Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função

Analysis of the students performance in continuing education programs on the graphical interpretation of derivatives of a function

ELENI BISOGNIN[1]

VANILDE BISOGNIN[2]

Resumo

O conhecimento que os alunos adquirem sobre derivada depende, em grande parte, das diferentes representações e abordagens apresentadas pelos professores e como elas são relacionadas a fim de evidenciar seu significado. Neste artigo, são apresentados resultados de uma investigação realizada com alunos de um curso de mestrado em Ensino de Matemática, aos quais foi aplicado um teste com o objetivo de investigar suas dificuldades em analisar e interpretar as informações explicitadas nos gráficos das funções ou de suas derivadas primeira e segunda e relacioná-las. Os resultados mostram que os alunos apresentam dificuldades de obter informações a partir de uma análise gráfica e evidenciam, também, a importância de priorizar uma abordagem gráfica sobre este conteúdo ao invés de uma abordagem predominantemente analítica.
Palavras-chave*: derivada de funções; análise gráfica; Educação Matemática.*

Abstract

The knowledge that students obtain on derivative depends in large part on the different approaches and representations made by teachers and how they are related in order to highlight its significance. This article presents results of an investigation conducted with students in a Master's degree in Mathematics Teaching. A test was applied to the students in order to investigate their difficulties in analyzing and interpreting the information expressed in the graphs of functions or of their first and second derivatives and in relating them. The results show that the students have difficulties in obtaining information from a graphical analysis and also show the importance of prioritizing a graphical approach on the content rather than a predominantly analytical approach.
Keywords: *functions derivative; graphical analysis; Mathematics Education.*

Introdução

O conceito de derivada é fundamental para a construção de outros conceitos básicos do Cálculo, como a integral e as equações diferenciais, além de ser uma ferramenta para resolução de problemas de otimização, de modelos oriundos da matemática aplicada e

[1] Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS – eleni@unifra.br
[2] Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS – vanilde@unifra.br

de outras áreas do conhecimento.

Em um olhar sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001) para os cursos de graduação, especialmente da área de ciências exatas e tecnológicas, é possível verificar que contemplam o conteúdo de derivada de funções e recomendam que sejam abordados os aspectos analíticos, gráficos e suas múltiplas aplicações.

Embora as Diretrizes Curriculares Nacionais tenham sido estabelecidas há mais de dez anos, o que se observa ainda é que, em relação aos conceitos básicos do Cálculo, o aspecto analítico se sobrepõe ao gráfico, ou seja, há uma valorização dos procedimentos técnicos em detrimento da exploração da capacidade intuitiva e gráfica, não apenas no Brasil mas também em outros países, como atestam as pesquisas de Vinner (1989), Tall (1994), Pimentel (1995), Asiala *et al* (1997), Cury (2001), Almeida e Viseu (2002), Meyer e Igliori (2003), Meyer (2003), Nasser (2009), Cury (2009), Karatas, Guven e Cekmez (2011). Os resultados dessas pesquisas indicam que os estudantes da disciplina de Cálculo têm melhor desempenho quando realizam atividades em que predominam questões que enfocam os aspectos operatórios e técnicos.

Em particular, ao tratar do estudo da derivada de funções, Pimentel (1995) afirma que há uma valorização do aspecto técnico em detrimento da capacidade de imaginação e intuição, uma vez que o conceito é introduzido sem relacionar com uma situação concreta, partindo-se, de imediato, para o estudo das regras de derivação e seguindo com exercícios descontextualizados. A autora afirma ainda que, em geral, não são exploradas as múltiplas representações da derivada, especialmente a gráfica.

Também em relação ao conceito de derivada, Tall (1994) aponta que estudantes universitários apresentam dificuldades em fazer a conexão entre as representações analítica e gráfica. O autor afirma que isto pode estar relacionado ao tipo de trabalho de sala de aula, em que prevalecem os aspectos técnicos.

As dificuldades apontadas nos resultados das pesquisas acima indicadas motivaram o presente trabalho de investigação, realizado com professores em formação continuada que participam de um curso de mestrado em Ensino de Matemática, integrantes da disciplina de Fundamentos de Cálculo, com o objetivo de investigar como esses alunos analisam, interpretam e relacionam as informações explicitadas pelos gráficos das funções e os de suas derivadas primeira e segunda a partir de uma perspectiva gráfica.

Este trabalho fundamenta-se na teoria de Tall e Vinner (1981) sobre “imagem de conceito” e “definição de conceito”, que são termos introduzidos pelos autores na tentativa de descrever como se processa o funcionamento cognitivo da mente humana ao se deparar com questões matemáticas.

1. Fundamentação teórica

No trabalho de sala de aula, muitas vezes, há uma dissonância entre a linguagem usada pelo professor e a linguagem matemática. Essa dissonância, segundo Tall e Vinner (1981), está relacionada com a complexidade do cérebro humano, que funciona de uma forma que não segue a lógica matemática. Desse modo, cada indivíduo pensa de uma forma e na sala de aula uma idéia pode ser entendida por alguns alunos e não ser compreendida por outros. Assim, é fundamental tentar compreender como se processa a aquisição de conhecimentos matemáticos e, para isso, os autores desenvolveram uma teoria com base nas noções de “imagem de conceito” e “definição de conceito”. Para Tall e Vinner a imagem de conceito

> [...] descreve a estrutura cognitiva que está associada ao conceito que inclui todas as figuras mentais e propriedades associadas. Ela é desenvolvida ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, p.2).

