

Uma abordagem a partir da dimensão curricular da álgebra vetorial: delineamentos ecológicos nos contextos dos ensinos médio e superior

An approach from the curriculum dimension of vector algebra: ecological designs in the contexts of secondary and higher education

Una aproximación desde la dimensión curricular del álgebra vectorial: diseños ecológicos en los contextos de la educación secundaria y superior

Une approche à partir de la dimension curriculaire de l'algèbre vectorielle : conceptions écologiques dans les contextes de l'enseignement secondaire et supérieur

Jany Santos Souza Goulart¹

Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS
Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências

<https://orcid.org/0000-0002-9140-0223>

Claudiano Goulart²

Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS
Doutorado em Matemática
<https://orcid.org/0000-0002-8745-8406>

Saddo Ag Almouloud³

Universidade Federal do Pará - UFPA
Doutorado em Didática da Matemática
<https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>

Luiz Marcio Santos Farias⁴

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Doutorado em Didática da Matemática
<https://orcid.org/0000-0002-2374-3873>

Resumo

Este artigo direciona a atenção para aspectos inerentes à dimensão curricular do objeto matemático vetor na perspectiva dos níveis médio e superior. A fundamentação teórica e metodológica foi delineada por meio de alguns pressupostos da teoria antropológica do didático, especificamente, a partir do recorte ecológico do que está institucionalmente posto nos documentos oficiais que regem, em termos transpositivos, o saber a ensinar vetores e como esse aspecto reverbera no que se refere as relações pessoais com esse objeto no contexto de um

¹ jssgoulart@uefs.br

² cgoulart@uefs.br

³ saddoag@gmail.com

⁴ lmsfarias@ufba.br

curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública baiana. Nestes termos, emergiu o seguinte questionamento: o que nos *dizem* os documentos oficiais acerca da abordagem vetorial no ensino médio e o como essas *vozes ecoam* no âmbito de um curso de licenciatura em matemática? Para compreender esse processo transpositivo, elegeu-se como objetivo identificar diálogos entre os movimentos curriculares envolvidos nesse contexto, particularmente, interações entre condições e restrições que incidem no processo referenciado. Em termos conclusivos, foi possível perceber ruídos na comunicação entre a difusão vetorial do que regulamenta os documentos oficiais e o que reverbera nos cenários institucionais em que esse tema é abordado. Frente a essa constatação, faz-se necessário investir em ações que promovam o restabelecimento da sintonia entre as etapas transpositivas que vivem na fronteira de transição institucional entre o ensino médio e superior.

Palavras-chave: Currículo, Vetores, Teoria antropológica do didático, Ecologia, Curso de licenciatura em matemática.

Abstract

This article focuses attention on aspects inherent to the curriculum dimension of the mathematical object vectors from the perspective of the secondary and higher education levels. The theoretical and methodological foundation was outlined through some assumptions of the anthropological theory of the didactic, specifically, from the ecological perspective of what is institutionally outlined in the official documents that govern, in transpositive terms, the knowing to teach vectors and how this aspect reverberates in terms of personal relationships with this object in the context of a mathematics teaching degree course at a public university in Bahia. In this context, the following question arose: What do the official documents reveal about the vector approach in secondary school, and how do these voices resonate within the scope of a mathematics teaching degree course? To understand this transpositive process, the objective chosen was to identify dialogues between the curriculum movements involved in this context, particularly interactions between conditions and restrictions that affect the referenced process. In conclusive terms, it was possible to perceive noise in the communication between the vectorial diffusion of what regulates the official documents and what reverberates in the institutional scenarios in which this topic is addressed. Given this finding, it is necessary to invest in actions that promote the reestablishment of harmony between the transpositive stages that live on the border of institutional transition between secondary and higher education.

Keywords: Curriculum, Vectors, Anthropological theory of didactics, Ecology, Teaching degree in mathematics.

Resumen

Este artículo dirige la atención a aspectos inherentes a la dimensión curricular del vector objeto matemático desde la perspectiva de los niveles de educación secundaria y superior. El fundamento teórico y metodológico fue delineado a través de algunos supuestos de la teoría antropológica de la didáctica, específicamente, desde la perspectiva ecológica de lo que se afirma institucionalmente en los documentos oficiales que rigen, en términos transpositivos, el saber para enseñar vectores y cómo este aspecto repercuten en las relaciones personales con ese objeto en el contexto de una licenciatura en matemáticas en una universidad pública de Bahía, Brasil. En estos términos, surgió la siguiente pregunta: ¿Qué nos dicen los documentos oficiales sobre el enfoque vectorial en la escuela secundaria y cómo resuenan esas voces en el ámbito de una licenciatura en matemáticas? Para comprender este proceso transpositivo, el objetivo fue identificar diálogos entre los movimientos curriculares involucrados en este contexto, particularmente interacciones entre condiciones y restricciones que afectan el proceso referenciado. En términos concluyentes, fue posible percibir ruido en la comunicación entre el vector de difusión de lo que regula los documentos oficiales y lo que repercuten en los escenarios institucionales en los que se aborda este tema. Ante este hallazgo, es necesario invertir en acciones que promuevan el restablecimiento de la armonía entre las etapas transposicionales que viven en la frontera de transición institucional entre la educación secundaria y la superior.

Palabras clave: Currículo, Vectores, Teoría antropológica de la didáctica, Ecología, Curso de licenciatura en matemáticas.

Résumé

Cet article attire l'attention sur les aspects inhérents à la dimension curriculaire de l'objet mathématique vecteur du point de vue des niveaux d'enseignement moyen et supérieur. Le fondement théorique et méthodologique a été esquissé à travers certaines hypothèses de la Théorie Anthropologique du Didactique, spécifiquement, du point de vue écologique de ce qui est institutionnellement affirmé dans les documents officiels qui régissent, en termes transpositifs, la Connaissance à Enseigner le Vecteur et comment cet aspect se répercute sur les relations personnelles avec cet objet dans le contexte d'un cursus de « *Licenciatura en Mathématiques*⁵ » dans une université publique de Bahia. En ces termes, la question suivante s'est posée : que nous disent les documents officiels sur l'approche vectorielle au lycée et

⁵ Est un cours de d'université d'une durée de quatre ans, axé sur la formation des enseignants pour enseigner les mathématiques dans les écoles primaires et secondaires. Le cours fournit une base solide en contenu mathématique, combinée à des connaissances pédagogiques et didactiques pour travailler en classe

comment ces voix résonnent-elles dans le cadre d'une licence de mathématiques ? Pour comprendre ce processus transpositif, l'objectif était d'identifier les dialogues entre les mouvements curriculaires impliqués dans ce contexte, notamment les interactions entre conditions et restrictions qui affectent le processus référencé. En termes concluants, il a été possible de percevoir du bruit dans la communication entre la diffusion vectorielle de ce qui régule les documents officiels et ce qui se répercute dans les cadres institutionnels dans lesquels ce sujet est abordé. Face à ce constat, il est nécessaire d'investir dans des actions qui favorisent le rétablissement de l'harmonie entre les étapes de transposition qui vivent à la frontière institutionnelle de transition entre l'enseignement secondaire et supérieur.

Mots-clés : Curriculum, Vecteurs, Théorie anthropologique du didactique, Écologie, Cours de licenciatura en mathématiques.

Uma abordagem da dimensão curricular da álgebra vetorial: delineamentos ecológicos nos contextos dos ensinos médio e superior

O escopo investigativo emergiu a partir de inquietações regidas por elementos que alimentam o elevado índice de reprovações e consequente retenção em componentes curriculares que têm como cerne a álgebra vetorial. Nestes termos, é pertinente destacar que esse contexto pode ser analisado sob distintas perspectivas, dentre elas a configuração curricular. Dito isto, é possível atentar para uma problemática ecológica, a qual se apresenta por meio de questionamentos que envolvem o contexto transpositivo entre os saberes vetoriais que *vivem* ou deveriam *viver* no âmbito dos ensinos médio e superior, que podem ser, preliminarmente, descritos como: *Onde se situam os vetores na estrutura curricular do ensino médio? E que papel assumem no âmbito dos cursos de licenciatura em matemática?* Goulart (2021) apresenta argumentos que respondem, parcialmente, à segunda questão.

(...) os vetores se integram, não somente, aos Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática no Brasil, mas também aos cursos situados no âmbito das ciências exatas em nível superior de ensino. Sua abrangência institucional é refletida em conteúdos presentes em disciplinas como Física, Cálculo, Álgebra Linear e Geometria. (Goulart, 2021, p. 27)

De forma tácita, a autora sublinha a amplitude institucional deste ente matemático. Entretanto, esse aspecto se contrapõe com um elevado índice de retenção e consequente reprovações de estudantes no que se refere a componente curricular cuja ementa inclua os vetores. É importante destacar que outros cursos da área de ciências exatas não estão imunes a essa problemática, e, de forma similar, são afetados, como sinalizado por Rosa et al. (2019, p. 417) em uma análise dos históricos acadêmicos de alguns estudantes do primeiro ano do curso de estatística da Universidade Federal de Goiás, constatando que na disciplina “Geometria Analítica, dos 47 estudantes no primeiro ano do curso, cinco foram aprovados (10,6%), sendo três com média abaixo de 7,0; e dois com média entre 7,0 e 7,9.”

