EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i5p057-080

Articulando combinatória e probabilidade: modelando o currículo dos anos finais do ensino fundamental

Articulating combinatorics and probability: modeling the curriculum of middle school

Articulando combinatoria y probabilidad: modelando el currículo de la escuela intermedia

Articuler la combinatoire et la probabilité : modéliser le curriculum du collège

Ewellen Tenório de Lima[1]
Universidade Federal de Pernambuco
Doutora em Educação Matemática e Tecnológica
https://orcid.org/0000-0002-3654-0370

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba[2]
Universidade Federal de Pernambuco
Doutora em Psicologia Cognitiva
https://orcid.org/0000-0002-5098-4461

Resumo

Este trabalho consiste em um recorte de um estudo de tese de doutorado que teve o seguinte problema de pesquisa: Como a Combinatória e a Probabilidade são abordadas em diferentes instâncias curriculares dos Anos Finais e o que se pode fazer para articular essas temáticas? Nesse sentido, à luz da Teoria dos Campos Conceituais e de classificações de diferentes situações combinatórias e probabilísticas, a pesquisa em questão teve por objetivo investigar Combinatória, Probabilidade e suas articulações em currículos prescritos e apresentados aos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para tal, foram analisados documentos curriculares oficiais e livros didáticos e, a partir dos achados de tais etapas da pesquisa, foi construído um material direcionado ao professor. No presente texto, esse material é apresentado, sendo o mesmo composto por oito blocos de questões que consistem em adaptações de problemas presentes nos livros didáticos analisados (material ao qual o professor, e seus estudantes, já têm acesso). As adaptações propostas visaram ampliar os contextos abordados, permitindo que a partir de problemas combinatórios sejam exploradas as diferentes demandas cognitivas da Probabilidade. Ainda, foram contemplados diferentes níveis de dificuldade, em função do número de possibilidades envolvidas e das representações simbólicas apresentadas ou

[1] ewellen.lima@ufpe.br
[2] resrborba@gmail.com

solicitadas aos estudantes. Destaca-se que tal material, assim como os demais aos quais o professor pode vir a ter acesso, não deve ser encarado como pronto e acabado, mas, sim, como um ponto de partida: o mesmo pode e deve ser moldado (pelo professor) às diferentes necessidades e objetivos de sua sala de aula.

Palavras-chave: Combinatória, Probabilidade, Articulações, Proposta, Anos finais.

Abstract

This work presents an excerpt from a doctoral thesis study that addressed the following research question: How are Combinatorics and Probability approached in different curricular instances for Middle School, and what can be done to articulate these topics? In this regard and based on the Theory of Conceptual Fields and classifications of different combinatorial and probabilistic situations, the research aimed to investigate Combinatorics, Probability, and their articulations within both prescribed and presented curricula of Middle School. To this end, official curriculum documents and textbooks were analyzed. Based on the findings from these stages of the research, a teacher-oriented resource was developed. This paper presents this material, which consists of eight sets of tasks adapted from problems found in the textbooks analyzed – materials already accessible to teachers and their students. The proposed adaptations aim to expand the contexts addressed, allowing for the exploration of different cognitive demands of Probability through combinatorial problems. Moreover, the questions also cover a range of difficulty levels, related to the number of possibilities involved and the symbolic representations presented or required from the students. It is important to emphasize that this material, like any other educational resource a teacher may use, should not be viewed as definitive or complete. Rather, it is intended as a starting point: one that can and should be adapted by teachers to suit the specific needs and goals of their classrooms.

Keywords: Combinatorics, Probability, Articulations, Proposal, Middle school.

Resumen

Este trabajo consiste en un recorte de un estudio de tesis doctoral que tuvo el siguiente problema de investigación: ¿Cómo se abordan la Combinatoria y la Probabilidad en diferentes instancias curriculares de Escuela Intermedia y qué se puede hacer para articular estas temáticas? En este sentido, a la luz de la Teoría de los Campos Conceptuales y de clasificaciones de diferentes situaciones combinatorias y probabilísticas, la investigación en cuestión tuvo como objetivo investigar la Combinatoria, la Probabilidad y sus articulaciones en los currículos prescriptos y presentados a la Escuela Intermedia. Para ello, se analizaron documentos curriculares oficiales y libros de texto y, a partir de los hallazgos de estas etapas de la investigación, se construyó un material dirigido al profesorado. En el presente texto se presenta dicho material, el cual está compuesto por ocho bloques de cuestiones que consisten en adaptaciones de problemas presentes en los libros de texto analizados (material al cual el profesor, y sus estudiantes, ya tienen acceso). Las adaptaciones propuestas tuvieron como objetivo ampliar los contextos abordados, permitiendo que, a partir de problemas combinatorios, se exploren las diferentes demandas cognitivas de la Probabilidad. Además, se contemplaron distintos niveles de dificultad, en función del número de posibilidades involucradas y de las representaciones simbólicas presentadas o solicitadas a los estudiantes. Cabe destacar que dicho material, al igual que otros a los que el profesor pueda tener acceso, no debe considerarse como definitivo y acabado, sino más bien como un punto de partida: este puede y debe ser modelado (por el profesor) a las diferentes necesidades y objetivos de su aula.

Palabras clave: Combinatoria, Probabilidad, Articulaciones, Propuesta, Escuela intermedia.

Résumé

Ce travail constitue un extrait d'une étude de thèse de doctorat qui avait pour problématique : Comment la Combinatoire et la Probabilité sont-elles abordées dans différentes instances curriculaires du Collège, et que peut-on faire pour articuler ces thématiques ?? Dans cette perspective, à la lumière de la Théorie des Champs Conceptuels et de classifications de différentes situations combinatoires et probabilistes, la recherche avait pour objectif d'étudier la Combinatoire, la Probabilité et leurs articulations dans les curriculums prescrits et mis en œuvre au Collège. Pour ce faire, des documents curriculaires officiels ainsi que des manuels scolaires ont été analysés. À partir des résultats obtenus dans ces étapes de la recherche, un matériel à destination des enseignants a été élaboré. Le présent article présente ce matériel, composé de huit blocs de questions, constitués d'adaptations de problèmes issus des manuels scolaires analysés (matériel auquel les enseignants et leurs élèves ont déjà accès). Les adaptations proposées visaient à élargir les contextes abordés, permettant d'explorer, à partir de problèmes combinatoires, les différentes exigences cognitives de la Probabilité. En outre, différents niveaux de difficulté ont été pris en compte, en fonction du nombre de possibilités impliquées et des représentations symboliques présentées ou demandées aux élèves. Il convient de souligner que ce matériel, comme tout autre auquel l'enseignant peut avoir accès, ne doit pas être considéré comme un produit fini et définitif, mais plutôt comme un point de départ : il peut et doit être adapté (par l'enseignant) aux besoins et objectifs spécifiques de sa classe.

Mots-clés : Combinatoire, Probabilité, Articulations, Proposition, Collège.

Articulando Combinatória e Probabilidade: Modelando o Currículo dos Anos Finais do Ensino Fundamental

A Combinatória é a área da Matemática que desenvolve ferramentas para "enumerar todos os modos possíveis em que um dado número de objetos pode ser combinado de maneira que se esteja seguro de que nenhuma das possibilidades foi omitida" (Batanero et al., 1996, p. 17, tradução livre). Por sua vez, a Probabilidade "cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios" (Morgado et al., 1991, p. 119). Tais modelos tornam-se imprescindíveis para analisar situações sobre as quais não temos certeza dos resultados, pois "entre o certo ou o seguro (o que ocorrerá necessariamente ou que é verdadeiro sem dúvida alguma) e o impossível (o que não pode ocorrer nunca) está o provável" (Godino et al., 1991, p. 19, tradução livre).

