

# Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo

## Different dimensions of the Calculus teaching and learning

---

BENEDITO ANTONIO DA SILVA<sup>1</sup>

### Resumo

*Neste artigo o objetivo é discutir diferentes componentes envolvidas no ensino e aprendizagem do Cálculo, em particular aquelas referentes ao próprio saber matemático e às expectativas dos sujeitos envolvidos no processo: estudantes e professores. Partindo de uma breve contextualização do estado das pesquisas referentes ao ensino superior, apresentamos o projeto sobre o tema, que vem sendo desenvolvido há aproximadamente uma década com alunos de mestrado e doutorado em Educação Matemática. São descritos os objetivos de sub-temas e os pressupostos metodológicos que têm guiado o andamento do projeto. As dissertações e teses defendidas forneceram os resultados organizados sob diferentes perspectivas; tais resultados apontam para o fato de que considerar diferentes dimensões envolvidas no processo pode desvendar informações que favorecem a compreensão da causa de dificuldades presentes na aprendizagem do Cálculo.*

**Palavras-chave:** ensino do Cálculo; professor-aluno; dimensão epistemológica.

### Abstract

*In this paper we aim to discuss the different components involved in teaching and learning of calculus, in particular those related to their own mathematical knowledge and expectations of individuals involved in the process: students and teachers. Starting with a brief background of the state of research concerning higher education, we present the project on the subject, which has been developed about a decade ago with masters and doctoral students in Mathematics Education. It is described the goals of sub-themes and methodological assumptions that have guided the project's progress. Dissertations and theses already approved provided the results organized from different perspectives, these results point out the fact that considering different dimensions involved in the process can uncover information that promote the understanding of the cause of difficulties in the learning of Calculus.*

**Keywords :** Teaching Calculus ; teacher-student ; epistemological dimension

### Introdução

A Educação Matemática, área do conhecimento de característica multidisciplinar, vem se ocupando há décadas com problemas relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática. Os resultados de pesquisas nessa área, respaldadas em teorias sobre o desenvolvimento cognitivo bem como a formação do pensamento, incluindo aí o pensamento matemático, foram sendo aceitos pela comunidade científica internacional. Essas teorias, em geral referem-se ao desenvolvimento cognitivo e/ou formação do

---

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – [benedito@pucsp.br](mailto:benedito@pucsp.br)

pensamento de jovens nas faixas etárias dos alunos da educação básica. Essa é uma das razões pela qual a atenção principal dos educadores matemáticos inicialmente estivesse voltada a esse nível de ensino. Outra população que tem sido alvo de investigação no que tange ao processo do ensino-aprendizagem da Matemática é aquela formada por professores e futuros professores do Ensino Básico. Daí a inserir estudantes e professores do Ensino Superior foi um passo. Mogens Niss, na conferência do ICMI9 (2000), traça um panorama das questões-chaves e tendências identificadas nas pesquisas em Educação Matemática, no qual situa a questão da inserção dos diversos níveis de ensino como problemas de pesquisa em Educação Matemática, assim como a evolução da área. Salienta o referido autor que no princípio as pesquisas realizadas focavam os objetos e fenômenos de estudo fundamentalmente relacionados à matemática escolar, sendo que a escola primária marca presença nas pesquisas durante todo o século XX e a escola secundária, a partir dos anos 60. No entanto, são agregados alguns aspectos da educação superior, a partir dos anos 80.

A Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), constituída no Congresso da União Internacional de Matemática de Roma em 1908, contava em 1914 com a adesão de vinte e oito países e já havia recebido uma grande quantidade de valiosos relatórios, dos quais os das Ilhas Britânicas formavam dois volumes de Relatórios Especiais, publicados pelo Conselho da Educação em 1912. Em 1928, em Bolonha, decidiu-se reativar a Comissão que se encontrava praticamente inativa e esse ano é visto como sendo o do reinício das atividades, culminando com duas sessões durante o Congresso de Matemáticos de Zurique. Nesse encontro, o Professor Hadamard, de Paris, foi indicado para suceder o Professor D. E. Smith, de Nova York, que vinha presidindo a Comissão desde a morte de Felix Klein (1925).

Em 1997 a Comissão decide organizar um estudo sobre o ensino e aprendizagem da Matemática no nível universitário. Em 2001, Derek Holton publica o trabalho *The Teaching and Learning of mathematics at University Level*, em que apresenta reflexões pessoais a partir de tal estudo.

Um dos pontos ressaltados pelo autor refere-se aos esforços para se ensinar matemática e manifesta a intenção de enfatizar a importância tanto da palavra ‘ensinar’ quanto da palavra ‘matemática’. Ensinar significando uma troca que se baseia na tomada de consciência dos conhecimentos e necessidades do estudante, o que possibilita o

estabelecimento de algum diálogo entre aluno e professor. Em relação ao processo de ensino, o professor identifica e tenta aplicar teorias de aprendizagens atualizadas. Quanto à Matemática, julga que devem ser feitas tentativas a fim de encorajar os alunos a descobrir resultados por eles próprios, permitindo que percebam que essa ciência é mais do que um conjunto de habilidades/algoritmos cuja reprodução é tradicionalmente solicitada nas avaliações.

O estudo identificou mudanças que tiveram profundo impacto no ensino da matemática no nível universitário. Uma delas foi o grande aumento do número de estudantes no ensino superior. Em algumas universidades pesquisadas, embora tenha havido uma duplicação do número de alunos matriculados, não houve semelhante aumento do número de estudantes em matemática. Por outro lado houve considerável mudança no rendimento médio dos estudantes do primeiro ano. O autor refere que muitos especialistas indicam que essa situação se deu no início dos anos 80 e enfatizam sua preocupação com o que vêem como uma espiral descendente da matemática na comunidade.

