Los Recorridos de Estudio e Investigación en las Escuelas de Ingeniería.

Trajectories of Study and Research in Engineering Schools

CECILIO FONSECA BON[1]

Resumen

En este trabajo avanzamos en el diseño y construcción de un nuevo dispositivo didáctico, denominado Recorrido de Estudio e Investigación, que está en una fase inicial, que permite articular secuencias de enseñanza y aprendizaje que se pueden trasladar al aula. En el que prima la modelización matemática, la herramienta informática y el trabajo en grupo en espacios institucionales como la ingeniería. Luego se experimenta este dispositivo en un taller de prácticas donde se construye una secuencia relacionada con la variación de un modelo matemático utilizando la derivada, con nuevas responsabilidades para el profesor, el alumno y las propias matemáticas.
Palabras clave*: Modelización matemática, herramienta informática, ingeniería, taller de prácticas, Recorrido de Estudio e Investigación.*

Abstract

In this work we advance in the design and construction of a new didactic device, denominated "Recorrido de Estudio e Investigación"(Trajectory of Study and Research) that it is in an initial phase that it allows to articulate teaching and learning sequences that they can be moved to the classroom. In it prevails the mathematical modelization, the computer tool the working in group in institutional spaces as the engineering. Then this device is experienced in a practical workshop where a sequence related with the variation of a mathematical model is built using the derived, with new responsibilities for the professor, the student and the mathematical itself.
Keywords*: Mathematical modelling, computer tool, engineering, practice workshop, trajectory of study and research.*

Introducción

En el nivel universitario, la implantación de nuevos planes de estudio en el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), proceso en el que estamos inmersos la mayoría de las universidades españolas, provoca un nuevo contrato pedagógico con un cambio profundo en los procesos de estudio y aprendizaje. La aparición del concepto de crédito ECTS junto con la noción de competencias (transversales y específicas) provoca múltiples cambios: en la forma de enseñar del profesor, en la forma de aprender del alumno, disminuye de una forma importante la clase magistral que solo ocupa el 30 % del proceso de estudio -que contrasta con el 70% que debe ocupar el alumno-, pierde protagonismo la evaluación centrada en un examen final, comienza a hablarse de

[1] Universidad de Vigo – Espanha - cfonseca@uvigo.es

equilibrio entre clases presenciales y clases que no lo son, irrumpe con mucha fuerza el protagonismo de las plataformas de aprendizaje tipo Moodle (con muchos recursos disponibles, sin limitaciones de horarios ni de espacios físicos, actualizaciones dinámicas, nuevas formas de autoevaluarse y de acceder a la información, etc.), seminarios, trabajos de los alumnos, aprendizaje cooperativo,… que van a permitir nuevas formas de organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este nuevo marco los alumnos no solo deben saber una disciplina concreta, sino que también deben manejar conocimientos y destrezas que no son posibles conocer solo con la aportación del profesor.

El proceso de estudio en el EEES le resta protagonismo al aula y se lo da a las tecnologías de información y comunicación (TIC), que se convierten en un instrumento que puede facilitar el aprendizaje del alumno, y no sólo a nivel de contenidos sino también provocando la aparición de nuevos escenarios, con la participación de trabajo en la reflexión, información y organización del trabajo en grupo. Las TIC están adquiriendo cada vez más protagonismo en la enseñanza universitaria y juegan un papel fundamental, que va en aumento, en los procesos de estudio de apoyo a la docencia. Permiten extender la actividad matemática a entornos que no están en el aula. Con las TIC cambian el papel de profesor, del alumno y de la propia actividad matemática a realizar en el aula.

Junto a este cambio de contrato pedagógico se produce paralelamente una disminución drástica de los estudiantes que optan por carreras con fuerte contenido matemático. Según la OCDE, el número de estudiantes de Física y Matemáticas entre 1995 y 2003 se ha reducido a la mitad en algunos países. Una de las razones de fondo de este fenómeno es que **la ciencia no se vende bien**. "Los científicos hemos fracasado porque hemos dejado que se piense que la ciencia es algo aburrido y metódico", explica Guinovart presidente de la Confederación de Sociedades Científicas de España.

En el documento “Propuestas para la renovación de las metodologías educativas en la universidad” del Ministerio de Educación de España (2006) se recomienda aproximar más los estudios universitarios al ejercicio profesional, potenciando la dimensión práctica de la enseñanza: el saber, sí, pero también el saber hacer y el saber ser/estar.

El informe (Rocard, 2007) comenta que existe un descenso preocupante en Europa en el interés de los jóvenes por los estudios de las ciencias y de las matemáticas, y este descenso lo relaciona con una forma demasiado abstracta de enseñarlas en Secundaria.

Propone aumentar el interés de los estudiantes introduciendo métodos basados en la investigación, que proporcionen la oportunidad de desarrollar una amplia gama de destrezas complementarias, tales como: el trabajo en equipo, la expresión escrita y oral, la resolución de problemas abiertos y otras habilidades transdisciplinares. Critica que en la mayoría de países europeos los métodos de enseñanza de las ciencias son esencialmente deductivos. Lo primero es la presentación de conceptos y marcos intelectuales, seguida de la búsqueda de consecuencias operacionales, mientras que los experimentos se utilizan sobre todo a modo de ilustración.