Dessa forma, Combinatória e Probabilidade possibilitam a compreensão de eventos aleatórios, nos munindo de ferramentas matemáticas que permitem levantar quantos e/ou quais são os resultados possíveis em dado contexto, bem como prever a probabilidade de que um evento específico venha a ocorrer.

Estas são temáticas relativamente recentes no currículo de Matemática da Educação Básica, tendo surgido pela primeira vez no bloco de Tratamento da Informação nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998). Nesse sentido, o seu ensino, sua aprendizagem e a evolução de como estas temáticas se fazem presentes no currículo têm sido foco de pesquisas em Educação Matemática.

A pesquisa aqui relatada entende currículo à luz de Sacristán (2000), isto é, considera que este vai muito além de uma seleção ordenada de conteúdo. Considera-se que o mesmo passa por diversas transformações, influencia e é influenciado por diferentes agentes até se concretizar na prática (dos professores), bem como na aprendizagem (dos estudantes). Assim, sua compreensão considera "seis momentos, níveis ou fases no processo de desenvolvimento, que descobrem campos de defesa peculiares, que nos ajudam a compreender conexões entre tais níveis e que tornam manifesto como [...] existem essas outras fases" (Sacristán, 2000, p. 104), sendo eles: currículo prescrito, currículo apresentado, currículo moldado (ou modelado) pelo professor, currículo em ação, currículo realizado e currículo avaliado.

O presente artigo apresenta um recorte de uma tese de doutorado que englobou três estudos (Figura 1), relaciona-se diretamente às três primeiras instâncias curriculares supracitadas, tendo por objetivos específicos: 1. Investigar as prescrições curriculares para o trabalho com a Combinatória e a Probabilidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental; 2. Analisar como tais temáticas são abordadas em livros didáticos de tal etapa da escolarização;

além disso, defendendo a articulação entre ambas as temáticas tendo em vista o amplo desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico, 3. Construir uma proposta de problemas articulados a serem explorados em sala de aula.

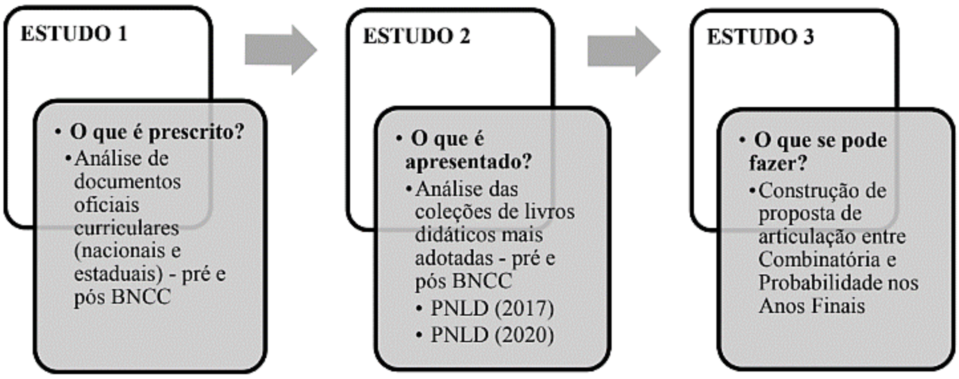


Figura 1.

Estrutura da pesquisa (Lima, 2022)

O produto deste último objetivo (Estudo 3), conjunto de questões articuladas, é o foco principal do presente texto. Esse tipo de material representa um currículo que foi modelado (pelas pesquisadoras), mas que é apresentado (ao professor), visto que a instância referente ao *currículo moldado* é essencialmente marcada pelo professor enquanto agente transformador do currículo, pois este profissional:

> é um agente ativo muito decisivo na concretização dos conteúdos e significados dos currículos, moldando a partir de sua cultura profissional qualquer proposta que lhe é feita, seja através da prescrição administrativa, seja do currículo elaborado pelos materiais, guias, livros-texto, etc. [...] é um 'tradutor' que intervém na configuração dos significados das propostas curriculares. O plano que os professores fazem do ensino, ou o que entendemos por programação, é um momento de especial significado nessa tradução (Sacristán, 2000, p. 105).

Os principais aportes teóricos utilizados na pesquisa de tese em questão e que, portanto, embasam as discussões desenvolvidas no presente trabalho são apresentados na seção a seguir.

Aportes teóricos

A Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1996) permite analisar processos de ensino e de aprendizagem, partindo-se da perspectiva do desenvolvimento de conceitos. De acordo com o autor, um conceito é formado pelo tripé dos conjuntos das *situações* que atribuem sentido a tal conceito; dos *invariantes*, ou seja, propriedades imutáveis que caracterizam cada tipo de situação; e das *representações simbólicas* utilizadas para representá-los. Vergnaud (1996) destaca, ainda, que "para estudar o funcionamento e o desenvolvimento de um conceito é necessário considerar estes três planos ao mesmo tempo" (p. 166).

Esse autor define um campo conceitual como "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (Vergnaud, 1986, p. 10). É válido destacar que as temáticas foco do presente trabalho, Combinatória e Probabilidade, estão inseridas no campo conceitual das estruturas multiplicativas, visto que este campo conceitual é composto pelo "conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações" (Vergnaud, 1996, p. 167).

De forma complementar, com o intuito de caracterizar especificamente as situações combinatórias, adotou-se a categorização de Borba (2010). A autora unificou classificações anteriores e organizou tais situações com base em seus invariantes de esgotamento (comum a todas as situações), de ordem e de escolha. Assim, na presente pesquisa são consideradas as situações combinatórias de: produto de medidas, arranjo, combinação e permutação.

São problemas que abordam a situação de produto de medidas aqueles nos quais estão envolvidos dois ou mais conjuntos de elementos, dos quais devem ser escolhidos um elemento de cada para formar as possibilidades. Nesse tipo de situação, a ordem dos elementos não determina possibilidades distintas. Exemplo: De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode se vestir em uma viagem tendo levado em sua mala 3 calças, 4 camisetas e 2 sapatos? (24 maneiras).

Nos problemas de arranjo apenas um conjunto está envolvido e a escolha consiste em alguns elementos desse conjunto. Nesse caso, a ordem determina possibilidades distintas. Exemplo: Quantas senhas de dois dígitos distintos Marlon pode formar utilizando letras do seu nome? (30 senhas).

Por sua vez, nos problemas de permutação apenas um conjunto está envolvido, mas todos os elementos devem ser utilizados simultaneamente. Assim, a ordem desses elementos determinará as diferentes possibilidades. Exemplo: De quantas maneiras 3 pessoas podem se organizar em uma fila? (6 maneiras).

Por fim, problemas de combinação também envolvem elementos de um único conjunto, do qual alguns elementos devem ser escolhidos. No entanto, nesse tipo de situação, ao contrário da de arranjo, a ordem dos elementos não determina possibilidades distintas. Exemplo: Quantos trios distintos podem ser formados a partir de 5 amigos? (10 trios).

Já no que diz respeito à caracterização das diferentes situações probabilísticas, na presente pesquisa tomou-se por base a argumentação de Bryant e Nunes (2012). Esses autores afirmam que o amplo entendimento da Probabilidade está atrelado a quatro demandas cognitivas, que se relacionam com: a aleatoriedade; o espaço amostral; a comparação e quantificação de probabilidades; e a correlação.