Quanto à pesquisa, Holton salienta que sempre imaginara que os problemas envolvidos no ensino da matemática eram os mais importantes e que resultados que valessem a pena somente poderiam ser obtidos por meio de grandes estudos realizados durante um longo período de tempo. Dessa forma, como se poderia provar alguma coisa em educação? Salienta que talvez esse seja o parecer ingênuo de um observador externo. Sem dúvida, há questões, não só na matemática como em outras disciplinas, que não serão resolvidas rapidamente. Entretanto é possível obter uma visão de importantes áreas da educação matemática sem grandes orçamentos e as idéias obtidas podem ser extremamente úteis para o ensino, especialmente no nível local. Aquilo que se descobre por si mesmo com os próprios alunos pode conduzir à melhoria do próprio ensino. Questionários simples, por exemplo, podem fornecer informações valiosas.

Considerando-se as diferenças entre formas de pesquisar na área de ciências humanas e sociais - como a Educação - e, na área de ciências exatas - como a Matemática -, parece natural que certo desconforto se manifestasse na discussão de métodos de investigação na área de Educação Matemática, de característica interdisciplinar. Além dessa tensão, outro embate se revela no confronto entre saberes do “matemático” e do “educador matemático”.

Parece haver um sentimento entre alguns matemáticos que educadores matemáticos pouco têm a contribuir ao fazer conferências ou lecionar no ensino superior (e possivelmente em outros níveis também). Embora haja comprovados resultados de pesquisas evidenciando preocupações em busca de teorias e metodologias, visando à melhoria do ensino e do aprendizado de matemática, em alguns lugares o abismo entre esses dois grupos é amplo e está longe de ser clara a maneira pela qual sejam convencidos a trabalhar juntos.

Compartilhamos com o ponto de vista de Holton segundo o qual ensino e pesquisa são inseparáveis para a acumulação de conhecimento, o progresso da ciência, da tecnologia e da civilização. Seguramente, matemáticos ensinam, mas comunicações internacionais se referem à disseminação de resultados de pesquisas e a estratégias de ensino, que muito podem contribuir para tal progresso.

A International Conference on the Teaching of Mathematics (ICMT) encoraja a comunicação entre matemáticos e educadores matemáticos e promove fóruns entre diferentes culturas. Essas conferências acontecem sempre de quatro em quatro anos e são de grande interesse tanto para professores de matemática quanto para aqueles que estão envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática do nível universitário.

Já foram realizadas três reuniões: A ICTM1 em 1998 em Samos, a ICTM2 em 2002 em Creta e a ICTM3 em 2006 em Istambul. Esta última reuniu um grande número de professores universitários de cinquenta e dois diferentes países, recebendo seiscentas propostas de trabalhos a serem apresentados das quais, após serem analisadas pelo Comitê Internacional, trezentos e cinquenta figuram nos anais do evento.

Vê-se, portanto que a comunidade está atenta às questões que envolvem o processo de ensino e aprendizagem da matemática e, em particular, do Cálculo no nível universitário.

Há que se ressaltar que este processo se compõe de diversas dimensões, como por exemplo, as dificuldades inerentes aos próprios conceitos da matemática, as expectativas dos atores envolvidos no processo (aluno ingressante na universidade, professor do ensino superior, professor da educação básica), dentre outras.

## 1. As dificuldades inerentes aos conceitos matemáticos

Uma componente que muito influencia o ensino do Cálculo é representada pelas dificuldades inerentes aos conceitos estudados nessa disciplina. Tais dificuldades, muitas vezes são de natureza histórico-epistemológica tendo em vista que se podem buscar as origens do Cálculo numa época que remonta cerca de vinte e cinco séculos, quando os gregos tentavam resolver o problema de determinação de áreas pelo processo, hoje conhecido como “método da exaustão”. Os traços iniciais do Cálculo Integral encontram-se em trabalhos de Arquimedes (Séc. III a.C.), que visavam calcular áreas e volumes de diversas figuras geométricas, incluindo o círculo, a esfera e o cilindro. Em sua obra “A quadratura da parábola”, faz referência, em uma carta enviada a Eratóstenes, a um método mecânico de descoberta. Nessa mensagem afirma que “certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis”. Salienta que quando se tem algum conhecimento prévio das questões é mais fácil fazer demonstrações e reitera em outra passagem dessa mesma carta que acredita que outros investigadores de seu tempo ou do futuro descobrirão outras proposições pelo seu método. Os trabalhos de Arquimedes, usando o método da exaustão já preconizado por Eudoxo, dentre todos da Grécia Antiga, são os que mais se aproximam da idéia de Integral. (Ávila, 1993). Interessante observar a expressão ‘demonstradas pela Geometria’ usada por ele; isso é decorrente do fato de que, após a solução genial ao impasse gerado pela questão da incomensurabilidade, dada por Eudoxo por meio da definição de proporção de grandezas (comensuráveis ou não), toda a matemática grega passa a ser fundamentada pela geometria.

No entanto foi no século XVII, com Newton e Leibniz, trabalhando independentemente um do outro, que o Cálculo Infinitesimal tomou forma e fundamentos consistentes. Newton fez uma importante descoberta para a matemática, denominado método dos fluxos, que resolveu o problema da determinação da tangente a uma curva de equação  $f(x, y) = 0$ . Para ele, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto, a saber,  $x$  e  $y$  eram fluentes, isto é, quantidades que fluem com o tempo e a taxa de variação desses fluentes, chamou de fluxo dos fluentes. Fluxões eram as velocidades dos movimentos ou os acréscimos dos fluentes às quantidades geradas. Introduziu ainda

o chamado momento de um fluente, que era o incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente em um intervalo de tempo também infinitamente pequeno. Ele próprio declara que utiliza o método dos fluxões na quadratura de curvas. Assim ele estabeleceu a questão fundamental: dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões e inversamente, fato esse que se traduz hoje pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que em termos da geometria significa resolver os dois problemas, o do cálculo de áreas sob uma curva e o do traçado da tangente à curva. Ressalta-se ainda que Newton apresenta idéias embrionárias sobre a noção de limite, ao retomar os “infinitamente pequenos”, caídos no esquecimento desde a matemática grega.