En la evaluación de la *competencia matemática* PISA concede mayor valor a aquellas tareas que puedan darse en situaciones de la vida real y que tengan un contexto en el que el uso de las matemáticas para resolver el problema planteado pueda considerarse auténtico. Como vehículo para evaluar la competencia matemática se dará prioridad a los problemas con contextos extramatemáticos que influyan en la solución e interpretación de los mismos PISA (OECD 2006).

Este articulo está divido en tres partes: en la primera parte se describe el proceso de modelización en la Teoría Antropológica de lo didáctico (en adelante, TAD), en la segunda a partir de la idea inicial de REI introducido por (CHEVALLARD, 2004) se amplía y se completa un modelo particular de REI (FONSECA, PEREIRA, CASAS, 2010) y en la tercera parte se utiliza este dispositivo para el diseño, experimentación y evaluación de un conjunto de secuencias didácticas centradas en la modelización funcional, que en este caso concreto está circunscrito al cálculo diferencial en el paso de Secundaria a la Universidad (Escuelas de Ingeniería).

1. La modelización en la TAD

Diversos informes nacionales e internacionales propugnan la necesidad de enseñar las matemáticas como una herramienta de modelización. El estudio de la “modelización y sus aplicaciones” es un dominio de investigación que está adquiriendo cada vez mayor protagonismo en el mundo escolar de las matemáticas. Desde principios de la década de los 80 el interés de la comunidad científica por los procesos de modelización y por los problemas aplicados ha ido en aumento. El estudio del (ICMI, 1986) supuso un impulso mundial a la inclusión en los currículos de matemáticas de cuestiones relacionadas con las “aplicaciones” de las matemáticas, tanto a otras disciplinas como a la “vida cotidiana” (BLUM, 2002). Y los programas de diseño, análisis y evaluación curricular en términos de desarrollo de competencias (NISS, 1999; RICO, 2006) han acabado de impulsar una visión de la actividad matemática centrada en el proceso de modelización y resolución de problemas. La manera de entender los procesos de modelización en Educación Matemática queda sintetizada en el llamado ciclo de modelización (BLUM, NISS, 1991).

La Educación Matemática Realista es un dominio muy importante de investigación dentro de la "modelización y las aplicaciones". Considera la "modelización y las aplicaciones" al servicio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, y tiene su origen en la idea de (FREUDENTHAL, 1973) de las "matemáticas como una actividad humana", en lugar de las matemáticas como un sistema de conceptos ya construido.

La forma particular de integrar "lo pedagógico" y "lo matemático" se lleva a cabo en el Programa Epistemológico (BROUSSEAU, 1998) y, más concretamente, dentro de la TAD, tomando la propia *actividad matemática* como objeto primario de estudio y como puerta de entrada al análisis didáctico, es decir, la puerta de entrada a los fenómenos didácticos es a través de su componente matemática. Dentro del Programa Epistemológico será preciso tomar como base del análisis didáctico de cualquier fenómeno un modelo de la *estructura y la dinámica interna de las organizaciones matemáticas* escolares. Es por esta razón que esquematizaremos muy brevemente dicho modelo tal como se propone actualmente en la Teoría Antropológica de lo Didáctico en la que explícitamente nos situamos. Una cuestión problemática (CP) es para la TAD una cuestión de la que no se dispone de una técnica para resolverla. Toda CP se puede analizar mediante un tipo de tareas que vienen acompañadas de la producción y utilización de técnicas matemáticas, es lo que llamamos el bloque práctico-técnico (la *praxis* o "saber hacer"). La existencia del bloque práctico-técnico requiere poner en marcha un discurso racional que justifique, explique y relacione los campos de problemas y las técnicas matemáticas, por ejemplo si una técnica es pertinente para una tarea concreta, es lo que llamamos *tecnología*. Pero el discurso tecnológico contiene afirmaciones más o menos explicitas, que pueden requerir justificación. Se pasa así al nivel de justificación, explicación, producción de la tecnología, que es el nivel de la *teoría* (un teorema puede actuar como un elemento tecnológico cuando se utiliza para justificar cierto problema y puede ser un elemento teórico cuando nos proponemos demostrarlo). Aparece de esta forma el segundo bloque tecnológico-teórico (el *logos* o “saber”) de la organización matemática (OM). El sistema formado por esas cuatro componentes es lo que llamamos OM. Postulamos que una OM es la mínima unidad de análisis en que puede describirse la actividad matemática. Este marco teórico (problema, técnica, tecnología y teoría) encaja muy bien o es compatible con los modelos desarrollados en el mundo de la ingeniería (problema, técnica, tecnología, proyecto). Una *organización* (o *Praxeología*) *matemática* es *puntual* si está generada por un único tipo de tareas. Una *organización* (o *Praxeología*) *matemática* es *local* (en adelante, OML) en una institución si se obtiene como resultado de la integración de diversas Praxeologías *puntuales*. Cada OML está caracterizada por una *tecnología* θ, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las OML que la integran. Diremos, por fin, que una *organización matemática* (o *Praxeología*) es *regional* (en adelante, OMR) en una institución si se obtiene mediante la coordinación, articulación y posterior integración, alrededor de una *teoría matemática* común Θ, de diversas OML.