Definição de conceito é *“uma sentença de palavras usadas para descrever um determinado conceito”.* (TALL; VINNER, 1981, p.2). Segundo os autores, um conceito pode simplesmente ser memorizado pelos estudantes, mas também pode ser aprendido de modo significativo, na medida em que tenham oportunidades de criar diferentes imagens conceituais referentes a um determinado conteúdo matemático. Assim, acredita-se que trabalhar um conceito, levando-se em consideração as suas múltiplas representações, é proporcionar aos alunos oportunidades de criar imagens ricas de significados que permitem a compreensão do conceito.

Ao trabalhar com um conceito matemático, a representação gráfica desempenha um papel fundamental no sentido de facilitar sua construção. Para Dreyfus (1990), ela é considerada útil para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática. Ou seja, a representação gráfica pode contribuir significativamente para construção de imagens conceituais que levem, de fato, à compreensão do conceito.

Tall (1994), associa o sucesso dos alunos em Matemática com o desenvolvimento de representações mentais relacionadas aos conceitos ao invés de aprenderem apenas algoritmos e regras.

De acordo com o autor, o ensino centrado nos aspectos técnicos e analíticos, que desvaloriza o raciocínio que faz uso da representação visual, é uma das razões do insucesso em matemática. Com isso, os estudantes têm dificuldades em fazer a conexão do pensamento visual com o pensamento analítico e não conseguem passar facilmente de uma representação para outra.

Em relação ao pensamento matemático, Burton (apud PINTO, 2009) relata uma pesquisa com matemáticos profissionais sobre os estilos de pensamento utilizados no desenvolvimento de atividades matemáticas partindo do pressuposto da existência de dois estilos de pensamento, visual e analítico. Porém, o resultado de sua pesquisa evidenciou a existência de três categorias, visual, analítica e conceitual. Além disso, a maioria dos participantes da pesquisa declarou "*desenvolver a atividade matemática articulando pelo menos dois modos distintos de operar*."(p.30).

Para Almeida e Viseu (2002), em geral os professores evitam argumentos visuais porque consideram o argumento analítico:

> [...] pequeno e perfeito, conduzindo ao resultado sem exigir grandes explicações; fácil de aprender e de aplicar a exercícios; fácil de ensinar, não requerendo preparação de gráficos ou de qualquer programa computacional; corresponde àquilo que os alunos esperam de uma prova matemática. (ALMEIDA; VISEU, 2002, p. 197).

Em relação a derivada, Dreyfus (1990) e Tall (1994) afirmam que a visualização gráfica desempenha um papel central na aprendizagem do conceito e na compreensão das relações e propriedades. No entanto, para os autores, o aspecto visual não é valorizado e raramente os alunos traçam uma reta tangente a uma curva em um determinado ponto a partir de sua representação gráfica.

Sobre as diferentes representações do conceito de derivada, Orton (apud ALMEIDA; VISEU, 2002, p. 198) desenvolveu uma pesquisa com 110 alunos ingleses e concluiu que eles têm dificuldades no uso de representações gráficas, embora apresentem bom desempenho na utilização de algoritmos para calcular a derivada de uma função. Os autores relatam que os alunos participantes da pesquisa "*mostraram-se capazes de responder a perguntas do tipo: calcule o declive da reta tangente à curva [...] mas quando confrontados com o mesmo tipo de questão a partir do gráfico, 96 alunos sentiram dificuldades.*"

Ainda, referente ao estudo da derivada, em pesquisa realizada com alunos do primeiro ano de Análise, Artigue e Viennot (apud ALMEIDA;VISEU, 2002, p.198) concluem que *"os alunos possuem imagens geométricas muito pobres dos conceitos de Cálculo, e que, embora sejam capazes de calcular derivadas não compreendem a derivada como uma aproximação."*

Em pesquisas realizadas por Vinner (1992) com alunos iniciantes de um curso de Cálculo, o autor verificou que apenas 6 % possuíam uma concepção correta de derivada como um limite, 25 % possuíam uma concepção correta, segundo uma interpretação visual, 23 % mostraram uma concepção que relaciona o conceito com os procedimentos técnicos e aplicações, mas não sabiam o significado e 46 % deles forneciam respostas vagas, imprecisas e sem sentido.

Da análise dos resultados das referidas pesquisas, é possível inferir que, em geral, os alunos apresentam dificuldades de abordar graficamente o conceito de derivada. Estas dificuldades podem estar relacionadas com a valorização, no trabalho em sala de aula, de aspectos analíticos em detrimento de aspectos gráficos o pode contribuir para a criação de imagens conceituais restritas.

2. Procedimentos metodológicos

A fim de atender ao objetivo desta pesquisa, foi aplicado um teste de cinco questões para um grupo de doze professores de Matemática, alunos de um Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, no primeiro semestre de 2010. As questões formuladas foram agregadas em três categorias, previamente definidas de acordo com os propósitos estabelecidos.