Analogamente, Di Pinto (2000), Passos et al. (2007) e Silva et al. (2016) mostraram as lacunas evidenciadas por índices de reprovação. Nas universidades Estadual de Campinas - UNICAMP e de São Paulo - USP, por exemplo, o nível de reprovação em Geometria Analítica chega a 35%. Richit (2005) pontuou que em muitas instituições do ensino superior (IES), esta disciplina é caracterizada como um fator problema. Outro exemplo citado pelo autor é a UNESP-RC, que apresentou média de reprovação na matéria em torno de 39% em 2004. Mesmo após duas décadas, nota-se que esse problema perdura e é particularmente fortalecido

por Santos (2024), ao se apoiar nessa fragilidade para justificar a escolha do tema do seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

A inspiração para o referido trabalho veio das dificuldades encontradas por mim e, pelos demais colegas de classe, no segundo semestre do Curso de Licenciatura de Matemática, especificamente na disciplina de Vetores e Geometria Analítica. Pude observar que essa dificuldade foi gerada pela grande lacuna deixada pelos anos escolares anteriores. Alunos reafirmam que, se tivesse visto vetores no Ensino Médio, com certeza essa disciplina não seria tão “assustadora”, mesmo no Curso de Licenciatura em Matemática e as dificuldades enfrentadas pela turma seriam menores ou quase nulas, desde a compreensão do conceito de vetores bem como na interpretação e na resolução dos exercícios e atividades propostas em sala de aula pela professora. (Santos, 2024, p.11)

Este aspecto já foi proposto por Rodrigues (2015) ao sublinhar a necessidade de repatriação dos vetores para o domínio da matemática no ensino médio, e os estudos de Assemay (2011), Assemay et al (2013) e Azevedo (2013) reforçam a relevância da base vetorial no currículo do nível médio de ensino, argumentando que constituem num diferencial para estudantes em processo de transição para o ensino superior, perspectiva esta reforçada pela declaração:

A introdução da noção de Vetores no \mathbb{R}^2 no 1º ano do Ensino Médio pretende lançar mão de um instrumento importante e prático no estudo dos conteúdos expostos em sequência, mas principalmente da Trigonometria e Função Afim, reduzindo cálculos desnecessários que estes temas recorrem quando seu ensino é feito de maneira isolada. A organização dos conteúdos estruturados e baseados nos Vetores pretende conduzir o aluno a interpretações geométricas de fatos algébricos. (Assemay, 2011, p. 130)

Neste sentido, a autora exemplifica a força da aplicabilidade de conceitos vetoriais na primeira etapa do ensino médio, esse fato foi ratificado por Dorier (1995), ao sinalizar que o desenvolvimento do conceito deste ente matemático se deu na busca por entendimento de resultados algébricos, uma vez que essa grandeza proporciona contribuições para a geometria por intermédio da direção e do sentido e não só do comprimento (grandeza escalar), permitindo assim a ideia de movimento, que, segundo Venturi (2015), se apresenta intrínseco a raiz etimológica da palavra vetor oriunda do verbo *vehere* que significa transportar, levar.

A partir desse viés etimológico é possível estabelecer associações metafóricas entre a estruturação do processo transpositivo e o conceito de vetor. Neste sentido, Barquero et al. (2010, 240, tradução nossa⁶) descrevem o movimento transpositivo entre saberes a partir da:

⁶ (...) dimensión ecológica del problema de la modelización matemática significa assumir la existencia de restricciones que, con independencia de la voluntad de los sujetos, inciden sobre la vida institucional de la modelización matemática.

(...) dimensão ecológica do problema da modelização matemática que significa assumir a existência de restrições que resultam de subjugações que lhes são impostas, independentemente da vontade dos sujeitos, incidem sobre a vida institucional da modelização matemática.

O delineamento estrutural empreendido pelo processo transpositivo revela características do escopo curricular, o qual pode ser definido como um conjunto de obras (conteúdos) descrito por Chevallard (2009) como uma série de monumentos, os quais são alimentados pelos pressupostos do paradigma de visitas às obras (PVO). Dito de outra forma,

o currículo, estado do sistema de ensino em um momento dado, não é inteiramente definido pelos programas oficiais. Estes fixam um quadro diretor que se impõe como um sistema de restrições explícitas no processo de transposição didática, mas que não saberia determiná-lo exatamente. Mais importantes, todavia (mas também largamente negligenciadas ou até ignoradas) são, nesse sentido, as restrições didáticas permanentes que exercem seus efeitos, com bastante frequência – na ausência de um mínimo de análise didática aprofundada –, sem que os agentes do sistema de ensino tomem conhecimento. (Chevallard & Almouloud, 2023, p. 565)

Neste sentido, condições e restrições alimentaram o percurso metodológico do texto, em especial as que vivem em documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), as orientações curriculares para o ensino médio (DCN, 2006) e o Programa Nacional do Livro Didático de Matemática (PNLD, 2018) em confrontação ao Projeto Político Pedagógico (PPP) do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública baiana. Assim, é possível perceber que a concepção de currículo vive no seio do processo de transposição didática, especificamente na *Organização Matemática a Ensinar*, a qual será apresentada no curso do estudo.

Frente a esse cenário curricular em que os vetores são minorizados e silenciados, o recorte investigativo se apresenta a partir da questão de pesquisa que ganha forma por meio das indagações preliminares: *O que nos dizem os documentos oficiais acerca da abordagem vetorial no ensino médio e como esse saber é projetado em um curso de licenciatura em matemática?* As respostas serão construídas por meio de fios condutores teóricos e metodológicos que se assentam em pressupostos ecológicos advindos da teoria antropológica do didático (TAD).

Assim, o artigo está organizado em quatro seções que se articulam mutuamente. No primeiro momento, o leitor será conduzido a identificar algumas nuances que remetem à dimensão epistemológica do conceito de vetor. No segundo tópico, a atenção se volta à identificação do nível de protagonismo dos vetores em documentos oficiais que regem o ensino médio, direcionada pela questão: O que nos dizem os documentos oficiais que regulamentam o

ensino médio sobre vetores? Na terceira seção, serão descritos traços do modelo praxeológico curricular vetorial de um curso de licenciatura em matemática por meio do viés transpositivo. E por fim, o quarto tópico visa apresentar uma leitura interpretativa das relações pessoais de um grupo de estudantes acerca dos vetores no seio de um curso de licenciatura e matemática aditado às considerações finais e referências.

Nuances da dimensão epistemológica do conceito de vetor a partir de uma perspectiva transpositiva

As investigações no âmbito da didática da matemática têm como uma das ancoragens teóricas os estudos epistemológicos de objetos que se propõem investigar. Traços desse aspecto se inserem no processo transpositivo, os quais remetem ao âmbito da relatividade institucional do saber matemático. Frente a essa conjuntura, é possível adotar como ponto de partida o *Saber Sábio*, o qual pode ser concebido como um saber de referência construído ao longo do desenvolvimento histórico-epistemológico. Em síntese, de acordo com Almouloud (2011, p. 194), “o saber sábio é construído e faz parte do patrimônio cultural do pesquisador.” Em outras palavras, esse aspecto direciona a atenção para as gêneses dos objetos de estudo, a qual ressalta a “(...) a razão de ser ou a racionalidade que dá sentido à atividade matemática realizada sob restrições institucionais que fornecem e limitam a aplicação do conhecimento matemático correspondente” (Bosch, et al., 2006, p.2-3, tradução nossa⁷).

Situados nestes pressupostos e tendo em vista que “um saber não existe in vácuo, num vazio social. Todo conhecimento aparece, num dado momento, numa dada sociedade, ancorado em uma ou mais instituições” (Chevallard, 1989, p. 32), é possível projetar o olhar para alguns elementos que pertencem à gênese do conceito de vetor. Neste sentido, é relevante destacar que muitos registros históricos associam a conceitualização vetorial a um formato multifacetado de acordo com os domínios e áreas do conhecimento a qual pertence.

Por meio desta vertente, Dorier (2000) pontua acerca da existência três “habitats ecológicos⁸”: o vetor geométrico, o vetor algébrico e o vetor físico. Este fato reforça as múltiplas características que acompanham o conceito desse objeto, ou seja, nas palavras de Chevallard (1994, p. 22, tradução nossa⁹), este fato situa “(...) um saber S cujas algumas instituições reconhecem que ele vive nelas”. Assim, é possível compreender a multiplicidade

⁷ (...) the “raison d’être” or rationale that gives sense to the performed mathematical activity. And it also contains institutional restrictions that provide and limit the application of the corresponding mathematical knowledge.

⁸ Termo vinculado à ecologia dos saberes que indica as funções que o objeto de saber exerce em interação com outros objetos assim como situam o objeto em termos de localização institucional (Chevallard, 1996).

⁹ (...) Soit un savoir S dont un certain nombre d'institutions reconnaissent qu'il vit en leur sein.

conceitual do vetor, que pode, inclusive, representar um obstáculo à aprendizagem. Como aponta Brousseau (1976), todas as concepções podem, em algum momento, tornar-se obstáculos para aquisições futuras.