La TAD cuestiona la propia actividad de modelización, y postula que la actividad matemática es, en esencia, una actividad de modelización matemática. Esta afirmación adquiere pleno sentido si la modelización no solo se limita a situaciones extramatemáticas, sino que por el contrario, la modelización intramatemática adquiere un fuerte protagonismo. A partir de aquí se pueden reformular los procesos de modelización como procesos de reconstrucción y articulación de OM de complejidad creciente, que parten de las razones de ser que motivan su estudio. Estas OM surgen de cuestiones (matemáticas o extramatemáticas) cuyo estudio provoca la emergencia de técnicas y necesidades tecnológicas, que a la vez permitirán construir nuevas técnicas capaces de resolver nuevos tipos de problemas, que resultarán ser cada vez más amplios y complejos, y así, mediante la articulación de tareas, técnicas, tecnologías y teorías, aparecen nuevas Praxeologías que actuarán como modelos.

Ahora bien, todo este discurso didáctico que establece cuales son las condiciones que favorecen el estudio de la modelización matemática debe ir acompañado de algunas de las restricciones que lo dificultan. En (FONSECA, 2004) se ponen de manifiesto algunas restricciones importantes en la actividad matemática institucional que impiden y dificultan el estudio de la modelización matemática:

- En la enseñanza Secundaria no se cuestiona hasta qué punto están justificadas las técnicas que se utilizan, ni la interpretación de los resultados que proporcionan dichas técnicas, ni su alcance o dominio de validez, ni su pertinencia para llevar a cabo una tarea determinada, ni su eficacia, ni su economía, ni sus relaciones con otras técnicas, ni sus limitaciones, ni las posibles modificaciones que podrían sufrir dichas técnicas para aumentar su eficacia en la realización de ciertas tareas, lo que provoca una tremenda rigidez en el estudio de la actividad matemática. Un estudio similar (LUCAS, 2010) llevado a cabo con estudiantes portugueses confirma los resultados obtenidos con estudiantes españoles en (FONSECA, 2004).

- En la Enseñanza Universitaria de las matemáticas no siempre está presente la "razón de ser" de la actividad matemática que se estudia y, en particular, es muy difícil que se dé sentido a la actividad matemática cuyo estudio se inició en la Enseñanza Secundaria y que se retoma en la Universidad. Se han "olvidado" (y no sólo por parte de los alumnos) las cuestiones a las que la actividad (matemática) escolar debería responder. La Razón de Ser (matemática o extramatemática) de la actividad matemática está fuera de los contenidos matemáticos, incluso en entornos tan favorables a la modelización matemática como son las escuelas de ingeniería. Es lo que en (CHEVALLARD, 2004) se llama monumentalismo, que se manifiesta en la ausencia de las "razones de ser" de la matemática escolar y el aprendizaje de las matemáticas a la visita de obras cristalizadas y, en cierto sentido "muertas".
- También hemos puesto en evidencia las dificultades para que, en una etapa educativa, se retomen los contenidos estudiados anteriormente con el objetivo de cuestionarlos, mostrar sus limitaciones y reestructurarlos o integrarlos en organizaciones cada vez más amplias y complejas. Dichas dificultades están estrechamente relacionadas con los problemas didácticos derivados de la falta de articulación entre etapas.

Podemos hablar de OM rígidas, puntuales y aisladas. Todo ello provoca una incompletitud de la actividad matemática desarrollada y una desarticulación de las matemáticas escolares. La respuesta didáctica dentro de la TAD a esta problemática es la creación de organizaciones matemáticas locales relativamente completas (OMLRC) (FONSECA, 2004). Esta problemática, que es esencialmente matemática, nos lleva a plantearnos algunas preguntas: ¿es posible reconstruir (esto es, estudiar) organizaciones matemáticas locales relativamente completas en la actual Enseñanza Secundaria?; ¿tienen cabida ese tipo de técnicas didácticas en las actuales organizaciones didácticas escolares?; ¿qué dispositivos didácticos nuevos serían necesarios para llevar a cabo este tipo de estudio en las actuales instituciones escolares?; ¿qué técnicas didácticas (esto es, de ayuda al estudio) deberían utilizarse para llevar a cabo esta reconstrucción?

2. Recorrido de estudio e investigación

En la Teoría Antropológica de la Didáctico, como respuesta a la pérdida de sentido de la matemática escolar, se está trabajando en el diseño de un nuevo dispositivo didáctico denominado Recorrido de Estudio e Investigación, que forma parte del proyecto EDU2008-02750/EDUC, que permite articular la enseñanza de las matemáticas como una actividad de modelización donde la herramienta informática se convierte en un instrumento natural del trabajo matemático para ámbitos de Secundaria y primer ciclo universitario.

Se considera que un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) viene generado por el **estudio de una cuestión viva** y con fuerte poder generador, capaz de imponer un gran número de cuestiones derivadas (CHEVALLARD, 2006).

El modelo particular (FONSECA, PEREIRA, CASAS, 2011) de REI con el que estamos trabajando en la Escuela de Ingeniería Industrial de la Universidad de Vigo, y que en este trabajo se amplía, está muy abierto. Podemos representarlo por varias etapas. A continuación se describe lo más importante de cada una de ellas:

Un **PROBLEMA DIDÁCTICO-MATEMÁTICO** al que el sistema escolar debe dar respuesta.

Una **INSTITUCIÓN** concreta en la cual se plantea el problema en cuestión.