O entendimento da aleatoriedade se refere à própria compreensão de que resultados de experimentos aleatórios não podem ser previstos com certeza, bem como ao entendimento da independência de eventos em sequências aleatórias. Por exemplo: ao lançar uma moeda, não temos certeza do resultado a ser obtido (podendo ocorrer tanto ser cara, quanto coroa). Ainda, ao lançar essa moeda 50 vezes, é essencial perceber que cada um dos lançamentos é independente dos resultados anteriores.

Relacionado à segunda demanda cognitiva apontada pelos autores, o espaço amostral consiste no conjunto de todos os possíveis resultados de um dado experimento aleatório, possuindo estreita relação com o pensamento combinatório. Ao dominar tal demanda cognitiva, os estudantes devem ser capazes de compreender e construir espaços amostrais simples e compostos, o que irá embasar a análise de probabilidades, inclusive, permitindo compará-las e/ou quantificá-las.

Destaca-se que a comparação e a quantificação de probabilidades são apresentadas pelos autores como uma única demanda, estando relacionada ao pensamento proporcional: para comparar probabilidades é necessário considerar os espaços amostrais envolvidos e não apenas a quantidade absoluta dos elementos em cada caso. Ainda, para quantificar probabilidades, é utilizada a razão entre os casos favoráveis e todos os casos possíveis existentes (espaço amostral) em dado contexto.

Por fim, a correlação está relacionada ao entendimento de associações ou influência entre eventos. Tal demanda não é contemplada nos currículos dos Anos Finais do Ensino Fundamental e, portanto, foi suprimida da proposta apresentada no presente artigo. Destaca-se, no entanto, que o entendimento de correlações tem papel importante em etapas mais avançadas da escolarização, pois permite, inclusive, analisar riscos probabilísticos e aplicar conhecimentos de Probabilidade para tomar decisões relacionadas a situações reais.

Nas próximas seções serão levantadas discussões, ainda, relacionadas às representações simbólicas comumente utilizadas ao se trabalhar Combinatória e Probabilidade. Essas representações são essenciais na resolução de problemas, bem como devem ser gradualmente aprendidas para que se desenvolva amplamente os dois raciocínios. Defende-se que diferentes tipos de situações combinatórias e probabilísticas estejam presentes em sala de aula (inclusive de maneira articulada), de maneira que se possa explorar seus invariantes e incentivar o uso de representações simbólicas variadas e adequadas a cada etapa da escolarização.

A seguir, são retomados os principais resultados dos Estudos 1 e 2, já apresentados em trabalhos anteriores. Tais resultados servirão de base para a apresentação e discussão da proposta que consiste em um conjunto de problemas articulados visando explorar diferentes aspectos de conceitos e situações relacionadas à Combinatória e à Probabilidade em sala de aula junto a estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Combinatória e Probabilidade nos Currículos dos Anos Finais

As análises de currículos prescritos e apresentados aos Anos Finais do Ensino Fundamental, etapas da pesquisa de tese aqui enfocada, foram abordadas em detalhes em Lima e Borba (2021; 2022a).

Em resumo, o Estudo 1 consistiu na análise de currículos prescritos aos Anos Finais do Ensino Fundamental. O objetivo do mesmo foi investigar como é prescrito o trabalho com Combinatória, com Probabilidade e se e como estão postas relações entre conhecimentos relacionados a tais temáticas em documentos oficiais voltados para os Anos Finais do Ensino Fundamental. A análise dessa instância curricular se deu tendo-se em vista os papéis assumidos por esses documentos, dentre eles o de via de controle sobre práticas de ensino, de organização do saber dentro da escolaridade, de percussor de cultura comum e de precursor da igualdade de oportunidades na escolarização oficial (Sacristán, 2000). Este tipo de documento atua na seleção do que será efetivamente ensinado em sala de aula e tem, portanto, grande influência nas demais instâncias curriculares.

Neste sentido, à luz dos referenciais teóricos anteriormente apresentados, foram analisados documentos nacionais e estaduais: os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (Pernambuco, 2012) e o Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2019).

Neste primeiro estudo, no que se refere à Combinatória, os resultados apontaram, principalmente, que um espaço insuficiente vem sendo ocupado por essa temática. Os documentos curriculares analisados não detalham o trabalho com diferentes tipos de situações combinatórias nesta etapa da escolarização, sendo o produto de medidas a única situação combinatória mencionada explicitamente e/ou exemplificada nos mesmos. Já a Probabilidade ganha mais espaço: o trabalho com diferentes demandas cognitivas é prescrito a todos os anos do Ensino Fundamental, evidenciando a importância de um ensino que proporcione o contato com situações variadas, favorecendo o aprofundamento de conhecimentos probabilísticos (Lima & Borba, 2021).

No Estudo 2, o olhar voltado aos livros didáticos se justifica pelo fato de que esses materiais "costumam traduzir para os professores o significado e os conteúdos do currículo prescrito, realizando uma interpretação deste. As prescrições costumam ser muito genéricas e, nessa mesma medida, não são suficientes para orientar a atividade educativa nas aulas" (Sacristán, 2000, p. 104-105). Nesse sentido, sob uma perspectiva comparativa pré e pós BNCC, foram analisados 24 volumes, referentes à análise das três coleções dos Anos Finais mais distribuídas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD 2017, cujos autores possuem coleções aprovadas também pelo PNLD 2020. Foram estas as coleções: *Vontade de Saber / Realidade & Tecnologia* (Coleção A), *Compreensão e Prática* (Coleção B) e *Projeto Teláris / Teláris* (Coleção C).

Nas coleções selecionadas foi feito o levantamento dos capítulos que abordavam Combinatória e/ou Probabilidade. Em seguida, a partir da leitura na íntegra de tais capítulos, foram identificados os problemas a serem analisados à luz dos aportes teóricos adotados (Vergnaud, 1986, 1996; Borba, 2010; Bryant & Nunes, 2012).

Foram identificadas 189 atividades de Combinatória (53% abordando a situação de produto de medidas, 28% a de arranjo, 13% a de permutação e apenas 5% a de combinação) (Lima & Borba, 2022a). Em especial, problemas de combinação estiveram presentes em apenas uma das coleções, o que evidencia ainda mais uma distribuição não equilibrada. O presente estudo defende que a não exploração das diferentes situações pode limitar reflexões sobre os invariantes que as diferenciam e, também, restringir o uso de representações simbólicas variadas quando de sua exploração em sala de aula, desfavorecendo o amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório. Um maior destaque à Probabilidade também foi observado nos livros didáticos (Lima & Borba, 2022a): ao todo, foram identificadas 995 atividades nas coleções analisadas. As atividades abordam diferentes demandas cognitivas ao amplo entendimento da Probabilidade. Há grande enfoque, no entanto, à quantificação de probabilidades (70,4% dos problemas). Defende-se que não trabalhar os aspectos intrínsecos à Probabilidade (entendimento da aleatoriedade, de espaços amostrais e de proporcionalidade) nos Anos Finais, por vezes por se considerar que esse estudo já ocorreu em etapas anteriores da escolarização, pode gerar lacunas no desenvolvimento do raciocínio probabilístico e levar à prática de uma mera realização de cálculos de probabilidades sem que sejam atribuídos significados aos mesmos.