Categoria A: relação entre o gráfico de uma função e o da sua derivada primeira.

Categoria B: relação entre o gráfico de uma função e o da sua derivada segunda.

Categoria C: relação entre o gráfico de uma função e os gráficos da derivada primeira e derivada segunda.

Nas questões classificadas na Categoria A, tinha-se como propósito analisar como as informações sobre o comportamento da função são utilizadas para identificar e traçar um esboço do gráfico da função derivada primeira e, também, como as informações sobre o gráfico da derivada primeira, são utilizadas para traçar o gráfico da função. Para as questões da Categoria B, o objetivo era analisar como os alunos utilizam as informações obtidas por meio da análise gráfica da derivada segunda para traçar o gráfico da função. Na Categoria C, o objetivo era analisar como os alunos relacionam os gráficos da função, o gráfico de sua derivada primeira e o de sua derivada segunda, utilizando informações obtidas por meio da análise comparativa dos gráficos das três funções.

Este teste foi aplicado na disciplina de Fundamentos de Cálculo e os resultados serviram de subsídios para planejar as atividades da disciplina. A aplicação teve uma duração de duas horas-aula de 60 minutos cada. Após a conclusão as respostas foram separadas e agrupadas de acordo com cada categoria para serem analisadas. Para tanto as respostas foram classificadas em correta, parcialmente correta, incorreta e sem resposta. Foram consideradas corretas as respostas que atendiam a todos os aspectos solicitados e com justificativas corretas. Aquelas respostas que apresentavam algum aspecto correto e outros incorretos ou com justificativas corretas, mas não correspondendo ao gráfico traçado, foram consideradas parcialmente corretas. Foram consideradas incorretas as respostas que não atenderam a nenhum dos aspectos solicitados.

Para identificar e compreender o raciocínio utilizado pelos alunos na construção dos gráficos foi feita uma análise de cada resposta fornecida.

No Quadro 1 estão identificadas as questões em cada categoria.

CATEGORIAS	QUESTÃO
Categoria A: relação entre o gráfico de uma função e o da sua derivada primeira	1.1 ; 1.2 e 1.3
Categoria B: relação entre o gráfico de uma função e o da sua derivada segunda.	2 e 3
Categoria C: relação entre o gráfico de uma função e os gráficos de sua derivada primeira e derivada segunda.	4 e 5

Quadro 1. Distribuição das questões de acordo com as categorias

3. As questões propostas e análise dos resultados

O teste foi composto por cinco questões. O Quadro 2, a seguir, mostra o número de respostas dos doze alunos, de acordo com o tipo de resposta.

Tipo de resposta	1.1	1.2	1.3	2	3	4	5
Correta	1	2	2	0	0	0	2
Parcialmente correta	3	5	3	8	3	8	3
Incorreta	3	3	5	0	4	4	2
Sem resposta	5	2	2	4	5	0	5

Quadro 2. Distribuição das respostas dos alunos

As questões propostas foram adaptadas de Stewart (1992), que é utilizado como livro texto em cursos de graduação da instituição, e questões utilizadas por outros autores, como Almeida e Viseu (2002). Elas foram analisadas de acordo com os objetivos estabelecidos em cada categoria. A seguir indicamos, questão por questão, o enunciado e as respostas dadas pelos alunos.

Na Questão 1.1 solicitava-se o esboço do gráfico de uma função sabendo-se que f(0) = 0; f’(0) = 2; f’(1) = 0 e f’(2) = - 1. Nessa questão, pretendia-se saber se os alunos identificavam os intervalos de crescimento ou decrescimento da função e os pontos de máximo ou de mínimo locais e como interpretavam essas informações para esboçar o gráfico da função. O gráfico construído deveria apresentar essas relações.

Quanto às respostas apresentadas, dos doze alunos, cinco não responderam à questão. Um aluno esboçou corretamente o gráfico da função atendendo às condições dadas e justificou sua resposta. Três deram respostas parcialmente corretas e três responderam de modo incorreto. Os esboços do gráfico da função f, apresentados na Figura1, correspondem às respostas parcialmente corretas apresentadas pelos alunos.

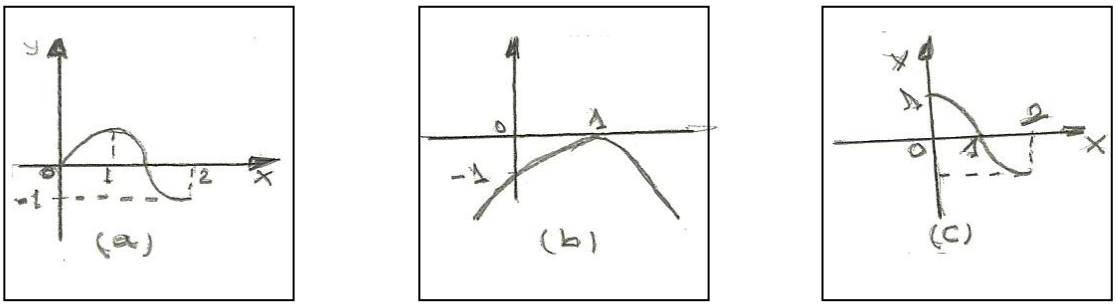

FIGURA 1: Esboços do gráfico da função efetuados pelos alunos.