Una "**RAZÓN DE SER**": si denominamos "razón de ser" de una OM a las cuestiones, inicialmente problemáticas, a las que dicha obra responde, entonces podemos decir que muchas de las OM que se proponen para ser estudiadas en la Escuela han perdido su razón de ser, su "sentido", es decir, la Escuela no está en la necesidad de explicar cuál es la razón de ser de la nueva actividad matemática que vamos a estudiar. Predomina el modelo "aplicacionista": primero se aprenden las matemáticas y después se aplican. Esto provoca que en la mayoría de los programas de las escuelas de ingeniería españolas, donde desarrollamos nuestro trabajo, al comenzar el estudio de una nueva OM no hay necesidad de preguntarse: ¿cuáles son las cuestiones problemáticas a las que responde la nueva OM que vamos a construir ?; ¿qué situaciones viene a resolver que no resuelva ninguna de las OM anteriores?; ¿qué cuestiones problemáticas emergen que antes no era posible formular?; ¿qué cuestiones problemáticas provocaron la aparición de las nociones, propiedades, teoremas y técnicas que forman parte de la nueva OM?.

En el estudio de la creación de una nueva OM debemos justificar cuál es su origen, qué contenidos propone la sociedad para su estudio, cuál es su ámbito de aplicación (donde podemos utilizarla), cuáles son las restricciones que impiden el estudio de la actividad matemática y cuáles la favorecen. A continuación explicitamos con más detalle lo que caracteriza esta etapa:

Legitimidad matemática: la TAD entiende la actividad matemática como una como una actividad humana. El hecho de poder ver históricamente como transita un concepto y como ese hecho supone muchas veces un avance para la propia humanidad puede provocar en los alumnos una fuente de motivación muy importante.

Legitimidad social: aquí debe figurar el diseño curricular propuesto por el propio departamento, las competencias específicas y transversales que figuran en la Guía Docente de nuestra escuela y los ***media*** (libros de texto, apuntes, páginas web, etc.). Debe tenerse en cuenta que las respuestas proporcionadas por estos últimos pueden haber sido elaboradas para resolver cuestiones diferentes a las que a nosotros se nos plantean durante nuestro proceso de estudio y, por lo tanto, deben ser *deconstruidas y reconstruidas* para adaptarlas a nuestras necesidades.

Legitimidad funcional: en el inicio de la construcción de la nueva OM que vamos a tratar se plantea a los alumnos el estudio de respuestas a cuestiones problemáticas cruciales, ricas y fecundas, y con un importante potencial didáctico que permiten hacer visible el contenido matemático, vinculando la actividad matemática con verdaderos problemas de ingeniería que dan lugar a proyectos. Las cuestiones problemáticas las entendemos en un sentido amplio. Son situaciones muy potentes que permiten a los alumnos transitar por los conocimientos adquiridos, desarrollando diversos recursos que provocan la construcción de nuevos conocimientos. En estas circunstancias, la respuesta no siempre devuelve una cantidad, ni tiene respuesta única y admite la posibilidad de utilizar distintas técnicas para alcanzar una solución.

Legitimidad didáctica: podemos hablar de un cambio de modelo: el problema no está solo en la forma de enseñar del profesor, ni en la forma de aprender del alumno (muy importante), sino también en el tipo de actividad matemática que se propone. En este modelo se quiere resolver cuestiones problemáticas que no se plantean únicamente en la Escuela.

Una **CUESTIÓN GENERATRIZ (CG)**: la siguiente etapa de un REI es elegir una cuestión problemática de todas las que se proponen en la legitimidad funcional. Una vez elegida esa cuestión entre las varias posibles, pasa a ser la CG. Es la que impulsa y provoca todo el proceso de estudio del proyecto que genera, y se debe mantener viva a lo largo del mismo. Debe de ser una cuestión potente que podamos presentar como

como un desafío para el alumno y éste debe aceptar el reto. En su elección se tendrán en cuenta condiciones que pueden facilitar el proceso de estudio:

- Puede ser impuesta por el profesor, pero debe ser consensuada con los alumnos.
- Debe ser lo suficientemente rica, viva y fecunda, que provoque la motivación en el estudiante para seguir aprendiendo, y que facilite abrir un proceso de investigación, que permita explorar, conjeturar y validar. Encontrarle sentido a la matemática escolar funciona casi siempre como un elemento motivador del alumno.
- El proyecto generado por la CG debe ser un proyecto realista, entendido este como respuesta a cuestiones problemáticas que el alumno pueda imaginar (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003).
- Debe tener un largo recorrido, estar situada en el entorno institucional en el que trabajamos, y adaptarse muy bien al carácter funcional del REI.
- Que facilite la integración curricular entre áreas matemáticas y entre etapas educativas.

CONTRATO DIDÁCTICO (CD): en un REI se rompe el contrato didáctico habitual de la Clase de Problemas, que comporta el cambio relativamente frecuente de un tipo de problemas a otro y, por lo tanto, cierta rigidez en el uso de las técnicas matemáticas. Lo que se busca es un estudio profundizado de un campo de problemas. En (BOSCH Y GASCON, 1994) se postula en este sentido que mientras el *estudio exploratorio* de problemas cumple un objetivo didáctico fundamental de toma de contacto y familiarización con las teorías, con las técnicas matemáticas y con los campos de problemas que se quieren enseñar, *un estudio profundizado de ciertos campos de problemas constituye un complemento imprescindible en toda formación matemática.* Esta tesis coincide aproximadamente con la especificación en el caso de las matemáticas de una idea general expresada por (WHITEHEAD, 1929) en *The Aims of Education*, según la cual la formación en cualquier disciplina científica debería contemplar, al lado de una visión amplia, general y forzosamente superficial del saber que se enseña, una introducción a *la propia actividad científica* en cuestión mediante el estudio especializado y profundo de un parcela reducida de esta ciencia.