Na mesma época de Newton, Leibniz criou o triângulo harmônico, cujas analogias com o triângulo de Pascal o fascinaram e o levaram às séries infinitas. Munido desses dois instrumentos, Leibniz se volta à leitura de Pascal sobre aspectos da análise infinitesimal. Considerando um ponto de uma curva, toma um segmento da tangente nesse ponto para a hipotenusa ( $ds$ ) de um triângulo retângulo construído com catetos iguais, respectivamente, às diferenças das abscissas ( $dx$ ) e das ordenadas ( $dy$ ) dos extremos do segmento de tangente. Ao notar a similitude desse triângulo infinitesimal ou característico com o harmônico, percebeu relações que permitiram concluir que a determinação da tangente dependia da razão das diferenças  $dy$  e  $dx$ , quando essas se tornavam infinitamente pequenas e que as quadraturas dependiam das somas das ordenadas  $dy$ , alturas dos retângulos infinitamente finos que formam a área.

Como nos triângulos aritmético e harmônico os processos de tomar somas ou diferenças estão em relação oposta, também na geometria os problemas de quadratura e tangentes, dependendo de somas e diferenças respectivamente, são inversos um do outro. (BOYER, 1974, p.295)

Leibniz introduziu os símbolos  $\int$  e “ $d$ ” e concluiu que a área sob uma curva é composta por muitas faixas retangulares verticais infinitamente finas (de área  $ydx$ ), cuja soma indicou por  $\int ydx$ . Por meio de observações geométricas verificando que

$d \int ydx = ydx$  e, reciprocamente, que  $\int dy = y$ , mostrou a relação inversa entre  $\int$  e “ $d$ ”. (EVES, 2004)

O trabalho de Newton envolvia certas passagens em que, supondo o infinitésimo (que denotava por “ $o$ ”) diferente de zero, dividia ambos os membros de uma equação por “ $o$ ” e, em outras ocasiões, suprimia termos com esse fator, aparentemente supondo igual a zero. Também na obra de Leibniz, cujos infinitésimos são denotados por  $ds$ ,  $dx$ ,  $dy$ , algumas vezes são cancelados, como sendo diferentes de zero e outras são desprezados, como sendo zero. O Cálculo somente foi libertado dessas contradições no século XIX, denominado o ‘século do rigor’, com os conceitos fundamentais postos em bases aceitáveis do ponto de vista do rigor, particularmente a partir dos trabalhos de Cauchy. Entretanto o grande mérito de Newton e Leibniz foi a identificação da relação que existe entre a determinação de tangentes a uma curva num ponto e o cálculo da área da região limitada por essa curva.

Os conteúdos tratados nos cursos de Cálculo remontam ao conceito de função. Ao introduzir a palavra função, Leibniz visava designar qualquer das variáveis geométricas associadas a uma determinada curva. Paulatinamente tal noção foi assumindo especificidades, passando a designar a relação de dependência entre uma variável dependente e outras variáveis independentes, desvinculadas de uma determinada curva particular. Em conseqüência a palavra continuidade ficou por muito tempo associada à permanência de uma mesma expressão analítica que definia a função. A fundamentação do Cálculo teve como ponto de partida a definição de continuidade dada por Cauchy, que é muito próxima daquela consagrada atualmente.

Desde o estabelecimento do Teorema Fundamental do Cálculo por Newton e Leibniz, o tratamento dispensado à integração e à derivação fora sempre o de processos opostos um do outro. Somente com Cauchy foi que surgiu uma teoria de Integral independente da Derivada.

A epistemologia histórica traz à luz obstáculos e paradoxos que acompanharam a gênese dos conceitos da matemática e, em particular, os do Cálculo. Esse fato indica, por um lado, que o ensino pode se tornar mais eficaz se não for desvinculado da evolução histórica; e por outro lado, aponta para a necessidade de investigações e estudos a fim de melhor se conhecer esta importante componente do ensino, fato que poderá contribuir para uma melhor instrumentalização, visando à compreensão dos desafios envolvidos nas atividades docentes.

## 2. As expectativas

As dificuldades de alunos quanto à aprendizagem dos conteúdos envolvidos na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, que compõe a grade curricular de cursos de Exatas em diferentes áreas, se traduz pelo alto índice de reprovação e desistência do curso inicialmente escolhido pelo jovem universitário (SILVA, 2009).

Ao ingressarem no curso superior, os estudantes trazem suas expectativas: Aqueles que no Ensino Médio logravam sempre boas avaliações em matemática, levam para a universidade a esperança de que o curso de Cálculo não deva representar obstáculos para o seu aprendizado. Entretanto, ao se depararem com questões globais envolvendo os temas anteriormente estudados, em geral de modo departamentalizado, acrescidas de novas ideias impactantes como o infinito, as aproximações, a continuidade, a incomensurabilidade, etc., quase sempre veem frustradas suas expectativas iniciais.

De seu lado, os professores de Cálculo também têm suas expectativas quanto ao nível de desempenho dos alunos, muitas vezes guiado por uma visão idealizada de que os estudantes trazem uma bagagem da educação básica suficiente para compreender suas explicações e construir seu próprio saber matemático. Também os professores do ensino médio esperam que, com a matemática ensinada e o modo como o ensino foi conduzido por eles, possam concorrer para que os alunos sigam sem traumas um ‘bom’ curso de Cálculo na universidade.

