

Conhecimento didático de professores de matemática em estudo de aula: dificuldades dos alunos e estratégias de ensino

Didactic knowledge of mathematics teachers in lesson study: students' difficulties and teaching strategies

Conocimientos didácticos de los profesores de matemática en el estudio en clase: dificultades y estrategias didácticas de los estudiantes

Connaissances didactiques des enseignants de mathématiques en classe : difficultés des élèves et stratégies pédagogiques

Marta Cristina Cezar Pozzobon¹
Universidade Federal de Pelotas
Doutora em Educação
<https://orcid.org/0000-0003-3069-5627>

Adriana Richit²
Universidade Federal da Fronteira Sul
Doutora em Educação Matemática
<https://orcid.org/0000-0003-0778-8198>

Mauri Luís Tomkelski³
Secretaria da Educação do Rio Grande do Sul
Doutor em Educação – Especialidade da Didática das Ciências
<https://orcid.org/0000-0001-6395-7086>

Resumo

O texto discute aspectos do conhecimento didático mobilizados por professores que ensinam Matemática ao participarem de um estudo de aula centrado no tópico curricular divisão. O ciclo de estudo de aula envolveu três professoras da rede pública de ensino do Sul do Brasil. A investigação qualitativa foi orientada pela seguinte questão: Quais aspectos do conhecimento didático são mobilizados/desenvolvidos por professores que ensinam matemática ao participarem de um estudo de aula? A análise qualitativa, baseada na análise de conteúdo, evidenciou que a dinâmica do estudo de aula promoveu os seguintes aspectos do conhecimento didático: dificuldades dos alunos e estratégias de ensino. Como resultados, a investigação aponta que o estudo de aula propicia aos participantes compreenderem distintas dificuldades dos alunos em tópicos matemáticos, refletindo sobre a natureza dessas dificuldades e as implicações na aprendizagem. A colaboração que caracteriza o estudo de aula favorece a

¹ martacezarpozzobon@gmail.com

² adrianarichit@gmail.com

³ mauriluis@gmail.com

partilha de experiências profissionais que ampliam o repertório de estratégias de ensino dos participantes. Aponta-se que o estudo de aula amplia o conhecimento didático dos professores, promovendo o desenvolvimento profissional.

Palavras-chave: Estudo de aula, Dificuldades dos alunos, Estratégias de ensino, Conhecimento didático, Educação matemática.

Abstract

The text discusses aspects of didactic knowledge mobilized by teachers who teach Mathematics when participating in a lesson study centered on the curricular topic division. The lesson study cycle involved three teachers from the public school system in the South of Brazil. The qualitative research was guided by the following question: What aspects of didactic knowledge are mobilized/developed by teachers who teach mathematics when participating in a lesson study? The qualitative analysis, based on content analysis, showed that the dynamics of the lesson study promoted the following aspects of didactic knowledge: students' difficulties and teaching strategies. As a result, the investigation points out that the lesson study allows participants to understand different difficulties of students in mathematical topics, reflecting on the nature of these difficulties and the implications for learning. The collaboration that characterizes the lesson study favors the sharing of professional experiences that expand the repertoire of teaching strategies of the participants. It is pointed out that the lesson study expands the didactic knowledge of teachers, promoting professional development.

Keywords: Lesson study, Students' difficulties, Teaching strategies, Didactic knowledge, Mathematics education.

Resumen

El texto discute aspectos del conocimiento didáctico movilizado por los docentes que enseñan Matemática al participar en un estudio de clase centrado en la división temática curricular. El ciclo de estudio de la clase involucró a tres profesores del sistema de escuelas públicas del sur de Brasil. La investigación cualitativa fue guiada por la siguiente pregunta: ¿Qué aspectos del conocimiento didáctico son movilizadores/desarrollados por los docentes que enseñan matemática al participar en un estudio de clase? El análisis cualitativo, basado en el análisis de contenido, mostró que la dinámica del estudio en clase promovió los siguientes aspectos del conocimiento didáctico: las dificultades de los estudiantes y las estrategias de enseñanza. Como resultado, la investigación señala que el estudio en clase permite a los participantes comprender diferentes dificultades de los estudiantes en temas matemáticos, reflexionando sobre la

naturaleza de estas dificultades y las implicaciones para el aprendizaje. La colaboración que caracteriza el estudio en el aula favorece el intercambio de experiencias profesionales que amplían el repertorio de estrategias didácticas de los participantes. Se señala que el estudio en el aula amplía los conocimientos didácticos de los docentes, promoviendo el desarrollo profesional.

Palabras clave: Estudio en clase, Dificultades de los estudiantes, Estrategias didácticas, Conocimientos didácticos, Educación matemática.

Résumé

Le texte traite des aspects des connaissances didactiques mobilisées par les enseignants qui enseignent les mathématiques lorsqu'ils participent à une étude en classe centrée sur la division thématique du programme. Le cycle d'étude en classe a impliqué trois enseignants du système scolaire public du sud du Brésil. La recherche qualitative a été guidée par la question suivante : Quels aspects de la connaissance didactique sont mobilisés/développés par les enseignants qui enseignent les mathématiques lorsqu'ils participent à une étude en classe ? L'analyse qualitative, basée sur l'analyse de contenu, a montré que la dynamique de l'étude en classe favorisait les aspects suivants de la connaissance didactique : les difficultés des élèves et les stratégies d'enseignement. En conséquence, l'enquête souligne que l'étude en classe permet aux participants de comprendre les différentes difficultés des élèves dans les sujets mathématiques, en réfléchissant à la nature de ces difficultés et aux implications pour l'apprentissage. La collaboration qui caractérise l'étude en classe favorise le partage d'expériences professionnelles qui élargissent le répertoire des stratégies d'enseignement des participants. Il est souligné que l'étude en classe élargit les connaissances didactiques des enseignants, favorisant le développement professionnel.

Mots-clés : Étude en classe, Difficultés des élèves, Stratégies d'enseignement, Connaissances didactiques, Enseignement des mathématiques.

Conhecimento didático de professores de Matemática em estudo de aula: dificuldades dos alunos e estratégias de ensino

Neste texto, tratamos sobre os conhecimentos profissionais docentes, que são “a base do trabalho dos professores e da sua identidade” (Nóvoa, 2022, p. 3), ou seja, representam os conhecimentos necessários à prática profissional (Ponte & Oliveira, 2002; Colling & Richit, 2019). Os conhecimentos profissionais docentes contemplam a “prática letiva na sala de aula”, “outros papéis profissionais, tais como a tutoria de alunos, a participação em atividades e projetos da escola, a interação com membros da comunidade e o trabalho em associações profissionais”, além da “visão do professor sobre o seu próprio desenvolvimento profissional” (Ponte & Oliveira, 2002, p. 4).

Tais ideias nos levam a compreender que as discussões acerca dos conhecimentos profissionais são consideradas a partir da década de 1980, com os estudos, sobretudo de Shulman (1986, 1987), que propõe algumas categorias em relação ao conhecimento, como: do conteúdo; pedagógico geral; do currículo; pedagógico do conteúdo; dos fins e valores da educação; de contextos educacionais e dos alunos. Dentre esses conhecimentos, destacamos o pedagógico do conteúdo, que se refere aos conhecimentos para ensinar, que relacionam o conhecimento do conteúdo à prática de ensino (Ball et al., 2008), principalmente ao considerarmos o professor que ensina matemática, pois este tem um conhecimento específico para o ensino, que envolve o conhecimento do conteúdo e o pedagógico do conteúdo, que possibilita o exercício da docência (Ball et al., 2008). O professor possui um conhecimento específico, próprio desse grupo profissional, “orientado para uma atividade prática (ensinar Matemática a grupos de alunos)”, além de outros conhecimentos teóricos, sociais e provenientes da experiência (Ponte, 2012, p. 3).