La actividad matemática en este nuevo contrato se hace en un *taller de prácticas* que se apoya en la combinación de dos estrategias didácticas. Por un lado, se propone el estudio de una cuestión problemática que va a dar lugar a un proyecto, definida inicialmente mediante unos datos fijos, pero *cuyo estudio requiere que éstos se transformen progresivamente en parámetros*. Por otro lado, se utiliza una calculadora simbólica para instrumentalizar las técnicas matemáticas necesarias para abordar los tipos de problemas que surgen en esta actividad tal como se propone en (RUIZ, BOSCH, GASCÓN, 2006). No se trata de resolver muchos problemas, porque se entraría en conflicto con el tiempo institucional, sino de construir los proyectos precisos y cercanos al mundo de la ingeniería que, una vez resueltos, generalicen el modelo a otras cuestiones problemáticas situadas en la legitimidad funcional, cuyas respuestas permitan comprobar si las nociones matemáticas se han interiorizado. El taller actúa como un estudio de ingeniería en la construcción de un proyecto y aparecen nuevas responsabilidades para el profesor, el alumno y las propias matemáticas (prima el carácter funcional):

Profesor: es el responsable de proponer situaciones de aprendizaje que atrapen y comprometan a los alumnos en proyectos que den respuestas a cuestiones iniciales ricas y potentes que no tienen respuesta en una sola sesión. La elección de esas tareas puede ser determinante para un buen resultado del producto final obtenido. Asume distintas responsabilidades:

- Propone cuál es la distribución de las tareas presenciales y no presenciales.
- El alumno con la llegada de Internet extiende la actividad matemática más allá del aula tradicional y en la forma de gestionar esta información debe tener un importante protagonismo el profesor.
- Debe ser guía y facilitador del aprendizaje que tenga sentido para los estudiantes, donde las TIC juegan un papel muy importante, promocionando habilidades y estrategias que le puedan ser útiles en su vida profesional.

Alumno: Un problema didáctico importante es la dificultad de construir una situación en la que el alumno actúe además de como alumno, como un verdadero matemático, responsabilizándose de las respuestas que da a las cuestiones que se le plantean. Se pretende que el estudiante aprenda a realizar pequeños desarrollos tecnológicos a partir de un trabajo práctico previo y que comience a ejercer como ingeniero, aportando con el conocimiento matemático nuevas respuestas que permitan ampliar y completar el proyecto. Algunas de estas nuevas responsabilidades son:

- Trabajar como un profesional en el taller (similar a un estudio de ingeniería) elaborando respuestas que permitan ampliar, refinar y completar el proyecto.
- El alumno (o grupo de alumnos) periódicamente tiene que presentar resultados (orales y escritos) que deben ser defendidos por el propio grupo y evaluados por el profesor. Se hará una evaluación por proyecto correspondiente a cada tema determinado.
- La realización del proyecto por parte de los alumnos combinará el trabajo en aula con el trabajo fuera del aula.

Matemáticas: se rompe el contrato didáctico habitual de la clase de problemas, que comporta el cambio relativamente frecuente de un tipo de problemas a otro y, por lo tanto, cierta rigidez en el uso de las técnicas matemáticas. No hay un cambio continuo de problemas en el taller. Se trabaja sobre problemas abiertos que originan proyectos, que son los que más existen en la vida cotidiana, donde a partir de una cuestión inicial muy limitada aparecen múltiples cuestiones derivadas que nos van a permitir ampliar y completar la actividad matemática realizada. En este nuevo contrato las matemáticas es algo que no solo se aprende y enseña, sino que también resuelve problemas que tienen los ciudadanos, es decir, el matemático es un profesional, como lo puede ser el arquitecto o el ingeniero, que resuelve problemas que le propone la sociedad.

Tendrá un importante protagonismo la herramienta informática para el estudio de la actividad matemática.

El **PROCESO DE ESTUDIO** que arranca con el objetivo de aportar respuestas a la cuestión generatriz, va a dar lugar a un proyecto en el que figuran múltiples cuestiones derivadas que van a provocar la construcción de una organización matemática local relativamente completa en el sentido definido en (FONSECA, 2004). En nuestro modelo de REI el proceso de estudio de la actividad matemática transita esencialmente por dos etapas. En la primera aparecen tareas que son familiares y que aportan una primera información al proyecto generado por la CG. La segunda parte (profundización) viene provocada por la necesidad de completar nuestro proyecto. Aquí aparecen nuevas tareas que no eran posibles formular en la etapa anterior y que provocarán la necesidad de movilizar nuevas nociones, que aparecen como la razón de ser de una nueva OM que amplía la OM anterior. Este proceso de estudio se articula alrededor de una OMLRC con dos partes diferenciadas: una relativa al proceso de construcción (ingeniería didáctica), que vendrá descrita en términos de los *momentos didácticos* ,y otra relativa al propio producto resultante (ingeniería matemática), que viene articulado alrededor de indicadores (no son únicos) asociados a objetivos concretos. Presentamos a continuación una versión muy resumida de una OMLRC que se puede ver con mayor profundidad en (FONSECA, 2004). Veamos en primer lugar, los aspectos relacionados con el proceso de estudio formulado en términos de los *momentos didácticos*:

OD1. Momento Praxeologico Inicial (MPI): es donde figura la mínima infraestructura praxeológica necesaria para poder estudiar la nueva OM que vamos a crear**,** es decir, el conjunto de Praxeologías que ya forman parte del equipamiento inicial del alumno.