Segundo Fonseca Bom (2003), as dificuldades que surgem na transição do estudo da matemática na educação básica para o estudo superior constituem um sério problema de pesquisa. O autor se reporta à teoria antropológica do didático de Chevallard, que estuda as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber. Fundamentando-se nessa teoria, postula que as organizações matemáticas que se estudam no ensino médio “são pontuais, rígidas e pouco articuladas entre si e, além disso, existem múltiplas discontinuidades entre a matemática ‘mostrativa’ da educação básica e a matemática ‘demonstrativa’ da universidade.” O autor fundamenta essa conclusão na análise de dados colhidos numa ampla mostra de estudantes, em que identificou respostas como as dadas nos livros textos, o que explicita que a relação pessoal dos alunos com as organizações matemáticas escolares está essencialmente determinada pela relação institucional.

Segundo o autor, percebe-se que o estudo realizado na educação básica está assentado num contrato didático baseado em organizações matemáticas pontuais, com procedimentos predominantemente algorítmicos, muito mais voltados aos processos que propriamente aos objetos matemáticos. O professor, ao desenvolver ‘bem’ os procedimentos acredita estar desempenhando a contento sua função e que seus alunos estão suficientemente preparados para iniciar um curso universitário em que haja estudos matemáticos.

Em contrapartida, na universidade as organizações matemáticas são globais, resultado do estabelecimento de relações entre conteúdos matemáticos e conhecimentos anteriormente adquiridos, caracterizando-se por demonstrações e generalizações diametralmente opostas à pura prática de procedimentos algorítmicos. O professor de Cálculo, muitas vezes, fica perplexo ao confrontar suas expectativas com a realidade da situação em que seus alunos se encontram.

Ainda que, muitas vezes, o professor de Cálculo também priorize ou reforce os procedimentos algoritmos, a própria natureza da disciplina manifesta seu caráter ‘globalizador’ de modo que até a pura prática procedural requer o estabelecimento de relações entre diferentes saberes isolados que os estudantes trazem da educação básica.

Então, se existem expectativas nos três segmentos - estudante, professor universitário e professor da educação básica - que envolvem a questão do Curso de Cálculo, parece oportuno investigar e refletir sobre essa realidade multifacetada, a fim de que, uma vez melhor conhecendo os fatos sobre ela, tanto professores quanto pesquisadores possam estar mais instrumentalizados para examiná-la e questioná-la, para procurar determinar os elementos que a compõem, a fim de tentar conscientizar-se do problema que ela comporta.

As quatro principais vertentes envolvendo o ensino do Cálculo – as expectativas dos três segmentos envolvidos e os conceitos estudados na disciplina de Cálculo – acreditamos, constituem um inesgotável manancial de questões a serem investigadas. Com esses pressupostos, vimos desenvolvendo há cerca de uma década, um projeto de pesquisa com alunos de mestrado e doutorado, sobre o qual passamos a discorrer.

### **3. O projeto**

Fundamentados nas considerações precedentes, trabalhamos no projeto “Componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor”, vinculado ao grupo de pesquisa ‘O elementar e o superior em Matemática’, que desenvolve investigações sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, explorando as quatro principais vertentes: o aluno ingressante nos de exatas, o professor da universidade, o professor da educação básica e as dificuldades inerentes aos próprios conteúdos da disciplina. Tais componentes constituem uma fonte de questões a serem investigadas a fim de se refletir sobre sua realidade para que, com mais conhecimentos sobre as suas condições, possamos examiná-la e questioná-la, na tentativa de identificar seus elementos constitutivos, para assim, poder intervir no processo de ensino e aprendizagem.

Essa problemática tem sido alvo de investigação na Educação Matemática. As dificuldades dos estudantes na aprendizagem e dos professores no ensino do Cálculo deveriam ser esperadas considerando-se que os conteúdos trabalhados trazem em sua gênese desafios, paradoxos, obstáculos, o que aponta para a necessidade de mais investigações para melhor compreensão dos conceitos que compõem essa disciplina. Pautados pelo princípio de que, no processo de ensino e aprendizagem das noções do Cálculo, dissociar as dimensões: saber, aluno e professor dos diferentes níveis de ensino, implica em deixar de lado variáveis essenciais desse processo, elaboramos um projeto cujo objetivo geral é tratar a referida problemática abarcando tais componentes.

O projeto está organizado na forma de subprojetos articulados, envolvendo as componentes do ensino e aprendizagem do Cálculo. Alguns estão em fase adiantada de desenvolvimento, enquanto que outros ainda se encontram na etapa inicial, porém já apresentando alguns resultados. São os seguintes os subprojetos:

Os obstáculos epistemológicos à aprendizagem de limite. São previstos a abordagem do obstáculo geométrico, o estudo da influência do conceito de função, a exploração do horror ao infinito e de outros obstáculos inerentes ao conceito.

A transição da educação básica para o ensino superior: Pretende-se investigar a coordenação de representação semiótica de conceitos e os conhecimentos mobilizados por alunos no curso de Cálculo.

Os significados atribuídos à variável (incógnita, termo geral, variáveis relacionadas, etc.) por alunos da educação básica e da universidade e por professores dos diferentes níveis de ensino.

A passagem do estudo de função de uma variável para o de mais de uma e seus efeitos no ensino e aprendizagem das derivadas parciais e da integral dupla.

A interferência do papel da relação funcional das variáveis na compreensão da derivada.

As representações de estudantes, professores e livros didáticos sobre integral.