Por fim, quanto às articulações entres essas temáticas, nos currículos prescritos, a menção ao uso de representações simbólicas em comum entre Combinatória e Probabilidade, com destaque ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC), evidencia o desenvolvimento de conhecimentos combinatórios enquanto ferramenta ao cálculo de probabilidades (Lima & Borba, 2021). Por sua vez, nos livros didáticos analisados foram identificados potenciais de articulação entre Combinatória e Probabilidade não apenas provenientes de representações simbólicas em comum, mas também a partir de contextos aleatórios únicos: atividades de natureza aleatória que permitem que tanto conceitos combinatórios quanto conceitos probabilísticos sejam explorados para compreensão dos problemas propostos. Dentre todas as atividades combinatórias e probabilísticas identificadas (1184) foi percebido potencial para articulação em cerca de 25% delas (Lima & Borba, 2021). Algumas dessas atividades foram base para a construção da proposta de articulação que compôs o Estudo 3, apresentado a seguir, que teve por premissa ampliar contextos combinatórios explorados de forma a trabalhar, também, as diferentes demandas cognitivas da Probabilidade.

Proposta de Articulação

O Estudo 3 do estudo de tese, foco do presente artigo, teve por objetivo a elaboração de uma proposta de articulação entre Combinatória e Probabilidade direcionada ao professor, tendo em vista o favorecimento de um ensino que promova o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico de estudantes dos Anos Finais. Nesse sentido, tal estudo consistiu na construção de um conjunto de situações-problema para a exploração de diferentes situações combinatórias e probabilísticas articuladas entre si.

Esta proposta de articulação levou em consideração os aportes teóricos adotados, o que apontam estudos anteriores e, em especial, os resultados obtidos nos Estudos 1 e 2, mencionados na seção anterior.

Ressalta-se que a proposta em questão visa poder auxiliar o professor no trabalho com o aleatório em sala de aula, explorando suas variadas facetas e incentivando o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico. Tem por base, assim, o desejo de sanar lacunas observadas nas prescrições e nos livros didáticos analisados no que diz respeito ao trabalho com a Combinatória e com a Probabilidade – a partir da articulação entre elas.

O conjunto de situações-problema foi construído, principalmente, a partir de alguns dos problemas com potencial para articulação identificados no Estudo 2 (o que é apresentado? – análise de livros didáticos). Dessa maneira, foi possível realizar adaptações nestes, dado o objetivo de permitir que uma variedade de situações combinatórias (Borba, 2010) e demandas probabilísticas (Bryant & Nunes, 2012) fossem exploradas nas atividades propostas. Nesse sentido, o Estudo 3 englobou a elaboração de oito blocos de problemas articulados, conforme estrutura apresentada na Tabela 1.

Tabela 1.

Estrutura da proposta de articulação (Lima, 2022)

Situação Combinatória		Demandas Probabilísticas			
Bloco 1	Produto de Medidas	EA 1	AL 1	COMP 1	QUANT 1
Bloco 2	Produto de Medidas	EA 2	AL 2	COMP 2	QUANT 2
Bloco 3	Arranjo	EA 1	AL 1	COMP 1	QUANT 1
Bloco 4	Arranjo	EA 2	AL 2	COMP 2	QUANT 2
Bloco 5	Permutação	EA 1	AL 1	COMP 1	QUANT 1
Bloco 6	Permutação	EA 2	AL 2	COMP 2	QUANT 2
Bloco 7	Combinação	EA 1	AL 1	COMP 1	QUANT 1
Bloco 8	Combinação	EA 2	AL 2	COMP 2	QUANT 2

EA1: espaço amostral com até 24 possibilidades; EA2: espaço amostral com mais de 24 possibilidades; AL1: aleatoriedade – identificação de experimento aleatório; AL2: aleatoriedade – sequência aleatória; COMP1: comparação de probabilidades em um mesmo espaço amostral; COMP2: comparação de probabilidades em espaços amostrais distintos; QUANT1: quantificação de probabilidades (razão); QUANT2: quantificação de probabilidades (percentual).

Nesse sentido, buscou-se complementar os problemas aos quais o professor já tem acesso (presentes nos livros didáticos, como o exemplificado na Figura 2), aproveitando-se seus enunciados e algumas imagens. As adaptações (a partir da elaboração de diferentes itens relacionados a um mesmo problema e a orientação quanto ao uso de representações simbólicas específicas) visaram ampliar a potencialidade de articulação entre Combinatória e Probabilidade, partindo-se de um mesmo contexto, sendo essa uma possibilidade para o desenvolvimento de ambos os raciocínios em questão.

4 Uma indústria de brinquedos fabrica a mesma boneca com algumas variações de roupas e tons de cabelo. Veja a seguir as variações.

a) Conforme as opções acima, de quantas maneiras diferentes essa boneca pode ser vendida? 18 opções

b) A mãe de Mariana comprou uma dessas bonecas. Qual é a probabilidade de ela ter comprado uma boneca de cabelo preto, vestido amarelo e sapato preto? $\frac{1}{18}$

c) Mariana pediu uma boneca que tivesse cabelo preto. Se sua mãe comprou a boneca conforme o pedido de Mariana, qual é a probabilidade de ela ter vestido amarelo e sapato preto? $\frac{1}{6}$

Figura 2.

Situação combinatória (produto de medidas) com aprofundamento probabilístico (quantificação de probabilidades) Coleção Compreensão e Prática, 8º ano (Silveira, 2018, p. 121)

A presença de dois blocos relacionados a cada situação combinatória (Tabela 1) está relacionada à variação do nível de dificuldade dos problemas, em especial no que se refere ao número de etapas de escolha envolvidas e ordem de grandeza do espaço amostral (e à compreensão de quando, ou não, é viável que se explicite todas as possibilidades uma a uma em um contexto aleatório); à identificação da aleatoriedade em um contexto direto ou associada à experimentação em uma sequência aleatória (independência de eventos); à comparação de probabilidades (dentro de um mesmo espaço amostral ou entre espaços amostrais distintos); e à representação utilizada para comunicar resultados obtidos a partir da quantificação de probabilidades.

Dessa maneira, quanto à variação do nível de dificuldade dos blocos de problemas propostos, os blocos ímpares possuem menor nível de complexidade e os blocos pares maior nível de dificuldade. Essa variável está atrelada: ao número de etapas de escolha, número de possibilidades existentes no problema e tipo de abordagem das demandas cognitivas da probabilidade relacionadas à aleatoriedade (nos blocos pares está atrelada ao entendimento de independência de eventos em sequências aleatórias), comparação de probabilidades (nos blocos pares a comparação ocorre entre espaços amostrais distintos, demandando consideração do caráter proporcional das quantidades em questão) e conversão da representação utilizada para comunicar os resultados quanto à quantificação de probabilidades (nos blocos pares é solicitado o uso de percentual). Tais blocos são apresentados a seguir (Figuras 3 a 10) e possuem expectativas de resposta descritas para cada item.