OD2. Debe haber un *Momento* del *primer encuentro* con un tipo de tareas matemáticas T_q asociadas a una cuestión matemática *q* "con sentido", que conduzca a alguna parte (que no sea una cuestión "muerta" en el sentido de (CHEVALLARD, 2002 b)).

*OD3***.** El proceso de reconstrucción de una OM debe contener *momentos exploratorios* en los que la comunidad de estudio tenga la oportunidad de construir y empezar a utilizar una técnica inicial τ_0 potencialmente útil para realizar las tareas del tipo T_q.

OD4. Los problemas escolares se presentan, tanto en Secundaria (S) como en la Universidad (U), con enunciados muy cerrados en los que figuran como "datos" todos los que se necesitan (exactamente) para resolver el problema sin que falte ni sobre ninguno. Pocas veces se problematiza el propio enunciado de los problemas como punto de partida para *plantear nuevos problemas* (FONSECA, BOSCH, GASCÓN, 2010). No hay ningún dispositivo didáctico institucionalizado (como son la clase de teoría o la clase de problemas en la enseñanza universitaria de las matemáticas) que fomente el trabajo técnico y permita al estudiante pasar de la simple exploración de un tipo de tareas matemáticas al desarrollo suficiente de las técnicas involucradas en una dirección adecuada. Lo que se pretende es que el estudiante pase de la exploración de un tipo de tareas a la construcción de una técnica suficientemente potente que permita ir ampliando el campo de problemas (*momento del trabajo de la técnica).* En un REI el discurso está muy próximo al mundo de la ingeniería y es muy natural provocar cuestionamientos tecnológico de la técnica: economía de la técnica, limitaciones de cada técnica asociada a un problema (o campo de problemas) y qué posibles técnicas alternativas podemos considerar.

*OD5***.** En la reconstrucción de una OM deben aparecer *nuevas cuestiones matemáticas* relativas a las técnicas que se utilizan, esto es, cuestiones relativas a la interpretación, la justificación, y el alcance de dichas técnicas, así como a las relaciones que se establecen entre ellas. Para llevar a cabo todo este conjunto de tareas matemáticas será necesario utilizar un *marco tecnológico-teórico* que es el que permitirá construir (además de justificar, interpretar y relacionar) todas las técnicas necesarias.

*OD6***.** En el proceso de reconstrucción de una OML es necesario ir *institucionalizando* progresivamente (no de una vez por todas) aquellos elementos que deben ser considerados como "matemáticos" por la comunidad de estudio, para distinguirlos de los que han hecho, a lo largo del proceso, el papel de meros instrumentos auxiliares de la construcción, es decir, que podamos decir que es lo importante de lo construido.

OD7. Ligado a la institucionalización, también *es preciso evaluar la calidad de los componentes de la* OML *construida*: los tipos de tareas (¿están bien identificados?, ¿existen especímenes suficientemente variados de cada tipo?, ¿a qué cuestiones están asociados?, ¿están relacionados con el resto de la actividad de los estudiantes o bien están aislados?, las técnicas ¿están suficientemente trabajadas?, ¿son fiables?, ¿son económicas?, ¿son las más pertinentes para realizar las tareas presentadas? y el discurso tecnológico ¿es suficientemente explícito?, ¿ayuda efectivamente a interpretar y justificar las técnicas?, ¿permite variar las técnicas en la dirección adecuada para construir nuevas técnicas?.

Si consideramos ahora el producto que resulta, es decir, la respuesta que la comunidad de estudio construye y aporta a la cuestión inicial, entonces debería ser posible medir el grado de completitud de la misma utilizando los siguientes indicadores (no son únicos) de (FONSECA, 2004):

OML1. Deben aparecer tipos de tareas asociados al "cuestionamiento tecnológico", esto es, tareas que hagan referencia a la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas.

OML2. Se puede disponer de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y es posible discernir criterios para elegir entre ellas.

OML3. Los ostensivos (palabras, expresiones, escrituras, notaciones. etc.) que constituyen la "materia prima" de los elementos de la OM son suficientemente ricos y variados como para permitir diferentes representaciones de la actividad matemática.

OML4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas" en relación a los tipos de tareas inicialmente consideradas.

OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas.

OML6. Carácter poco estereotipado de los tipos de tareas de la OM y existencia de tareas matemáticas "abiertas".

OML7. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas inicialmente consideradas.

OML8. Uso de las tecnologías de información y comunicación y la utilización de calculadoras simbólicas para simplificar, completar y extender el proceso de estudio.

OML9. Debe existir la posibilidad de modificar la situación inicial, considerando hipótesis más débiles que permita la emergencia de nuevas técnicas que amplíen y completen la OM en cuestión.

Hay que subrayar, que la noción de "completitud" es relativa. No tiene sentido hablar de OML "completas" ni de OML "incompletas". Se trata, en todo caso, de una cuestión de grado: existen OML más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplan las condiciones descritas por los indicadores OML1-OML9.