Com isso, temos o interesse em abordar os conhecimentos profissionais do professor que ensina Matemática, principalmente os conhecimentos didáticos, que envolvem a prática de sala e são mobilizados e desenvolvidos em estudo de aula (lesson study). Sendo que entendemos estudo de aula como um processo formativo de desenvolvimento profissional, que se origina no Japão e é disseminado para outros países (Fujii, 2018; Stigler & Hiebert, 1999). Defendemos, com base em Day (2001), que o desenvolvimento profissional é um processo contínuo que abrange as necessidades, as aprendizagens, os conhecimentos e o crescimento pessoal e profissional dos professores (Richit & Tomkelski, 2022).

Alguns estudos têm discutido sobre estudo de aula e o conhecimento didático, como de Martins et al. (2023), Martins et al. (2024) e Bezerra e Quaresma (2023), que abordam sobre tal temática na formação inicial. Um dos artigos trata sobre os aspectos-chave de estudos de

aula que promovem o desenvolvimento do conhecimento didático, como o planejamento da aula, a condução da aula e o trabalho colaborativo (Martins et al., 2023); o outro discute como o estudo de aula promove o conhecimento dos futuros professores, no que diz respeito às tarefas, ao trabalho dos alunos e à comunicação em sala de aula (Martins et al., 2024) e o outro aborda o desenvolvimento do conhecimento didático em estágio supervisionado (Bezerra & Quaresma, 2023). Já Santana et al. (2020, p. 107) tratam de um processo formativo, não definindo se envolve o estudo de aula, mas abordam que uma professora participante de um processo formativo, demonstra “perspectivas positivas em relação aos conhecimentos matemático e didático”, evidenciando movimentos reflexivos, principalmente no que envolve o conhecimento didático, dos processos de sala de aula e da aprendizagem dos alunos. Isso nos leva a considerar que existe a necessidade de investirmos na temática proposta no artigo, principalmente no sentido de nos levantarmos alguns tensionamentos, consideramos as pesquisas que desenvolvemos no Sul do Brasil.

Diante dessas ideias, questionamos: Quais aspectos do conhecimento didático são mobilizados/desenvolvidos por professores que ensinam matemática ao participarem de um estudo de aula? Para respondermos esta questão, consideramos um estudo de aula desenvolvido com três professoras de Matemática, de uma escola da rede pública de ensino, localizada na região Sul do Rio Grande do Sul, Brasil. Neste estudo de aula, o tópico ensinado envolveu a operação divisão com números naturais.

Argumentamos que os conhecimentos didáticos para ensinar Matemática são importantes para os professores identificarem as dificuldades matemáticas dos alunos e para o exercício da docência, pois ponderamos a responsabilidade docente em escolher e propor estratégias de ensino, na perspectiva das aprendizagens. Por isso, ao trazermos sobre um estudo de aula centrado no tópico divisão, consideramos as aprendizagens docentes sobre o tópico, o currículo, as dificuldades dos alunos e as possibilidades de ampliação das estratégias de ensino.

Base teórica

Nesta seção, discutimos sobre o estudo de aula como um processo de desenvolvimento profissional de professores, de natureza colaborativa e reflexiva (Murata, 2011; Richit & Ponte, 2017), com foco no exercício da docência para ensinar Matemática, centrado na prática profissional dos professores, principalmente a prática de sala de aula. É importante ressaltar que o foco principal do estudo de aula são as aprendizagens dos alunos, porém as aprendizagens profissionais são oportunizadas, principalmente pelos momentos de colaboração e reflexão promovidos por esse processo formativo (Richit et al., 2021). Neste interim, para que esses

processos sejam desencadeados, os professores “[...] trabalham em conjunto, procurando identificar dificuldades dos alunos, e preparam em detalhe uma aula que depois observam e analisam em profundidade [...]”, ou seja, “[...] realizam uma pequena investigação sobre a sua própria prática profissional, em contexto colaborativo [...]” (Ponte et al., 2016, p. 869).

O desenvolvimento profissional é entendido como um processo em que o professor é o protagonista das suas aprendizagens, na perspectiva de obter sucesso no ensino (Day, 2001). O desenvolvimento profissional envolve processos formativos que contemplam a vida pessoal dos professores, as políticas e os contextos escolares, na perspectiva de mudanças nas práticas profissionais, ensejando a qualificação do ensino (Richit et al., 2024). E, ainda, envolve a aprendizagem do professor, no sentido de “melhorar as capacidades profissionais”, que contemplam as “destrezas pedagógicas e de gestão, bem como os contextos culturais e de liderança em que trabalham” (Day, 2001, p. 44-45). O autor chama a atenção para a necessidade de as escolas estarem comprometidas com o desenvolvimento contínuo do professor, considerando a sua vida pessoal, as necessidades, as condições de trabalho e dos alunos, pois é preciso que os professores tenham “tempo e oportunidades, bem como disposições e capacidades [...] para aprenderem com outros no local de trabalho e com elementos fora da escola” (Day, 2001, p. 45).

Tais discussões nos levam a considerar o estudo de aula como um processo de desenvolvimento profissional, centrado na prática profissional, com carácter colaborativo e reflexivo (Ponte et al., 2015; Quaresma & Ponte, 2015; Vieira et al., 2022). Este processo formativo é comum no Japão, fazendo parte do planeamento anual das escolas e da carreira dos professores, sendo responsável pelo processo de formação como um processo contínuo de desenvolvimento profissional (Fujii, 2016). Porém, tal prática assume características diferentes de acordo com o contexto cultural, como alertam Stigler e Hiebert (1999), não basta importarmos o estudo de aula desenvolvido no Japão, pois não se restringe apenas a adaptarmos à rotina desenvolvida em uma cultura e sistema educacional diferente. É preciso que o estudo de aula seja adaptado “[...] à cultura do país e à realidade educacional na qual os professores estão imersos” (Richit, 2020, p. 3).

Com isso, destacamos que várias adaptações são propostas para a efetivação desse processo formativo, sendo constituída de quatro etapas, de acordo com Perry e Lewis (2009) e Murata (2011), como estudo do currículo, definição de objetivos, condução da aula e reflexão. Já Fujii (2018) descreve cinco etapas: a) O estabelecimento de metas: as metas e as lacunas para a aprendizagem do aluno e a formulação do tema da aula; b) Planejamento da aula: planejamento de modo colaborativo de uma aula, com a intencionalidade de atingir os objetivos

propostos; c) Aula de pesquisa: um membro do grupo leciona a aula, os outros observam e coletam dados; d) Discussão pós-aula: compartilhamento dos dados coletados sobre a aprendizagem, a estrutura da aula e outros questionamentos sobre o ensino e aprendizagem; e) Reflexão: registro sobre o ciclo vivenciado, a partir de relatórios com dados dos alunos e reflexões.

De acordo com essas ideias, um grupo de professores se reúne, na perspectiva de planejar uma aula, de discutir sobre as estratégias de resolução dos alunos, de lecionar e de refletir sobre o processo desenvolvido (Richit & Ponte, 2017; Quaresma & Ponte, 2019). O estudo de aula concebido como processo de desenvolvimento profissional baseia-se na prática letiva dos professores, com a preocupação nos processos de ensino e de aprendizagem (Quaresma & Ponte, 2015; Ponte et al., 2016), em que o foco está na aula, entendida como uma unidade que precisa ser analisada, aprimorada e planejada (Stigler & Hiebert, 1999; Ponte et al., 2015). Os ciclos desenvolvidos por estudos de aula, fundamentados na prática letiva, promovem a melhoria do ensino ao desencadear quatro elementos básicos, que são: o conhecimento dos professores; a crença e disposição dos professores, que envolve conhecer o pensamento do aluno e acreditar na sua capacidade para aprender; a comunidade de professores, que envolve as práticas colaborativas; e o currículo, que considera as tarefas e os materiais de ensino (Lewis, 2016).