No esboço (a) feito pelo aluno, a justificativa apresentada foi a seguinte:

> *Em x =1 a função tem um máximo, pois a derivada se anula nesse ponto. Em x=0 a derivada é positiva e em x=2 é negativa. A função é crescente no intervalo [0,1].*

Observou-se, no esboço do gráfico traçado, que o aluno confundiu a condição imposta à derivada da função em x = 2, com o valor da função nesse ponto.

No esboço (b) o aluno argumentou:

> *A função tem um máximo em x = 1 pois a derivada muda de sinal. Ela cresce até x= 1 e decresce para x > 1.*

Embora a justificativa seja parcialmente correta, o esboço do gráfico indica que o aluno não considerou que f(0) = 0.

O aluno que esboçou o gráfico (c) argumentou:

> *A função apresenta um ponto crítico em x = 1 pois a derivada se anula. Para valores maiores do que 1 a função decresce e para valores menores do que 1 ela cresce.*

Apesar de os argumentos serem verdadeiros, o aluno não esboçou o gráfico de acordo com as condições dadas, pois o máximo da função é apresentado em x = 0. Este aluno também não levou em consideração a condição f(0) = 0.

Da análise das representações gráficas apresentadas, verifica-se que os alunos têm dificuldades em relacionar o sinal de f’ com a monotonicidade de f, isto é, de estabelecer relações entre o conceito de derivada e o conceito de função crescente ou decrescente. Quanto aos gráficos esboçados pode-se inferir que estes alunos interpretaram as condições dadas e as representaram corretamente. Isto sugere que eles evocaram imagens conceituais, principalmente quanto ao esboço do gráfico em que relacionaram o fato de a derivada ser nula neste ponto, com a existência de um ponto de máximo e quanto a análise do comportamento da função referente aos intervalos de crescimento ou decrescimento.

Na Questão 1.2 solicitava-se traçar um possível gráfico da função derivada primeira sendo dado o gráfico da função f representada na Figura 2.

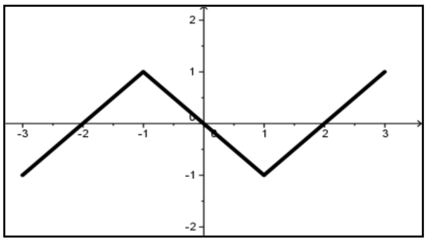

FIGURA 2: Gráfico da função. Questão 1.2 do teste.

Nessa questão, dois alunos esboçaram corretamente o gráfico de f'. Salientaram a descontinuidade da função f' em x = -1 e x = 1 argumentando que nesses pontos não era possível traçar uma reta tangente e, também, analisaram os intervalos de crescimento e decrescimento da função para justificar o traçado do gráfico. Cinco deram respostas parcialmente corretas, três responderam de modo incorreto e dois não responderam. Das respostas parcialmente corretas, observou-se que dois alunos determinaram a equação da reta que passa pelos pontos (-1,1) e (1,-1), derivaram a função obtida e determinaram posteriormente o gráfico da derivada. Argumentaram que nesses pontos a derivada não existe, pois a função apresenta um "bico". Um esboço do gráfico é mostrado na Figura 3 (a). Apesar de terem usado argumentos algébricos, eles não analisaram o comportamento da derivada fora do intervalo [-1,1]. O raciocínio utilizado por esses alunos evidencia que eles possuem mais habilidades com a técnica de derivação do que com a análise gráfica. Os outros três alunos que também deram respostas parcialmente corretas, argumentaram que a derivada era constante e descontínua nos pontos (-1,1) e (1,-1), porém, mesmo identificando essas relações, não esboçaram corretamente o gráfico. Os esboços são mostrados na Figura 3 (b), (c) e (d).

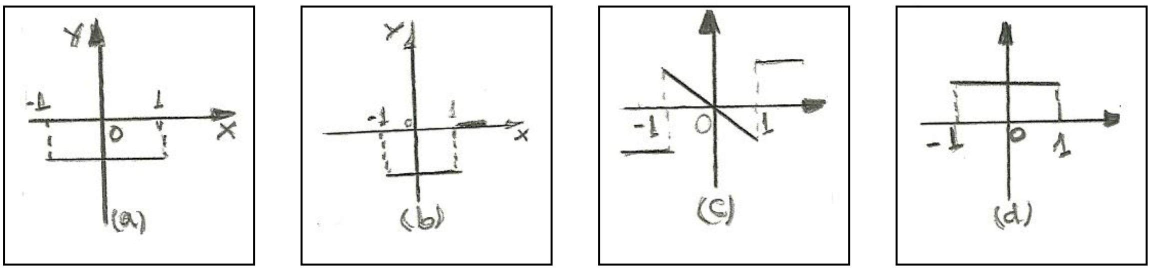

FIGURA 3: Esboços do gráfico da função efetuados pelos alunos.