Uma indústria de brinquedos fabrica a mesma boneca com algumas variações de roupas e tons de cabelo, conforme ilustrado na imagem.

a) Conforme as opções acima, de quantas maneiras diferentes essa boneca pode ser vendida? Como você obteve essa resposta? (Produto de Medidas – Resposta esperada: 18 maneiras)
b) Se você ainda não fez isso no item a, use o método que preferir para indicar cada uma das possibilidades de caracterização desse modelo de boneca que essa indústria de brinquedos fabrica**.** (Espaço Amostral – Resposta esperada: Explicitação das 18 possibilidades via listagem, desenho, esquema, quadro de possibilidades ou árvore de possibilidades, dentre outras possíveis representações)
c) Esta indústria de brinquedos decidiu vender essa boneca em uma edição especial: 'Boneca Surpresa', na qual as características da boneca só são descobertas após a compra e abertura da embalagem. Se a mãe de Mariana comprar uma boneca desta edição, qual cor de cabelo a boneca terá? Qual será a roupa da boneca? E os sapatos? Justifique sua resposta. (Aleatoriedade – Resposta esperada: Não temos como saber as características antes de abrir a embalagem, é possível comprar qualquer uma das 18 bonecas)
d) Se a mãe de Mariana comprar uma 'Boneca Surpresa' é mais provável que esta boneca tenha uma roupa de cor única ou de cores diferentes? Explique como obteve sua resposta. (Comparação de Probabilidades em um mesmo espaço amostral – Resposta esperada: É mais provável que a boneca tenha uma roupa com cores diferentes, pois duas das opções da imagem se encaixam nessa descrição. Apenas o vestido amarelo é uma roupa com cor única)
e) A mãe de Mariana comprou uma dessas bonecas. Qual é a probabilidade de ela ter comprado uma boneca de cabelo preto, vestido amarelo e sapato preto? Indique sua resposta em forma de razão/fração. (Quantificação de Probabilidades – Resposta esperada: 1/18)

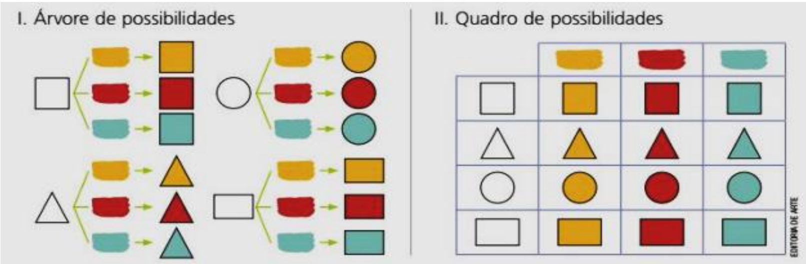
Figura 3.

Proposta de problema com potencial de articulação, Bloco 1 (produto de medidas) (Lima, 2022, p. 152) - adaptado de Coleção Compreensão e Prática, 8º ano (Silveira, 2018, p. 121)

A proposta de adaptação do Bloco 1 foi elaborada no sentido de utilizar o contexto do problema original (ver Figura 2), isto é, a montagem de uma boneca considerando-se três características (cabelo; roupa; sapatos) como base para o trabalho com a própria situação combinatória implícita no problema (produto de medidas), mas também com diferentes demandas cognitivas da Probabilidade.

Esse tipo de adaptação permite ampliar as possibilidades de análise de um contexto abordado em um problema, permitindo que, em sala de aula, o professor possa explorar amplamente a Probabilidade atrelada ao contexto combinatório inicial. De forma análoga, os demais blocos são apresentados.

Um grupo de estudantes vai confeccionar um jogo e precisa escolher uma figura e uma cor para preparar cada ficha. Confira duas formas de identificar as diferentes fichas possíveis tendo como opções 4 figuras (quadrado, triângulo, círculo e retângulo) e 3 cores (amarelo, vermelho e azul).



a) O grupo decidiu acrescentar novas opções de figuras (pentágono e hexágono) e novas opções de cores (verde, roxo, rosa e preto). Agora, quantas fichas diferentes podem ser criadas? Como você chegou a esse resultado? (Produto de Medidas – Resposta esperada: 42 maneiras)

b) Dado o novo número de formas e cores disponíveis, é viável utilizar a árvore de possibilidades ou o quadro de possibilidades para saber quantas fichas diferentes podem ser criadas? Por quê? Explique também qual estratégia você escolheu no item a e porquê. (Espaço Amostral – Resposta esperada: Quando o número de possibilidades e/ou de etapas de escolha é maior é mais viável utilizar estratégias que não indiquem as possibilidades uma a uma. Por exemplo, o Princípio Fundamental da Contagem)

c) Após construírem todos os tipos de peça de acordo com o item a, Juliana, uma estudante desse grupo, pegou uma peça de cada tipo e colocou em uma caixinha. Ela está brincando de sortear uma peça por vez, devolvendo a peça após cada sorteio. Juliana já sorteou cinco peças e obteve os seguintes resultados: triângulo vermelho; triângulo preto; triângulo azul; triângulo verde e triângulo rosa. Se ela sortear uma nova ficha, qual peça irá obter? Justifique sua resposta. (Aleatoriedade – Resposta esperada: Não temos como saber as características da peça. Mesmo que nos sorteios anteriores Juliana tenha sorteado triângulos, no sexto sorteio qualquer uma das 42 peças pode ser sorteada)

d) Com algumas peças extras, Juliana montou duas caixas: na primeira há 5 fichas circulares (3 verdes, 1 azul e 1 roxa); na segunda caixa há 8 fichas quadradas (4 verdes, 2 vermelhas e 2 pretas). Ao sortear sem olhar apenas uma peça de cada urna é mais provável obter uma peça verde circular ou quadrada? Explique como obteve sua resposta. (Comparação de Probabilidades em espaços amostrais diferentes – Resposta esperada: É mais provável sortear uma peça de cor verde na caixa 1 (peças circulares), pois nessa caixa há, proporcionalmente, mais peças verdes. $3/5 > 4/8$)

e) Utilizando todas as peças válidas do jogo, qual é a probabilidade de se sortear uma peça cuja forma possui quatro lados? Indique sua resposta em forma de porcentagem. (Quantificação de Probabilidades – Resposta esperada: 14/42, ou seja, 33%)

Figura 4.

Proposta de problema com potencial de articulação, Bloco 2 (produto de medidas) (Lima, 2022, p. 155) – adaptado de Coleção Realidade & Tecnologia, 6º ano (Souza, 2018, p. 52)

É válido ressaltar que neste segundo bloco de questões priorizou-se apresentar diferentes representações simbólicas em um problema mais simples (como no problema original, do qual a ilustração foi retirada), que servisse de base para a confrontação com um problema no qual o número de possibilidades é maior, caso no qual não seria viável explicitar cada uma das possibilidades.

Raquel colocou em sua bicicleta uma corrente com um cadeado com senha de três dígitos. Ao tentar abrir o cadeado, percebeu que havia esquecido a senha. Lembrava-se apenas que a senha é composta por algarismos que fazem parte da data do seu aniversário e que não há repetições de dígitos. Sabendo que Raquel nasceu no dia 12/06, responda.

a) Quantas senhas de três dígitos distintos é possível formar utilizando os algarismos da data do aniversário de Raquel? Como você obteve essa resposta? (Arranjo – Resposta esperada: 24 maneiras)
b) Se você ainda não fez isso no item a, use o método que preferir para indicar cada uma das senhas consideradas. (Espaço Amostral – Resposta esperada: Explicitação das 24 possibilidades via listagem, desenho, esquema, quadro de possibilidades ou árvore de possibilidades, dentre outras possíveis representações)
c) Se Raquel sortear três dos quatro algarismos que formam a sua data de aniversário, qual número irá obter? Justifique sua resposta. (Aleatoriedade – Resposta esperada: Não temos como saber qual número será formado, é possível que o sorteio de Raquel gere qualquer uma das 24 possibilidades)
d) É mais provável que a senha de Raquel forme um número par ou ímpar? Explique como obteve sua resposta. (Comparação de Probabilidades em um mesmo espaço amostral – Resposta esperada: É mais provável que a senha termine em algarismo par, pois há três algarismos pares – 0, 2 e 6 – e apenas um algarismo ímpar – 1)
e) Qual a probabilidade de Raquel acertar a senha em uma única tentativa? Indique sua resposta em forma de razão/fração. (Quantificação de Probabilidades – Resposta esperada: 1/24)

Figura 5.