O conhecimento profissional para o exercício da docência, para ensinar Matemática, conforme Shulman (1986), envolve o conhecimento do conteúdo, o conhecimento curricular e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Essas categorias de conhecimento são discutidas por Ball et al. (2008), com ênfase no conhecimento matemático para ensinar, que se diferencia do conhecimento matemático exigido de outros profissionais. Para os autores, esse conhecimento envolve reconhecer e entender os erros dos alunos, compreender o que é ensinado e como precisa ser ensinado, pois para ensinar é importante compreender o que se ensina, saber escolher as diferentes representações de um objeto matemático, selecionar tarefas e exemplos (Ball et al., 2008).

No exercício da docência na disciplina de Matemática, considera-se que há um “[...] conjunto de saberes e competências, que podemos designar por conhecimento profissional” (Ponte, 1999, p. 3), que interfere nas práticas letivas, entendidas como práticas de sala de aula, que envolvem os aspectos didáticos, como “a seleção e o desenho de tarefas, a planificação de aulas, a organização do trabalho dos alunos durante a aula, e a criação de oportunidades de aprendizagem” (Martins et al., 2024, p. 107). Para tanto, Ponte (1999) destaca alguns conhecimentos, como o conhecimento dos conteúdos de ensino, conhecimento do currículo,

conhecimento do aluno, conhecimento do processo instrucional (planejamento, docência e avaliação da prática letiva), além dos conhecimentos pessoal e informal do professor.

Entendemos, com base em Shulman (1986, 1987, 2015), que o professor possui um conhecimento profissional que é distinto do conhecimento acadêmico, envolvendo o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK). De acordo com o autor, este conhecimento extrapola o conhecimento do assunto, ancorando-se no conhecimento do assunto para ensinar, pois

Dizer que um professor deve antes compreender tanto o conteúdo como os propósitos, no entanto, não distingue especificamente o professor dos não professores. Espera-se que um matemático entenda matemática e que um historiador compreenda história. Mas a chave para distinguir a base de conhecimento para o ensino está na interseção entre conteúdo e pedagogia, na capacidade do professor para transformar o conhecimento de conteúdo que possui em formas que são pedagogicamente poderosas e, mesmo assim, adaptáveis às variações em habilidade e histórico apresentadas pelos alunos (Shulman, 2015, p. 217).

Com base nessas ideias, compreendemos que o conhecimento profissional do professor engendra os modos de seleção, de organização e proposição do ensino, na perspectiva da compreensão pelo aluno. Desse modo, é responsabilidade do professor compreender as diferentes representações dos conteúdos, as semelhanças entre os tópicos do currículo, as possibilidades de exploração e explicação. Ou seja, o professor precisa além de compreender os conhecimentos específicos da disciplina que vai ensinar, compreender a organização dos conteúdos e conceitos no currículo, de acordo com o nível de ensino, e, também, as diferentes estratégias, metodologias e formas de avaliação. Esses componentes constituem o PCK, que circunscreve os diferentes modos de representação dos conteúdos, que possibilitam que os alunos compreendam o que é ensinado; contemplam os modos de ensinar, para que se torne mais fácil ou difícil para os alunos aprenderem, e, ainda, envolvem os conhecimentos prévios dos alunos.

Nesse sentido, Ponte (2012) trata do conhecimento profissional, principalmente aqueles relativos à prática de sala de aula, os conhecimentos didáticos, que envolvem quatro vertentes ou domínios: a) conhecimento de Matemática, que abrange as interpretações produzidas pelo professor sobre a disciplina que ensinará em sala de aula, e, ainda, contempla os conceitos, os procedimentos, as diferentes representações, “as conexões internas e externas à disciplina” (Ponte, 2012, p. 4); b) conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, o qual envolve o conhecimento dos alunos, dos seus interesses, valores, cultura e os modos de aprendizagem; c) conhecimento do currículo, que abrange os conhecimentos do professor sobre

as “finalidades e os objetivos do ensino da Matemática, bem como a organização dos conteúdos, o conhecimento dos materiais e das formas de avaliação a utilizar” (Ponte, 2012, p. 5); d) conhecimento da prática relativo ao planejamento, ao plano de aula, às concepções sobre as tarefas, à “condução das aulas de Matemática, nomeadamente as formas de organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula”, além “da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor” (Ponte, 2012, p. 5).

Tais discussões nos levam a destacar a necessidade de o professor compreender sobre as dificuldades matemáticas dos alunos, pois conforme apontam Ponte et al. (2016, p. 870), em vivência de estudo de aula, os professores têm a oportunidade de aprender sobre o tópico que ensinam, as orientações curriculares, dentre outras aprendizagens sobre os “processos de raciocínio e às dificuldades dos alunos e à própria dinâmica da sala de aula”. E, além de identificarem as dificuldades dos alunos, os professores precisam propor estratégias de ensino que promovam as aprendizagens, que pode ser desenvolvida pelas aprendizagens profissionais produzidas mediante as reflexões sobre o ensino, que possibilitam a análise das “dificuldades que os seus alunos enfrentam na aprendizagem de determinado tópico, o que aprenderam, como responderam a representações, questões e tarefas particulares” (Serrazina, 2014, p. 1096).

Com isso, tratamos, neste texto, dos conhecimentos didáticos desenvolvidos por professores de Matemática em um estudo de aula que envolveu o ensino do tópico da operação divisão com números naturais. Esse tópico muitas vezes é de difícil entendimento pelos alunos, pois “a aprendizagem da divisão é muito mais do que saber usar o algoritmo tradicional”, envolve o reconhecimento desta “operação em diferentes situações”, o uso da “relação entre a divisão e a multiplicação” e, ainda, o desenvolvimento de “uma teia de relações numéricas que permita calcular de modo flexível, tendo subjacentes as propriedades destas operações” (Mendes, 2013, p. 6-7).

Metodologia

A pesquisa desenvolvida apresenta uma abordagem qualitativa, em que empregamos estratégias denominadas como “qualitativas”, que nesse caso são a observação e a recolha dos dados pela inserção do pesquisador no espaço escolar, com descrição da investigação, com ênfase no processo da pesquisa e com a produção de significado dos dados (Bogdan & Biklen, 1994). Com isso, destacamos que nos aproximamos de uma escola localizada no Sul do estado do Rio Grande de Sul, da rede pública de ensino, que atende alunos do pré-escolar ao 9º ano do Ensino Fundamental. Na referida escola, desenvolvemos um ciclo de estudo de aula, no período

de março a maio de 2023, com encontros semanais, com três⁴ professoras de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

As professoras que participaram do estudo de aula são identificadas por nomes fictícios para preservar as identidades, conforme as diretrizes éticas, que apontam a necessidade de garantir os direitos dos participantes, avaliando, prevenindo e evitando “possíveis danos aos participantes” (Brasil, 2016, p. 44). É importante ressaltar que o projeto foi submetido ao Comitê de Ética e Pesquisa da instituição, sob o número Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) 59832922.0.0000.5317 e parecer 065686/2022 as professoras participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

Diante disso, apontamos que as três professoras – Carla, Maria e Sandra (nomes fictícios) – têm formação em Licenciatura em Matemática, e todas atuam no Ensino Fundamental, nos Anos Finais. Maria leciona matemática desde 2018 e em 2023 era docente das duas turmas de 6º ano. Sandra atua como docente desde 2007 e estava com as turmas de 7º e 8º ano. Carla é docente desde 2008 e era responsável pelas turmas de 8º e 9º ano. Também participaram do estudo de aula, a investigadora, que assumiu o papel de facilitadora, entendida como um membro do grupo que organiza, conduz e colabora com as discussões e proposições (Clivaz & Clerc-Georgy, 2020) e uma observadora, mestranda de um curso de Pós-Graduação de uma universidade pública federal do Sul do Brasil.

