-los.

Com o surgimento e a disseminação de novas teorias e alternativas pedagógicas para o ensino de Matemática, a formação de professores, como indicam Curi e Pires (2008), precisa constituir um cenário de pesquisa no terreno educativo. No que diz respeito à modelagem matemática, a formação de professores tem sido preocupação de professores e pesquisadores, sob diferentes olhares e perspectivas, que trabalham pela inserção da modelagem no âmbito escolar, reconhecendo as suas contribuições para com a formação de um aluno mais crítico, criativo e reflexivo quanto ao uso da Matemática e de suas aplicações (Maaß et al., 2022).

A dinâmica de abordar a Matemática via modelagem contempla a organização de situações-problema apresentadas aos alunos sob a forma de um convite para a investigação; orientações quanto às discussões que auxiliam na compreensão do contexto do problema e da investigação matemática pretendida; suporte na resolução, sistematizando conceitos conforme as discussões realizadas pelos alunos; e incentivo à comunicação matemática. Essa dinâmica, portanto, requer do professor um domínio do conteúdo e, sobretudo, das formas de ensiná-lo, assim como já destacou Shulman, na década de 1960, a respeito da mudança de foco muito presente em alguns programas de formação de professores de “o que se ensina” para o “como se ensina” (Curi & Pires, 2008).

Com a intenção de discutir quais aspectos formativos constituem práticas pedagógicas de professores inseridos em um contexto de formação continuada em modelagem, Mutti e Klüber (2018, p. 104) revelam um movimento multidimensional que inclui “traços das vivências desses professores como alunos, de suas experiências vividas durante a licenciatura e [...] das associadas ao exercício da docência, às leituras e ao apoio dos pares”.

Esses aspectos vêm ao encontro dos três eixos formativos propostos por Almeida e Silva (2015), que consideram, em um contexto formativo, a necessidade de se aprender sobre modelagem, de se aprender por meio da modelagem e de se ensinar usando modelagem. A proposta das autoras é que, além de se subsidiar um conhecimento teórico a respeito da modelagem e seu desenvolvimento, os professores em formação sejam encorajados a desenvolver práticas de modelagem em sala de aula.

Essa forma de organização se preocupa com os conhecimentos do professor em seus diferentes aspectos, assim como o faz Shulman (1986). Dessa forma, lançar um olhar sobre a modelagem a partir dessa estrutura teórica pode nos fornecer compreensões a respeito do que considerar em formações de professores nesse contexto. Particularmente nos interessa, neste artigo, discussões tecidas por professores em formação enquanto aprendem por meio da modelagem, ou seja, enquanto desenvolvem uma atividade de modelagem na condição de modeladores, mas debatem acerca dos conteúdos matemáticos que emergem na resolução, de modo a considerar o que se pode ensinar usando modelagem.

Para isso, analisamos o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática por nove professores da Educação Básica, atuantes nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, que cursaram, no primeiro semestre de 2022, uma disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino no âmbito de um programa de mestrado em Ensino de Matemática de uma universidade federal do sul do Brasil.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa desenvolvida no contexto educacional, na qual os dados foram produzidos, assim como orientam Lüdke e André (2014), a partir de uma curiosidade investigativa despertada por um problema revelado pela prática educacional, da qual os pesquisadores estão introduzidos e fazem parte: Quais as implicações do conhecimento matemático para o ensino usando modelagem matemática emergem das discussões de professores em formação continuada?

Nesse contexto, iniciamos o texto com uma incursão sobre o conhecimento matemático para o ensino, seguida de entendimentos sobre a formação de professores em modelagem matemática. De modo subsequente, discorreremos sobre o contexto da pesquisa e a metodologia

de análise. Em seguida, trazemos a descrição da resolução da atividade e a análise das discussões dos professores. Finalizamos com nossas considerações e referências.

### **Conhecimento matemático para o ensino**

Entendemos que a construção dos conhecimentos, no âmbito educacional, é subsidiada, na maior parte, pelas ações dos professores, pela forma como introduzem e desenvolvem os conteúdos com os alunos. Nesse sentido, os encaminhamentos abordados na sala de aula dependem dos conhecimentos dos professores.

Na busca pela compreensão de como os conhecimentos dos professores são desenvolvidos e como os novos se articulam aos já existentes, Shulman (1986) estruturou a base do conhecimento docente (knowledge base) em três categorias: conhecimento específico do conteúdo (subject knowledge matter), conhecimento pedagógico do conteúdo (pedagogical knowledge matter) e conhecimento curricular (curricular knowledge).

O conhecimento específico do conteúdo, ou conhecimento do conteúdo, diz respeito ao que o professor compreende sobre a estrutura da disciplina, e o conhecimento que será objeto de ensino, com relação à sua produção, representação e validação epistemológica. Isso requer que o professor entenda sobre a estrutura da disciplina com relação ao domínio atitudinal, conceitual, procedimental, representacional e validativo do conteúdo. Porém, como assevera Shulman (1986, p. 8), esse conhecimento “[...] é completamente inútil pedagogicamente quanto essa habilidade sem conteúdo”. De acordo com o autor, deve haver uma tentativa de trazer para a cena da prática do professor não só o conhecimento específico do conteúdo, mas também uma relação atrelada do mesmo com uma dimensão didática, podendo assim, realizar uma transformação do conteúdo em formas didaticamente poderosas, chamado de conhecimento pedagógico do conteúdo.

O conhecimento pedagógico do conteúdo inclui o conhecimento dos professores sobre seus alunos e suas características, o conhecimento dos contextos educacionais e o conhecimento dos propósitos educacionais, dos valores e dos fundamentos filosóficos e históricos. Para tanto, se faz necessário lançar mão de exemplos, analogias, ilustrações e demonstrações, com o intuito de auxiliar no aprendizado de um determinado conteúdo, vislumbrando possibilidades de considerar os erros conceituais que podem ser apresentados pelos alunos e as implicações na aprendizagem, ou seja, “as formas de representar e formular o assunto que o tornam compreensível para os outros” (Shulman, 1986, p. 9).

Já o conhecimento curricular se refere àquele dos programas de ensino, destacando o uso de recursos didáticos, a relação entre conteúdos e contextos presentes no programa

curricular da disciplina, além da familiaridade entre diferentes tópicos de um mesmo conteúdo que foram estudados em anos anteriores ou serão estudados posteriormente. Vale destacar “que um professor profissional esteja familiarizado com os materiais curriculares estudados por seus alunos em outras disciplinas que estudam ao mesmo tempo” (Shulman, 1986, p. 10).

As categorias estabelecidas por Shulman (1986) foram ampliadas em estudos posteriores (Shulman, 1987) e subsidiam a base do conhecimento docente em qualquer área de estudo. Considerando o referencial de Shulman (1986, 1987), existem pesquisas que se debruçaram especificamente sobre os conhecimentos do professor para o ensino de Matemática (Hill et al., 2005; Ball et al., 2008), instaurando o Conhecimento Matemático para o Ensino (Mathematical Knowledge for Teaching – MKT). Segundo Ball et al. (2008), é fundamental que os professores conheçam a Matemática diretamente relacionada ao ofício de ensinar.

Nesse sentido, os professores precisam conhecer os conteúdos que ensinam de modo a ajudar os alunos na aprendizagem. O conhecimento do conteúdo (Knowledge of the Content – CK), segundo Ball et al. (2008), envolve conhecer conceitos matemáticos e suas definições, sequenciamento de conceitos matemáticos, provas, demonstrações e abordagens para o desenvolvimento e a geração de conhecimento matemático. Todavia, os autores asseguram que conhecer o conteúdo não é suficiente para ensinar tal conteúdo.

Dessa forma, para o conhecimento pedagógico do conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK), Ball et al. (2008) consideram aspectos relacionados à aprendizagem da Matemática, como as concepções dos alunos e o que pode ser desafiador ou interessante para eles. Além disso, consideram os conhecimentos dos professores para planejar uma aula, em conjunto com os conhecimentos prévios dos alunos, os erros e as dificuldades, as diferentes representações de objetos e as características das tarefas de ensino.

Assim, o Conhecimento Matemático para o Ensino baseia-se na prática profissional de professores de Matemática e pode ser considerado uma ressignificação para o conhecimento que os professores dessa disciplina precisam desenvolver para o seu trabalho como docente. Por meio de investigações relativas às práticas de salas de aula de professores que ensinam Matemática, Ball et al. (2008) subdividiram o CK e o PCK em seis domínios de conhecimento matemático para o ensino: conhecimento comum do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento matemático horizontal, conhecimento do conteúdo e dos alunos, conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento do conteúdo e do currículo.