Diante desse direcionamento, Táboas (2010, p.1) sublinha que “a palavra “vetor” tem sido utilizada com um sentido algébrico mais moderno, ou seja, como diferença entre dois pontos no espaço, a partir do trabalho de Sir William R. Hamilton (1805-1865) com quaternions” (generalização dos números complexos), visto que,

(...) ele criou uma terminologia elaborada utilizando palavras e combinações como vector, vehend, vectum, revector, revectum, revehend, revection, revectum, provector, ... transvector, ... factor, ... profactor, ...versor, ...e quadrantal versor, que é, naturalmente, um semi-inversor (...) (Hamilton, apud Crowe, 1994, p.36, tradução nossa¹⁰)

Essas derivações terminológicas também remetem às características associadas à física, haja vista que Ba e Dorier (2006) pontuaram que,

a palavra vetor remete aos astrônomos que costumavam falar vetor do redemoinho para designar o movimento de um planeta e o raio vetor para designar o segmento que une o foco da cônica descrevendo a trajetória do planeta para uma posição na órbita. O uso do termo raio vetor, em seguida, tornou-se generalizado em geometria, mas em última análise, não tem nada a ver com o vetor como é atualmente entendido. (Ba & Dorier, 2006, p. 18)

A partir do que foi apresentado, identifica-se traços da multiplicidade conceitual desse objeto, a qual integra a modelação da realidade associada aos fenômenos físicos. Entretanto, não se deve perder de vista a existência de abordagens geométricas, as quais subsidiavam os problemas físicos. Como destacado por Crowe (1994):

A história inicial da análise vetorial é mais apropriadamente vista dentro do contexto de duas grandes tradições na história da ciência. Uma dessas tradições está relacionada à matemática, a outra à ciência física. A primeira tradição, que dentro da história da matemática, estende-se (...) até o presente e consiste no alargamento progressivo do conceito de número. Ao longo do tempo, o conceito de número foi ampliado de modo a incluir não apenas inteiros positivos, números negativos, frações e irracionais algébricos e transcendentais. Eventualmente, foram introduzidos complexos e números complexos mais altos (incluindo vetores). As atividades de alguns dos números da história da

¹⁰ (...) he set up an elaborate terminology by using such words and combinations as vector, vehend, vention, vectum, revector, revectum, revehend, revection, revectum, provector, ... transvector, ... factor, ... profactor, ...versor, ...and quadrantal versor, which is of course a semi-inversor (...)

análise vetorial podem ser vistas como pertencentes a esta tradição. (Crowe, 1994, p.1, tradução nossa¹¹)

Atualmente, esse processo dialógico entre física e matemática perdura, mesmo frente aos silenciamentos curriculares, os quais serão apresentados no decorrer do texto. A partir desse contexto, é viável estabelecer associações entre o nicho e habitat dos vetores, pois, segundo Chevallard (1994):

Os ecologistas distinguem, em termos de um organismo, seu habitat e seu nicho. Para colocá-lo em uma linguagem voluntariamente antropomórfica, o habitat é, em certo sentido, o endereço, o local de residência da organização. O nicho são as funções que a organização cumpre: é de alguma forma a profissão que exerce lá. (Chevallard, 1994, p. 142, tradução nossa¹²)

Por meio de uma linguagem metafórica, o autor sinaliza que os objetos matemáticos podem viver em distintas instituições, assim como podem assumir diferentes funções, o que significa dizer, nas palavras de Matheron (2000, p. 52), que:

A organização didática permite estudar uma mesma noção matemática designada por um mesmo nome, mas com organizações matemáticas de naturezas diferentes se desenvolvidas no seio de instituições diferentes.

Fundamentados nessa concepção, é possível afirmar que a trajetória epistemológica dos vetores sofreu modificações em suas representações, visto que,

Essa transformação consistiu na mudança de ênfase de tais quantidades escalares como posição e peso para tais quantidades vetoriais como velocidade, força, impulso e aceleração. A transição não foi abrupta e nem confinada ao século XVII. Mais tarde o desenvolvimento na eletricidade, magnetismo e ótica atuaram facilitando a transformação do espaço da matemática física num espaço preenchido com vetores. (Crowe, 1994, p. 1, tradução nossa¹³)

¹¹ The early history of vectorial analysis is most appropriately viewed within the context of two broad traditions in the history of science. One of these traditions relates to mathematics, the other to physical science. The first tradition, that within the history of mathematics, extends from the time of the Egyptians and Babylonians to the present and consists in the progressive broadening of the concept of number. Throughout time the concept of number has been expanded so as to include not only positive integers, but negative numbers, fractions, and algebraic and transcendental irrationals. Eventually complex and higher complex numbers (including vectors) were introduced. The activities of some of the figures in the history of vector analysis may be viewed as belonging to this tradition.

¹² Les écologistes distinguent, s’agissant d’un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l’habitat, c’est en quelque sorte l’adresse, le lieu de résidence de l’organisme. La niche, ce sont les fonctions que l’organisme y remplit : c’est en quelque façon la profession qu’il y exerce.

¹³ This transformation consisted in the shift in emphasis from such scalar quantities as position and weight to such vectorial quantities as velocity, force, momentum, and acceleration. The transition was neither abrupt nor was it confined to the seventeenth century. Later developments in electricity, magnetism, and optics acted further to transform the space of mathematical physics into a space filled with vectors.

Nestes termos, a matemática e a física convergiram em vários períodos da história; um desses períodos foi no século XIX, marcado pela criação e pelo desenvolvimento de métodos vetoriais. Perspectiva essa reforçada por Dorier (1997):

A abordagem sintética pelo cálculo vetorial do mundo geométrico mostrou suas vantagens sobre o método analítico herdado de Descartes. A introdução da linguagem geométrica na análise funcional desloca esse debate para uma dimensão infinita, favorecendo assim o abandono da representação analítica por uma abordagem que trata a função como um objeto independente de suas representações. (Dorier, 1997, p.34, tradução nossa¹⁴)

Por meio deste escopo epistemológico, notam-se traços inerentes da caracterização dos vetores em distintos contextos alimentados por múltiplas representações que nos impulsionam a pensar acerca do papel que os vetores ocupam no contexto curricular do ensino médio.

O que nos *dizem* os documentos oficiais que regulamentam o ensino médio sobre vetores?

Os discursos que permeiam os documentos oficiais e regulamentam, atualmente, o nível médio de ensino apontam para o caráter interdisciplinar, ou seja, objetiva-se interligações entre conteúdos, fato este que “propõe a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento” (BNCC, 2017, p. 15). Entretanto, em contraposição, os vetores que transportam em si aspectos inerentes à interdisciplinaridade não possuem voz na grade curricular de matemática neste contexto. Assim, é relevante destacar que, mesmo assumindo um papel de destaque como “[...] um instrumento importante e prático no estudo dos conteúdos [...]” (Assemay, 2011, p. 130) e com potencial para reduzir cálculos, a abordagem vetorial foi enfraquecida e vem sendo silenciada, como destacam Nasser et al. (2021):

O conceito de vetor não faz parte do currículo de Matemática do Ensino Médio, e nem consta da Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Ao ingressar no Ensino Superior, alguns alunos trazem uma noção de vetor, da Física do Ensino Médio, mas uma abordagem de Geometria Analítica poderia ajudar na representação e visualização das situações, [...] (Nasser et al., 2021, p. 96)

A ausência da abordagem geométrica, subsidiada pelo aporte vetorial no contexto matemático, foi e continua sendo um tema que tem fomentado inquietações. Nestes termos, Souza (2015) sublinha:

¹⁴ L'approche synthétique par le calcul vectoriel du monde géométrique a montré ses avantages par rapport à la méthode analytique héritée de Descartes. L'introduction du langage géométrique en analyse fonctionnelle déplace ce débat en dimension infinie favorisant ainsi l'abandon de la représentation analytique pour une approche traitant la fonction comme un objet indépendant de ses représentations.

O conceito de vetor no Ensino Fundamental e, principalmente, no Ensino Médio é visto apenas em Física. Isso gera uma impressão de que este ente tão importante é um objeto exclusivo dessa disciplina, é inegável o seu papel neste contexto. No entanto, vetor é um objeto matemático, por isso ele pode ser inserido no currículo de Matemática, considerando os aspectos geométrico e algébrico com suas características e propriedades específicas. Vetores são ferramentas que simplificam cálculos na resolução de problemas e demonstrações de resultados importantes. Eles aparecem em áreas como a Geometria Analítica, a Álgebra Linear e o Cálculo, estão associados aos números complexos e suas operações. (Souza, 2015, p. 18)

Em sentido análogo Vaz et al., (2017), também pontuam:

Ao observar as dificuldades apresentadas por alunos ao chegar à universidade, o grupo começou a questionar o que se ensina de vetores e retas no EM. Para nossa surpresa, verificou-se que “vetores” é um tópico que, em geral, não faz parte dos currículos de EM de Matemática. Em alguns casos, aparece no currículo de Física, mas, não está claro se os alunos conseguem aplicar esse conhecimento para usar vetores em Matemática. (Vaz et al., 2017, p.57)

De forma enfática, Elon Lages Lima et al. (2001, p. 62), após ter analisado diversos livros de matemática do ensino médio, expõe seu descontentamento ao fazer referência à exiguidade dos vetores:

Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor [...], é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física.

O autor reforça sua opinião ao declarar:

O livro consegue vencer muito bem a dificuldade gerada pelo fato de os programas da maioria das escolas não incluírem vetores, construindo, disfarçadamente, um “cálculo vetorialzinho” de soma e produto por número para ser usado nesse contexto. [...] um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para Ensino Médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática. (Lima et al., 2001, p. 130)

As considerações, neste sentido, ganham cada vez mais força quando Lima et al. (2001) prosseguem com reflexões e críticas no processo de análise dos livros:

O primeiro capítulo trata da geometria analítica da reta, começando pela noção de medida algébrica de um segmento orientado (mas sem nunca dizer o que é um segmento orientado) (Lima et al., p. 156). [...]