Neste estudo, trazemos as falas das professoras, que foram gravadas em áudio, contemplando as sessões de 1 a 6 e a 8, como também a sessão 7, que foi videogravada. Depois as gravações e o vídeo foram transcritos e analisados. Descrevemos na tabela a seguir as etapas do estudo de aula e as sessões, que foi desenvolvido por um dos autores do artigo, com base no proposto por Fujii (2018).

Tabela 1.

Etapas e sessões do estudo de aula

Etapas	Sessões
Definição do Objetivo	Sessão 1: Apresentação do estudo de aula e definição do tópico a ensinar.
	Sessão 2: a) Retomada do cronograma; b) Conversa sobre o ensino de divisão e as dificuldades dos alunos; c) Estudo dos documentos curriculares (Base Nacional Comum Curricular) sobre o tópico a ensinar; d) Estudo de alguns materiais sobre o ensino de divisão.

⁴ Esta escola tem apenas três professoras que ensinam Matemática nos anos finais.

	Sessão 3: a) Definição do objetivo da aula; b) Leitura de parte do artigo Ponte <i>et al.</i> (2015) b) Estudos sobre o ensino de divisão.
Planejamento da aula de investigação	Sessão 4: a) Exploração de tarefas envolvendo divisão; b) Organização das tarefas de diagnóstico; c) Discussão do plano de aula a partir do artigo: Ponte; Quaresma; Mata-Pereira. (2015). d) Ideias para o planejamento da aula.
	Sessão 5: a) Retomada de algumas tarefas envolvendo divisão; b) Organização da tarefa da aula, considerando o contexto proposto pela professora Maria e a adaptação de tarefas estudadas; c) Antecipação dos modos de resolução pelos alunos.
	Sessão 6: a) Fechamento da tarefa; b) Continuação da discussão da antecipação dos modos de resolver pelos alunos; c) Organização dos tempos e encaminhamentos de cada etapa do planejamento (introdução da aula, trabalho autônomo pelos alunos, discussão coletiva e fechamento da aula).
Aula de investigação	Sessão 7: A aula foi conduzida por Maria em uma turma do 6º ano.
Discussão pós-aula e reflexões	Sessão 8: Conversa sobre a aula e reflexões sobre o ciclo de estudo de aula.

Diante das etapas e sessões, explicitamos que o tópico divisão com números naturais foi escolhido coletivamente pelas professoras, principalmente devido às dificuldades dos alunos destacadas desde a primeira sessão. As professoras apontam na sessão 1, que uma das dificuldades evidenciadas nas turmas de 6º a 9º ano é relativa à divisão, pois parece que “todos precisam” (Sandra), ou como diz Carla: “[...] vindo pelo viés das frações, eu pensei na divisão, nas relações entre multiplicação e divisão, que é uma das operações que eles têm mais dificuldade”. E Maria reforça esse aspecto, apontando que os alunos apresentam muita dificuldade e acrescenta: “[Os alunos têm dificuldade para] montar [a operação], porque se for pensar na divisão, são três operações que eles têm que montar [...]”.

Para as análises dos materiais, estabelecemos algumas aproximações com a análise de conteúdo, proposta por Bardin (2021), em que consideramos: a) Leitura flutuante, em que realizamos a leitura na íntegra das transcrições, salientando algumas impressões, aspectos ou temáticas que nos chamaram a atenção ou que eram recorrentes; b) Constituição do *corpus*, que se constituiu pela seleção e escolha de alguns excertos relativos aos conhecimentos didáticos; c) Exploração dos materiais selecionados, percebendo que alguns excertos se aproximavam ou que apareciam de modo recorrente nas diferentes sessões do estudo de aula; d) Categorias e subcategorias: diante da exploração dos materiais, percebemos que algumas temáticas emergiam, ou seja, eram recorrentes nas transcrições. Isso nos levou a recortar os excertos e

considerando o referencial teórico, organizamos as categorias “dificuldades matemáticas” e “estratégias de ensino”. Diante dessas categorias, organizamos as subcategorias dos materiais analisados, que mostramos na figura abaixo.

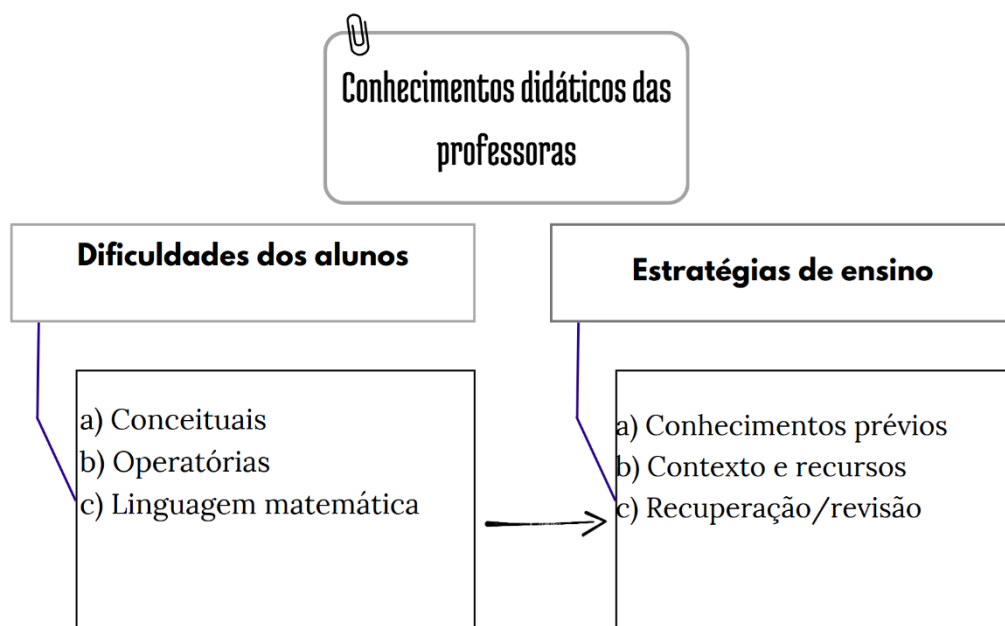


Figura 1.

Categorias e subcategorias

A figura explicita as categorias e subcategorias, além de mostrar que há uma ligação entre as categorias “dificuldades dos alunos” e as “estratégias de ensino”. Ponderamos que as dificuldades discentes produzem efeitos na docência das professoras que participaram do estudo de aula, no sentido de proposição de estratégias de ensino como meio de auxiliar na superação das dificuldades de aprendizagem dos alunos. Assim, na próxima seção, consideramos alguns resultados e discussões.

Resultados e discussões

Dificuldades dos alunos

Descrevemos os conhecimentos didáticos das professoras que participaram do estudo de aula, destacando a categoria dificuldades dos alunos, organizadas nas subcategorias: conceituais, operatórias e linguagem matemática. Nesta categoria, uma das justificativas para as dificuldades matemáticas dos alunos é apontada pela professora Maria, que diz: “É que durante a pandemia [os alunos] não fizeram [as atividades sobre o tópico divisão]. O ano passado todos [os alunos] foram aprovados. E agora a gente tem que sempre incluir toda a turma” (Sessão 4).