Segundo Ball et al. (2008), o conhecimento comum do conteúdo corresponde ao conhecimento e às habilidades matemáticas utilizados; o conhecimento especializado do conteúdo diz respeito às habilidades e aos conhecimentos matemáticos específicos do trabalho



do professor, característicos de sua prática pedagógica; o conhecimento matemático horizontal está associado às inter-relações entre termos ou tópicos, ao longo de toda extensão curricular; o conhecimento do conteúdo e dos alunos combina saberes sobre os alunos e a Matemática; o conhecimento do conteúdo e do ensino articula conhecimentos em relação ao conteúdo e ao ensino desse conteúdo; o conhecimento do conteúdo e do currículo abarca os objetivos educacionais, os padrões, as avaliações ou os níveis de ensino em que certos temas geralmente são ensinados.

Esses seis domínios foram organizados em um quadro ilustrativo, conforme representa a Figura 1.

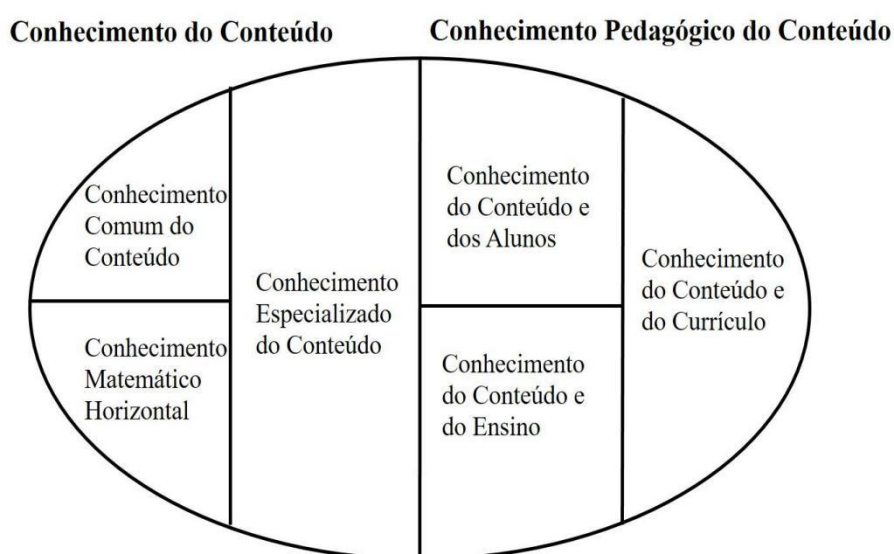


Figura 1.

#### *Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball et al., 2008, p. 403)*

Defronte desses domínios, evidenciamos que existe uma multiplicidade de conhecimentos requerida para que os professores de Matemática implementem em suas práticas de ensino, visto que o interesse repousa “em saber como os professores raciocinam e implementam ideias matemáticas no seu trabalho” (Ball et al., 2008, p. 403). Para isso, se faz necessário lançar mão de estratégias em que seja possível evidenciar tais domínios.

Uma abordagem articulada aos Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino que vem sendo desenvolvida é a Lesson Study (Estudo de Aula), que tem estreita relação com a prática de professores em formação continuada, em que aulas são planejadas de forma colaborativa e as discussões de reflexão são empreendidas para o seu aprimoramento. Em uma revisão sistemática de literatura, Cardoso et al. (2024) evidenciaram que o conhecimento do conteúdo e dos estudantes, o conhecimento do conteúdo e do ensino, o conhecimento do conteúdo e do currículo, bem como o conhecimento especializado do conteúdo são os mais

evidenciados nas pesquisas publicadas em teses e dissertações brasileiras e em artigos nacionais e internacionais. Os autores sinalizam que são “ainda escassas as pesquisas que realizam as análises entre as atividades realizadas pelos professores, a forma como essas atividades mobilizam os domínios do conhecimento matemático para o ensino e a evolução desses conhecimentos” (Cardoso et al., 2024, p. 10).

No processo de construção de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), Elias et al. (2022), subsidiados na abordagem do Estudo de Aula e nos Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino, evidenciaram que, em uma formação continuada de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, foram oportunizados momentos para o desenvolvimento/refinamento do conhecimento matemático para o ensino de uma das professoras participantes – a Maria. Os autores estruturaram “uma maneira de produzir um artefato para formação de professores, com potencial para trazer aspectos da prática para dentro de processos formativos” (Elias et al., 2022, p. 191).

A preocupação com a prática no processo formativo está presente em pesquisas relacionadas à formação inicial e continuada de professores quando tendências da Educação Matemática se fazem presentes. No contexto de um planejamento de aulas por futuros professores de Matemática na perspectiva da Resolução de Problemas, na disciplina de Estágio Curricular Obrigatório, de um curso de Licenciatura em Matemática, Bonato (2020) investigou a mobilização do conhecimento matemático para o ensino. Segundo Bonato (2020, p. 89-90):

O planejamento de aulas para ensinar através da Resolução de Problemas assumiu importância no desenvolvimento dos participantes no que se refere, principalmente, a transição do CCK para o SCK, uma vez que, por meio da metodologia Resolução de Problemas, os estagiários buscaram justificativas para o procedimento de resolução da Regra de Três Composta.

Com o objetivo de identificar domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino a partir da prática docente de professores em uma disciplina de mestrado profissional em Ensino de Matemática, Shiinoki et al. (2024) planejaram e implementaram uma tarefa em duas turmas do 5º ano do Ensino Fundamental via Ensino Exploratório. Para as autoras, “o trabalho colaborativo realizado durante as aulas na disciplina, foi fundamental para a reflexão e a manifestação desses subdomínios em cada etapa estabelecida, assim como também para a professora, ao refletir sobre a sua prática docente” (Shiinoki et al., 2024, p. 17).

Para inferir sobre os conhecimentos necessários a um professor para ensinar Matemática, Bisognin e Bisognin (2021), desenvolveram uma atividade de modelagem com professores em formação continuada, matriculados em um curso de Mestrado em Ensino de

Matemática. As autoras concluíram que há indícios de que a modelagem matemática favoreceu a construção tanto de conhecimentos comum e especializado do conteúdo, quanto de conhecimentos do ensino e dos alunos, que são necessários para ensinar Matemática.

Assim como Bisognin e Bisognin (2021), bem como da necessidade de suprir a lacuna apontada por Cardoso et al. (2024) com relação às atividades desenvolvidas pelos professores e a mobilização dos domínios do conhecimento matemático para o ensino, nosso foco de investigação é a formação de professores em modelagem matemática, ou seja, a modelagem matemática é um local em que domínios do conhecimento matemático para o ensino podem ser ressaltados.

### **Formação de professores em modelagem matemática**

Em linhas gerais, “a modelagem matemática pode ser descrita como uma atividade que envolve a transição entre a realidade e a matemática” (Borromeo Ferri, 2018, p. 13). Com isso, conhecimentos matemáticos se tornam relevantes para que, a partir de uma situação inicial (problema da realidade), chegue-se à uma situação final (solução para o problema sob um viés matemático). Para realizar essa transição, a literatura tem se apoiado na construção e na validação de modelos matemáticos (Bassanezi, 2002; Borromeo Ferri, 2018; Almeida et al., 2012; Niss & Blum, 2020).

Para Niss e Blum (2020, p. 6), um modelo matemático é “uma representação de aspectos de um domínio extra matemático por meio de algumas entidades matemáticas e relações entre elas”, configuradas por meio de esquemas ou estruturas matemáticas que revelam aspectos da situação. Na dedução de um modelo matemático, procedimentos e técnicas matemáticas são requeridos, permitindo evidenciar conhecimentos matemáticos dos modeladores. Considerando esse propósito, entendemos a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica para introduzir ou aplicar conteúdos matemáticos em que se objetiva ensinar Matemática (Almeida et al., 2012).

O ensino de Matemática, via modelagem, pode ter objetivos diversos, seja para o professor, seja para os alunos. De modo geral, em uma atividade de modelagem, o aluno tem como objetivo apresentar uma solução para o problema; o professor, por outro lado, pode também ter o objetivo de vislumbrar o ensino de conteúdos matemáticos.

Considerar a modelagem matemática no contexto educacional pode apresentar algumas imprevisibilidades para com o conteúdo matemático, visto que “cada problema é diferente e os conteúdos matemáticos são abordados de acordo com as características de cada situação investigada, bem como estão em consonância com os conhecimentos dos alunos que atuam

como modeladores” (Silva et al., 2021, p. 42-43). Desse modo, pode causar algumas inseguranças, causando tensões e desafios para alguns professores (Ceolim, 2015) e, em alguns casos, impossibilitando a implementação de atividades de modelagem em sala de aula.