As representações de professores, estudantes e livros didáticos referentes ao ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo. Explora-se o entendimento do papel das variáveis  $x$  e  $t$  na definição da função  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , e possíveis conseqüências na relação recíproca entre a derivada e a integral, cerne do Teorema Fundamental do Cálculo.

A evolução histórica do número  $\pi$ , visando ao estudo da gênese desse número relacionada com a questão da quadratura do círculo e a construção dos números reais.

A modelagem, vista como estratégia de ensino, para o estudo de conceitos matemáticos.

A questão da transição da educação básica para o ensino superior.

A disciplina inicial de Cálculo em cursos de matemática em universidades brasileiras e seu papel na formação de professores, a partir de 1934.

Dessa forma, a proposta é investigar, por meio de numa pesquisa colaborativa com os professores da educação básica, de que forma são introduzidos, conceitos fundamentais do Cálculo, como por exemplo: função, número real, infinito, etc. Buscando-se conhecer o tratamento que é dado a esses conceitos, procura-se diagnosticar as concepções dos docentes e quais as possíveis conseqüências tais concepções podem trazer para o ensino universitário.

Do ponto de vista do discente, objetiva-se investigar os conhecimentos mobilizados por ingressantes na universidade e as dificuldades que sejam inerentes à aprendizagem de

conceitos do Cálculo, a partir de estudo de concepções sobre variável e a inter-relação funcional entre variáveis em subconjuntos de números reais. Em particular, deseja-se avaliar a interferência da noção de função e principalmente a questão a inter-relação das variáveis envolvidas nesse conceito, no aprendizado das noções como continuidade, limite, derivada, integral, convergência.

Outro objetivo específico do projeto é avaliar os efeitos da epistemologia histórica sobre a compreensão de obstáculos que se revelam na aprendizagem de conceitos como limite, taxa de variação, tais como o horror ao infinito, a quadratura do círculo, a gênese do número  $\pi$ , a aritmetização do Cálculo, a noção de função, etc. Pretende-se avaliar também, por meio de análise de livros didáticos fundamentada na epistemologia, qual o tratamento dado a esses conceitos.

O desenvolvimento do projeto norteia-se pelo instrumental teórico-metodológico da pesquisa qualitativa compatível com os objetivos a serem alcançados e com as características dos resultados pretendidos. São estabelecidas duas estratégias de análise e de interpretação qualitativa: a análise histórica e a construção iterativa de uma explicação. Enquanto que na primeira estratégia, o pesquisador baseia-se num quadro teórico explícito para elaborar um roteiro sobre a evolução do fenômeno em estudo, na segunda, não supõe a presença prévia de um ponto de vista teórico; o processo de análise é fundamentalmente iterativo, sendo que o pesquisador elabora pouco a pouco uma explicação lógica do fenômeno estudado. (Laville, p.227).

Os sujeitos da investigação são alunos da educação básica, estudantes de cursos de exatas, professores da educação básica e da universidade, além de livros didáticos e livros de história da matemática. Pressupõe-se o conceito de função como elemento nuclear dos estudos realizados neste projeto, já que este é o conceito fundamental para o tratamento das idéias básicas do Cálculo. A gênese da noção de função até sua formalização estrutural/conjuntista norteia a elaboração de um amplo leque de questões a serem investigadas, tais como:

- 1) Que conseqüências a origem geométrica (e não numérica) do conceito de função trouxe para a compreensão da continuidade? Perdura no ensino a concepção de que função contínua é aquela que pode ser expressa por uma única expressão analítica?
- 2) Como a inter-relação entre as variáveis interfere na aprendizagem do limite de seqüências, a ponto de o número natural envolvido seja interpretado

apenas como um índice e não como a variável independente? 3) Qual a interferência do papel da relação funcional das variáveis pode dificultar a compreensão das taxas de variação? 4) Que influências a “aritimetização do Cálculo” trouxeram para o aprendizado de limite e continuidade de função? (SILVA, 2009, pp.6-7)

Dentre as estratégias de ação, estão previstos procedimentos como: elaboração e aplicação de questionários, elaboração e desenvolvimento de seqüências didáticas, análise de livros didáticos (referenciada na epistemologia dos conteúdos estudados), pesquisa sobre evolução histórica de conceitos a partir de levantamento bibliográfico, entrevistas, pesquisa colaborativa, gravação de vídeos, entre outros.

#### **4. Resultados**

Apresentamos a seguir um relato resumido de resultados obtidos nas pesquisas, destacando os fatos que consideramos mais relevantes, por subprojetos.

1) Em relação a *Obstáculos epistemológicos à aprendizagem de limite*, foram realizadas três pesquisas sobre a convergência de seqüências numéricas: uma com alunos que não haviam estudado limite, outra com alunos que já haviam estudado limite de funções de variáveis contínuas, mas não limite de seqüências e a terceira procurando investigar as concepções de alunos sobre limite e possíveis imbricações entre obstáculos epistemológicos relacionados a essas concepções. Na primeira, foi desenvolvido um trabalho com seqüências numéricas, abordando aspectos sobre a convergência e a monotonicidade e a relação entre expressões como “ter limite” e “ser limitada”. Embora, um primeiro momento, a identificação dessas duas expressões pelos alunos tivesse representado um obstáculo à aprendizagem, as atividades desenvolvidas pela pesquisadora permitiram que os alunos concluíssem que para ter limite, uma seqüência limitada necessita ser monótona. Com o segundo trabalho verificou-se que os estudantes resistem em desassociar o conceito de convergência de um movimento físico, que é traduzido pelas descrições que recorrem ao fato de que se  $n$  tende a infinito, a seqüência “se aproxima” do seu limite, e também que a função constante não tem limite, pois “não se aproxima” de nada. Foram propostas atividades que contrapunham essas concepções com exemplos de seqüências, o que proporcionou debates que, aparentemente levaram à dissociação desejada, pelo menos naquele momento. A análise

dos dados da última pesquisa fundamentou-se nos trabalhos de Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Robert (1982) e permitiu identificar indícios de possíveis imbricações entre alguns obstáculos e semelhanças e dessemelhanças entre os significados atribuídos a expressões utilizadas no estudo da noção de limite. Também aqui foi possível perceber que, mesmo discutindo diferentes tipos de sequências convergentes e não-convergentes, monótonas e não-monótonas, os alunos, muitas vezes, resistem em dissociar o conceito de convergência de um movimento físico.