Relativamente às *dificuldades conceituais*⁵, a professora se referia ao ano de 2020, em que, devido às restrições da pandemia de Covid-19, os docentes enviavam para os alunos as tarefas escolares via *Google Forms*, por *WhatsApp* ou até mesmo pelo *Facebook*, as quais geralmente não eram realizadas e devolvidas. No ano de 2021 começam a alterar alguns encaminhamentos e em 2022, mesmo com o retorno das aulas presenciais nas escolas públicas, os professores tiveram que aprovar todos os alunos. Nesta perspectiva, ao se referir às dificuldades, a professora Sandra aponta que está muito difícil o exercício da docência, pois os alunos “estão muito desparelhos. A gente já pegava turmas que tinham níveis [de aprendizagem] muito diversos, mas agora escancarou mesmo” (Sessão 1). Parece que a pandemia mostra o que já enfrentavam, alargando o quadro das não aprendizagens dos alunos, que foi o foco do estudo de aula desde a primeira sessão. As professoras dizem que essas dificuldades são percebidas nos registros dos alunos, principalmente no que tange aos conceitos matemáticos de subtração, como trouxemos no excerto a seguir:

Maria: [Atualmente os alunos têm dificuldade até mesmo] de subtrair. [...] quando eu recebia os alunos, isso antes, [...] quando eles não sabiam, pelo menos tentavam com bolinha, **a cada bolinha iam riscando, que era o método da subtração, iam riscando**⁶. E eles tentavam, de alguma forma, descobrir. Agora, nem isso.

Investigadora: Não tentam resolver, tu achas?

Maria: Não conseguem tentar, não conseguem fazer. [...] De pegar e colocar bolinha, nem que seja bolinha, **para depois ir cortando**. (Sessão 3).

A professora aponta que as dificuldades conceituais envolvem também as outras operações matemáticas:

Maria: Olha eu que **estou com o sexto ano, eu ainda estou fazendo a adição e a subtração, eu nem cheguei à multiplicação**, eles ainda fazem muita confusão. [...] Ainda vou ter que continuar pegando o que eu estou fazendo, ter que continuar... Ainda vou ter que continuar **pegando do quarto, do quinto ano** (Sessão 2).

Maria acrescenta que os alunos não fazem tentativas de resolver as tarefas propostas, mesmo que usando registros pictóricos, principalmente em tarefas que envolvem as operações matemáticas elementares, como a subtração. A professora aborda que as dificuldades envolvem as outras operações matemáticas, como a adição, a multiplicação e a divisão. E, como ressaltam no diálogo apresentado a seguir, as dificuldades abarcam os conceitos das operações.

Maria: Aí eu digo, vamos **dividir por dois, a metade disso**, quanto é que é? Até compreender que é metade. 30 dividido por dois, quanto é que é? A metade de 30? Aí eles sabem.

⁵ As expressões em itálico se referem as subcategorias.

⁶ Usamos negrito para ressaltar partes importantes para a análise.

Carla: **É de mais, é de menos...**?

Sandra: Só perguntam, que conta tem que fazer?

Carla: **É dividir ou é de vezes?**

Maria: Parece que a gente nunca sai, nunca sai disso (Sessão 2).

A reflexões das professoras assinalam que as dificuldades conceituais apontadas pelas professoras, exige alguns conhecimentos que envolvem a compreensão do conhecimento matemático para o ensino, como ensinam Ball et al. (2008). Tal conhecimento ultrapassa a ideia de um conhecimento matemático comum, que contempla saber matemático, mas não é especial para o ensino. O conhecimento matemático especializado, na perspectiva das aprendizagens, abrange compreender as dificuldades dos alunos e propor modos de ensinar (Ball et al., 2008). Desse modo, a identificação das dificuldades conceituais relativas às operações, solicita que os professores dominem conhecimentos matemáticos e, também, de como ensiná-los, considerando os procedimentos, as representações, os padrões... Ou melhor, “os professores podem aprender a partir do seu ensino analisando-o, em especial as dificuldades que os seus alunos enfrentam na aprendizagem de determinado tópico, o que aprenderam, como responderam a representações, questões e tarefas particulares” (Serrazina, 2014, p. 1056).

Isso nos leva a destacar as *dificuldades operatórias* identificadas pelas professoras, principalmente em relação à divisão.

Sandra: Eles não sabem a divisão?

Maria: [...] eles já me falaram: Aquela **continha que tem aquele L**, a gente não lembra como faz (Sessão 3).

Maria: É aquilo ou **é o resto**, eles me perguntavam muito, não é este aqui, porque ali o **algoritmo é complexo**, trabalha com a multiplicação, trabalha com a divisão, com a subtração. (Sessão 2)

Maria: [...]. Porque a dúvida deles é... Estávamos colocando primeiro direto na continha. Aí, quando monta a continha... Eles me disseram assim: Professora, **quando a gente monta a continha, eu não sei qual é o resultado**. Qual desses números eu...

Carla: Onde é que coloca? E onde é que coloca quanto deu?

Maria: Qual desses valores é o resultado? (Sessão 6).

E a professora Maria considera que os alunos tiveram dificuldade de usar a divisão para a resolução da tarefa desenvolvida no estudo de aula, pois não entenderam como estruturar o algoritmo da operação, pois, ainda, estava muito difícil, mesmo com a revisão durante as aulas desde o início do ano (fevereiro a abril).

Maria; Bom, a divisão para eles é muito difícil de entender. [...]. Então, a gente estava fazendo toda essa discussão em aula durante vários dias. E sempre veio a **dúvida que era montar a conta**. Eles não conseguiam entender que quando eu colocava a conta no quadro **como é que tinha que montar, fazer o algoritmo**. Então, nós tivemos várias aulas dessa divisão (Sessão 8).

As professoras apontam a dificuldade no algoritmo da divisão, especialmente sobre “montar a conta”, de entendimento dos procedimentos operatórios para a resolução, ou seja, as dificuldades quanto as notações matemáticas, que envolvem sistemas externos de representação, que envolvem sistemas organizados, que se estruturam mediante regras e propriedades (Martí & Pozo, 2000). Neste caso, conforme Mandarinó e Belfort (2005), o algoritmo da divisão é difícil para os alunos, pois envolve o entendimento do sistema de numeração, dos fatos básicos das operações, além das outras operações, como adição, subtração e multiplicação.

Neste contexto, trazemos as dificuldades dos alunos em relação à *linguagem matemática*, principalmente em relação ao uso dos termos matemáticos, como metade, subtração e produto. Na Sessão 4, a professora Maria destaca: “Na última aula, [...], eu fiz o *Stop* da Matemática e uma das colunas era multiplicar por dois, o **dobro** e dividir por dois, a **metade**. [...] Quando eu falava **metade, dobro, eles não entendiam**” (Sessão 4). Em conversa na Sessão 2, as professoras apontam as dificuldades dos alunos no que tange aos termos como subtração e produto.

Maria: Também tinha muito essa coisa de eles [alunos] **não me entenderem**. Eu **falo subtração, aí eu tinha que parar...** Não, **eu tenho que falar continha de menos**, aí vocês vão subtrair.

Sandra: Coisa difícil.

Maria: Continha de menos, é continha de menos, é continha de menos gente, porque eu não estava acostumada a falar continha de menos. [...] No quinto ano eles já estavam com a subtração, aí eu só dava continuidade.

[...]

Carla: **Essa coisa de nome**, eu coloquei na prova uma pergunta: **produto?** Que é que é isso?

Maria: Não rola.

[...]

Carla: Gente, **produto é multiplicação**.

Facilitadora: É o papel da escola trabalhar essa linguagem matemática...

Maria: É que **a gente não conseguiu**, porque provavelmente os teus são oitavo e nono (Sessão 2).

As falas assinalam as dificuldades em relação à linguagem matemática, aos entendimentos relativos aos termos matemáticos, que fazem parte de um sistema próprio da disciplina escolar. Isto é, a linguagem matemática representa um sistema de comunicação de uma comunidade, porém necessita do complemento da linguagem natural, para que seja acessada pelos alunos (Menezes, 2000). Ou, ainda, a linguagem matemática mesmo que disponha de símbolos e códigos próprios, apresenta outros modos de expressão como a linguagem escrita, a oral e a pictórica (Usiskin, 1996).