O que preocupa, muitas vezes, os professores na implementação de práticas com modelagem matemática é que os conteúdos a serem abordados não são necessariamente definidos de antemão, mas conforme as discussões que surgem no decorrer da atividade. Há, porém, pesquisas que sinalizam a possibilidade de se antecipar e de se preparar para lidar com os imprevistos de uma atividade de modelagem, por meio do planejamento (Braz, 2017; Pinto, 2020; Pinto & Araújo, 2021; Tortola et al., 2023). Mas a questão que fica é: o que considerar nesse planejamento, sem uma formação apropriada em relação à modelagem matemática?

O planejamento, de acordo com Takinaga e Manrique (2023, p. 193), é “o momento em que se entrelaçam considerações direcionadas principalmente ao público-alvo e ao encontro com o saber matemático”, quando há a definição dos objetivos de aprendizagem, materiais e meios pelos quais é possível atingi-los. Dessa forma, no âmbito de atividades de modelagem, cabe-nos refletir a respeito do que é necessário para atingir os objetivos definidos para com o seu desenvolvimento.

Doerr e English (2006) afirmam que a implementação de atividades como as de modelagem em salas de aula exige que os professores aprendam sobre o conteúdo matemático, sobre como os alunos desenvolvem e representam suas ideias e, adicionalmente, sobre novos métodos de interação com os alunos, com foco em escutar, observar e fazer perguntas. Assim, nossos esforços têm sido direcionados para estruturar um *design* de formação de professores em modelagem matemática segundo três eixos que, em certa medida, subsidiam a preparação do professor para suprir tais exigências: aprender sobre modelagem, aprender por meio da modelagem e ensinar usando modelagem (Almeida & Silva, 2015).

Aprender sobre modelagem envolve compreender as contribuições teóricas para essa abordagem da Educação Matemática. Aprender por meio da modelagem refere-se ao desenvolvimento de atividades de modelagem como modeladores. Já ensinar usando modelagem é a implementação de uma ou mais experiências com atividades de modelagem em sala de aula. Esses três eixos, de certa forma, orientam nossas perspectivas, alinhando-se com as afirmações de Borromeo Ferri (2018, p. 1) de que “aprender e ensinar andam de mãos dadas, e, por isso, muitas vezes foram e são investigados em conjunto, para se obter um quadro completo dos processos interligados”.

Tortola et al. (2023, p. 190), seguindo as orientações de Almeida e Silva (2015) para a formação de professores em modelagem, ao analisar “os relatórios dos professores que

aceitaram experienciar uma prática com modelagem matemática na Educação Básica”, evidenciaram “como esses professores (res)significam o modo como ensinam e, em especial, como ensinam Matemática”. Os resultados fizeram emergir duas categorias para a (res)significação das práticas de ensino dos professores participantes de uma disciplina de Modelagem Matemática em um mestrado em Ensino de Matemática: “prática docente diferente das habituais, que implicou o papel do professor de orientar e guiar os alunos na atividade; e prática que prima pelo envolvimento dos alunos, em termos das possibilidades oferecidas pela abordagem matemática de situações extramatemáticas” (Tortola et al., 2023, p. 168).

No âmbito de um projeto de pesquisa sobre itinerários formativos e Modelagem Matemática no Novo Ensino Médio, Malheiros et al. (2024) se debruçaram em investigar o processo de elaboração de uma atividade de modelagem em um espaço colaborativo de formação de professores em modelagem. Nesse contexto, evidenciaram que “elaborar uma atividade colaborativamente, elementos como diálogo, escuta e colaboração foram essenciais, em um processo em que somos formados e estamos formando” (Malheiros et al., 2024, p. 15). Ademais, os autores indicaram que a modelagem matemática pode se configurar como uma ação de “formação permanente, pois parte da vivência do professor em sala de aula, aliando teoria e prática, em direção à práxis” (Malheiros et al., 2024, p. 15).

A escuta e o diálogo podem revelar aspectos sobre a compreensão dos envolvidos em atividades de modelagem matemática. Ao desenvolver uma atividade de modelagem, os modeladores (alunos ou professores) percorrem “Rotas Individuais de Modelagem” (Borromeo Ferri, 2018). Segundo Borromeo Ferri (2018), os modeladores podem focar em uma fase específica da atividade de modelagem ao longo da rota e ignorar outras. No entanto, só temos acesso a “rotas de modelagem visíveis, uma vez que só se pode referir a enunciações verbais ou representações externas para a reconstrução do ponto de partida e do percurso de uma rota de modelagem” (Borromeo Ferri, 2007, p. 265).

Considerando as enunciações verbais (discussões) presentes nos encaminhamentos de uma atividade de modelagem por alunos, bem como as caracterizações de conhecimento (matemático, técnico e reflexivo) abarcados por Skovsmose (1990), Barbosa (2010) traçou objetivos para a modelagem matemática, organizando as discussões em três tipos: matemática, técnica e reflexiva, conforme Tabela 1. Para o autor, os três tipos de discussões dos alunos estão presentes na construção de um modelo matemático e podem ser componentes das rotas de modelagem.

Tabela 1.

*Objetivo para a modelagem e tipos de discussões privilegiadas (Barbosa, 2010, p. 370)*

Objetivo para modelagem matemática	Discussão privilegiada
Para desenvolver algum conceito matemático	Matemática
Promover aptidões e competências de modelagem de problemas reais	Técnica
Analisar a natureza dos modelos matemáticos e seus usos na sociedade	Reflexiva

Além dos três tipos de discussões, Barbosa (2010) identificou discussões paralelas que envolvem ideias ou procedimentos matemáticos, mas que podem não ter uma relevância clara para a abordagem da situação-problema e podem nem ser consideradas na resolução.

Quando professores, no contexto de formação, desenvolvem atividades de modelagem como modeladores, além das discussões delineadas por Barbosa (2010), há notadamente discussões de natureza pedagógica que se cruzam com as demais. A palavra pedagógica provém do grego *paidagogikós*, que se refere ao que é adequado ao professor em seu exercício profissional – o de ensinar. Com isso, entendemos que a adjetivação “pedagógica”, inserida nas discussões (enunciações verbais) de professores em formação, é própria da pedagogia, que consiste na arte de instruir e educar as pessoas em suas diferentes idades. Desse modo, corroboramos Silva et al. (2022, p. 131), que as discussões pedagógicas dizem respeito à “atenção às atribuições dos alunos”, ou seja, o que é adequado que o professor desenvolva em seu exercício profissional para que os alunos sejam instruídos diante de uma situação em estudo.

Destarte, consideramos as discussões pedagógicas como as enunciações verbais que se referem à ação de ensinar, às preocupações dos professores diante de uma atividade e que dizem respeito aos conhecimentos dos seus alunos. Em convergência com o conhecimento pedagógico do conteúdo, as discussões pedagógicas dos professores incluem considerar aspectos sobre seus alunos, sobre os contextos educacionais e sobre os propósitos educacionais. Nesse cenário, os professores, ao aprenderem sobre e por meio da modelagem, conectam aspectos que podem ser implementados no ensinar usando modelagem.

### **Contexto da pesquisa e metodologia de análise**

A produção de dados aconteceu em uma disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino de um programa de mestrado em Ensino de Matemática de uma universidade federal do sul do Brasil. Durante o primeiro semestre de 2022, em 14 encontros de três horas cada, participaram um total de nove professores da Educação Básica, atuantes nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

As atividades de modelagem na disciplina foram planejadas e desenvolvidas seguindo diretrizes relacionadas aos três eixos – aprender sobre, aprender por meio e ensinar usando modelagem matemática –, configurando um *design* de formação vislumbrado em um projeto de pesquisa aprovado no Edital Universal do CNPq de 2021. Desde o primeiro encontro da disciplina, a professora formadora (autora deste artigo) informou sobre a estrutura do *design* da disciplina e do projeto de pesquisa em desenvolvimento. Com isso, solicitou o consentimento dos professores para gravar em áudio e vídeo alguns momentos de discussões na disciplina e usar os registros escritos em publicações futuras, mantendo o anonimato, para apresentar resultados do *design* implementado. Os professores, então, assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido, autorizando a produção e uso dos dados.