3. Experimentación de un Recorrido de Estudio e Investigación.

El REI no funciona como una estructura rígida, sino como un proceso de estudio dinámico que se va creando a partir de una cuestión inicial crucial que se presenta muy abierta. Partimos de una cuestión problemática inicial obtenida de la CG que da lugar a una OM puntual y mediante sucesivos procesos de la actividad matemática, iremos completándola y ampliándola hasta obtener una OMLRC.

Los REI que estamos diseñando y experimentando y que están en una fase muy inicial los restringimos a ciertos temas de Cálculo y Álgebra Lineal que se estudian a caballo entre Secundaria y el primer curso de enseñanza universitaria. Se pone de manifiesto cómo las limitaciones e insuficiencias de los contenidos de cada etapa educativa deberían motivar y dar sentido a los contenidos de la siguiente. Debemos poder retomar aquel proyecto que puede tener su origen en Secundaria pero que no quedó completamente resuelto por las limitaciones de las propias técnicas, y abrir un proceso de construcción de nuevas técnicas que nos permitan completarlo.

En este trabajo presentamos un REI situado en el campo de la derivada. Queremos articular un proceso de estudio que consiste en introducir la optimización de funciones como respuestas a cuestiones cercanas al mundo de la ingeniería. El desarrollo del REI propuesto tiene dos etapas muy diferenciadas. En la primera, además de introducir al alumno en el proyecto, se pretende reforzar y consolidar la actividad matemática desarrollada por aquél en la enseñanza Secundaria y que sea él mismo el que tenga un papel importante en su consolidación. Esta etapa es además de preparación de la que le espera en la Universidad. Existe una ruptura con el contrato didáctico institucional de Secundaria donde el profesor ocupa toda la clase. Ahora el profesor pierde protagonismo y lo adquiere el alumno que empieza a realizar un trabajo más autónomo. En la segunda, se amplía con nuevas tareas y técnicas que no se podían formular en la etapa anterior. Esto último provoca la necesidad de movilizar nuevos saberes que van a permitir ampliar y completar la OM que estamos estudiando.

El REI que vamos a describir quiere transitar por diversas fases, justificando la razón de ser de la actividad matemática desarrollada; pero quiere sobre todo situar el foco de la actividad matemática en su carácter funcional, generando un proyecto que podemos situar en el mundo de la ingeniería a partir de una cuestión inicial muy limitada y planteando una forma de trabajar muy cercana al futuro mundo profesional del alumno. A continuación pasamos a describir el REI que hemos experimentando en la Universidad de Vigo:

PROBLEMA DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

¿cómo articular secuencias de enseñanza que requieran la búsqueda de una solución optima de funciones reales *en instituciones donde la matemática es un medio y no un fin?.*

INSTITUCIÓN

Escuela de Ingeniería Industrial (especialidades de electrónica y química). La asignatura (cálculo) es de 4,5 créditos y es cuatrimestral.

RAZÓN DE SER

Legitimidad matemática: investigamos cual es el origen histórico del estudio de los extremos relativos.

Legitimidad social: los alumnos disponían de la plataforma Tema de la Universidad de Vigo, donde figuraba: diseño curricular, boletines de problemas propuestos y boletines de problemas resueltos, manuales que puede consultar y prácticas de ordenador (con Mathematica y Geogebra). Se propuso a los alumnos la investigación sobre la utilización de páginas WEB relacionadas con la derivada.

Legitimidad funcional: Se plantea a los alumnos el estudio de respuestas a cuestiones problemáticas (CP) potentes y cercanas al mundo de la ingeniería que queremos optimizar. Dentro de la optimización estudiamos inicialmente proyectos relacionados con: contenedores, parques infantiles, acueductos, piscinas, una estación de viajeros entre dos pozos petrolíferos, temperatura de un enfermo de Alzheimer y costes-ingresos-beneficios de una empresa.

Legitimidad didáctica: diversas investigaciones en didáctica muestran que la actividad matemática relacionada con la derivada es muy problemática para los alumnos. La complejidad de la enseñanza del cálculo no sólo es debida a las características particulares del profesor y de los estudiantes, sino también de la propia asignatura, cada vez más abstracta y formal (MORENO, 2005). En (ARTIGUE, 1995) se pone de manifiesto que numerosas investigaciones prueban que la enseñanza mecánica de cálculos algorítmicos relacionados con la derivada no resulta problemática, sin embargo existen grandes dificultades para alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos que son el centro de este campo de las matemáticas. En (CANTORAL, MIRÓN, 2000) se afirma que los alumnos son capaces de derivar una función, sin embargo tienen dificultades para reconocer la necesidad de utilizar la derivada en los problemas y también en reconocer la derivada como una función. En un trabajo de (FONSECA, CASAS, GONZÁLEZ, 2008) se prueba que los alumnos tienen problemas para interpretar la primera y segunda derivada, para construir modelos intramatemáticos y extramatemáticos y para manipular el modelo obtenido. Estos resultados nos marcaron el camino a seguir.

CUESTION GENERATRIZ

Se debate con los alumnos de entre todas las cuestiones problemáticas propuestas en la legitimidad funcional cuál sería un buen candidato como CG. Después del debate se acuerda elegir como CG la siguiente:

Diseño y fabricación de un contenedor que tenga el mayor volumen posible.