Proposta de problema com potencial de articulação, Bloco 3 (arranjo) (Lima, 2022, p. 157) – adaptado de Coleção Projeto Teláris, 9º ano (Dante, 2015, p. 296)

O problema original apresentava um contexto de senha de cadeado com 500 possibilidades, restringindo apenas o número de elementos (3) e que o último dígito deveria ser par e solicitava apenas a quantificação da probabilidade de se acertar a senha em uma primeira tentativa. Na adaptação proposta, por se tratar do bloco ímpar de trabalho com a situação combinatória de arranjo (bloco com um menor nível de dificuldade), o número de possibilidades no problema foi diminuído para 24. Propor um arranjo de quatro elementos tomados três a três visou viabilizar, também, a explicitação das senhas, uma a uma, conforme solicitado no item b.

Dentre os três medalhistas de uma prova de natação podemos calcular os diferentes resultados possíveis para primeiro e segundo lugar utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, da seguinte maneira:

POSSIBILIDADES PARA O 1º LUGAR: 3
POSSIBILIDADES PARA O 2º LUGAR: 2
(note que a segunda posição não pode ser ocupada pelo menos atleta que ocupa o primeiro lugar)
Logo, temos: 3 x 2 = 6 possibilidades

a) Quantos são os resultados possíveis para os três primeiros classificados de uma final olímpica de natação que é disputada por oito atletas? Como você chegou a esse resultado? (Arranjo – Resposta esperada: 336 resultados)
b) Na sua opinião, é viável utilizar a listagem para indicar todos os pódios possíveis referentes ao item a? Por quê? Explique também qual estratégia você escolheu no item a e justifique sua escolha. (Espaço Amostral – Resposta esperada: Quando o número de possibilidades e/ou de etapas de escolha é maior é mais viável utilizar estratégias que não indiquem as possibilidades uma a uma. Por exemplo, o PFC)
c) A raia é a posição ocupada por cada nadador em uma disputa. Nessa final, cada um dos oito competidores ocupará uma posição definida por meio de um sorteio. Três competidores já sortearam suas posições e obtiveram como resultado as raias 1, 2 e 3, respectivamente. Ao dar continuidade ao sorteio, qual raia o quarto nadador irá ocupar? Justifique sua resposta. (Aleatoriedade – Resposta esperada: Não temos como saber qual raia o próximo nadador irá ocupar. Mesmo que nos sorteios anteriores os números sorteados tenham formado uma sequência, qualquer uma das demais raias poderá ser sorteada)
d) É mais provável sortear uma raia numerada com um número ímpar dentre as raias 1, 2 e 3 ou dentre as demais raias (4, 5, 6, 7 e 8)? (Comparação de Probabilidades em espaços amostrais diferentes – Resposta esperada: É mais provável sortear uma raia de numeração ímpar no primeiro grupo (raias 1, 2 e 3), pois há, proporcionalmente, mais números ímpares nesse grupo. 2/3>2/5)
e) Qual é a probabilidade de alguém acertar, em um único palpite, quem ganhará a medalha de ouro na final? Indique sua resposta em forma de porcentagem. (Quantificação de Probabilidades – Resposta esperada: 1/8, ou seja, 12,5%)

Figura 6.

Proposta de problema com potencial de articulação, Bloco 3 (arranjo) (Lima, 2022, p. 159) – adaptado de Coleção Projeto Teláris, 9º ano (Dante, 2015, p. 281)

Na adaptação proposta no Bloco 4, inicialmente é proposta uma versão mais simples do problema, na qual há a explicitação das etapas de escolha e do número de escolhas em cada etapa ao se fazer uso do PFC. O exemplo presente no enunciado proposto diz respeito a um arranjo de três elementos tomados dois a dois. Apenas em seguida, nos itens a e b, é proposto o problema em sua ordem de grandeza presente no problema original: oito elementos tomados três a três. Destaca-se, ainda, que o problema original apenas solicitava, sem explicitar representações simbólicas, o cálculo do arranjo referente ao pódio em uma final de natação da qual participam 8 atletas. Assim, a adaptação utilizou o contexto para discutir, ainda, cada uma das demandas cognitivas da Probabilidade.

Chamamos de anagramas as diferentes posições das letras de uma palavra. Para criar um anagrama utilizamos todas as letras de uma palavra, cada uma apenas uma vez.

a) Quantos anagramas é possível formar utilizando as letras da palavra AMOR? Como você obteve essa resposta? (Permutação – Resposta esperada: 24 maneiras)

b) Se você ainda não fez isso no item a, use o método que preferir para indicar cada um dos anagramas considerados. (Espaço Amostral – Resposta esperada: Explicitação das 24 possibilidades via listagem, desenho, esquema, quadro de possibilidades ou árvore de possibilidades, dentre outras possíveis representações)

c) Sabrina escreveu todos os anagramas possíveis, recortou cada palavra e colocou todos os papéis em uma caixa. Se Sabrina sortear um único papelzinho, ao acaso, qual palavra ela irá obter? Justifique sua resposta. (Aleatoriedade – Resposta esperada: Não temos como saber qual palavra será sorteada, é possível que Sabrina sorteie qualquer um dos 24 papéis)

d) No sorteio do item c é mais provável que Sabrina obtenha uma palavra começada com a letra A ou começada com consoante? Explique como obteve sua resposta. (Comparação de Probabilidades em um mesmo espaço amostral – Resposta esperada: É mais provável que a palavra inicie com uma consoante, pois há 2 opções M e R)

e) Sorteando um desses anagramas ao acaso, qual a probabilidade de ele terminar em vogal? Indique sua resposta em forma de razão/fração. (Quantificação de Probabilidades – Resposta esperada: 12/24 ou 1/2)

Figura **7**.

Proposta de problema com potencial de articulação, Bloco 5 (permutação) (Lima, 2022, p. 161) – adaptado de Coleção Projeto Teláris, 7º ano (Dante, 2015, p. 268)

No problema original, o autor do livro didático apresenta alguns exemplos de anagramas que constituem as possibilidades referentes à permutação das letras da palavra ‘amor’, evidenciando os invariantes de ordem e de escolha deste tipo de situação combinatória: todas os elementos devem ser utilizados (quatro letras), apenas uma vez cada e a mudança de ordem entre eles é o que irá determinar as diferentes possibilidades. Ainda, solicita a quantificação das probabilidades de se sortear uma palavra terminada em vogal e uma palavra iniciada e terminada em consoantes. No Bloco 5, optou-se por não apresentar tais exemplos, mas, sim, esclarecer o texto do enunciado visando explicitar tais invariantes a partir da explicação do que é um anagrama. A listagem de todas as possibilidades (todos os anagramas existentes) é solicitada ao estudante no item b e a partir da mesma os demais itens do bloco em questão podem facilmente ser resolvidos.