2) No subprojeto: *significados atribuídos à variável e o conceito de função*, foram realizadas quatro pesquisas buscando identificar as representações e significados das variáveis por professores e alunos da educação básica. Uma delas fundamentou-se nos registros de representação semiótica de Duval e três, numa ferramenta teórico-metodológica denominada modelo 3UV (três usos da variável) de Ursini e Trigueiros (2001). Tal modelo apresenta uma decomposição do conceito de variável em seus três principais usos em álgebra elementar – incógnita, número genérico e variáveis relacionadas, ou variáveis em relação funcional – e as habilidades essenciais à compreensão de cada um deles para a aquisição do conceito de variável e, conseqüentemente, de função. Com base nos dados coletados, observou-se que os estudantes não apresentaram dificuldades em interpretar, simbolizar e manipular a variável como incógnita. Por outro lado, a compreensão da variável como número genérico e em relação funcional, demonstrou lacunas, as quais estão diretamente relacionadas à falta de explicitação de algumas das habilidades específicas de manipulação e de interpretação apresentadas no modelo 3UV, necessárias à compreensão do conceito. Também se observou que os professores demonstraram dificuldades no que se refere à interpretação e à simbolização das variáveis em relacionamento funcional e como número genérico. Verificou-se que, tanto entre os alunos como professores, houve caso em que ao se questionar, por exemplo, quantos valores a letra  $x$  pode assumir na expressão  $x + 7$ , houve participantes que a igualaram a zero, dando o resultado  $x = - 7$ . Este tipo de procedimento, que as criadoras do modelo também identificaram entre sujeitos de suas pesquisas, pode ser conseqüência do contrato didático que vigora na educação básica alicerçado em manipulações algorítmicas para se encontrar um resultado numérico. O quarto trabalho refere-se a uma intervenção de ensino objetivando introduzir o conceito de função tentando enfatizar a compreensão das variáveis dependentes e independentes, e do

relacionamento entre elas. Os resultados obtidos levam a concluir que houve uma evolução por parte dos alunos, na apreensão do conceito de função, favorecido pela compreensão de tal relacionamento e pelas correspondentes articulações entre os diferentes registros de representação da função.

Ainda sob esse tema foram realizadas mais duas pesquisas: uma delas sobre a função afim e a outra sobre as funções seno e co-seno, ambas utilizando software, nas intervenções. As investigações evidenciaram que o ambiente informático estabelecido possibilitou uma nova forma de trabalhar com os alunos, de avaliar seus desempenhos, enfim, de desenvolver o processo de ensino-aprendizagem dessas funções, mais especificamente da conversão do registro gráfico para o algébrico.

3) Até o momento foram concluídos dois trabalhos sobre a *Passagem do estudo de função de uma variável para o caso de mais de uma*, com o objetivo de verificar as dificuldades e conhecimentos manifestados por estudantes relativos à transição do estudo das funções de uma variável para o caso de duas, no que diz respeito às variáveis dependentes e independentes e à interdependência entre elas, ao domínio e ao gráfico, à relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função e ainda quais manifestações são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem. Nas duas investigações se trabalhou com questões provocativas, uma para resolução de problemas e a outra para investigação da manipulação do livro didático. Ambas revelaram dificuldades que os alunos apresentam quando estudam as funções de duas variáveis, tais como: a não compreensão do sistema de eixos em três dimensões, a falta de clareza na determinação e representação do domínio da função, a dificuldade em realizar a conversão do registro da língua natural para o algébrico em situações contextualizadas, a confusão entre o registro gráfico do domínio e o da função, e para a interpretação do gráfico de uma função de duas variáveis, dificuldades estas que se refletem negativamente no estudo das derivadas parciais.

4) A realização de duas investigações sobre *A interferência do papel da relação funcional das variáveis na compreensão da derivada*, revelou que os alunos participantes deram indícios de que a noção de variação é uma concepção espontânea e a sua utilização como ponto de partida para se abordar o conceito de derivada mostrou-se uma escolha acertada. A ‘essência’ do conceito de derivada e também sua estreita ligação com o coeficiente angular da reta tangente parece ter sido bem interiorizado

pelos sujeitos. Além disso, há indicações de a maioria se convenceu que a derivada é uma ferramenta eficaz para resolver problemas de máximo e de mínimo. É bem verdade que os estudantes não estavam acostumados a resolver questões como as que foram propostas o que, no início, representou certa dificuldade na execução das tarefas; isto sinaliza que a ruptura do contrato didático habitual, representada por esse tipo de atividades, requer uma renegociação que se dá aos poucos, exigindo do professor ações visando a promover discussões e também propor exercícios que promovam a exploração dos conceitos institucionalizados.