A falta de uma apresentação vetorial (no livro nenhum sentido é atribuído a $x_1 - x_2$ apenas a $|x_1 - x_2|$) torna a dedução da fórmula das coordenadas do ponto de um segmento médio algo extremamente complicado. (Ibid., p. 210)

[...] Cabe aqui uma reflexão a respeito do conteúdo de Geometria Analítica dos livros nacionais para o ensino médio. Por que não falam em vetores? A noção de vetor é

necessária ao aluno, a Física a utiliza e a Geometria Analítica fica muito mais rica com esta ferramenta, simplificando demonstrações e possibilitando soluções melhores para os problemas. (Ibid., p. 259)

Em direcionamento análogo, as orientações curriculares para o ensino médio recomendavam, em tom sugestivo, que professores de matemática incluam em suas aulas o conceito de vetor, afirmando que,

É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física. (Brasil, 2006, p.77)

Contudo, esta perspectiva não repercute de forma audível em documentos como o Guia do Programa Nacional do Livro Didático de Matemática (2018), em que encontramos apenas um tópico que alude aos vetores: “[...] É importante que o estudo dos complexos seja uma oportunidade privilegiada de articulação com tópicos como vetores e geometria no plano, com trigonometria e com as equações algébricas” (Brasil, 2017, p. 24). Nas versões atuais do guia não identificamos nenhuma referência ao objeto matemático vetor.

Similarmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) dedica, implicitamente, um exíguo espaço para a temática vetorial na área destinada à matemática e suas tecnologias, ao abordar movimento e posição na habilidade EF05MA15: “Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de *direção e de sentido* e giros” (Brasil, 2018, p. 297, grifos nossos).

Frente ao que foi apresentado, é possível perceber a existência de contradições, visto que os vetores são, em essência, objetos matemáticos que representam grandezas físicas vetoriais como velocidade, aceleração e força. Assim, torna-se tácita a existência de inibições que obstaculizam a consolidação deste saber, ou seja, essa dissociação tem restringido e impactado o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem no que tange a abordagem vetorial matemática.

Ao constatar essa problemática curricular, Goulart (2021) buscou examinar traços das relações pessoais de alguns estudantes de um curso de licenciatura em matemática. Como direcionamento, foram elaboradas algumas questões:

1- Conte-nos como é a sua relação com os vetores:

- a) já teve contato com o assunto no ensino médio? Se sim, em qual ou quais disciplinas?
- b) caso tenha respondido afirmativamente à questão anterior, descreva como foi a abordagem deste conteúdo.
- c) você considera um tema de fácil aprendizagem? Justifique. (Goulart, 2021, p.129)

De posse das respostas, a autora conseguiu identificar o nível de pertencimento deste objeto em cada universo cognitivo¹⁵, o qual pode ser descrito como um conjunto de relações geradas por diversos assujeitamentos institucionais, ou seja, “Quando um objeto o existe para uma pessoa x , também dizemos que x conhece o , a razão $R(x; o)$ especificando a maneira pela qual x conhece o .” (Chevallard, 2009, p. 1). Aditado a isso, o autor esclarece:

É importante ressaltar que o adjetivo cognitivo não é tomado aqui em seu sentido intelectualista comum: tenho uma relação pessoal com minha escova de dentes, a máquina de café da cafeteria, o pedal de freio do meu carro etc., todos objetos que fazem parte do meu universo cognitivo, da mesma forma que, por exemplo, a noção de equação de segundo grau ou a de derivada fazem parte dela. (Chevallard, 2009, pp. 1 - 2)

Um recorte dos registros dos relatos dos discentes, revelam a inexistência de relações pessoais de x (estudantes) com o objeto o (vetores), ou seja, $R(x; o) = \emptyset$.

Estudante 4 a) Não. Estudei em escola pública e fiz magistério no ensino médio. Não tive acesso a muitos assuntos de matemática. Tenho facilidade em porcentagem e algumas equações do 2º grau.

Estudante 7 a) Mais ou menos, foi só uma introdução de uma aula e depois nunca mais. b) Foi uma introdução, mas não teve nenhum tipo de exercício ou algo do tipo para um real aprendizado. c) Acho que não muito.

Estudante 3 a) Sim, na matéria física. b) Foi uma abordagem simples. O conteúdo trabalhado foi Lei de Coulomb, a qual dependia do conhecimento básico de vetores. Vimos soma e diferença entre vetores de mesmo sentido e em sentidos diferentes. Estudamos a regra do paralelogramo também. c) A parte que vi no Ensino Médio achei fácil.

Estudante 9 a) Não! b) c) Não. Talvez porque não tive contato com geometria no ensino básico. (Goulart, 2021, p.129, grifos da autora)

Por meio do que foi ratificado nas respostas, é possível notar que as vozes dos documentos oficiais refletem e ecoam na etapa final do processo transpositivo no âmbito do *Saber Apreendido*. Aspecto este que coloca em evidência a inexistência de relações pessoais com o ente matemático vetor. Em termos didáticos, é materializada uma problemática de natureza ecológica, a qual foi identificada de forma recorrente por membros que compõem o *Saber Sábio*, porém miniaturizada pelo grupo que integra o *Saber a Ensinar*, possivelmente, por possuir maior grau de influência nas tomadas de decisões acerca do que se caracteriza como

¹⁵ Chamamos, então universo cognitivo de x o conjunto $UC(x) = \{(o, R(x; o)) / R(x; o) \neq \emptyset\}$

relevante para integrar os equipamentos praxeológicos¹⁶ dos estudantes do ensino médio. Esse aspecto pode ser descrito nos níveis superiores da escala hierárquica de codeterminação didática (Chevallard, 2002), como ilustrado na Figura 1.

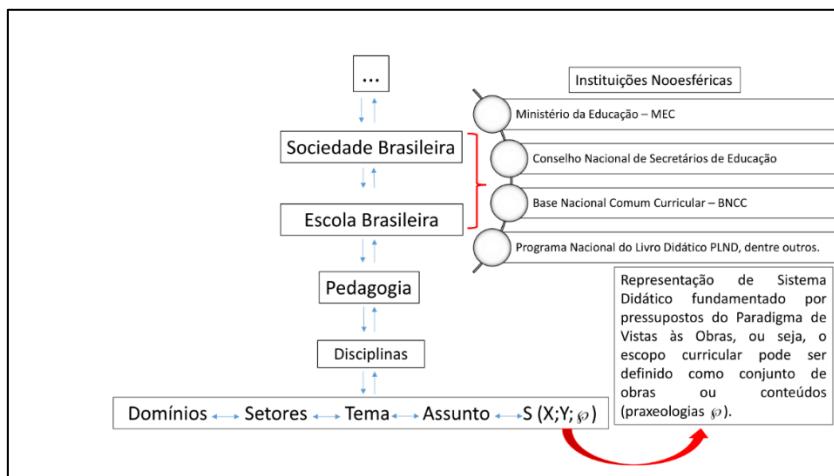


Figura 1

Níveis de codeterminação didática, adaptado por Bosch (2011) e Chevallard (2002, pp. 9 - 10)

Neste sentido, é importante destacar que a estruturação curricular brasileira se assenta nos pressupostos do paradigma de visitas às obras, descrito ou visitas aos monumentos¹⁷, que, na acepção de Chevallard (2012), resume-se a ouvir um relato ou narrativa recitada pelo professor sobre o monumento visitado. Quanto à abordagem ecológica, Bosch e Chevallard (1999, p. 4, tradução nossa¹⁸) destacam que “o problema ecológico expandirá o campo de análise e abordará as restrições criadas entre os diferentes objetos de conhecimento a serem ensinados”. O que significa dizer que os vetores não possuem habitat¹⁹ no currículo de matemática do ensino médio. Esse fato repercute nos processos de ensino e aprendizagem da Álgebra Vetorial presente nas ementas dos cursos de nível superior atrelados à área de ciências exatas.

¹⁶ Todas as praxeologias que as pessoas têm à sua disposição. Ver Chevallard (2009).

¹⁷ In the framework of the anthropological theory of the didactic, this paradigm is known as the paradigm of “visiting works” or, according to a metaphor used in ATD, “of visiting monuments”, for each of those pieces of knowledge.

¹⁸ Le problème écologique élargira le champ d’analyse et traitera les contraintes créées entre les différents objets de connaissance à enseigner.

¹⁹ Para Chevallard (1994, p. 142), os ecologistas distinguem, em termos de um organismo, seu habitat e seu nicho. Para colocá-lo em uma linguagem voluntariamente antropomórfica, o habitat é, em certo sentido, o endereço, o local de residência da organização.

Traços de um modelo praxeológico curricular vetorial a partir do viés transpositivo no âmbito de um curso de licenciatura em matemática

A teoria da transposição didática (TTD), projetada por Chevallard (1991; 1994), emergiu da expressão “transposição didática” introduzida por Verret (1975), o qual, em seu trabalho intitulado *O tempo dos estudos*²⁰, associou a distribuição do tempo na execução de atividades escolares. No âmbito da didática, esse termo inspirou e impulsionou uma configuração que foi difundida no âmbito dos pesquisadores em didática da matemática, assumindo assim, uma posição central no desenho teórico da TTD, aspecto este franqueado pela declaração: “Eu introduzi o tema da transposição didática na comunidade francesa da didática matemática no início dos anos 80” (Chevallard, 1994, p. 1, tradução nossa²¹).