Cláudio escreveu todos os números de três algarismos distintos usando os algarismos 4, 5 e 6. Veja os números que ele escreveu:

456, 465, 546, 564, 645, 654

a) Se, além de 4, 5 e 6, Cláudio utilizar também os algarismos 1 e 3, quantos números de cinco algarismos distintos ele poderá formar? Como você chegou a esse resultado? (Permutação – Resposta esperada: 120 maneiras)

b) Dada a nova quantidade de números que Cláudio pode formar, é viável utilizar a listagem para indicar todos os números diferentes existentes? Por quê? Explique também qual estratégia você escolheu no item a e justifique sua escolha. (Espaço Amostral – Resposta esperada: Quando o número de possibilidades e/ou de etapas de escolha é maior é mais viável utilizar estratégias que não indiquem as possibilidades uma a uma. Por exemplo, o PFC)

c) Com a ajuda de alguns colegas de classe, Cláudio escreveu todos os números possíveis de formar de acordo com o item a. Em seguida, ele colocou todos os números em um saquinho e pediu que seus colegas sorteassem apenas um número, com reposição. Cinco colegas já fizeram o sorteio e todos eles obtiveram números pares. Se Cláudio sortear um novo número, qual resultado irá obter? Justifique sua resposta. (Aleatoriedade – Resposta esperada: Não temos como saber as características do número que será sorteado. Mesmo que nos sorteios anteriores apenas números pares tenham sido sorteados, no sexto sorteio qualquer um dos 120 números pode ser sorteado)

d) Usando os mesmos algarismos escolhidos, Cláudio escreveu alguns números de dois algarismos os separou da seguinte maneira, em duas caixas: I - os números 13, 14, 15, 16 e II - os números 41, 43, 45, 46, 51, 54 e 56. Em qual das caixas é mais provável sortear um número par? (Comparação de Probabilidades em espaços amostrais diferentes – Resposta esperada: É mais provável sortear um número par na caixa 1, pois nessa caixa há, proporcionalmente, mais números pares. $2/4>3/7$)

e) Utilizando todos os números formados no item a, qual é a probabilidade de se sortear um número menor que 30000? Indique sua resposta em forma de porcentagem. (Quantificação de Probabilidades – Resposta esperada: 24/120, ou seja, 20%)

Figura 8.

Proposta de problema com potencial de articulação, Bloco 6 (permutação) (Lima, 2022, p. 162) – adaptado de Coleção Teláris, 6º ano (Dante, 2018, p. 286)

Neste caso, a listagem presente no problema original (permutação de três algarismos) foi mantida enquanto exemplo presente no enunciado. Por sua vez, os itens a e b propostos dizem respeito à permutação de cinco algarismos, elevando, assim, o número de possibilidades. Ainda, enquanto o problema solicitava apenas a quantificação da probabilidade de se sortear um número par dentre as possibilidades consideradas, a adaptação proposta aborda as demais demandas cognitivas da Probabilidade.

Por fim, os dois blocos que apresentam uma proposta para o trabalho articulado partindo da situação combinatória de combinação, situação menos trabalhada no currículo apresentado, como destacado anteriormente, bem como indicada por estudos anteriores (Pessoa, 2009, Lima, 2010, Azevedo, 2013, Lima, 2018) como aquela com a qual os estudantes apresentam mais dificuldades, foram anteriormente apresentados e publicados em detalhes no último Encontro Nacional de Educação Matemática – XIV ENEM (Lima & Borba, 2022b).

Uma agência de turismo oferece um plano de viagens ao Nordeste do Brasil no qual é possível escolher 3 das 5 capitais disponíveis: Salvador (S), Recife (R), Maceió (M), Natal (N) e Aracaju (A)

a) Conforme as opções acima, quantas são as possibilidades de escolha ao comprar o plano de viagens nessa agência? Como você obteve essa resposta? (Combinação – Resposta esperada: 10 maneiras)

b) Se você ainda não fez isso no item a, use o método que preferir para indicar cada uma das possibilidades de escolha referente às capitais nordestinas incluídas no plano oferecido pela agência de turismo. (Espaço Amostral – Resposta esperada: Explicitação das 10 possibilidades via listagem, desenho, esquema, quadro de possibilidades ou árvore de possibilidades, dentre outras possíveis representações)

c) Fazendo uma brincadeira com sua indecisão para realizar a escolha das capitais a serem visitadas, um casal decidiu realizar um sorteio utilizando cinco papéis de tamanhos iguais nos quais escreveram os nomes das cinco capitais. Realizando a escolha a partir de sorteio, quais serão as três cidades escolhidas? Justifique sua resposta. (Aleatoriedade – Resposta esperada: Não temos como saber cidades que serão escolhidas, é possível sortear qualquer um dos 10 roteiros possíveis)

d) No sorteio mencionado, ao sortear a primeira cidade, é mais provável que seja sorteada uma capital cujo nome é iniciado por vogal ou por consoante? Explique como obteve sua resposta. (Comparação de Probabilidades em um mesmo espaço amostral – Resposta esperada: É mais provável que a cidade tenha o nome iniciado em consoante, pois essa característica se aplica a quatro das cinco cidades disponíveis)

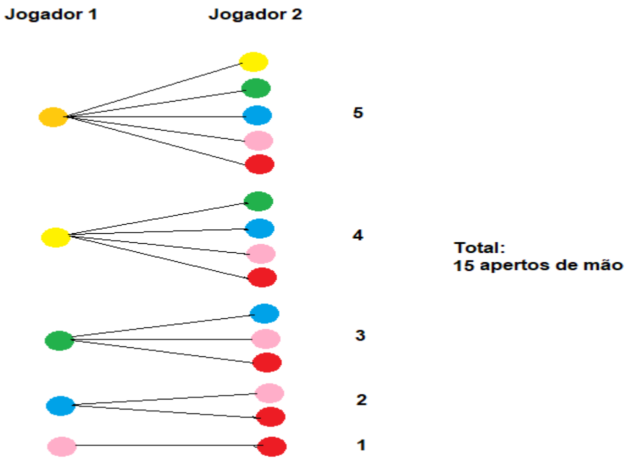
e) O casal tem muita vontade de conhecer Recife. Escolhendo o roteiro via sorteio, qual é a probabilidade de esta cidade estar inclusa no pacote? Indique sua resposta em forma de razão/fração. (Quantificação de Probabilidades – Resposta esperada: 6/10)

Figura 9.

Proposta de problema com potencial de articulação, Bloco 7 (combinação) (Lima, 2022, p. 165) – adaptado de Coleção Teláris, 8º ano (Dante, 2018, p. 13).

Nesse caso, o problema original solicitava apenas a listagem das possibilidades de escolha de duas capitais para visitar dentre quatro opções disponíveis. A proposta de adaptação considerou elevar o número de possibilidades, bem como aproveitar o contexto (roteiro de viagem) para explorar diferentes demandas cognitivas da Probabilidade.

Um time de vôlei é formado por seis jogadores. Antes de iniciar uma partida, cada jogador cumprimentou os demais com um aperto de mão.
Confira a árvore de possibilidades que é um caminho para descobrir quantos apertos de mão foram dados ao todo. Cada um dos seis jogadores foi representado por uma cor.