5) Relativamente à temática das *representações de estudantes, professores e livros didáticos sobre integral*, foram realizadas seis pesquisas, sendo três delas referentes ao livro didático: duas com o objetivo de investigar o tratamento dado ao conceito de Integral por livros e a outra analisando de que maneira os estudantes manipulam as representações do manual para iniciar o estudo de tal conceito. Dos outros três trabalhos, um investiga os efeitos de um ambiente computacional na introdução da noção de integral; outro pesquisa as concepções reveladas por um grupo de professores ao corrigir produções de alunos e o último se propõe a averiguar que componentes do conceito de integral permanecem para o aluno, passados alguns semestres após a realização do curso regular. Nesta última investigação buscou-se analisar os conhecimentos explicitados por alunos que já estudaram o conceito, tanto no aspecto das técnicas de integração como no significado e na aplicação do mesmo. Procurou-se verificar se estes conhecimentos refletiam concepções operacionais e/ou estruturais no sentido atribuído por Anna Sfard (1991). Essa autora postula que noções abstratas podem ser concebidas de duas maneiras fundamentalmente diferentes: de modo estrutural (como objeto) e de modo operacional (como processo). Observou-se que a totalidade dos alunos pesquisados, aparentemente mobilizara a concepção estrutural, uma vez que manipularam o objeto matemático para determinar a área de regiões planas sob o gráfico de funções, mas quando colocados numa situação particular em que se exigia uma reflexão para o emprego do conceito como objeto, eles não exibiram suficiente segurança em sua concepção estrutural, procurando refúgio em processos algébricos. Exemplo desse procedimento foi encontrado em vários protocolos de estudantes

expressando que sabiam que o valor da integral  $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$  era  $2\pi$ , por ser a área de um semicírculo de raio 2, mas que não sabiam calculá-la. Novamente aqui se

manifesta o contrato didático fundamentado em procedimentos algorítmicos. A investigação sobre os efeitos do trabalho em ambiente computacional revelou que o aprendizado do conceito de integral passa a ser mais significativo, contextualizado e motivado, com o uso do computador.

6) Os três trabalhos já finalizados sobre *as representações de professores, estudantes e livros didáticos referentes ao Teorema Fundamental do Cálculo - TFC* - evidenciam que os obstáculos para os estudantes compreenderem o significado do teorema estão relacionados com uma incompleta mobilização das noções de derivada, integral, continuidade e da dificuldade de relacionar as representações gráficas das funções envolvidas, esta quase sempre decorrente do não entendimento do papel das variáveis  $x$

e  $t$  na definição da função  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  e possíveis

conseqüências na identificação da relação recíproca entre a derivada e a integral. Quanto aos livros analisados, observou-se que a questão referente à inter-relação entre derivada e integral, proporcionada pelo TFC, em geral, não é suficientemente enfatizada. Relativamente às representações, os autores exploram a coordenação de registros em seus livros, embora uns a façam de forma mais evidente que aquela sugerida por outros. A pesquisa sobre as representações de professores procurou enfatizar o papel da identificação das variáveis visuais pertinentes, na conversão do registro gráfico para o algébrico e vice-versa e nas argumentações na língua natural. Constatou-se que os professores consideram importante no ensino do TFC enfatizar que o mesmo pode ser utilizado como uma ferramenta para o cálculo de integrais (e conseqüentemente, de áreas) e que estabelece uma conexão entre derivação e integração, mas essa conexão não é explorada graficamente, por totalidade dos entrevistados. Com relação à inter-relação entre as variáveis visuais pertinentes evidenciou-se que nem sempre foram destacadas pelos professores, na articulação de diferentes registros. Ao analisarem uma situação que explora graficamente essa conexão, alguns afirmaram que, apesar de propor situações parecidas, não percebiam de que modo essas situações poderiam contribuir para o entendimento do Teorema.

7) Sobre a *gênese do número  $\pi$ , relacionada com a questão da quadratura do círculo e a construção dos números reais*, foram realizados dois estudos: um deles é uma pesquisa bibliográfica sobre a evolução história do número  $\pi$ , que aborda a questão da

quadratura do círculo e a preocupação dos antigos gregos com o rigor e os fundamentos da matemática. O outro trata do tema da densidade dos números reais, com o objetivo de investigar a concepção e a reação dos professores do ensino médio frente aos diferentes registros de representação dos números, quando é analisada a propriedade da densidade. A proposta dessa pesquisa é investigar a viabilidade de dois tipos de procedimentos distintos para a obtenção de números reais situados entre dois números dados: o procedimento da média aritmética e outro inspirado no processo de diagonal de Cantor, utilizando a representação decimal dos números reais. Constatou-se que apesar do envolvimento dos participantes, persistem algumas dificuldades identificadas em pesquisas anteriores, como por exemplo, a associação da representação infinita com irracionalidade e a classificação de um número racional como sendo somente aquele que tem representação finita. Alguns professores demonstraram a intenção de desenvolver questões similares às da seqüência trabalhada, com seus alunos do ensino médio.

8) Foram realizadas quatro pesquisas sobre *a Modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem*, sendo duas com estudantes de Engenharia, uma com professores do ensino médio e outra com alunos também da educação básica. A análise dos dados mostrou que a modelagem matemática foi uma abordagem adequada para a introdução dos estudos de equações diferenciais, motivando o processo de associar um fenômeno real a objetos matemáticos e de identificação de uma equação matemática como uma ferramenta aliada no importante trabalho de entender e tomar decisões a respeito de problemas ligados a fenômenos naturais. Em relação aos professores, as respostas dadas pelos nossos participantes, indicam aceitação momentânea da utilização da modelagem matemática para a prática docente. No entanto, a ‘aparente aceitação’ dessa metodologia necessita de futuras comprovações.