Aditado a isso, é relevante destacar que esse construto teórico se apoiou nas gêneses dos sistemas didáticos (SD), os quais integram professor, aluno e saber como apregoado na teoria das situações didáticas (Brousseau, 1997), ou seja, significa dizer que existe um sistema mínimo que estabelece associações entre a concepção de ensino e a organização do conhecimento comunicado pelo professor, no qual os estudantes se envolvem no processo de aquisição de determinado saber. Nestes termos, essas relações didáticas estão situadas num esquema comunicacional de informações, pois, segundo Brousseau (2008, p. 16), “Em geral, esse esquema é associado a uma concepção de ensino em que o professor organiza o conhecimento a ser transmitido em uma série de mensagens, das quais o aluno toma para si o que deve adquirir.” Sob essa ótica organizacional do saber, Almouloud (2011) apresenta alguns direcionamentos e questionamentos que corroboram com o escopo investigativo, haja vista que,

Para ensinar uma noção científica em um dado nível de escolaridade, é necessário torná-la acessível aos alunos. Portanto, precisa-se transformá-la a partir de um saber de referência que, em geral, é o saber dos especialistas da disciplina (o saber sábio). Neste trabalho, apresentamos ferramentas teóricas da didática da Matemática para responder as seguintes questões: *Como analisar o currículo de um nível de ensino? Para uma dada noção, quais aspectos são privilegiados no ensino, nas propostas curriculares e nas práticas de classes? Quais são os aspectos importantes da noção que estão ausentes nos processos de transformação? Quais escolhas didáticas podem ser feitas?* (Almouloud, 2011, p. 193, grifos nossos)

Assim, esse cenário de questões e orientações fomenta o delineamento de alguns encadeamentos transpositivos, os quais foram definidos, projetados e refletidos culminando numa ampliação deste arcabouço teórico, sendo denotado por Chevallard (1996) como teoria

²⁰ Le temps des études.

²¹ J'ai introduit le thème de la transposition didactique dans la communauté française des didacticiens des mathématiques au tout début des années 1980.

antropológica do didático (TAD), a qual passou a abrigar a TTD, por meio de uma configuração ecológica, que na ótica de Artaud (1999) consiste na ecologia dos saberes, que têm a função de questionar o real, ou seja,

O que existe, e por quê? Mas também, o que não existe e por quê? Ou poderia existir? Sobre quais condições? Ou de forma inversa, dado um conjunto de condições, quais objetos são forçados a viver, ou pelo contrário, quais são impedidos de viver nessas condições? Essas são as questões características da problemática ecológica. (Artaud, 1999, p.101, tradução nossa²²)

Essa perspectiva impulsiona a conjecturar sobre o que existe e o que deveria existir no âmbito transpositivo do *Saber Vetorial* ensinado e aprendido em um curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública? Como pressuposto, vale destacar que no cerne da didática:

O ensino e aprendizagem da matemática não são considerados como o ensino e a aprendizagem de ideias matemáticas, noções ou conceitos, mas como o ensino e a aprendizagem de uma atividade humana situada, realizada, em instituições concretas. Além disso, uma situação inclui a "razão de ser" ou a racionalidade que dá sentido à atividade matemática realizada sob restrições institucionais que fornecem e limitam a aplicação do conhecimento matemático correspondente. (Bosch et al., 2006, pp. 2-3, grifos dos autores, tradução nossa²³)

A partir deste viés, é possível pensar acerca dos contornos estruturais e consequentes questionamentos que permitem que as organizações do conhecimento vetorial possam *viver* no seio de um curso de licenciatura em matemática. Desta forma, torna-se viável identificar quais são os distanciamentos entre as *Organizações Matemáticas Vetoriais a Ensinar* e as *Organizações Matemáticas Vetoriais Ensinadas e Aprendidas*. Perspectiva esta que se aproxima do escopo esquemático representado na Figura 2.

²² Qu'est-ce qui existe, et pourquoi? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi? Et qu'est-ce qui pourrait exister? Sous quelles conditions? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions? Telles sont les questions caractéristiques de la problématique écologique.

²³ Teaching and learning mathematics is not considered as teaching and learning mathematical ideas, notions or concepts, but as teaching and learning a situated human activity performed in concrete institutions. Moreover, a situation includes the "raison d'être" or rationale that gives sense to the performed mathematical activity. And it also contains institutional restrictions that provide and limit the application of the corresponding mathematical knowledge.

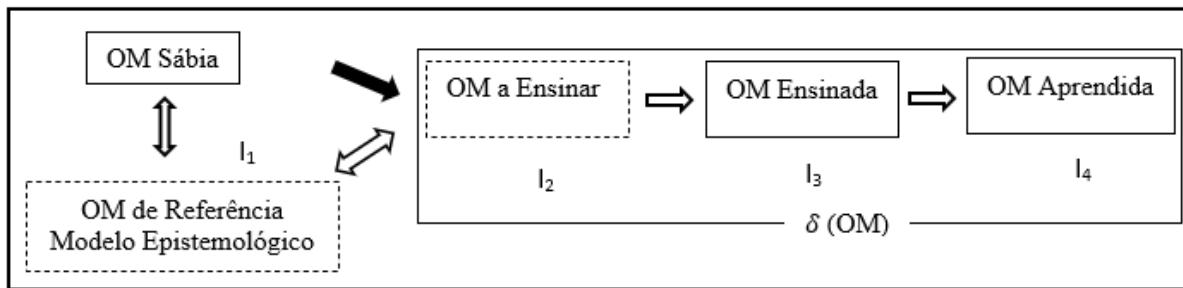


Figura 2

Esquema dos processos didáticos (Bosch & Gascón, 2005)

Neste sentido, os autores caracterizam cada termo apresentado na Figura 2:

A OM₂ a ser ensinada constitui um modelo praxeológico do currículo de matemática. A base empírica para o desenvolvimento desse modelo pode ser encontrada em documentos curriculares (programas oficiais) e livros didáticos. Sua influência sobre o (OM) é central, embora nem o professor nem a instituição educacional tenham esse modelo explicitamente, mas apenas materiais praxeológicos mais ou menos bem articulados entre eles. Mas essa influência não pode ser interpretada adequadamente se não tivermos um ponto de vista epistemológico. Esse ponto de vista é fornecido por uma OM de referência, cuja descrição geralmente é feita a partir das OM_s aprendidas que legitimam o processo de ensino. A OM de referência é aquela considerada pelo pesquisador para sua análise. Não coincide necessariamente com as OM_s aprendidas das quais se origina (porque os inclui na análise), mas é expresso em termos muito semelhantes. A OM de referência é aquela que o pesquisador põe à prova de contingência e que, portanto, passa por permanente remodelagem. (Bosch e Gascón, 2005, p. 117, tradução nossa²⁴)

Frente a essa argumentação, a atenção se volta para I₂ como apresentado na Figura 2, uma vez que o foco investigativo se situa numa análise ecológica do saber a ensinar do conceito de vetor, ou seja, em paráfrase a Bosch e Gascón (2005), se insere no eixo de sustentação do modelo praxeológico do currículo. Em outras palavras, Chevallard (1982, p.8) destaca que I₂ ocupa o lugar em que “os conflitos se desenvolvem, as negociações acontecem, as soluções amadurecem.” Além disso, é relevante destacar que,

²⁴ L'OM2 à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum de mathématiques. La base empirique pour élaborer ce modèle se trouve dans les documents curriculaires (programmes officiels) et dans les manuels. Son influence sur δ(OM)3 est centrale bien que ni le professeur ni l'institution scolaire de dispose explicitement de ce modèle mais uniquement de matériaux praxéologiques plus ou moins bien articulés entre eux. Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM de référence dont la description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subir pour cela de permanents remaniement.

O centro operacional do processo de transposição, que traduzirá em fatos a resposta ao desequilíbrio criado e observado (expresso pelos matemáticos, pais, os próprios professores), é a noosfera. Qualquer conflito entre o sistema e o ambiente se desloca para lá e encontra seu lugar privilegiado de expressão. Nesse sentido, a noosfera atua como um amortecedor. Mesmo em tempos de crise, mantém dentro de limites aceitáveis a autonomia da operação didática. (Chevallard, 1982, p. 11, tradução nossa²⁵)

Artaud (1999) pontua a existência de ecossistemas, dentre eles o noosferiano, no qual a matemática é manipulada para fins de transposição. Definição essa que subsidiou a interpretação de Goulart (2021) ao caracterizar a noosfera como uma instituição composta por sujeitos que pensam acerca dos saberes que serão difundidos no âmbito dos sistemas didáticos (SD), intermediando assim diálogos entre as esferas da OM sábia e da OM ensinada, no intuito de proporcionar um funcionamento adequado dos SD em termos de condições e restrições que se impõem no processo de ensino e aprendizagem. A partir deste contexto, dentre os elementos que *vivem* em I₂ será dado enfoque para alguns documentos oficiais que regulamentam e institucionalizam a Álgebra Vetorial nos cursos de licenciatura em matemática.