Em três encontros, foram discutidos textos e analisadas atividades para familiarizar os professores com as contribuições teóricas relacionadas à modelagem matemática na Educação Matemática, estruturadas pelos ciclos de modelagem (Borromeo Ferri, 2018). O objetivo foi entender que existem diferentes configurações para caracterizar a modelagem na literatura, estruturando o eixo aprender sobre modelagem. Ao estar diante de diferentes configurações e atividades desenvolvidas e relatadas na literatura, os professores imprimiram em suas discussões o contexto educacional em que estavam inseridos. Com isso, além de se atentarem às abordagens teórica e matemática presentes nos textos, explicitavam o encaminhamento em sala de aula.

No quarto encontro da disciplina, os professores, reunidos em três trios, desenvolveram atividades de modelagem a partir de temáticas escolhidas pela professora formadora e disponibilizaram a resolução em uma Wiki do Moodle, ambiente virtual de compartilhamento de textos, imagens e vídeos entre os participantes, de modo que todos tiveram acesso às resoluções uns dos outros. Os trios tiveram uma semana para analisar as resoluções dos colegas e fazer questionamentos no quinto encontro da disciplina. Esses dois encontros, em certa medida, configuraram o eixo aprender por meio da modelagem.

Considerando que os professores relatariam as experiências em sala de aula a partir das temáticas e das resoluções a que tiveram acesso, esperávamos que as discussões relacionadas às práticas e que revelavam o conhecimento matemático para o ensino também estivessem presentes e, neste contexto, as discussões no quinto encontro foram gravadas em áudio e vídeo e transcritas na íntegra. A gravação ocorreu por meio de uma filmadora instalada em um tripé e que ficou posicionada sob uma angulação em que era possível capturar a imagem e o áudio de todos os participantes da disciplina. Utilizamos o recurso colchetes para descrever os gestos produzidos pelos professores e que foram necessários para o entendimento do que estava em

discussão. Para manter o anonimato, nos referimos aos nove professores como Prof\_1, Prof\_2, ..., Prof\_9 e à professora formadora como Prof. Na Tabela 2 apresentamos a distribuição dos trios com as respectivas temáticas das atividades de modelagem desenvolvidas.

Tabela 2.

*Distribuição dos trios de professores (Dados da pesquisa, 2022)*

Temáticas das atividades	Professores responsáveis
Parquímetro em Londrina	Prof_2, Prof_5, Prof_7
Carregamento da bateria do telefone celular	Prof_3, Prof_8, Prof_9
Lixo em Arapongas	Prof_1, Prof_4, Prof_6

Considerando os propósitos de nossa investigação com relação à questão de pesquisa – Quais as implicações do conhecimento matemático para o ensino usando modelagem matemática emergem das discussões de professores em formação continuada? – elegemos analisar a atividade com a temática “Carregamento da bateria do telefone celular”, visto que, dentre as atividades investigadas, foi a que emergiu diferentes tipos de discussões (Barbosa, 2010) que permitiram evidenciar conhecimento matemático para o ensino.

Para a abordagem da temática, além de um texto informativo, foram apresentados dados prontos sobre o percentual de carregamento da bateria de um telefone celular (Figura 2). Com as informações e os dados fornecidos, os professores formularam o problema: Depois de quanto tempo a bateria do celular estará totalmente carregada (100%)?

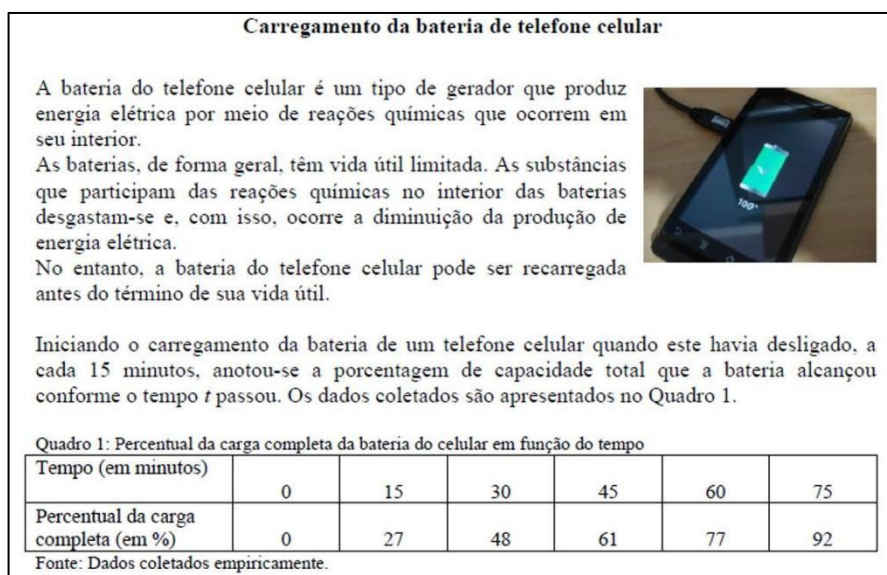


Figura 2.

*Atividade carregamento da bateria do telefone celular (Dados da pesquisa, 2022)*

Os registros da resolução da atividade e a apresentação de uma solução para o problema foram disponibilizados pelo trio de professores Prof\_3, Prof\_8 e Prof\_9. Os outros professores



ficaram responsáveis por analisar essa resolução e apresentar apontamentos, iniciando as discussões com questionamentos e implicações para a sala de aula. Essas discussões foram alternadas com réplicas ou explicações dos professores responsáveis, bem como por mediações da professora formadora.

A análise dos dados – transcrições das falas e registros escritos da resolução – seguiu orientações da Análise de Conteúdo (Bardin, 2011), envolvendo três procedimentos: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados obtidos e interpretação.

O objetivo principal do primeiro procedimento, a pré-análise, é proporcionar ao pesquisador uma exposição inicial às informações que irá analisar. Segundo a autora, nessa etapa são identificadas hipóteses emergentes, ajustadas a teorias e vislumbradas técnicas de análise (Bardin, 2011). Essa fase da pesquisa envolveu a leitura de todas as transcrições das gravações para a atividade analisada, articuladas aos registros escritos dos professores.

O segundo procedimento, exploração do material, envolveu conectar os dados com aspectos apresentados na literatura referentes às discussões que surgem durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática (Barbosa, 2010) – discussões matemáticas, técnicas e reflexivas –, além das pedagógicas. Nessa etapa, foram identificados segmentos das transcrições que destacaram os tipos de discussões em curso, de modo a classificá-las.

Na etapa final da Análise de Conteúdo – tratamento dos resultados obtidos e interpretação – foram feitas inferências sobre as informações analisadas para fornecer *insights* sobre a questão de pesquisa, especificamente relativa ao conhecimento matemático para o ensino usando modelagem em sala de aula, em que implicações foram evidenciadas a partir dos apontamentos coletivos, segundo um movimento analítico que considerou o quadro teórico no qual nos subsidiamos – conhecimento matemático para o ensino e discussões na formação de professores em modelagem matemática.

### **Descrição da resolução da atividade e análise das discussões dos professores**

O trio de professores em formação – Prof\_3, Prof\_8, Prof\_9 – responsável por investigar a situação sobre o carregamento da bateria do telefone celular, considerou, por hipótese, que os dados se comportavam via uma função polinomial de segundo grau. Para a dedução do modelo matemático, realizaram um ajuste de curvas com o auxílio do software Microsoft Excel, obtendo a expressão algébrica  $F(t) = -0,0063t^2 + 1,6629t + 1,5714$ , em que  $F(t)$  representava o percentual de carregamento da bateria do telefone celular em função do tempo  $t$ , em minutos. O grupo validou o modelo matemático deduzido, comparando os valores de

percentual calculado com os apresentados no quadro presente na Figura 2. A partir da validação, apresentaram uma resposta para o problema – Depois de quanto tempo a bateria do celular estará totalmente carregada (100%)? –, considerando que, após 90 minutos conectado na fonte de energia, a bateria do telefone celular estaria completamente carregada. A Figura 3 apresenta a resolução disponibilizada pelo grupo na Wiki do Moodle.