9) A questão da *transição da educação básica para o ensino superior*, foi realizada uma pesquisa com o objetivo investigar como a coordenação de registros de representação contribui para a explicitação dos conhecimentos mobilizados por alunos ingressantes no curso de Cálculo, frente a tarefas organizadas com base no conceito de função. O trabalho fundamentou-se na teoria dos registros de representação semiótica, destacando o papel da identificação das variáveis visuais pertinentes, no traçado de gráficos, nos tratamentos e conversões de registros e nas argumentações na língua natural. Baseou-se também no Contrato Didático, sobretudo, no que se refere a seus

efeitos. A análise dos dados permitiu observar que a identificação das variáveis visuais pertinentes contribuiu para uma evolução em relação à interpretação global dos problemas propostos. O registro da língua natural, em particular, mostrou-se adequado, pois, por meio dele foram revelados conhecimentos que, geralmente, ficam “mascarados” por algoritmos mecânicos e convencionais. Em relação ao objeto função, constatou-se que nem sempre o mecanismo do inter-relacionamento entre as variáveis foi percebido de modo claro por alguns alunos, em distintos registros. Com base no contrato didático, foram identificadas evidências da utilização da generalização abusiva e de muitos tratamentos de localização por seleção de pontos, expressos no registro da língua natural, mesmo tendo sido realizada anteriormente uma interpretação global pelos alunos. O fato pôde ser comprovado em razão de os alunos insistirem na busca da validação dos resultados obtidos graficamente, no registro algébrico e no numérico. Por outro lado, o mesmo fato pôde ser interpretado tomando por base os registros de representação semiótica, uma vez que o tratamento pontual exige menor complexidade se comparado ao de interpretação global, o que torna mais fácil a elaboração das argumentações.

10) Acha-se em fase de finalização uma pesquisa referente à evolução da disciplina de Cálculo no curso de Matemática da Universidade de São Paulo, desde a sua fundação, em 1934. Resultados Parciais apontam que o processo de transição de uma disciplina inicialmente de Análise para uma de Cálculo foi lento, gradual e com diversas idas e vindas, e que embora tendo passado a se chamar Cálculo em 1964, foi somente a partir do começo dos anos 1990 que se tornou, de fato, mais semelhante àquela estudada atualmente. (LIMA, G.L.; SILVA, B.A., 2011).

### **Considerações finais**

Investigações sobre as componentes envolvidas no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo abrem um imenso leque de questões a serem pesquisadas a fim de que se possa municiar de instrumentos que permitam examiná-las e questioná-las na tentativa de identificar os elementos que as compõem.

A epistemologia histórica desvenda obstáculos e paradoxos que acompanharam a gênese dos conceitos da matemática e, em particular, os do Cálculo, sugerindo que o ensino pode se tornar mais eficaz se não for desvinculado da evolução histórica e ao

mesmo tempo aponta para a necessidade de investigações e estudos a fim de melhor se conhecer esta importante componente do processo de ensino e aprendizagem; somando-se a isso, levar em conta as expectativas dos agentes do processo, pode ser fator significativo para uma melhor instrumentalização, visando à compreensão dos desafios envolvidos nas atividades docentes.

O levantamento de uma vintena de investigações realizadas no grupo de pesquisa objetiva dar um panorama do que está sendo realizado em tal grupo, no sentido de se refletir sobre as expectativas do aluno ingressante nos cursos de exatas, do professor da universidade e do professor da educação básica, além das dificuldades inerentes aos conteúdos da própria disciplina de Cálculo.

Não se pretende sugerir a reprodução dos resultados apresentados nas pesquisas, mas sim a ‘transferibilidade’ no sentido de Valles (1977), entendida como “a possibilidade de utilização dos procedimentos e resultados encontrados, em situações semelhantes, respeitadas as peculiaridades dos novos contextos”.

A fundamentação teórico-metodológica, bem como os pormenores dos resultados obtidos nas pesquisas, podem ser encontrados no site [www.pucsp.br/pos/edmat](http://www.pucsp.br/pos/edmat).

### **REFERÊNCIAS:**

ÁVILA, G. (1993). Introdução à Análise Matemática. São Paulo: Editor Edgard Blücher Ltda.

BLOCH, I. (2000). L’enseignement de l’analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation. Bordeaux: Université Bordeaux I.

BOYER, C. B. (1949). The history of the calculus and its conceptual development. New York: Ed. Dover Publications.

DELAHAYE, J.P. (1997). Le fascinant nombre  $\pi$ . Paris: BELIN Pour la Science.

EVES, H. (2004). Introdução à História da Matemática. Tradução: Higyno Huguieiros Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP.

FONSECA BOM, C. (2003). Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria. Tese. Universidad de Vigo. Espanha.

- HOLTON, D. (2001). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. In: New ICMI Study Series: Vol.7.
- KATZ, V.J. (1998). A history of mathematics: an introduction. University of the District of Columbia: Addison-Wesley.
- LAVILLE, C.; DIONNE J. (1999). A construção do saber. Porto Alegre: Artmed Editora.
- LIMA, G.L.; SILVA, B.A. (2011). Inicialmente Cálculo ou diretamente Análise? O caso do curso de Matemática da USP. In: Anais do CIAEM. Recife.
- MAYER, J.F.C.A.; JÚNIOR, A.J.S. (2002). A utilização do computador no processo ensinar-aprender Cálculo: a constituição de grupos de ensino com pesquisa no interior da universidade. In: Zetetiké n° 10. V.17/18, Campinas: UNICAMP.
- SILVA, B.A. (2008). Contrato Didático. In: Sílvia Dias Alcântara Machado. (Org.). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. 3ª ed. São Paulo: EDUC.
- (2009). SILVA, B.A. Componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: Saber, Aluno e Professor. In: Anais do IV SIPEM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- VALLES, M.S. (1997). Técnicas cualitativas de investigación social; Reflexion metodológica y práctica Professional. Madri: Ed. Síntese Sociologia.