Neste sentido, como já destacado na Figura 1, cumpre às instituições noosferianas reger e regulamentar a organização curricular dos cursos de formação inicial de professores. O Conselho Nacional de Educação em sua resolução CNE/CP nº4 de 29 de maio de 2024, dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Profissionais do Magistério da Educação Escolar Básica (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados não licenciados e cursos de segunda licenciatura). Assim, é possível destacar traços característicos do perfil do egresso da formação inicial no que se refere esfera do saber. Como descrito no Art. 10,

Ao final do curso de formação inicial em nível superior o egresso deverá estar apto a: I - demonstrar conhecimento e compreensão da organização epistemológica dos conceitos, das ideias-chave, da estrutura da(s) área(s) e componentes curriculares para os quais está sendo habilitado para o exercício da docência; II - compreender criticamente os marcos normativos que fundamentam a organização curricular de cada uma das etapas e modalidades da Educação Básica e, em particular, das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica e da Base Nacional Comum Curricular; (...) VII - demonstrar conhecimento sobre o uso da linguagem e do pensamento lógico matemático no desenvolvimento do conteúdo específico de ensino; VIII - demonstrar conhecimento sobre diferentes formas de apresentar os conteúdos dos componentes e das áreas curriculares para os quais está habilitado à docência, utilizando esse

²⁵ Le centre opérationnel du processus de transposition, qui va traduire dans les faits la réponse à apporter au déséquilibre créé et constaté (exprimé par les mathématiciens, les parents, les enseignants eux-mêmes), c'est la noosphère. Tout conflit entre système et environnement s'y déporte, et y trouve son lieu d'expression privilégié. À cet égard, la noosphère joue un rôle de tampon. Même en période de crise, elle maintient dans des limites acceptables l'autonomie du fonctionnement didactique.

conhecimento para selecionar recursos de ensino adequados que contemplem o acesso ao conhecimento para um grupo diverso de estudantes; (...). (Brasil, p.7, 2004)

Na primeira seção deste artigo foi possível observar que temas associados aos vetores não *vivem* na BNCC (2017). Entretanto, em sentido contrário, o Projeto Político Pedagógico (PPP) de um curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública situado no estado da Bahia ressalta a relevância do aporte vetorial no encadeamento curricular deste curso. Nestes termos, correlacionamos o habitat dos vetores nestes níveis de ensino, destacando disciplinas e componentes curriculares que contemplam em programas e ou ementas uma abordagem vetorial, como destacado na Figura 3.

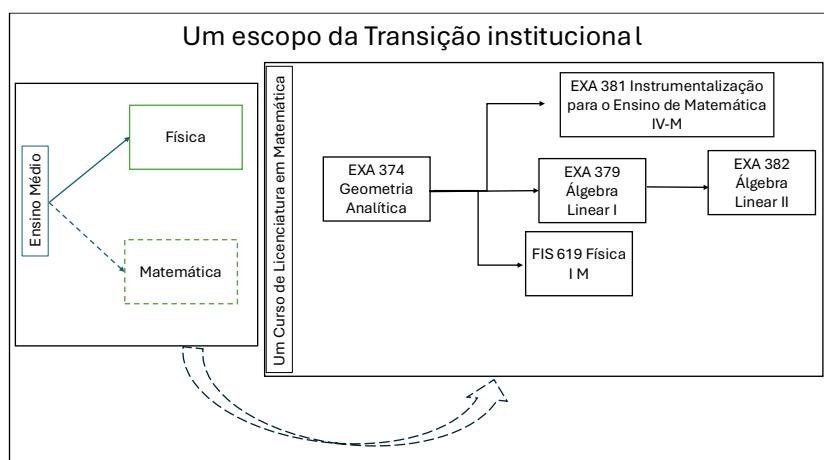


Figura 3.

Esquema comparativo do habitat dos vetores nas instituições de ensino médio e de um curso de licenciatura em matemática (autores, 2025)

É possível observar que no contexto dos cursos de licenciatura em matemática existem variações em termos da denominação da componente curricular, códigos das disciplinas, oferta semestral, carga horária, referências bibliográficas e detalhamento das ementas. Entretanto, em todos os PPP consultados, é tácita a disciplina Geometria Analítica, e suas derivações integram os conceitos vetoriais, os quais são apresentados para os discentes e, por consequência, futuros professores de matemática.

Esses aspectos também foram evidenciados em livros textos que compõem o escopo bibliográfico dessa componente curricular. Nesta perspectiva, Chaachoua (2014) indica que ao demonstrar que a viabilidade em conceber, por meio do estudo dos livros, promovem-se possibilidades de identificação de traços das relações institucionais. Apoiada nesta concepção, Goulart (2021) consultou alguns livros de Geometria Analítica, referenciados no PPP, e em

todos as obras analisadas o cerne eram os vetores, como sublinhou Souza (2019), acerca de habilidades e competências que o discente deverá desenvolver, pois:

Espera-se que após cursar a disciplina o discente tenha compreendido: o conceito formal da teoria de vetores no plano e no espaço, operações com vetores no plano e no espaço incluindo os produtos e a noção de espaços vetoriais e os diversos conceitos inseridos neste tópico tais como combinação linear, dependência linear, base e dimensão. (Souza, 2019, p.2)

Outras expectativas também são projetadas em outra obra. Neste caso, o autor espera um contato prévio com a Geometria Elementar, ao declarar que,

O primeiro aspecto se relaciona às interligações estabelecidas entre a Geometria Elementar e Geometria Analítica, como revelado em alguns trechos: O estudante já está familiarizado com o segmento retilíneo como conceito geométrico; entretanto, para as finalidades da Geometria Analítica, estendemos esta noção de segmento retilíneo, incluindo um sentido ou orientação. (...) Do ponto de vista da Geometria Elementar, os comprimentos dos segmentos retilíneos orientados AB e BA são iguais; entretanto, em Geometria Analítica deve ser feita uma distinção entre os sinais destes comprimentos. Assim, especificamos arbitrariamente que um segmento retilíneo com certa orientação tem comprimento positivo, ao passo que outro opostamente orientado terá comprimento negativo. (Lehmann, 1991, pp. 1-2, grifos do autor)

Essas sinalizações apontam para o que se espera de bons sujeitos institucionais, aqueles que apresentam uma resposta foi estipulada e determinada pela instituição, visto que “quando os indivíduos passam a ocupar tais posições, eles se tornam sujeitos das instituições - sujeitos ativos que contribuem para dar vida às instituições pelo próprio fato de estar assujeitados a elas” (Chevallard, 1999, p. 94). Nestes termos, o foco de estudo é projetado para as relações pessoais de alguns discentes de um curso de licenciatura em matemática, com os vetores frente aos assujeitamentos aos quais são submetidos, haja vista que espera-se que os estudantes que ingressam no referido curso possuam conhecimento prévio acerca dos vetores.

Uma leitura interpretativa das relações pessoais de um grupo de estudantes acerca dos vetores no seio de um curso de licenciatura em matemática

A partir do que foi esboçado, é possível identificar lacunas que esculpem um problema de natureza ecológica, o qual habita em cenários de transições curriculares e aponta para a necessidade de fomento de diálogos e vínculos mais estreitos entre os sistemas de ensino (ensino médio e ensino superior), como esquematizado na Figura 3, visto que torna-se tácito que existem hiatos que geram restrições na construção da bagagem praxeológica dos futuros

docentes de matemática e, consequentemente, inibem a estruturação dos equipamentos praxeológicos desses sujeitos no âmbito do saber vetorial. Afirma Chevallard:

A gênese de equipamentos praxeológicos (e relatórios institucionais associados) concorda com as posições do aluno e do professor durante a construção praxeológica. O topoi (lugar, em grego antigo) do aluno (respectivamente do professor) é a parte da posição do aluno (resp. do professor) que se relaciona com as entidades praxeológicas construídas ou em construção na sala de aula. (Chevallard, 2009, p.82, tradução nossa²⁶)

Aditado a isso, não se deve esquecer que, “uma pessoa x é o resultado de suas sujeições passadas e presentes” (Chevallard, 2018, p. 37), concepção essa que se une a noção fundamental da:

[...] relação pessoal de um indivíduo x com um objeto O, uma expressão pela qual designamos o sistema, notamos R (x, O), de todas as interações que x pode ter com o objeto O - se x o manipula, o usa, fala sobre ele, sonha com ele etc. Diremos que O existe para x se a relação pessoal de x com o é "não vazia", que é anotada como R (x, O) ≠ Ø. (Chevallard, 2002, p. 81, tradução nossa²⁷)

Frente a esse delineamento, é viável analisar as “fissuras” por meio de alguns registros das relações pessoais de discentes de um curso de licenciatura em matemática em torno de um objeto do saber, neste caso os vetores. Como sublinhado Chevallard (1989):

Esse relacionamento pessoal inclui notadamente tudo o que normalmente pensamos que podemos dizer –em termos de "saber", "saber fazer", "concepções", "habilidades", "domínio" e "imagens mentais", de "representações", de "atitudes", de "fantasias", etc. ... - de X sobre Os. Tudo o que pode ser afirmado –certo ou errado, em conformidade ou não– deve ser considerado (na melhor das hipóteses) para um aspecto do relacionamento pessoal de X com Os. (Chevallard, 1989, p. 219, tradução nossa²⁸)

Em associação com os aspectos destacados, é relevante revisitar um trecho da questão de pesquisa em que se apoia essa seção, ou seja, (...) *Como futuros professores projetam esse saber no âmbito de um curso de licenciatura em matemática?* O suporte utilizado para conjecturar acerca de uma resposta para esse questionamento se apoia na tese de Goulart (2021),

²⁶ Genèse des équipements praxéologiques (et des rapports institutionnels associés) selon les positions d'élève et de professeur au cours de la construction praxéologique. Le topoi (le lieu, en grec ancien) de l'élève (respectivement du professeur) est cette partie de la position d'élève (resp. de professeur) qui a trait aux entités praxéologiques construites ou en cours de construction dans la classe.