As dificuldades dos alunos no uso da linguagem matemática levam as professoras a empregarem outras expressões ou termos usados na língua materna. Isso gera algumas preocupações, pois, mesmo que seja de responsabilidade do professor compreender o pensamento matemático dos alunos (Ball et al., 2008), as professoras precisam dar conta de ensinar o que já deveria ter sido aprendido e, ainda, precisam avançar no que é proposto para o ano escolar. Isso nos conduz a destacarmos que as dificuldades dos alunos não possibilitaram que as professoras avançassem no conteúdo. No caso da professora Maria, do 6º ano, estava revisando as operações com números naturais (adição, subtração, multiplicação), não conseguindo avançar no período que foi realizada a vivência do estudo de aula, para a operação divisão com os números naturais, porque os alunos apresentavam muitas dificuldades de entender o uso da operação (ideias) e o algoritmo.

Portanto, para a compreensão das dificuldades dos alunos, tanto as conceituais envolvendo as operações matemáticas, quanto às operatórias, principalmente de divisão e de linguagem matemática, os professores precisam mobilizar e articular distintos aspectos do conhecimento didático. Os professores necessitam do conhecimento matemático referente aos tópicos e procedimentos, mas, também, precisam saber matemática para o ensino, que envolve avaliar as respostas dos alunos (os erros e o porquê dos mesmos), explicar de modo que seja compreensível aos alunos, usar representações matemáticas (Ball et al., 2005). Ou seja, o conhecimento matemático necessário para o ensino é constituído tanto do conhecimento matemático (raciocínio matemático), quanto o conhecimento pedagógico (pensamento pedagógico) (Ball et al., 2005).

Estratégias de ensino

Abordamos as estratégias de ensino mobilizados pelas professoras em vivência de um ciclo de estudo de aula. As estratégias são consideradas como sendo as ações de ensino propostas pelos professores, na perspectiva de planejar tarefas e situações que oportunizem o desenvolvimento das aprendizagens discentes. De acordo com Ponte et al. (2016), nas diferentes etapas do estudo de aula, os professores planejam uma aula, construindo ou adaptando uma tarefa matemática, prevendo e formulando diferentes estratégias de ensino, que são pensadas de modo colaborativo, no sentido de auxiliar na aprendizagem dos alunos. Uma dessas estratégias envolve *mobilizar os conhecimentos prévios* que, conforme as professoras, implica começar do mais simples para o mais complexo, começar pelo que os alunos apresentam mais facilidade e aprofundar.

Maria: [...] **começar com uma coisa que eles saibam fazer**, de repente... [...]. Eu tento facilitar, às vezes, colocando nos exemplos com cinco, que a tabuada do cinco eles me acompanham no quadro. [...] sempre colocamos, que é uma resolução [SMED], sempre começa com o **menor para o maior**. (Sessão 4).

Carla: Já como eles **têm essa dificuldade com a divisão, eles já não vão tentar uma coisa que eles têm dificuldade**. Eles vão tentar as coisas que eles têm certeza que conseguem: a soma, a multiplicação.

[...]

Maria: Porque eu trabalhei sempre no **aumentar, sempre vem a multiplicação**. E no diminuir, que seria fazer pela divisão, a gente não trabalhou.

[...]

Carla: Eu estava pensando, será que **alguma palavra que desse ideia de divisão**, que a gente colocasse ali, distribuir, dividir, alguma palavra que fizesse com que eles se dessem conta da divisão [...] alguma coisa que fosse a palavra, remetesse à divisão... (Sessão 8).

É importante ressaltar que, nos estudos de aula, a escolha do tópico a ensinar é desencadeada pelo levantamento das dificuldades de aprendizagem dos alunos e pelo proposto nos programas curriculares (Ponte et al., 2014; Richit, 2022). Ou dito de outro modo, em vivência de estudo de aula, as dificuldades dos alunos “[...] são balizadoras quando os professores consideram essencial abordar um tópico em que os alunos apresentam distintas e frequentes dificuldades ao longo da trajetória escolar [...], visando compreender e dirimir tais dificuldades” (Richit et al., 2023, p. 116-117). Como enfatizado pelos autores, as ações desencadeadas pelo estudo de aula ultrapassam a ideia de compreensão das dificuldades dos alunos, ancorando-se na promoção das aprendizagens discentes. Para isso, é fundamental os processos de planejamento e avaliação, além de intencionalidades e intervenções docentes ao ensinar matemática.

Outra estratégia evidenciada na análise envolve o *contexto e recursos*, que conforme as professoras possibilitam a aprendizagem dos alunos. Neste sentido, os próximos excertos se referem ao contexto para ensinar o algoritmo da divisão.

Carla: Mesmo o **algoritmo pode ser contextualizado**, por exemplo, para explicar onde é que eu coloco a resposta, onde é que eu coloco o que sobrou. Eles ficam nessa dúvida sempre, não sabem onde coloca o que.

Sandra: De que lado que vai.

Carla: **Eu contextualizo esse algoritmo com compra**. Então, o dividendo seria quanto eu tenho, o divisor quanto custa o que eu quero comprar e aí a gente vai, quantas coisas dá para comprar. Eles vão pelo processo multiplicativo e aí quanto eu gastei, então eu tenho que descontar do que eu tinha, quanto eu gastei e aí o que sobrou, quanto sobrou, o nosso resto. Sempre **dando significado para essa montagem** e aí eles entendem mais fácil. (Sessão 1).

Carla: Eu te falei que eu falo em dinheiro para eles.

Maria: Isso.

Carla: Eu digo... Eu tenho 258 reais. Eu não preciso pegar todo o meu dinheiro para comprar algo que custa 4. Então, se custa 4 reais, eu posso pensar em pegar... Eu posso pegar 2 reais pra comprar algo que custa 4. [...] Aí eu pego... Com 25 reais eu já consigo comprar pelo menos um objeto que custa 4. Agora eu vou ter que procurar quantos. Quantas coisas que custam 4 reais?

[...].

Investigadora: Tu fazes a **ideia subtrativa**?

Maria: Sim, a **ideia deles**... Que fica mais real para eles.

Investigadora: Mas, no algoritmo?

Carla: Sim, **na ideia do algoritmo**. (Sessão 6).

E, também, consideram o contexto ao tratarem da subtração com a ideia da diferença, com o uso da comparação de altura, como diz a professora Carla: “Essa ideia da diferença para eles é muito mais tarde para maturar isso, a diferença é a subtração e aí eu pego como é que eu vou descobrir a diferença entre a minha altura e a tua? E aí o que eu passo de ti ou o que falta para a gente crescer”. (Sessão 1).

Toledo e Toledo (2010, p. 155) consideram que alguns professores ensinam o algoritmo da divisão pelas subtrações sucessivas, conhecido como “processo americano”, que “está ligado à ideia de ‘repartir igualmente’ e reproduz exatamente o que a criança faz para repartir igualmente uma quantidade de objetos”. No contexto dessas estratégias, considera-se, principalmente o método longo da divisão, que de acordo com Centurión (1994), envolve a capacidade de estimativa, que é construído aos poucos pelas crianças, até que descubra quantos cabem em determinada quantidade. Ou como trata Gomez (1991), o método subtrativo envolve o dividendo, tentando alcançar o divisor através dos seus múltiplos.

Tais estratégias são da ordem do campo da didática (Ponte, 2012), referenciando-se ao conhecimento profissional que constitui a especificidade do trabalho docente no ensino da Matemática. Ou como ensina Shulman (1987), essa dimensão do conhecimento, o PCK, ultrapassa o conhecimento do conteúdo, possibilitando a proposição de estratégias de ensino ao considerar as particularidades do conteúdo, as conexões no programa curricular, as dificuldades e facilidades de aprendizagem pelos alunos, dentre outros aspectos. A professora Maria descreve a estratégia de ensino com o uso de recursos didáticos.