Todos os que deram respostas parcialmente corretas analisaram o decrescimento da função no intervalo [-1,1] e relacionaram com o sinal da derivada. Em (d), os alunos confundiram o intervalo de crescimento e decrescimento da função f. Para x < -1 ou x >1 apesar de as dificuldades de análise serem as mesmas, eles não argumentaram. Pode-se inferir que esses alunos evocaram seus conhecimentos prévios em relação aos procedimentos técnicos para calcular a derivada de uma função conhecida e os utilizaram para responder à questão. Eles relacionaram a derivada da função com a tangente ao gráfico e essa imagem conceitual possivelmente foi mobilizada quando argumentaram que a função apresenta pontos angulosos e, portanto, a derivada não existe nestes pontos.

Na Questão 1.3 era dado o gráfico de f', como na Figura 4, e solicitava-se o gráfico da função f.

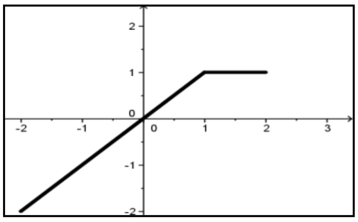

FIGURA 4: Gráfico da função f'. Questão 1.3 do teste.

Nessa questão, pretendia-se que os alunos analisassem o gráfico da derivada, identificassem os intervalos de crescimento ou decrescimento da função e interpretassem o significado do zero da derivada primeira.

Dois alunos responderam corretamente, fizeram o esboço do gráfico da função com justificativas corretas. Salientaram que x = 0 era um zero da função derivada e que neste ponto ela mudava de sinal, portanto, a função era decrescente até x = 0 e crescente no intervalo [0,1]. No intervalo [1,2] a função derivada era constante e positiva, então nesse intervalo a função era linear e crescente. Dos demais, três deram respostas parcialmente corretas, cinco responderam de modo incorreto e dois não responderam. Os três alunos que deram respostas parcialmente corretas apresentaram os seguintes esboços mostrados na Figura5 (a), (b) e (c), para o gráfico da função f.

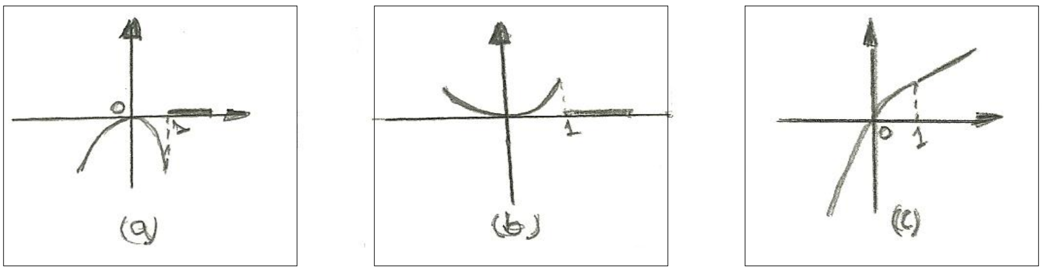

FIGURA 5: Esboços do gráfico da função efetuados pelos alunos. Questão 1.3 do teste.

No esboço (a) o aluno argumentou que:

> *A derivada sendo positiva para $x < 0$ e negativa para $x > 0$ então ela cresce e depois decresce e assim $x=0$ é um ponto de máximo.*

Os argumentos dados pelo aluno não correspondem ao gráfico por ele esboçado, embora tenha interpretado corretamente o significado do zero da derivada primeira.
Para o esboço (b), o aluno apresentou a seguinte justificativa:

> *Para $x>1$ a derivada é constante, portanto, a função é uma reta. Para $0<x<1$ a derivada é positiva e para $x<0$ a derivada é negativa.Como a derivada tem um zero em $x=0$ e ela muda de sinal, então a função é uma parábola.*

Em (c) o aluno justificou:

> *Para $x>1$ a função é linear e para $x < 1$ a função é crescente.*

Observou-se que os alunos não consideraram a continuidade da função derivada e traçaram gráficos de uma função descontínua como mostrada nos esboços (a) e (b). Percebe-se que eles não relacionam seus argumentos com a representação gráfica apresentada. Eles são capazes de argumentar por meio de representações verbais mas não transpõem esse argumentos para uma representação gráfica. Pinto (2009, p.39) denomina de "*formal a relação de aprendizagem que se estabelece pelo aluno que constrói seus argumentos quase que exclusivamente por meio de representações verbais ou algébricas*." Possivelmente esta dicotomia entre argumentação e representação gráfica seja proveniente de um ensino em que de acordo com Pinto (2009), as definições dos conceitos foram memorizadas através de seu uso e aplicações. Ariza e Llinares (2009, p. 121) também apontaram dificuldades semelhantes que os alunos tiveram em relação ao uso do significado do conceito de derivada num registro gráfico quando este foi utilizado para explicar decisões relativas a conceitos de economia.

Na Questão 2 era dada a seguinte condição: $f''(x) \geq 0$ no intervalo [-2,2]; solicitava-se esboçar um possível gráfico para a função f.