²⁷ La notion fondamentale est celle de rapport personnel d'un individu x à un objet o, expression par laquelle on désigne le système, noté R(x, O), de toutes les interactions que x peut avoir avec l'objet o – que x le manipule, l'utilise, en parle, en rêve, etc. On dira que o existe pour x si le rapport personnel de x à o est « non vide », ce qu'on note R(x, O) ≠ Ø.

²⁸ De ce rapport personnel relève notamment tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire - en termes de "savoir", de "savoir-faire", de "conceptions", de "compétences", de "maîtrise", d' "images mentales", de "représentations", d' "attitudes", de "fantasmes", etc... - de X à propos de Os. Tout ce qui peut être énoncé - à tort ou à raison, pertinemment ou non - doit être tenu (au mieux) pour un aspect du rapport personnel de X à Os.

visto que a autora adotou como um dos vieses investigativos as concepções de discentes de um curso de licenciatura em matemática sobre o ente matemático vetor, visando identificar características das bagagens praxeológicas destes sujeitos. A Figura 4 expõe um recorte desses aspectos.

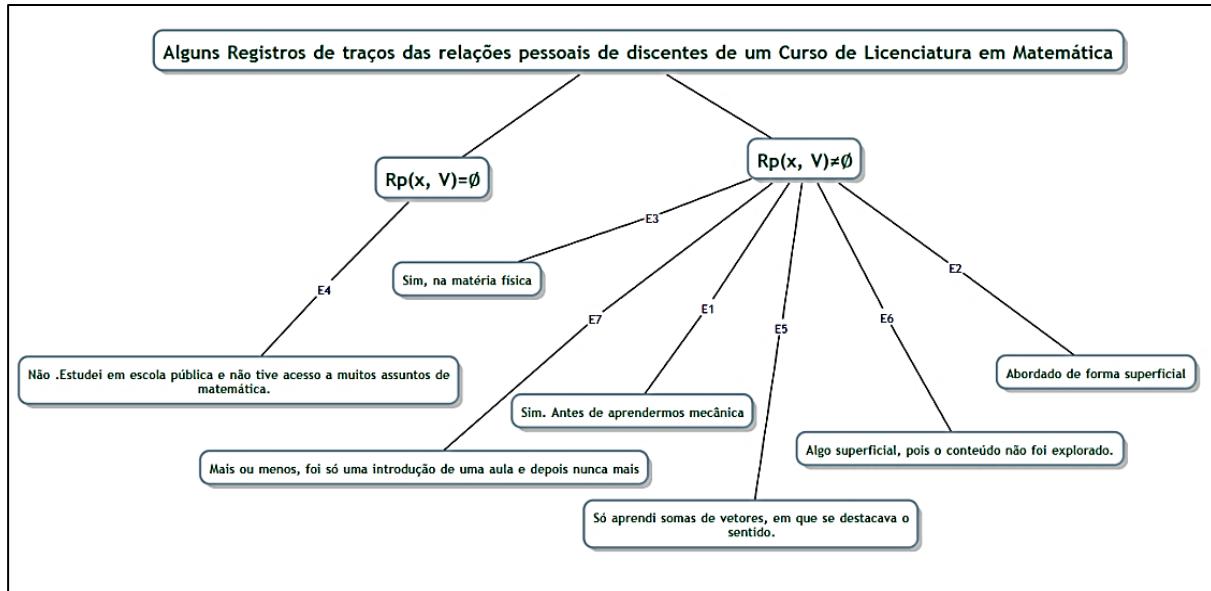


Figura 4

Escopo de registros das relações pessoais de alguns discente com o objeto vetor. (Adaptado por Goulart , 2021)

Em específico, os relatos dos discentes corroboram com o que foi revelado nas seções precedentes, ou seja, o silêncio da abordagem vetorial no desenho curricular do ensino médio faz ecoar, nas bagagens praxeológicas dos futuros professores de matemática, um vazio didático estrutural que vive no seio dos currículos de matemática da educação básica brasileira. Assim, Chevallard (1989) reforça que um saber não existe num vazio social, mas está ligado ao menos a uma instituição, e todo conhecimento de determinada sociedade se ancora em uma ou várias instituições. Portanto, é possível inferir que a relação pessoal só pode ser estabelecida quando a pessoa entra na instituição onde existe o objeto. Como descrito por Chevallard (1996),

Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente, para I se existir um objeto, que denotarei por R (X, O) (resp. RI (O)), a que chamarei relação pessoal de X com O (resp. relação institucional de I com O). Por outras palavras, o objeto O existe se existir ao menos para uma pessoa X ou para uma instituição I, isto é, se pelo menos uma pessoa ou uma instituição tiver uma relação com esse objeto. (Chevallard, 1996, p. 127)

Nestes termos, um dos possíveis caminhos interpretativos se cruzam com os reflexos do desenho curricular da matemática no ensino médio, os quais são projetados no âmbito de ensino

superior, especificamente, em um curso de licenciatura em matemática. Assim, a leitura que se faz leva em consideração que o conhecimento vetorial tangencia a ausência nas bagagens praxeológicas dos estudantes, o que impacta nas relações pessoais que poderiam ser fortalecidas no nível superior de ensino.

Considerações finais

A problemática revelada neste texto aponta para a necessidade de um (re)visitar e por consequência um (re)formular dos elementos que compõem as bases curriculares, no âmbito da matemática, no contexto do ensino médio. E de forma específica, direcionar a atenção para aspectos intrínsecos à gênese do conceito de vetor. A partir desta constatação, se projeta a necessidade de diálogos entre os níveis de codeterminação didática como ilustrado na Figura 1, com o intuito de repatriar os vetores para domínio da matemática no ensino médio, e para que isso aconteça, é preciso reconectar os fios condutores entre as fundamentações curriculares que regem o ensino médio e as que regulamentam o ensino superior, no contexto dos cursos de formação inicial de professores de matemática, visto que, como veemente destacado por vários autores, a base vetorial no currículo do nível médio de ensino constitui um diferencial para estudantes em processo de transição para o ensino superior.

Em termos da fundamentação teórica, o texto exposto no presente artigo busca ratificar o potencial de alguns pressupostos da teoria da transposição didática (TTD) (Chevallard, 1991; 1994), os quais possibilitaram visualizar com mais nitidez alguns pontos inerentes às transformações impostas ao *Saber Vetor* por intermédio de distintos habitats e nichos, como destacado por Dorier (2000). De igual modo funciona a teoria antropológica do didático (TAD) (Chevallard, 1992, 1996), que adota como uma premissa que todo saber pertence a uma entidade social (instituição I) que impõe às pessoas que pertencem a I modos de fazer e de pensar próprios das demandas advindas de I. Frente a essa concepção, foi viável identificar aspectos que se imbricam na conceitualização de currículo como prática e construção social estruturantes dos saberes e conhecimentos em prol das especificidades formativas.

Dante do exposto no presente artigo, buscamos apontar para direcionamentos que fomentem ações conjuntas em prol de uma integração curricular no processo de transição institucional. Dito de outra forma, que seja ofertado aos estudantes do ensino médio a oportunidade de equipar suas bagagens praxeológicas no intuito de cumprir o escopo de um “bom sujeito” institucional, ou seja, aqueles que apresentam uma resposta como projetada pela instituição, pois, segundo Chevallard (1999, p. 4), “quando os indivíduos passam a ocupar tais

posições, eles se tornam sujeitos das instituições –sujeitos ativos que contribuem para dar vida às instituições pelo próprio fato de estar assujeitados a elas.”

Nestes termos, o foco de estudo é projetado para as relações pessoais de alguns discentes de um curso de licenciatura em matemática com os vetores frente aos assujeitamentos aos quais são submetidos, haja vista que se espera que os estudantes que ingressam no referido curso possuam conhecimento prévio sobre vetores. Em síntese, observamos ruídos na comunicação entre a difusão vetorial do que regulamenta os documentos oficiais e o que reverbera nos cenários institucionais em que esse tema é abordado. Frente a essa constatação, faz-se necessário investir em ações que promovam o restabelecimento da sintonia entre as etapas transpositivas do saber vetorial.

Referências

- Almouloud, S. A. (2011). As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. *Educar Em Revista*, (se1), 191–210. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400013>
- Artaud, M. (1999). *Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques*. Dans M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz & M.-H. Salin (Éds), Actes de la IXeécole d'été de didactique des mathématiques(pp.101-139). Caen: ARDM et IUFM.
- Assemany, D. H. (2011). O Ensino e a Aprendizagem de Vetores no 1º Ano do Ensino Médio: uma Reestruturação Curricular. In: *Colóquio De Educação Matemática*, 3., 2011, Juiz de Fora. Atas [...]. Juiz de Fora: 2011.
- Assemany, D. H. et al. (2013) A influência de uma Abordagem Vetorial para o Ensino Médio na Aprendizagem de Cálculo I. In: CIBEM, 7., 2013, Montevideo. *Actas* [...]. Montevideo: 2013. Disponível em: <http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/633.pdf>.
- Assemany, D. H. (2013). Potencializando o Ensino de Números Complexos a partir da Abordagem Vetorial. In: CIBEM, 7., 2013, Montevideo. *Actas* [...]. Montevideo: 2013. Disponível em: <http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/363.pdf>.
- Ba, C.; Dorier, J. (2006). *Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIXème siècle*. L'Ouvert, n. 113, p. 17-30, 2006. Disponível em: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16628>. Acesso em: 18 mar. 2017.
- Barquero, B.; Bosch, M & Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de um problema didáctico: el papel de la modelización matemática em la enseñanza universitaria de las CCEE. In: M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, Eds. *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 235-244). Lleida: SEIEM. <https://core.ac.uk/download/pdf/41586723.pdf>.
- Bosch, M. & Gascon, J. (2005). *La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques*. In: *Balises en didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 107-122.
- Bosch, M.; Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble: La