Maria: A gente está trabalhando agora a multiplicação, está trabalhando com probleminhas e com material concreto. [...] Trabalhar com material concreto para que eles..., para que consigam perceber essa função, porque, às vezes, se não tem o desenho, como é difícil deles entenderem. [...] Tu sabes que eu trabalhei **multiplicação com eles semana passada, em quadradinhos de EVA**. [...] então, alguns simplesmente colocavam 4 vezes 3, aí 4 em 3 montes de... Eu cortei uns quantos quadradinhos de EVA coloridos, eu corto e vou trabalhando com quantidades com eles. E alguns agora, já, alguns grupos já colocaram naquela forma retangular, organizadamente (Sessão 3).

Neste excerto, a professora se refere ao uso de recursos para a exploração da disposição retangular, que facilita a exploração da propriedade comutativa da multiplicação, ou seja, 4 vezes 5, dá o mesmo resultado que 5 vezes 4. A representação com modelos retangulares pode facilitar “a transição entre o nível de cálculo por contagem e o nível de cálculo por estruturação” (Rocha & Menino, 2009, p. 130). Sendo que as “estruturas lineares estão ligadas a procedimentos de cálculo de adição repetida” e as estruturas retangulares “estão ligadas a procedimentos multiplicativos” (Rocha & Menino, 2009, p. 110). Diante do proposto pela professora, destacamos que as estratégias envolvendo os recursos e os materiais são no sentido de qualificação do ensino, em que as preocupações estão voltadas às aprendizagens discentes.

Essas dificuldades apresentadas pelos alunos levam a professora Maria a apontar algumas ações, no sentido da docência:

Maria: Como eu te contei da outra vez, eu tive que **pedir ajuda para a professora Rosa para introduzir a divisão** o ano passado.

Investigadora: Por que não tinha sido trabalhado?

Maria: Não, não tinha sido, foi a distância e não sabemos quem é que fez aquelas folhinhas.

Investigadora: Pegaste o sexto ano?

Maria: Eu tive que dar o **quarto, quinto e sexto num ano só**. Tem que ensinar tudo isso. Eu tive **que procurar estratégias com a professora do currículo**, a Rosa. Ela me explicou que pega canetas e divide as canetas. Junta as canetas. Divide por dois para eles terem a ideia (Sessão 2).

A professora aponta que as dificuldades de aprendizagem geraram algumas ações docentes, que são no sentido de recuperar os conteúdos/conceitos não ensinados ou não aprendidos nos anos anteriores. Maria reafirma a necessidade de revisão dos conteúdos não aprendidos, pontuando que mesmo mediante as atividades de recuperação, e que mesmo assim os alunos têm dificuldade de aprender.

Maria: Porque até então eu não passei, **não fiz a revisão de divisão ainda**. Olha, porque está complicada a multiplicação ainda.

Sandra: Sim, eu estou com alguns vindo no apoio já.

Maria: É, eu estou **plantada na multiplicação**. (Sessão 3).

Ponderamos que essas falas trazem a necessidade de estratégias voltadas à recuperação dos anos anteriores, gerando a busca de modos de ensinar os conceitos que são ensinados, primeiramente, nos anos iniciais e depois são aprofundados e formalizados nos anos finais do Ensino Fundamental. É importante salientar que o conhecimento profissional docente contempla os vários conhecimentos que são necessários para ensinar Matemática, e, dentre estes, enfatizamos a relevância de conhecer o aluno, os seus processos de aprendizagem, ou

seja, os seus interesses, dificuldades e os modos de ensinar, na perspectiva das aprendizagens discentes (Ponte, 1999; Richit, 2020).

De acordo com Ball et al. (2008), é papel dos professores terem familiaridade com o pensamento matemático dos alunos, interpretando os usos da linguagem pelos mesmos, para assim proporem tarefas que promovam a aprendizagem discente. Os autores chamam a atenção que as ações de ensino, que são de responsabilidade dos professores, envolvem compreender as demandas de aprendizagem dos alunos, propor planejamentos, selecionar os conteúdos e tarefas que serão consideradas em sala de aula. Ou seja, é papel do professor escolher diferentes modos de abordar um tópico a ensinar, possibilitando diferentes formas de representar, na perspectiva da compreensão dos alunos (Ball et al., 2008).

Considerações finais

A análise aponta que o estudo de aula propicia o desenvolvimento de distintos aspectos do conhecimento didático, a partir dos quais o professor reflete sobre a prática letiva e sobre os modos de promover a aprendizagem do aluno. Dentre esses aspectos, destacaram-se duas categorias principais: as dificuldades dos alunos e as estratégias de ensino.

Relativamente às *dificuldades dos alunos*, a análise sinaliza que a participação em estudo de aula oportuniza aos professores identificarem dificuldades e refletirem sobre modos de superá-las. Além disso, as dificuldades dos alunos são balizadores na escolha do tópico para o planejamento da aula de investigação (Richit et al., 2022), assim como pelas dificuldades de ensino dos professores ou pelo tempo de inclusão no currículo (Fujii, 2014). Em um estudo de aula há a preocupação com as dificuldades dos alunos, mas também com os processos de planejamento para dirimi-las e visando promover as aprendizagens discentes. Para isso, destacamos a importância da participação em estudo de aula, para que os professores sejam incentivados a compartilharem as problemáticas vivenciadas em sala de aula e possam pensar em alternativas para o exercício da docência, cada vez mais comprometida com as aprendizagens dos alunos.

No que diz respeito às *estratégias de ensino*, a análise destaca que o estudo de aula, por apoiar-se na colaboração e na reflexão, favorece a partilha e discussão sobre distintas experiências de ensino em sala de aula, ampliando, dessa forma, o repertório de estratégias de sala de aula dos professores participantes. Consideramos que as estratégias de ensino compõem o repertório dos conhecimentos profissionais docentes, que foram mobilizadas pelas professoras ao proporem modos de ensinar voltados ao reconhecimento dos conhecimentos prévios dos alunos, ao uso de contexto (algoritmo com compra e subtrações sucessivas) e

recursos (disposição retangular) e a recuperação de conteúdos/conceitos de anos anteriores. Diante da apropriação de distintas estratégias de ensino, o professor tem a possibilidade de desenvolver o planejamento da aula alinhado com as necessidades dos alunos, contribuindo para a aprendizagem discente.

Portanto, o estudo de aula pode ampliar o conhecimento didático dos professores, na perspectiva do desenvolvimento profissional. Porém, enfatizamos que para continuarmos pensando sobre os efeitos das dificuldades dos alunos nas estratégias de ensino, é importante discutirmos em outros momentos os impactos do estudo de aula nas aprendizagens dos alunos, considerando mais de um ciclo com o mesmo grupo de professores. Também, consideramos relevante ampliar a participação de professores em outros estudos de aula, para que possamos discutir, tanto sobre as aprendizagens docentes como discentes, pois esse processo formativo intenciona produzir mudanças nas práticas profissionais e letivas dos professores e promover a aprendizagem dos alunos.