A análise das respostas mostrou que um aluno esboçou o gráfico de uma parábola, justificando que, se a derivada segunda é positiva, então a função tem uma concavidade voltada para cima, mas não justificou o comportamento da função no caso da derivada segunda se anular. Quatro responderam que a função era uma parábola voltada para cima e três responderam que uma função era uma reta que passa pela origem. Eles consideraram as funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = x$, calcularam suas derivadas e procuraram deduzir a veracidade da condição, a partir de algumas funções cujas leis eram conhecidas. As respostas destes sete alunos foram consideradas parcialmente corretas. Quatro não responderam a questão. Das respostas, fica clara a predominância do aspecto analítico sobre o gráfico, pois um grupo de estudantes traçou o gráfico evocando imagens conceituais de funções descritas por leis das quais eles tinham conhecimento. Tal comportamento também foi observado por Asiala *et al* (1997), em alunos americanos na interpretação gráfica da derivada.

Em relação à Questão 3, solicitava-se esboçar o gráfico de uma função f, contínua em *R*, conhecendo-se o gráfico de sua derivada segunda, conforme mostrado na Figura 6.

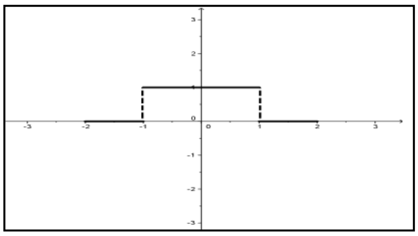

FIGURA 6: Gráfico da função f'. Questão 3 do teste.

Com esta questão pretendia-se que, a partir da interpretação do gráfico da derivada segunda de uma função, os alunos desenhassem um possível esboço do gráfico de f, relacionando o sinal da derivada segunda com concavidade da função f. Além disso, pretendia-se que analisassem o significado de f'' se anular.

A totalidade dos alunos não respondeu corretamente a questão. Quatro responderam que a função deveria ter "bicos" porque a função derivada era descontínua em x = -1 e x = 1, sem especificar se era a derivada segunda, mas não representaram o gráfico da função. Essas respostas foram consideradas incorretas. Dois argumentaram que no intervalo [-1,1] a função era uma parábola, porque derivando $y = x^2$ obtinha-se uma constante. Esses alunos nada responderam sobre o comportamento da função nos intervalos [-2,-1] e [1,2]. Um justificou que no intervalo [-1,1] a função era uma parábola, porém, no intervalo [1,2], representou a função nula. As três respostas foram classificadas como parcialmente corretas. Cinco alunos não responderam a questão.

A análise destes casos nos permite ver que os alunos têm um nível de compreensão sobre a relação da derivada com a continuidade de funções, mas evidenciaram dificuldades em traçar o gráfico da função a partir da análise do gráfico da derivada segunda, pois necessitaram encontrar uma expressão simbólica que representasse a função.

Estas dificuldades estão relacionadas com a interpretação do sinal e com os pontos de descontinuidade da derivada segunda e, também, com a análise do comportamento da função f em x = -1 e x = 1, mesmo conhecendo a lei que define a função f. Isto nos permite inferir que, por um lado, os alunos têm dificuldades para trabalhar tanto os aspectos gráficos como os algébricos de uma função, e por outro, não há uma boa compreensão dos objetos matemáticos f(-1), f(1), f'(-1), f'(1), f'(x) e f''(x). Esses resultados são semelhantes àqueles descritos por Almeida e Viseu (2002), quando aplicaram um teste que continha essa mesma questão a dezenove professores estagiários de matemática em Portugal.

Na Questão 4, foram apresentados os gráficos de três funções e solicitava-se ao aluno que identificasse o gráfico da função f, da função derivada primeira da f e da função derivada segunda da f e justificasse sua escolha.

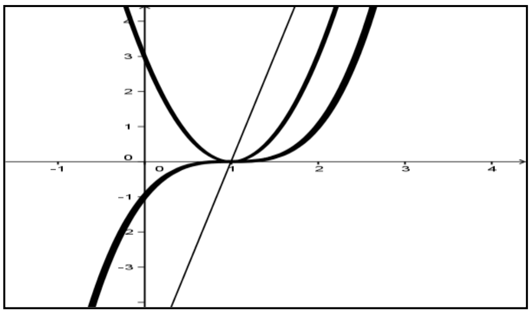

FIGURA 7: Gráfico das funções f, f' e f''. Questão 4 do teste.

Com esta questão, pretendia-se que os alunos, após a identificação dos gráficos de f, f' e f'', justificassem o significado do zero da função derivada primeira e da função derivada segunda e analisassem a monotonicidade e o sentido da concavidade do gráfico de f. Dos doze alunos da turma, oito justificaram a escolha, argumentando que havia uma função que se assemelhava à função $f(x) = x^3$, outra, a uma parábola e outra, a uma reta, portanto, a parábola era a derivada primeira e a reta correspondia à derivada segunda.

Essas justificativas indicam que os estudantes associaram as imagens conceituais de funções com que já tinham trabalhado nos cursos de Cálculo, na licenciatura, uma vez que conseguiram identificar o comportamento das funções nesse novo contexto. Esse fato está de acordo com a afirmativa de Vinner (1989), de que a definição de um conceito pode permanecer inativa, mas as imagens conceituais é que sempre podem ser evocadas em situações diversas. Pode-se inferir que os alunos mostraram capacidade de distinguir as representações gráficas de f, f' e f'' a partir da análise do comportamento dos gráficos dessas funções, embora tenham tido dificuldades de estabelecer relações entre o ponto de inflexão da função f, o ponto crítico da função derivada primeira e o zero da função derivada segunda. As dificuldades de estabelecer relações e propriedades de uma função e sua derivada, a partir da visualização gráfica, foram também descritas por Tall (1994).