- Pensé Sauvage-Éditions, v. 19, n. 1, p. 77-124. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf.
- Bosch, M.; Chevallard, Y. & Gascón, J. (2006). Science Or Magic? The Use Of Models And Theories in Didactics of Mathematics, https://www.researchgate.net/publication/285916043_Science_or_magic_The_use_of_models_and_theories_in_didactics_of_mathematics.
- Bosch, M. (2021). *Os percursos de estudo e investigação na transição entre paradigmas: Avanços e problemas abertos*. Apresentação de slides. In: III Simpósio Latinoamericano de Didática de la Matemática LADIMA.
- Brasil. (2024). Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação Conselho Pleno. Resolução CNE/CP nº 4, de 29 de maio de 2024. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Profissionais do Magistério da Educação Escolar Básica (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados não licenciados e cursos de segunda licenciatura)*. http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=258171-rcp004-24&category_slug=junho-2024&Itemid=30192. Acesso em: 23 mar. 2025.
- Brasil. (2001) Ministério da Educação. Parecer CNE/CES nº 1302, de 6 de novembro de 2001. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília: MEC/CNE,
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf
- Brasil. (2018). Ministério da Educação. *PNLD 2018: matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio*/Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. <http://www.fnde.gov.br/programas/programas-dolivro/livro-didatico/guia-do-livro-didatico>.
- Brasil. (2006). Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: volume 2 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf
- Brousseau, G. (1976). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Willy Vanhamme et Jacqueline Vanhamme. La problématique et l'enseignement de la mathématique*. Comptes Rendus de La XXVIII Rencontre Organisée par La Commission Internationale Pour L'étude Et L'amélioration de L'enseignement des Mathématiques. Actes [...]. Louvain-la-neuve, p. 101-117, 1976. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal00516569v2/document>.
- Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques : *Le cours de Montréal*. <http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-coursde-montreal-1997>.
- Brousseau, G. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino*, São Paulo; Ática, 2008.
- Chaachoua, H. (2014). Le Role de L'analyse des Manuels dans la Theorie Anthropologique du Didactique, 2014. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01519339>.
- Chevallard, Y. (1982). Pourquoi la Transposition Didactique? In: *Séminaire de Didactique et de Pédagogie des Mathématiques de L'imag*. Atas [...] de L'année. Université Scientifique et Médicale de Grenoble. 1982.

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Séminaire de Grenoble. *IREM d'Aix-Marseille*. (1989).

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In: ARSAC, G. et al (ed.). *La transposition didactique à l'épreuve*. Grenoble: La Pensée sauvage, http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_processus_de_transposition.pdf.

Chevallard, Y. (1996). Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: Brun, J. *Didática das Matemáticas*. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget.

Chevallard, Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: *Actes de l'université d'été de la Rochelle*. p. 91- 118. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27. Acesso em: 10 de mar. 2020.

Chevallard, Y. (2002). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée: raisons d'être, fonctions, devemir *Communication aux Journées de la commission inter-IREM Didactique*. Paru dans les actes correspondants, IREM, Dijon, p.1-26.

Chevallard, Y. (2009). La TAD face au professeur de mathématiques *Communication au Séminaire DiDiST de Toulouse*. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162. Acesso em: 08/03/25.

Chevallard, Y. (2012). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: a Case for an Oncoming Counterparadigm. In: *International Congress on Mathematical Education, 12*. Coex, Seoul, Korea. Seoul: 2012. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-12688-3_13.pdf.

Chevallard, Y. (2018). A Teoria Antropológica do Didático Face ao Professor de Matemática. In: Almouloud et al. *A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos*. Curitiba, Editora: CRV, 2018.1ª Edição. Curitiba, PR: CRV, p. 31-49.

Chevallard, Y., & Almouloud, S. A. (2023). A transição do aritmético ao algébrico no ensino da matemática no Colégio: Segunda parte: Perspectivas curriculares: a noção de modelização. *Educação Matemática Pesquisa Revista Do Programa De Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, 25(1), 556–596. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p556-596>

Crowe, M. J. *A History of Vector Analysis*. New York: Dover Publishers, Inc., 1994.

Di Pinto, M. A. Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica: as pesquisas brasileiras da década de 90. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

Dorier, J. L. (1995). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *História da Mathematica*, v. 22, p. 227-261, 1995. https://ac.els-cdn.com/S0315086085710245/1-s2.0-S0315086085710245main.pdf?_tid=b7ad07fa8eb04c25ba032d9a011395dd&acdnat=1542463632_88ce12604858a27659a52b759754b6f8.

Dorier, J. L. (1997). Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur L'algèbre Linéaire - Perspective Théorique sur Leurs Interactions. Domain_other. Université

- Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Disponível em: <https://tel.archivesouvertes.fr/tel-00338400/document>. Acesso em: 21 de agos. 2020.
- Dorier, J. L. (2000). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. In: Dorier JL. (eds) *On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library, vol 23*. Springer, https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_1.
- Goulart, J. S. S. (2021). *Uma proposta didática para o ensino da álgebra vetorial fundamentada pelo modelo T4TEL no contexto de um ambiente híbrido de aprendizagem*. [Tese de Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia] <https://repositorio.ufba.br/handle/ri/33990>
- Florêncio R. K. R., & Franco de S., P. (2023). *Estudos brasileiros sobre o ensino de vetores com experimentação em sala de aula no período de 2010-2021*. *Revista Exitus*, 13(1), e023013. <https://doi.org/10.24065/2237-9460.2023v13n1ID1861>
- Lehmann, C. H. (1999). *Geometria Analítica*. 2ª Edição. Tradução: Ruy Pinto da Silva Sieczkowski. Rio de Janeiro. Editora Globo.
- Lima, E. L. et al. (2001). *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM.
- Matheron Y. (2000). Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. IREM d'Aix-Marseille, Petit X, n. 54, p. 51-78. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/54x5_1561104383704-pdf.
- Nasser, L., Sousa, G. A., & Torraca, M. (2021). Transição do Ensino Médio para o Superior: Implicações das pesquisas desenvolvidas por um grupo colaborativo. *Boletim GEPEM*, (78), 83–101. <https://doi.org/10.4322/gepem.2022.012>
- Passos, F. G. et al. (2007). Análise dos Índices de Reprovações nas Disciplinas Cálculo I e Geometria Analítica nos Cursos de Engenharia da UnivASF. *XXXV CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA – COBENGE*. <http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/12/artigos/199Fabiana%20dos%20Passos.pdf>.
- Richit, A. (2005). *Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática*. [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática] – Universidade Estadual de Rio Claro] São Paulo, 2005.
- Rodrigues, J. M. (2015). *Geometria analítica com enfoque vetorial no ensino médio*. [Dissertação Mestrado Profissional – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica], Campinas, 146 f. <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/306436>.
- Rosa, C. de M., Santos, F. F. T. dos, & Mendes, H. C. (2019). Desempenho acadêmico no primeiro ano da graduação: o caso do curso de Estatística da Universidade Federal de Goiás. *Revista de Educação PUC-Campinas*, 24(3), 411-424. Epub 00 de de 2019. <https://doi.org/10.24220/2318-0870v24n3a4514>
- Santos, E. L. dos. (2024). *A importância da introdução e ensino de vetores no Ensino Médio* [Trabalho de Conclusão de Curso Licenciatura em Matemática – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo] Campus Itapetininga, Itapetininga, 2024. <https://repositorio.ifsp.edu.br/server/api/core/bitstreams/394e9e5f-e01a-4ced-a853-8490197c35d8/content>.

- Silva et al. (2016). Análise dos Índices de Reprovação nas Disciplinas de Cálculo I E AVGA do Curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal da Bahia de Vitória da Conquista. *XIV INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY EDUCATION*, 2016. <http://copec.eu/intertech2016/proc/works/55.pdf>.
- Souza, P. do C. (2015). *Uma Investigação por meio de uma Sequência Didática com o Software Geo Gebra para o Estudo de Vetores no Ensino Médio*. [Dissertação de Mestrado em Matemática da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - Uenf Campos Dos Goytacazes – Rj].<https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wpcontent/uploads/sites/14/2017/09/18092015Patrício-do-Carmo-de-Souza.pdf>.
- Táboas, P. Z. (2010). Um Estudo sobre as Origens dos Espaços Vetoriais. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 10, n. 19, p.1-38, 2010. *Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática*. [http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.10,%20no19,%20abril%20\(2010\)/1%20-%20Pl%C3%ADnio%20%20final.pdf](http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.10,%20no19,%20abril%20(2010)/1%20-%20Pl%C3%ADnio%20%20final.pdf). Acesso em: 15 jul. 2019.
- Vaz, R. F. N.; Ferreira, M. L. & Nasser, L. (2017). A compreensão matemática de vetores adquirida por estudantes nas aulas de Física. *BOLETIM GEPEM*, N° 79 p. 56- 69. <http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2017.021>.
- Venturi, J. (2015). Álgebra Vetorial e Geometria Analítica. 10. ed. Curitiba: editora Unificado. www.geometriaanaltica.com.br.
- Verret. *Le temps des études*. Paris: Honoré Champion, 1975.