Referências

- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-17, 20-22, 43-46. <http://hdl.handle.net/2027.42/65072>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bardin, L. (2021). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Bezerra, C. A., & Quaresma, M. (2023). Desenvolvimento do conhecimento didático de futuros professores no contexto do Estudo de Aula. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 12(29), 325-349. <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/8262>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Brasil. Conselho Nacional de Saúde (2016). *Resolução nº 510, de 7 de abril de 2016*. Diário Oficial da União, Poder Executivo, Brasília, DF, 24 maio 2016. Seção 1, n. 98, 44-46.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC/SEB.
- Centurión, M. (1994). *Conteúdo e Metodologia de Matemática: Números e operações*. Scipione.
- Clivaz, S., & Clerc-Georgy, A. (2020). Facilitators' roles in lesson study: from leading the group to doing with the group. In: A. Murata, & C. K. E. Lee (Org.). *Stepping up Lesson Study: An educator's guide to deeper learning* (pp. 86-93). Routledge.
- Colling, J., & Richit, A. (2019). Conhecimentos Pedagógico, Tecnológico e do Conteúdo na Formação Inicial do Professor de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa Revista*

- do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 21(2), 394-421. <https://doi.org/10.23925/10.23925/1983-3156.2018v21i2p394-421>
- Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: os desafios da aprendizagem permanente*. (11a. ed.). Porto Editora.
- Fujii, T. (2014). Implementing Japanese lesson study in foreign countries: Misconceptions revealed. *Mathematics Teacher Education and Development*, 16(1), 65-83. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1046666>
- Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM Mathematics Education*, 48(4), 411-423. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-016-0770-3>
- Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In: M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. N. Shúilleabháin, & A Takahashi. (Org.). *Mathematics lesson study around the world*. Springer.
- Gómez, C. M. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división*. Síntesis.
- Lewis, C. (2016). How does lesson study improve mathematics instruction? *ZDM*, (48), 571-580. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-016-0792-x>
- Mandarino, M., & Belfort, E. (2005). *Números naturais: conteúdo e forma*. Ministério da Educação: Universidade Federal do Rio de Janeiro, LIMC.
- Martí, E., & Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Journal for the Study of Education and Development*, 23(90), 11-30.
- Martins, M., Duarte, N., & da Ponte, J. P. (2023). Estudo de aula na formação inicial de professores de matemática: Aspectos-chave que promovem o desenvolvimento do conhecimento didático dos futuros professores. *Quadrante*, 32(1), 120-141.
- Martins, M., Ponte, J. P., & Mata-Pereira, J. M. (2024). O desenvolvimento do conhecimento didático de futuros professores: o estudo de aula como processo formativo integrado na formação inicial. *PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática*, 18(2), 105-130. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.27258>
- Mendes, F. (2013). A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos. *Da Investigação às Práticas*, 3(2), 5-30. <https://doi.org/10.25757/invep.v3i2.31>
- Menezes, L. (2000). Matemática, linguagem e comunicação. *Millenium*, 20, 178-196.
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In: L. Hart, A. Alston, & A. Murata. (Org.). *Lesson study research and practice in mathematics education*. (pp. 1-12). Springer.
- Nóvoa, A. (2022). Conhecimento profissional docente e formação de professores. *Revista Brasileira de Educação*, 27, e270129, 2-20. <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/TBsRtWkP7hx9ZZNWywbLjny/>
- Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the U.S.? *Journal of Educational Change*, 10(4), 365-39. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10833-008-9069-7>

- Ponte, J. P. (1999). Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro, & H. A. Sá. (Org.). *Investigar e formar em educação: Actas do IV Congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: SPCE.
- Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In: N. Planas. (Org.). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.
- Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 145-163. <https://repositorio.ulisboa.pt/handle/10451/3167>
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Baptista, M., & Mata-Pereira, J. (2014). Os estudos de aula como processo colaborativo e reflexivo de desenvolvimento profissional. In: J. Sousa & I. Cevallos. (Org.). *A formação, os saberes e os desafios do professor que ensina Matemática* (pp. 61-82). Editora CRV.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspectivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, 24(2), 111-134. <https://quadrante.apm.pt/article/view/22920/16986>
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema*, 30(56), 868-89. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/KDpjQXZsJz8DyHhd9CCLq9R/abstract/?lang=pt>
- Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2015). Comunicação, tarefas e raciocínio: aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. *Zetetiké*, 23(2), 297-310. <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646540>
- Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2019). Dinâmicas de reflexão e colaboração entre professores do 1º ciclo num estudo de aula em Matemática. *Bolema*, 33(63), 368-388. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/YDRhdGMpwptfFwtXGr4RmcN/abstract/?lang=pt>
- Richit, A. (2020). Estudo de aula na perspectiva de professores formadores. *Revista Brasileira De Educação*, v. 25, e250044, 1-24. <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/ZGHbjRhNkk5CzKN6G6bh56w/?lang=pt>
- Richit, A. (2021). Teacher professional development: a theoretical framework. *Research, Society and Development*, 10(14), 1-19. <https://doi.org/10.33448/rsd-v10i14.22247>
- Richit, A. (2022). Desenvolvimento Profissional de Formadores de Futuros Professores de Matemática em Estudos de Aula. In: A. Richit, J. P. Ponte, & E. S. Gómez. (Org.). *Estudos de aula na formação Inicial e Continuada de Professores* (pp. 121-150). Livraria da Física.
- Richit, A., & Ponte, J. P. (2017). A colaboração docente em estudos de aula na perspectiva de professores participantes. *Revista Paradigma*, 38(1), 330-351. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/yK8MJGPqbjcdCtVRLKLX6fJ/?lang=pt>
- Richit, A., Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2021). Aprendizagens profissionais de professores evidenciadas em pesquisas sobre estudos de aula. *Bolema*, 35(70), 1107-1137. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a26>
- Richit, A., Richit, L. A., & Richter, A. (2023). Contributos do Contexto da Tarefa na Abordagem de Máximos e Mínimos em um Lesson Study em Cálculo. *PARADIGMA*,

- 44(1), 318-340. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p317-339.id1422>
- Richit, A., Ponte, J. P., & Tomkelski, M. L. (2024). Professional Collaboration among Elementary School Teachers in Lesson Study. *Journal of Research in Mathematics Education*, 13(2), 111-131. <http://doi.org/10.17583/redimat.14337>
- Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2022). Meanings of mathematics teaching forged through reflection in a lesson study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(9), em2151, 1-15. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12325>
- Richit, A., Tomkelski, M. L., Junior, E. C. S. (2023). Possibilidades formativas e pedagógicas dos estudos de aula. In: A. Richit, & M. L. Tomkelski. (Orgs.). *Lesson study em Matemática* (pp. 113-120). CRV. <https://www.editoracrv.com.br/produtos/detalhes/37684-lesson-study-em-matematica?srsId=AfmBOooLwvwVrDPUApjx96wU1qC8lO7ZPySytiPm9kaGuC9nVMEJINw>
- Rocha, M. I., & Menino, H. A. (2009). Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação: Um estudo de caso com crianças de 7/8 anos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 12(1), 103-134. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000100005
- Santana, E., Ponte, J. P., & Serrazina, M. D. L. (2020). Conhecimento didático do professor de Matemática à luz de um processo formativo. *Bolema*, 34, 89-109. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/FBFhMY8dnWpKJQYXLyHFGPf/?lang=pt&format=html>
- Serrazina, M. D. L. (2014). O Professor que Ensina Matemática e a sua Formação: uma experiência em Portugal. *Educação & Realidade*, 39, 1051-1069.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://journals.sagepub.com/doi/10.3102/0013189x015002004>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.
- Shulman, L. S. (2014). Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. *Cadernos Cenpec*, 4(2), 196-229.
- Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. The Free Press.
- Toledo, M. & Toledo, M. (2010). *Teoria e prática de matemática: como dois e dois*. FTD.
- Usiskin, Z. (1996). Mathematics as a language. In P. Elliott and M. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics, K-12 and beyond* (pp. 231-243). National Council of Teachers of Mathematics.
- Vieira, R., Ponte, J. P., & Mata-Pereira, J. (2022). Conhecimento matemático de futuros professores: aprendizados realizados num estudo de aula. *Bolema*, 36(73), 822-843. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/yVJ8FxZgbGXdMvJfYSYqYfx/?lang=pt>