Os demais alunos apenas marcaram no gráfico as funções correspondentes sem justificar. Essas quatro respostas foram consideradas incorretas.

Na Questão 5, solicitava-se o esboço do gráfico de uma função f satisfazendo as seguintes condições: $f(-1) = f(1) = 0$ e $f(0) = 1$; $f'(x) < 0$ para $x<-1$ e para $0< x <1$; $f'(x) >0$ para $-1< x < 0$ e $f'(1)$ não existe; $f''(x) < 0$ para $-1< x <1$.

Nessa questão, dois alunos realizaram corretamente a atividade. Três acertaram parcialmente e argumentaram que no intervalo $[-1,1]$ a função era uma parábola com a concavidade voltada para baixo porque a derivada segunda era negativa. Justificaram que, para $x< -1$ e para $0< x <1$, a função é decrescente porque a derivada primeira é negativa e no intervalo $-1< x <0$ a função é crescente. Porém esses alunos não analisaram o fato de a derivada primeira não existir em $x = -1$ e o comportamento da função nesse ponto. Dois responderam de modo incorreto e cinco não responderam. A maioria dos estudantes não justificou corretamente o significado do sinal de f' e f'' e a não existência da derivada primeira em $x = 1$.

Analisando as respostas dos alunos que responderam e justificaram corretamente a questão, observou-se que os mesmos conseguiram estabelecer uma relação entre o sinal da derivada primeira com os intervalos de crescimento e decrescimento da função f, e conseguiram associar o sinal da derivada segunda com a concavidade da função. Utilizaram com propriedade o critério da derivada primeira e o sinal da derivada segunda para concluir que em $x=0$ a função tinha um ponto de máximo. Esses dois alunos argumentaram:

No intervalo [-1,1], f''(x) é negativa, assim a concavidade é voltada para baixo. À esquerda de zero a tangente é positiva e à direita é negativa então deve ter um máximo.

O grande número de alunos que não responderam à questão, possivelmente não interpretou adequadamente a não existência da derivada no ponto x=1 e os sinais da derivada primeira e segunda e, portanto, não conseguiram esboçar o gráfico. Essa dificuldade também foi descrita por (ALMEIDA; VISEU, 2002) quando analisaram as respostas dos alunos em questões cujo objetivo era verificar se os alunos tinham capacidade de identificar as relações entre a função e suas derivadas primeira e segunda.

Considerações finais

Da análise das respostas às questões propostas, o estudo revelou que a maioria dos alunos possui problemas em termos de conhecimentos dos conceitos de derivada de funções a partir de uma perspectiva gráfica. Esta afirmação deve-se ao fato de que a maioria não conseguiu relacionar, de forma conveniente e em termos gráficos, uma função com as suas derivadas primeira e segunda, mesmo nas situações em que as funções foram apresentadas de forma mais simples. Especificamente, em relação às dificuldades demonstradas pelos alunos, elas estão relacionadas com:

-a análise dos intervalos de monotonicidade de funções a partir do sinal da derivada primeira e desta, a partir do sinal da derivada segunda;

-a análise dos zeros da primeira e segunda derivada da função;

-a análise dos pontos em que a derivada primeira não existe;

-a análise da existência da derivada primeira e a continuidade de funções.

As dificuldades descritas são semelhantes àquelas observadas por Almeida e Viseu (2002), especificamente no que se refere à existência da derivada de uma função quando seu gráfico apresenta pontos angulosos e a análise dos zeros das funções e de suas derivadas primeira e segunda. Os alunos, em geral, trabalharam estes conceitos durante sua graduação, mas o que se observou é que criaram imagens conceituais muito restritas, que pouco contribuíram para a compreensão dos conceitos. As imagens conceituais restritas estão relacionadas com o trabalho que é realizado na sala de aula que, segundo Tall (1994), está centrado no desenvolvimento de um vasto número de algoritmos e de regras e pobre na utilização de representações gráficas. Para o autor, a forma como os conceitos do Cálculo são ensinados em sala de aula faz com que os alunos se sintam incapazes de utilizá-los na resolução de atividades que envolvem estes conceitos em outros contextos.

Ao trabalhar com os conceitos relacionados com a derivada de funções, a criação de imagens conceituais, especialmente as advindas das representações gráficas, é fundamental para a sua compreensão. De acordo com Pinto (2009, p.33), ao referir-se a construção de imagens conceituais, "*uma vez constituída a imagem conceitual para um conceito, é a esta imagem que nos referimos, ao ouvirmos o nome do conceito*".

Por outro lado, observou-se uma forte tendência em buscar uma representação analítica da função, por meio de leis já conhecidas, para depois derivar ou buscar uma primitiva e, a seguir, traçar o gráfico. Ou seja, o estudo revelou que há uma forte predominância da representação algébrica em relação aos demais tipos de representações. Isso foi constatado nas tentativas de resolução das questões 2, 3 e 4, que envolviam apenas a representação gráfica, mas que a maioria dos alunos usou a representação algébrica para respondê-las. Isto também pode estar associado ao tipo de trabalho que foi desenvolvido em sala de aula, com a valorização dos aspectos algoritmos e algébricos. Esta tendência também foi observada nas pesquisas desenvolvidas por Tall (1994), Almeida e Viseu (2002), Vinner (1992), Meyer e Igliori (2003) e Asiala *et al*. (1997).