Observe que foi considerado apenas um aperto de mão entre cada par de jogadores, totalizando, portanto, 15 apertos de mão.

a) E se considerarmos um time de futebol, com 11 jogadores, quantos apertos de mão seriam dados? Como você chegou a esse resultado? (Combinação – Resposta esperada: 55 resultados)

b) Na sua opinião, é viável utilizar a árvore de possibilidades para indicar todos os apertos de mão possíveis referentes ao item a? Por quê? Explique também qual estratégia você escolheu no item a e justifique sua escolha. (Espaço Amostral – Resposta esperada: Quando o número de possibilidades e/ou de etapas de escolha é maior é mais viável utilizar estratégias que não indiquem as possibilidades uma a uma. Por exemplo, o PFC)

c) Se sabe que a ordem de entrada dos 11 jogadores foi definida via sorteio. O goleiro, camisa 1, já apertou a mão de quatro companheiros de time, os camisa 2, 4, 6 e 8. Qual é o número do uniforme do próximo jogador que irá apertar a mão do goleiro? (Aleatoriedade – Resposta esperada: Não temos como saber qual será o próximo jogador a apertar a mão do goleiro. Mesmo que os apertos de mão anteriores tenham seguido uma sequência numérica dos uniformes, a ordem de entrada foi sorteada, logo, qualquer um dos demais jogadores do time poderá ser o próximo)

d) Um time de vôlei possui seis jogadores em quadra, sendo três deles de defesa. Já um time de futebol possui onze jogadores em campo e, em um determinado time, adotou-se a seguinte defesa: goleiro, dois zagueiros e dois laterais. Considerando tais formações, ao sortear um jogador ao acaso é mais provável obter um jogador que ocupa uma posição de defesa a partir de um time de vôlei ou de um time de futebol? (Comparação de Probabilidades em espaços amostrais diferentes – Resposta esperada: É mais provável sortear um jogador de defesa em um time de vôlei, pois há, proporcionalmente, mais jogadores nessa posição. 3/6>5/11)

e) Tomando um aperto de mão qualquer dentre todos os possíveis considerados no item a, qual é a probabilidade de o capitão do time estar envolvido? Indique sua resposta em forma de porcentagem. (Quantificação de Probabilidades – Resposta esperada: 10/55, ou seja, 18,2%)

Figura 10.

Proposta de problema com potencial de articulação, Bloco 8 (combinação) (Lima, 2022, p. 167) – adaptado de Coleção Teláris, 8º ano (Dante, 2018, p. 13)

Por sua vez, o problema original adaptado no Bloco 8 solicitava apenas o cálculo da combinação referente ao número de apertos de mão dados por seis jogadores de um time de vôlei. Na proposta de adaptação, esse contexto inicial foi utilizado como exemplo (junto da representação de árvore de possibilidades) para ilustrar a estrutura da combinação e evidenciar seu invariante de ordem. Assim, nos itens propostos foi possível explorar uma combinação envolvendo um número maior de possibilidades (considerando 11 jogadores), bem como abordar as demandas cognitivas da Probabilidade a partir do mesmo contexto.

Dado o posto, o Estudo 3 da pesquisa de tese aqui discutida consistiu em ampliar contextos presentes nos livros didáticos já comumente trabalhados em sala de aula, evidenciando a possibilidade de articular Combinatória e Probabilidade a partir da exploração do aleatório de forma mais aprofundada em problemas com enunciados simples e de fácil compreensão para os estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental. É válido reforçar, contudo, que a proposta aqui apresentada não tem a pretensão de ser um caminho único ou o correto para trabalhar com a Combinatória e a Probabilidade em sala de aula. Na verdade, foi construída no sentido de mostrar uma alternativa de modelar os currículos prescritos e apresentados, tendo em vista potencializar o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilísticos de estudantes em sala de aula. O professor pode e deve, ainda, modelar tais currículos ele mesmo, com base em suas experiências e objetivos e de acordo com as necessidades particulares de seus estudantes.

Algumas Considerações

O presente trabalho apresentou uma proposta que teve como viés principal a adaptação de questões presentes em livros didáticos, analisados em um estudo prévio, no sentido de aprofundar a articulação entre problemas combinatórios e probabilísticos. Priorizou-se a exploração de diferentes situações, representações simbólicas e demais aspectos relacionados ao nível de dificuldade dos problemas, tais como número de etapas de escolha e número de possibilidades, chegando-se a oito blocos de questões.

Tal proposta consiste em um caminho possível (mas não o único) para explorar as articulações entre Combinatória e Probabilidade em sala de aula, potencializando o desenvolvimento dos dois raciocínios a elas atrelados. É importante lembrar, no entanto, que ambas as temáticas possuem grande importância independentemente, sendo essenciais ao entendimento da aleatoriedade (muito presente no cotidiano), e que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio formal. Assim, articular Combinatória e Probabilidade é opcional. A presente pesquisa tomou esse caminho, pois estudos anteriores têm mostrado as potencialidades de explorar as relações entre essas duas temáticas tendo-se em vista contribuir com o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico.

Como material direcionado ao professor, o conjunto de questões serve de suporte para nossas adaptações (currículo moldado), visando explorar o aleatório de forma mais ampla em sala de aula e aproveitando contextos presentes em materiais didáticos de fácil acesso a professores e estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Referências

Azevedo, J. (2013). *Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco]. https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/13237

Batanero, C., Godino, J. & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento combinatorio*. Síntesis.

Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório na Educação Básica. *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática – X ENEM.* https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra15.pdf

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos.* Ministério da Educação.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação.

Bryant, P. & Nunes, T. (2012). *Children's undertanding of probability: a literature review*. Nuffield Foundation.

Dante, L. R. (2015). *Projeto Teláris: Matemática – Anos Finais*. 4 volumes – 2. ed. Ática.

Dante, L. R. (2018). *Teláris: Matemática – Anos Finais*. 4 volumes – 3. ed. Ática.

Godino, J., Batanero, C. & Cañizares, M. J. (1991). *Azar y probabilidad.* Síntesis.

Lima, E. & Borba, R. (2021). Probabilidade nos Anos Finais: o currículo prescrito pré e pós BNCC. In: *Anais do 8º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – VIII SIPEM.* https://www.even3.com.br/anais/viiisipemvs2021/372722-probabilidade-nos-anos-finais--o-curriculo-prescrito-pre-e-pos-bncc

Lima, E. & Borba, R. (2022a). Combinatória, Probabilidade e suas articulações em livros didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. *Boletim de Educação Matemática – Bolema,* 36(72). https://www.scielo.br/j/bolema/a/84X6mfyJHcxMQBdh4krsLbb/

Lima, E. & Borba, R. (2022b). Problemas de combinação nos Anos Finais: o que é prescrito, o que é apresentado e o que se pode fazer articulado à Probabilidade? *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática – XIV ENEM.* https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/477015/

Lima, E. (2018). *Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA: investigando relações*. [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco]. https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/29717

Lima, E. (2022). *Combinatória, Probabilidade e suas articulações no currículo dos Anos Finais do Ensino Fundamental: o que é prescrito, o que é apresentado e o que se pode fazer?* [Tese de Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco]. https://drive.google.com/file/d/1Rnkqwb5y6kdLziF28YLJ2qHzi2XS9UVr/view

Lima, R. (2010). *O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o Ensino Médio* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco]. https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3868

Morgado, A., Pitombeira, J., Pinto de Carvalho, P. & Fernandes, P. (1991). *Análise combinatória e probabilidade*. Graftex.

Pernambuco. (2012). *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco – Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio*. Secretaria de Educação.

Pernambuco. (2019). *Currículo de Pernambuco: Ensino Fundamental – área de Matemática*. Secretaria de Educação e Esportes.

Pessoa, C. (2009). *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do Ensino Médio* [Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal de Pernambuco]. https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4189

Sacristán, J. G. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática*. Artmed.

Silveira, E. (2018). *Matemática: Compreensão e Prática: Anos Finais.* 4 volumes – 5. ed. Moderna.

Souza, J. (2018). *Matemática Realidade & Tecnologia: Anos Finais*. 4 volumes – 1. ed. FTD.

Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas, um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, *1*(1), 75-90.

Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. In Brum. (org.), *Didáctica das Matemáticas* (pp. 155-191) – Lisboa. Horizontes Pedagógicos.