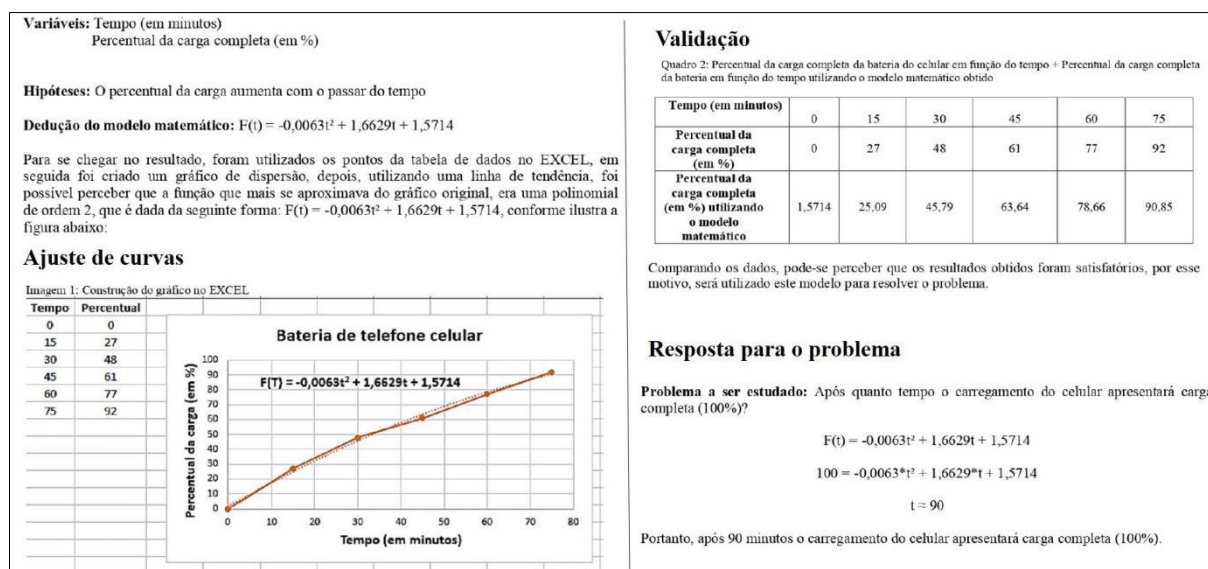


Figura 3.

### *Resolução da situação sobre o Carregamento da bateria do telefone celular (Relatório do trio de professores, 2022)*

Diante da resolução disponibilizada na Wiki, no encontro destinado às discussões das soluções, foram feitos alguns apontamentos pelos professores em formação e pela professora formadora. Na exploração do material, que corresponde às transcrições das abordagens, segunda etapa da Análise de Conteúdo, evidenciamos conexões relativas aos tipos de discussões apresentadas em Barbosa (2010), bem como as de cunho pedagógico em três episódios: apontamentos de outros professores; apontamentos do trio responsável pela resolução; apontamentos da professora formadora.

A Tabela 3 apresenta segmentos das transcrições que dizem respeito ao episódio **apontamentos de outros professores** destacando os tipos de discussões em curso a partir do contato que tiveram com o registro disponibilizado para a análise.

Tabela 3.

### *Discussões no episódio apontamentos de outros professores (Dados da pesquisa, 2022)*

Excertos dos apontamentos de outros professores	Tipos de discussões
-------------------------------------------------	---------------------

Prof_4: A dedução do modelo que elas [referindo-se às professoras do trio] fizeram pelo Excel, a gente ficou debatendo aqui depois... Se fosse feito isso a mão, talvez os alunos não conseguissem chegar à função de segundo grau. Olhando o gráfico ali no Excel, parece que é até uma função logarítmica assim [gesticulando com a mão].	Técnica Pedagógica Matemática
Prof_4: A primeira dedução que a gente pensou, que os alunos pensariam isso se fosse feito à mão, ali. [...] Que é linear.	Pedagógica
Prof_4: Na sala de aula com meus alunos. Primeiro eu iria ver se eles iam chegar, né, na função linear e ia demonstrar no Excel que poderia ter outra função ali também [se referindo à função polinomial de segundo grau].	Pedagógica
Prof_6: E talvez propor uma pesquisa para eles, né? A partir do celular deles, da carga do celular deles como funciona, como que eles podem chegar a uma solução.	Técnica
Prof: E quanto tempo levou para carregar?	Reflexiva
Prof_1: 90 horas [revendo a resolução]. Não... é noventa minutos! Desculpa, é que eu estou trocando aqui!	
Prof: Se o aluno responder “Ah, mas quanto tempo? 90 horas? Será que é isso mesmo?” Importante a gente discutir sobre colocar qual é a unidade de tempo que está considerando.	Pedagógica
Prof_6: [...] aí a gente até se perguntou se tem alguma possibilidade desse percentual estabilizar?	Reflexiva
Prof_6: E uma outra dúvida, na verdade, que a gente teve foi que ele [se referindo ao Prof_4] falou, mas não sei se ficou claro é “como a gente poderia chegar nessa dedução do modelo e desse resultado, sem se utilizar do Excel [...]”? Então como que a gente poderia chegar nesse resultado com eles sem o uso de uma tecnologia?”.	Matemática

No episódio citado, as discussões se enveredaram para as abordagens realizadas pelo trio de professores responsável, de modo que incursões para a sala de aula, via discussões pedagógicas, foram empreendidas considerando a utilização do Microsoft Excel. De fato, é possível evidenciar que os professores que analisaram a resolução se respaldaram exclusivamente no que lhes foi apresentado de modo que evidências de **conhecimento comum do conteúdo** com relação ao comportamento dos dados a partir da análise subsidiada pelo software se fez presente. Isso se revelou, pois os professores analisaram as resoluções do trio, considerando a abordagem matemática realizada, tanto que empreendimentos sobre o ajuste para uma curva linear foi incutida por meio da visualização dos pontos no plano cartesiano, de modo que discussões matemáticas foram recorrentes.

As discussões pedagógicas se direcionaram ao **conhecimento do conteúdo e dos alunos**, pois os professores se atentaram para o que os alunos com os quais lecionavam – anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio – se direcionariam ao se depararem com o

comportamento dos pontos representados no plano cartesiano, bem como com a Matemática que fariam associação. Para o Prof\_4, nesse contexto, o desenvolvimento da atividade de modelagem, em uma visão didático-pedagógica, tomaria como ponto de partida conteúdos já conhecidos pelos alunos de modo que uma abordagem por meio de uma função polinomial do primeiro grau seria possível – A primeira dedução que a gente pensou, que os alunos pensariam, isso se fosse feito à mão, ali. [...] Que é linear –, ao passo que a função polinomial do segundo grau, de antemão, não seria contemplada, necessitando da intervenção do professor, elucidando o **conhecimento do conteúdo e do ensino**, em que o professor reconheceu que teria de subsidiar o trabalho do aluno.

De modo geral, no contexto de sala de aula, é natural que os “modelos iniciais dos alunos (ou sistemas conceituais) muitas vezes não sejam muito sofisticados ou úteis” (Ärlebäck & Doerr, 2018, p. 189), necessitando da intervenção do professor. Esse procedimento é iminente no desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Porém, podemos inferir que o Prof\_4 entendeu que somente com a tecnologia os alunos chegariam à expressão algébrica da função do segundo grau – [...] ia demonstrar no Excel que poderia ter outra função ali também –, se restringindo a um nível de escolaridade.

Por meio da discussão de cunho pedagógico empreendida por Prof\_4 ficou evidente uma tentativa de trazer para a cena da prática do professor não só o conhecimento específico do conteúdo, mas também uma relação atrelada do mesmo com uma dimensão didática (Shulman, 1986), em que previu uma possibilidade de implementar a atividade de modelagem atrelada à tecnologia.

A Prof\_6 sugeriu solicitar a coleta de dados empíricos aos alunos, via discussão técnica, com a intenção de promover competências de modelagem de problemas reais (Barbosa, 2010) – A partir do celular deles, da carga do celular deles como funciona. Esse encaminhamento pode ser uma ação que permitiria aos modeladores, sejam professores ou alunos, se envolverem na atividade de modelagem e, posteriormente, se inserirem nas discussões matemáticas que podem emergir. Com isso, os modeladores podem “descrever a situação, permitir a análise de aspectos relevantes da situação, responder às questões formuladas [...] e até, em alguns casos, possibilitar a realização de previsões” (Almeida et al., 2012, p. 16). Nesse contexto, é evidente o **conhecimento do conteúdo e do ensino**, visto que a Prof\_6 vislumbrava uma possibilidade para articular conhecimentos em relação ao conteúdo – função polinomial do primeiro ou do segundo grau – e o ensino desse conteúdo, por meio da modelagem matemática.

Com isso, a Prof\_6 revelou que entendeu a necessidade de estabelecer relações entre o conteúdo matemático com uma dimensão didática, podendo assim, realizar uma transformação

do conteúdo em formas didaticamente poderosas (Shulman, 1986), de modo que considerou que o “saber é construído pelos alunos no decurso da própria atividade, assumindo assim uma participação ativa, e o professor tem essencialmente um papel de organizador e dinamizador da aprendizagem” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 111).