Em relação ao objetivo desta investigação, constatamos que a maioria dos alunos recordou alguns conceitos relacionados com a derivada que foram, possivelmente, memorizados ao longo da formação inicial, especialmente com os aspectos analíticos, mas sentiram dificuldades de aplicá-los em um novo contexto de conhecimento. Sobre o trabalho dos alunos, no que se refere à representação gráfica, ficou clara a dificuldade que tiveram para identificar as propriedades da derivada e de relacioná-las, além de justificar matematicamente suas afirmações. Outras dificuldades foram observadas em relação à compreensão dos conceitos básicos de derivada, oriundas, possivelmente, da forma errônea de entendê-los e devido a equívocos relacionados com a falta de compreensão sobre função, tangente e a derivada como uma aproximação de limite. Vários autores entre os quais Tall (1994), Almeida e Viseu (2002) e Meyer e Igliori (2003) têm documentado que a não compreensão desses conceitos acarretaram uma série de dificuldades na interpretação das relações entre funções e de suas derivadas.

As dificuldades de interpretar graficamente os conceitos e propriedades de função, tangente, limite e derivada detectadas nesta investigação, foi um dos aspectos que se buscou aprofundar ao longo da disciplina de Fundamentos de Cálculo. O conceito de derivada é fundamental na Matemática e sua compreensão tem implicações na resolução de problemas em níveis avançados. Assim, o conhecimento que os alunos têm sobre a derivada e a exploração de suas múltiplas representações, com ênfase nas conexões entre os aspectos analíticos e gráficos, precisam ser discutidos em profundidade em cursos de formação inicial e continuada de professores e, também, nos demais cursos de graduação das áreas de ciências exatas e tecnológicas, nas disciplinas de Cálculo. As conclusões desta investigação apontam no sentido de que, não apenas em relação aos conceitos de derivada, mas também em relação a outros conceitos, se valorize e integre, nas práticas de sala de aula, abordagens analíticas e gráficas no sentido de criar imagens conceituais que dêem significado aos tópicos abordados.

Referências

ALMEIDA, C; VISEU, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. In: *Revista Portuguesa de Educação*. N.001, v.15, p. 193-219.

ARIZA, A; LLINARES, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada em el estudio de conceptos económicos em estudiantes de bachillerato y universidad.In: *Enseñança de las Ciencias*. N. 27, v.1, p.121-136.

ASIALA, M; COTRILL, J; DUBINSKY, E; SCHWINGENDORF, K. (1997). The devolopment of student's graphical understanding of the derivative. In: *Journal of Mathematical Behavior*. N.16, v. 4, p. 399-431.

BRASIL. (2001). Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura***.** Disponível em: <http:// www.mec.gov.br>. Acesso em: 15 de mar. 2011.

CURY, H. N. (2001). Trabalhos realizados com alunos de Cálculo Diferencial e Integral A. Rio de Janeiro: VII ENEM.

CURY, H. N. (2009). Pesquisas em análise de erros no ensino superior:retrospectiva e novos resultados. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs). *Educação Matemática no Ensino Superior:* pesquisas e debates. Recife: SBEM. p. 223-238.

DREYFUS, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. In: NESHER, P. et al. (Orgs). *Mathematics and Cognition:* a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education. Cambridge, University Press. p. 113-134.

KARATAS, I; GUVEN, B; CEKMEZ, E. (20011). A Cross-Age Study of Student's Understanding of Limit and Continuity Concepts. In: *Bolema*, N.38, v.24, p. 235-264.

MEYER, C. (2003). *Derivada/Reta Tangente: imagem conceitual e definição conceitual*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MEYER, C.; IGLIORI, S.B. C. (2003). Um estudo sobre a interpretação geométrica do conceito de derivada por estudantes universitários. Santos: II SIPEM.

NASSER, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs). *Educação Matemática no Ensino Superior:* pesquisas e debates. Recife: SBEM. p. 43-56.

PIMENTEL, T. (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos da análise matemática: um estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades*. Lisboa: APM.

PINTO, M. F. (2009). Re-visitando uma teoria: o desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de análise real. In: FROTA, M. C. R; NASSER. L. (Orgs) *Educação Matemática no Ensino Superior:* pesquisas e debates. Recife; SBEM. p. 27-42.

STEWART, J. (1992). *Cálculo*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

TALL, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. In: BICHLER, R. et al (Ed.) *Didatics of mathematicsas a scientific discipline*. Dordrecht, Kluwer. p. 189-199.

TALL, D.; VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: *Educational Studies in Mathematics*.v.12, p. 151-169.

VINNER, S. (1989). The avoidance of visual consideration in Calculus Students. In: EISENBERG, T.; DREYFUS, T. (Eds). *Focus on learning problems in mathematics*. N. 2, v. 11, p. 149-156.

VINNER, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Orgs). *The Concept of Function: aspects of epistemology and pedagogy.* Washington, Mathematical Association of America. p.195-213.