Considerando um equívoco da Prof\_1 com relação à unidade de tempo, a professora formadora destacou a importância de os professores, em uma discussão pedagógica, estarem atentos ao que os alunos consideram como unidade para cada variável, de modo que a interpretação dos resultados da atividade de modelagem seja coerente. A professora formadora esteve inclinada em destacar a importância de explicar essa abordagem, visto que intentava “explicar melhor como o conhecimento precisa ser usado no ensino de forma eficaz” (Ball et al., 2008, p. 404).

O trio responsável pela resolução parece ter encontrado dificuldades em proceder a dedução do modelo matemático representado por uma função polinomial do segundo grau sem uso de tecnologia, conforme excertos das transcrições presentes no episódio **apontamentos do trio responsável pela resolução** (Tabela 4).

Tabela 4.

*Discussões no episódio apontamentos do trio responsável pela resolução (Dados da pesquisa, 2022)*

Excertos dos apontamentos do trio responsável pela resolução	Tipos de discussões
Prof_9: Nós fizemos a mão. Quando nós fizemos à mão a gente falou “não, ela é linear”, né, daí falou, vamos para o Excel para a gente verificar. Quando nós jogamos no Excel “não, não é linear”.	Matemática Técnica
Prof_9: Nós começamos a fazer por sistema [se referindo a sistema de equações lineares], né? Prof_8: Sim!	Matemática
Prof_9: A gente tentou, e aí viu que o “b” [se referindo ao coeficiente da função] sempre tendia... Dava zero. Aí chegou um momento que a gente se enroscou, foi o momento que a gente decidiu ir pro Excel.	Matemática Técnica
Prof_3: Principalmente a fórmula, o problema mesmo é a fórmula [se referindo à expressão algébrica]. O gráfico é fácil para eles acharem até uma curva, né? Mas para eles chegarem àquela fórmula ali... [apontando para a projeção em slide do Excel]	Matemática
Prof_8: Eu acho que eles até conseguiriam pensar na linear, sabe? Mas não pensar na quadrática, até porque olhando o gráfico ela não parece ser uma função quadrática!	Matemática

Os excertos presentes na Tabela 4 pareceram revelar, nas discussões matemáticas empreendidas nas justificativas do trio de professores, que apesar de reconhecerem a

possibilidade de obter uma função polinomial de segundo grau por meio da resolução de um sistema de equações lineares, não avançaram nesse encaminhamento. O que podemos evidenciar é que, de antemão, o **conhecimento especializado do conteúdo** relativo aos procedimentos matemáticos para resolver um sistema de equações lineares não foi revelado pelos professores que lecionavam no Ensino Médio. Porém, o trio se manteve em uma discussão matemática atrelada ao **conhecimento do conteúdo e dos alunos**.

Por outro lado, os demais professores, ao analisar a resolução, não mencionaram procedimentos para resolver manualmente a situação, de modo a revelar o **conhecimento especializado do conteúdo**, tanto que dois professores (Prof\_4 e Prof\_6) questionaram sobre a possibilidade de se obter o modelo representado pela função quadrática sem a intervenção de uma ferramenta tecnológica.

No entanto, a professora formadora, considerando a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica (Almeida et al., 2012), tanto no que compete a ensinar Matemática por meio da modelagem como na formação de professores em modelagem, empreendeu principalmente questionamentos que fizeram emergir discussões matemáticas, de modo que o conhecimento matemático para o ensino fosse evidenciado. De modo comparativo aos outros episódios, o episódio **apontamentos da professora formadora** (Tabela 5) foi o que mais fez emergir discussões matemáticas.

Tabela 5.

*Discussões no episódio apontamentos da professora formadora (Dados da pesquisa, 2022)*

Excertos dos apontamentos da professora formadora	Tipos de discussões
Prof: [...] não dá para chegar nesse modelo matemático manualmente? Prof_9: Dá!	Matemática
Prof_5: Então, mas eu acho que com a ajuda do professor para eles se lembrarem, né... Eu acho que o professor tem que tá ali dando umas ajudas [...]. Os dados que estão aqui não chegam a fazer uma curva, então acho que eles não vão enxergar isso.	Pedagógica
Prof: [...] Se é quadrático, quantos pontos a gente precisa para determinar os coeficientes? Prof_4: Três!	Matemática
Prof: Por quê? Qual é a expressão geral do modelo quadrático? Prof_1: $y = ax^2 + bx + c$ .	
Prof: Tem três pontos, monta o sistema, resolve o sistema de três equações e três incógnitas. Dá para resolver manualmente. Aí a gente pode fazer uso de matrizes, de escalonamento. Prof_9: Ensino Médio isso aí, né?	
Prof: Aí a Prof_7 falou: “ah, eu acho que eles iam falar que é linear”. Então, esse é um modelo, um tipo de modelo que poderia ser deduzido. Aumenta linearmente. Vocês fizeram aqui, aumenta por meio de um	Técnica

modelo quadrático, aí até o Prof\_4 estipulou aqui, poderia ser um modelo exponencial.

Prof: Quando chegar em noventa minutos se estabiliza e fica constante. Matemática

Prof\_5: Então não é totalmente uma função de segundo grau.

[...]

Prof: Por quê?

Prof\_5: Porque a função de segundo grau, ela não é, por exemplo, nesse sentido? [gesticula traçando uma parábola no ar]. Ela não é assim e depois vai ser... [gesticula a parte crescente da parábola e depois uma função constante]. Uma parte ela é função do segundo grau e depois uma parte ela é uma linear constante...

Prof: Que função é essa?

Prof\_5: Ah, tá, a mistura dessas duas? Eu não me lembro.

Prof\_1: É, por partes! A gente chama de função por partes.

Prof: Qual a característica dessa função? [referindo-se ao modelo matemático deduzido pelo trio] Matemática

Prof\_5: Ela é... Com concavidade voltada para baixo...

Prof: Então esse “ $a$ ” é menor que zero ( $a < 0$ ). [...], com concavidade voltada para baixo. Esse modelo dá para considerar em todo o domínio real para a situação?

Prof\_1: Não, só pode ser positivo, né?

Prof: [...] a concavidade voltada pra baixo, então ela quer dizer o quê? O que quer dizer isso aqui? Que vai chegar esse momento e o que vai acontecer nesse momento [apontando para o vértice da parábola]?

Prof\_9: Vai decair!

Prof: É isso que acontece quando a gente deixa o telefone carregando? Reflexiva

Prof\_5: Carregando, não, mas se tirar da tomada começa a cair!

Prof: Aí é outra situação que a gente tem que analisar considerando decréscimo! Então esse modelo é válido até...?

Prof\_9: Até o 100%.

Prof: Foi exatamente noventa minutos que chegou a 100%? Matemática

Prof\_8: Foi 89 vírgula alguma coisa. Ah, não foi no 90!

Prof: Uma coisa que a gente tem que ter muito cuidado quando está usando uma função definida por duas sentenças, ou por partes, esse Matemática

conteúdo é do Ensino Médio, [...] Função definida por duas sentenças é algo que os alunos têm muita dificuldade para construir o gráfico, e eu Pedagógica

perguntei para vocês se deu noventa certinho porque a gente faz arredondamento [...]. Deixa na forma fracionária. [...] Agora vem o domínio! Função definida por duas sentenças é uma função que muda a Matemática  
sentença de acordo com o domínio, então a gente vai considerar o tempo, maior ou igual a zero. E menor do que...

Prof\_3: 89,61!

Prof: Então tá! 89,61. E a função constante igual a 100 se “ $t$ ” for maior... Matemática

A gente coloca se é igual aqui ou igual a aqui [escrevendo o modelo matemático na lousa]. Pode colocar nos dois?

Prof\_9: Se colocar nos dois não é função! Um domínio não pode ir em duas imagens para ser função.

Prof: Então a gente tem que determinar quando que isso aqui dá 100! E aí esse é o valor quando dá 100, e aí a partir desse valor é sempre 100, isso na função definida por duas sentenças então... Iguala isso aqui a 100 e resolve a equação de segundo grau e deixa em forma de fração! É

---

Por meio da tecnologia é possível deduzir um modelo matemático, porém, considerando o objetivo do professor, determinar os coeficientes de um modelo quadrático, pode subsidiar discussões matemáticas de modo a suscitar a introdução de novos conteúdos, mediante a atividade de modelagem. Com essa ação, “a ênfase está em promover a independência que o conhecimento construído em uma atividade de modelagem passa a ter do modelo” (Almeida, 2022, p. 136-137). Abordar o uso de um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas passou a ser a discussão empreendida pelos professores, subsidiada nos apontamentos da professora formadora em que foram retomados, inclusive, os procedimentos de como fazer a resolução, via matrizes e escalonamentos.

A retomada dos procedimentos para se deduzir uma expressão algébrica para a função polinomial do segundo grau a partir de um conjunto de pontos possibilitou que a professora formadora promovesse um ambiente de formação em que emergiu o **conhecimento especializado do conteúdo**, de modo que os professores perceberam e relembaram procedimentos para a obtenção dos coeficientes quando do uso de três pontos, bem como de características e especificidades do comportamento da função polinomial de segundo grau quando o coeficiente  $a$  é negativo. Defronte das discussões matemáticas empreendidas, ficou evidente que a Prof\_9 reconhecia que se tratava de uma abordagem, geralmente, trabalhada no Ensino Médio, norteadas evidências do **conhecimento do conteúdo e do currículo**.

A partir de discussões reflexivas iniciadas pela professora formadora – É isso que acontece quando a gente deixa o telefone carregando? –, as discussões matemáticas tomaram outro rumo, ramificando-se das discussões relativas à dedução de uma função polinomial do segundo grau via sistema de equações lineares para a abordagem de uma função definida por duas sentenças. Isso levou a uma ampliação na resolução do problema, considerando a necessidade da implementação da função constante no modelo matemático. Tal encaminhamento suscitou, inclusive, o desconhecimento de alguns professores para com esse objeto matemático – função definida por duas sentenças – fazendo a professora formadora recorrer, de forma simplificada, ao seu conceito (Função definida por duas sentenças é uma função que muda a sentença de acordo com o domínio), bem como a retomada do **conhecimento comum do conteúdo** relacionado à definição de função (Um domínio não pode ir em duas imagens para ser função – Prof\_9).

Ficou evidente que, por meio das discussões matemáticas requeridas pelos apontamentos da professora formadora, incutiu-se o entendimento de que “para ensinar, não



basta utilizar a Modelagem Matemática para construir um modelo e confrontá-lo com a situação real, é necessário construir outros conhecimentos, além do conhecimento comum do conteúdo” (Bisognin & Bisognin, 2021, p. 16). As discussões matemáticas fizeram emergir **conhecimento especializado do conteúdo** visto que os professores poderiam considerar a situação-problema, inclusive, para ensinar conteúdos matemáticos diferentes daqueles que haviam evidenciado na resolução do problema e mesmo nos apontamentos dos outros professores. Além disso, esteve presente o **conhecimento do conteúdo e dos alunos** elucidado via discussão pedagógica da Prof\_5 – [...] mas eu acho que com a ajuda do professor para eles se lembrarem, né?

Sob a orientação da professora formadora, por meio de discussões matemáticas, os professores chegaram à conclusão de que uma função definida por duas sentenças poderia representar o fenômeno, retomando o **conhecimento especializado do conteúdo** e, se atentando ao domínio que expressa cada sentença – **conhecimento comum do conteúdo** –, escreveram um “novo” modelo matemático:

$$F(t) = \begin{cases} -0,0063t^2 + 1,6629t + 1,5714, & \text{se } 0 < t \leq \frac{1882}{21} \\ 100, & \text{se } t > \frac{1882}{21} \end{cases}, \text{ em que } F(t) \text{ representava o}$$

percentual de carregamento da bateria do telefone celular em função do tempo ( $t$ ), em minutos.

Com o tratamento dos resultados obtidos, a interpretação que fazemos na análise, em certa medida, corroborou Malheiros et al. (2024) sobre a importância do diálogo e da escuta. Para nosso contexto de investigação, ao colocar os professores em diálogo e escuta, diferentes discussões emergiram a partir do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. De posse dos registros escritos de um trio de professores para a temática – carregamento da bateria do telefone celular –, os participantes de uma disciplina do mestrado empreenderam discussões matemáticas, técnicas, reflexivas e pedagógicas que revelaram conhecimentos matemáticos para o ensino.

De antemão, as discussões matemáticas empreendidas a partir do episódio apontamentos de outros professores se iniciaram revelando o conhecimento comum do conteúdo em que ficou evidente que a intenção e a preocupação iniciais se alocaram nos conhecimentos e nas habilidades que foram considerados pelo trio de professores, delimitando uma validação para o que haviam feito. Porém, diante de tais conhecimentos, os professores apontaram necessidades para a abordagem do problema em sala de aula, de modo que discussões técnicas, com relação ao uso do Microsoft Excel, e pedagógicas fizeram emergir o conhecimento do conteúdo e do ensino, bem como o conhecimento do conteúdo e dos alunos, imprimindo uma parada para

analisar o modelo matemático deduzido pelas integrantes do trio, bem como o conteúdo matemático que o subsidiou.

No episódio apontamentos do trio responsável pela resolução, as discussões matemáticas se mantiveram no conhecimento do conteúdo e dos alunos, de modo que as integrantes justificaram o uso do software considerando o que os estudantes poderiam utilizar para chegar a uma solução para o problema, visto que poderiam não seguir ações em que um modelo matemático, considerando uma função polinomial de segundo grau, poderia ser deduzido manualmente. Nesse caso, as discussões matemáticas ficaram restritas ao encaminhamento realizado, não indicando conhecimento especializado do conteúdo a partir do apontamento do Prof\_6 – como a gente poderia chegar nessa dedução do modelo e desse resultado, sem se utilizar do Excel [...]?).

Com a limitação do conhecimento matemático para o ensino revelada nas discussões matemáticas momentâneas, a professora formadora fez intervenções das quais emergiu o episódio apontamentos da professora formadora. Nesse episódio, diante dos requerimentos da professora formadora, emergiram discussões matemáticas, técnicas, reflexivas e pedagógicas. As discussões matemáticas, em particular, proporcionaram uma abordagem relativa ao conhecimento especializado do conteúdo para a resolução de um sistema de equações lineares, bem como o delineamento de uma função definida por partes e considerações para a delimitação de seu domínio. A intenção da professora formadora, nesse episódio, se alocou em ampliar a abordagem da situação para outros níveis de escolaridade cujo conhecimento curricular do conteúdo e do currículo também foi elucidado.

Todavia, mesmo que a professora formadora intentou abarcar discussões matemáticas no âmbito do conhecimento especializado do conteúdo, o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e dos alunos permearam as discussões.

Em suma, as discussões que emergiram no âmbito do eixo aprender por meio da modelagem, sob uma lente dos Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino promoveram implicações para o ensino usando modelagem matemática no que compete especificamente à antecipação que pode ser inserida, por exemplo, no planejamento de uma prática considerando a situação-problema do carregamento da bateria do telefone celular em que, dependendo dos objetivos para as aulas, podem emergir diferentes abordagens matemáticas – funções polinomiais, resolução de sistemas de equações lineares, matrizes, escalonamento, ajustes de curvas utilizando um software computacional e delimitação de domínio de uma função. O planejamento pode amenizar inseguranças, causando tensões e desafios para alguns professores (Ceolim, 2015) na implementação de práticas com

modelagem, visto que podem se entrelaçar considerações direcionadas ao público-alvo (Takinaga & Manrique, 2023).

### **Considerações finais**

A formação em modelagem matemática tem sido pensada, principalmente para abordar aspectos pragmáticos, com foco em como as atividades de modelagem podem ser implementadas em sala de aula (Tortola et al., 2023), bem como elementos teórico-epistemológicos que visam estruturar ciclos de modelagem para orientar a prática (Almeida, 2022, Borromeo Ferri, 2018). Ambas as abordagens visam garantir o desenvolvimento de competências e resultados de aprendizagem específicos.

No âmbito de um Projeto de Pesquisa financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), temos investigado e estruturado programas de formação organizados em torno de três eixos: aprender sobre modelagem, aprender por meio da modelagem e ensinar usando modelagem.

No primeiro semestre de 2022, nove professores participantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática engajaram-se em atividades de modelagem e suas discussões, de modo geral, fomentaram uma abordagem direcionada ao contexto educacional. Ao analisar essas discussões, observamos características semelhantes às destacadas por Barbosa (2010), que categorizou as discussões matemáticas, técnicas e reflexivas dos alunos na construção de modelos matemáticos a partir da noção de rotas de modelagem. É importante ressaltar que encontramos um caráter pedagógico presente nas discussões, em que os professores em formação, à medida que aprenderam por meio da modelagem, relacionaram aspectos que poderiam ser implementados para ensinar usando modelagem.

Tais implementações implicaram em evidências sobre o conhecimento matemático para o ensino, principalmente no que compete ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Apesar de ser inerente ao professor que ensina Matemática, o conhecimento do conteúdo, seja no âmbito de aspecto comum ou especializado, bem como do conhecimento horizontal, entendemos que é no conhecimento pedagógico do conteúdo que se revela como o professor lida com o conhecimento próprio do seu ofício, considerando peculiaridades dos sujeitos com os quais trabalha. No contexto da formação em modelagem matemática, sob a qual focamos nossa investigação, os professores se atentaram aos conteúdos matemáticos à medida que resolveram e analisaram a resolução de uma atividade de modelagem. Ao resolver uma atividade como modeladores, um trio de professores revelaram conhecimento do conteúdo e dos alunos ao se sentirem satisfeitos com o ajuste de curvas apresentado por um software ao considerar os dados

como pontos no plano cartesiano. Em certa medida, esse conhecimento foi suficiente para apresentarem uma solução para o problema que se dedicaram a investigar.

No entanto, sob análise de outros professores e apontamentos da professora formadora, fez emergir também, a partir de diferentes tipos de discussões precedidas de forma conjunta, conhecimento comum do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do currículo. De modo geral, esses conhecimentos se entrelaçaram à medida que questionamentos foram realizados, revelando que a atividade de modelagem desenvolvida se mostrou promissora para ser implementada em práticas de sala de aula, incluindo a possibilidade de realização de coleta de dados empíricos pelos alunos.

Nesse sentido, as implicações do conhecimento matemático para o ensino no eixo ensinar usando modelagem matemática foram sendo reveladas no compartilhamento de ideias, principalmente no que denominamos como discussões pedagógicas articuladas às discussões matemáticas, especificamente no fato de poder antecipar abordagens matemáticas que poderiam emergir na implementação da atividade em sala de aula, por meio de um planejamento. Há de se considerar também que aspectos sobre o fazer modelagem foram revelados a partir dos questionamentos intencionais, pedagogicamente falando, da professora formadora. Nesse contexto, vislumbrar ações que possam contribuir para a formação de uma didática para ensinar usando modelagem matemática torna-se essencial, especificamente quando se debruçam em elaborar um planejamento a partir do que foi vivenciado. Trata-se de lançar um olhar nas ações e nas discussões de professores nesse encaminhamento para evidenciar conhecimento matemático para o ensino, pesquisa que pode ser empreendida futuramente em um contexto da Lesson Study, por exemplo. Para tanto, questões como Quais as implicações do conhecimento matemático emergem das discussões de professores em formação continuada na elaboração de um plano de aula para o ensino usando modelagem matemática? e até mesmo: Que conhecimento matemático é revelado na implementação de práticas com modelagem matemática por professores em formação continuada? podem se configurar em continuidade da pesquisa.

### **Agradecimentos**

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro. Processo 409309/2021-4.

## Referências

- Almeida, L. M. W. (2022). Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *Vidya*, 42(2), 121-145. <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4236>
- Almeida, L. M. W., & Silva, K. A. P. (2015). Práticas de professores com Modelagem Matemática: algumas configurações. *Educação Matemática em Revista*, 46, p. 6-15. <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/498>
- Almeida, L. W., Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na educação básica*. Editora Contexto.
- Ärleback, J. B., & Doerr, H. M. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM-Mathematics Education*, 50(1–2), 187-200.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: what make it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barbosa, J. C. (2010). The students' discussions in the modeling environment. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford. (orgs.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 365-372). Springer.
- Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo*. Edições 70.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto.
- Becker, F. (2012). *Epistemologia do professor de Matemática*. Vozes.
- Bisognin, E., & Bisognin, V. (2021). Modelagem Matemática: uma análise do conhecimento matemático para o ensino. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 12(2), 1–19. <https://doi.org/10.26843/rencima.v12n2a06>.
- Bonato, G. V. (2020). *Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizado em um planejamento de aula na perspectiva da Resolução de Problemas*. [Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina]. <https://repositorio.uel.br/items/1347861b-1816-4870-b1fb-1ff503e5848b/full>.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling from a cognitive perspective: individual modelling routes of pupils. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (eds.), *Mathematical modelling: education, engineering and economics* (pp. 260–270). Horwood Publishing.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer International Publishing.
- Braz, B. C. (2017). *Aprendizagens sobre modelagem matemática em uma comunidade de prática de futuros professores de matemática* [Tese de doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá]. <http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/5728>.
- Cardoso, M. B., Barreto, M. C., & Pinheiro, J. L. (2024). Conhecimentos matemáticos para o ensino na perspectiva do Lesson Study: uma revisão sistemática de literatura. *Conexões, Ciência e Tecnologia*, 18, e022002, 1-12. <https://doi.org/10.21439/conexoes.v18i0.2853>.

- Ceolim, A. J. (2015). *Modelagem Matemática na Educação Básica: obstáculos e dificuldades apontados por professores* [Tese de doutorado em Educação, Universidade Federal de São Carlos]. <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/7523?show=full>.
- Curi, E., & Pires, C. M. C. (2008). Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas. *Educação Matemática Pesquisa*, 10(1), 151-189. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1655/1065>.
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2006). Middle grade teachers “learning through students” engagement with modeling tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 5-32. <https://doi.org/10.1007/s10857-006-9004-x>.
- Elias, H. R., Ribeiro Rodrigues, S., & Trevisan, A. L. (2022). Análise do Conhecimento Matemático para o Ensino em um Estudo de Aula: um caminho para produzir Tarefas de Aprendizagem Profissional. *Educação Matemática Pesquisa*, 24(1), 156–193. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p156-193>.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (2014). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas* (2a. ed.). E.P.U.
- Maaß, K., Sorge, S., Romero-Ariza, M., Hesse, A., & Straser, O. (2022). Promoting Active Citizenship in Mathematics and Science Teaching. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 727-746. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10182-1>.
- Malheiros, A. P. S., Souza, L. B., & Forner, R. (2024). Elaboração de uma Atividade de Modelagem em um Espaço Colaborativo de Formação. *ACTIO*, 9(3), 1-20. <https://doi.org/10.3895/actio.v9n3.18849>.
- Mutti, G. S. L., & Klüber, T. E. (2018). Aspectos que constituem práticas pedagógicas e a formação de professores em modelagem matemática. *Alexandria*, 11(2), 85-107. <https://doi.org/10.5007/1982-5153.2018v11n2p85>.
- Niss, M. & Blum, W. (2020). *Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. England.
- Pinto, T. F. (2020). *A elaboração de planejamento de atividades de modelagem matemática por professores com pouca vivência em modelagem* [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais]. <http://hdl.handle.net/1843/45939>.
- Pinto, T. F., & Araújo, J. L. (2021). Um estudo sobre planos de atividades de modelagem matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 12(2), 1-25. <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/rencima/article/view/2933>.
- Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do Ciclo I*. Ed. Universidade Aberta.
- Shiinoki, V. G., Rocha, Z. F. D. C., & Probst, M. M. A. (2024). Conhecimento Matemático Evidenciado por Professores da Educação Básica por meio do Ensino Exploratório. *Perspectivas da Educação Matemática*, 17(46), 1-19. <https://doi.org/10.46312/pem.v17i46.19672>.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Shulman, L. (2004). *The Wisdom of Practice: Essays on Teaching, Learning, and Learning to Teach*. Jossey-Bass.
- Silva, A. L. S., Moura, P. R. G., & Pino, J. C. (2022). Atividade Experimental Problematizada (AEP): discussões pedagógicas e didáticas de uma asserção de sistematização voltada ao ensino experimental das ciências. *Contexto & Educação*, 37(116), 130–144. <https://doi.org/10.21527/2179-1309.2022.116.12491>.
- Silva, K. A. P., Tortola, E., Koga, M. A., & Koga, M. F. (2021). Abordagem Documental do Didático no planejamento e na implementação de uma atividade de modelagem matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(3), 33-69. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/56150>
- Skovsmose, O. (1990). Reflective knowledge: its relation to the mathematical modelling process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21(5), 765-779.
- Takinaga, S. S., & Manrique, A. (2023). L. Contribuições da teoria da objetivação para a análise do planejamento de tarefas de um professor de matemática envolvendo alunos com transtorno do espectro autista. *Educação Matemática Pesquisa*, 25(2), 189-210. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p189-210>.
- Tortola, E., Silva, K. A. P., & Dalto, J. O. (2023). Professores em ação: (res)significando o ensino por meio da Modelagem Matemática. *Bolema*, 37(75), 168-193. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a09>.