Estamos ante una situación abierta (OML6). La respuesta a esta cuestión generatriz va a dar lugar a un proyecto, y se va a convertir en el hilo conductor de todo el proceso de estudio. Para esta elección hemos tenido en cuenta:

- Se adapta muy bien a nuestra propuesto de REI, por su carácter funcional. Nos va a permitir la creación de una actividad matemática de complejidad creciente, con un fuerte protagonismo de los parámetros y variables.
- Es un problema que tiene un largo recorrido. Hace posible una buena conexión Secundaria-Universidad. El modelo algebraico que representa el problema se estudia en Bachillerato y se completa en la Universidad. Es lo suficientemente rico para poder trabajar en una variable (Bachillerato) y en dos variables (Universidad).
- Permite un buen tratamiento con la técnica instrumental (Geogebra y Mathematica) y es una cuestión versátil que permite adaptarse a nuevas situaciones.

CONTRATO DIDACTICO

- El Taller actúa como un estudio de ingeniería que tiene que resolver proyectos para la sociedad. Cada proyecto tiene un tiempo de ejecución. Para este caso concreto los alumnos disponían, además de las horas no presenciales, de tres sesiones de aula (6 horas) después de las cuales deberíamos tener el proyecto elaborado.
- Los alumnos fueron divididos en grupos de cinco. Utilizaron un programa de cálculo simbólico (Mathematica) y un programa de geometría dinámica (Geogebra). Las primeras tareas realizadas en el taller se dedicaron al conocimiento de ambos programa y a la utilización de los recursos que habíamos puesto en la plataforma de teledocencia Tema que la Universidad de Vigo tiene a nuestra disposición. El instrumento informático tiene un papel privilegiado sobre todo en el momento exploratorio y encaja muy bien cuando se trata de estudiar situaciones abiertas.
- Debían responsabilizarse cada grupo de elegir un secretario para redactar los informes. Exponen que tipo de tareas realizaron, que dificultades están teniendo y cual es en ese momento la información que pueden aportar al proyecto.
- En todos los debates que se realizan en el taller, el profesor participa de una forma activa y además guía el debate.
- La recogida de datos fue elaborada a través de los documentos que presentaban por escrito los alumnos al comienzo de cada sesión.

PROCESO DE ESTUDIO

En lo que sigue utilizaremos los *niveles de modelización* de (RUIZ–MUNZÓN, 2010) y también el proceso de *modelización elemental* que según (BERTA, 2009), Gascón describe en cuatro fases:

Primer estadio: se caracteriza principalmente por la *delimitación del sistema* o ámbito de la realidad en el que aparece una situación problemática que permite plantear preguntas y conjeturas con poca precisión.

Segundo estadio: se describen algunas de las posibles *relaciones* entre las componentes del sistema. En este estadio, al disponer del lenguaje propio del modelo, se podrán formular con más precisión los problemas que se habían enunciado anteriormente de forma provisional.

Tercer estadio: incluye, además del *trabajo técnico* dentro del modelo, la *interpretación de este trabajo* y de sus *resultados dentro del sistema*.

Cuarto estadio: en este último estadio se pueden *enunciar problemas nuevos* cuya resolución permitirá responder cuestiones que difícilmente se podían formular sin la elaboración y el trabajo en el modelo.

Nuestro proceso de estudio comienza con el Momento Praxeológico Inicial (MPI): es donde planteamos la mínima infraestructura praxeológica necesaria para poder estudiar la nueva OM que vamos a crear**.** En Secundaria de acuerdo con la propuesta (diseño curricular, manuales, material didáctico,…) que se formula alrededor de la noción de la derivada debe formar parte del equipamiento praxeológico inicial del alumno: la aproximación al concepto de derivada y la interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto; los extremos relativos de una función en un intervalo y la interpretación intuitiva de las propiedades globales y locales de funciones polinómicas y racionales sencillas.

Nos situamos en un *primer nivel de modelización funcional* de un sistema que corresponde al estudio de funciones aisladas de una sola variable, que se materializa en modelos que se expresan mediante funciones aisladas de una única variable y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) asociadas. Es donde aparece la primera OM que denotamos por OM1.

En esta primera etapa del REI, que recuperamos de la enseñanza Secundaria, se plantean tareas familiares como el estudio de la monotonía de la primera y segunda derivada y los extremos de la función, combinadas con nuevas tareas que no aparecen como tareas naturales en Secundaria: saber interpretar (OML5) la primera y segunda derivada y transitar por los distintos registros (numérico, geométrico, gráfico y algebraico), que se ven favorecidos por la utilización del instrumento informático (OML8) en un REI. El registro dominante en Secundaria es el algebraico. El tránsito del estudio de la derivada por los distintos registros es un proceso de reconstrucción que la matemática escolar tiende a minimizar y que no resulta fácil para la mayoría de los estudiantes. (TRIGUEROS, 2005) habla de serias dificultades de interpretación de la segunda derivada de la función y de su relación con el comportamiento de la gráfica de la misma en los estudiantes.

Primera sesión

Momento del primer encuentro: lo primero que se debe hacer es delimitar el sistema (Primer estadio), es decir, analizar el ámbito de la realidad a modelizar y las cuestiones problemáticas a estudiar: qué datos serán fijos o constantes y que datos serán las variables que queremos calcular. El modelo de partida es muy sencillo. Empezamos por concretizar la CG que tiene cabida en la enseñanza Secundaria:

Queremos construir un contenedor de volumen máximo para guardar material reciclable de base rectangular a partir de una plancha de ancho a =14 m y de largo b =20 m recortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas.

La respuesta a la construcción de una cuestión inicial muy limitada, situada en la ingeniería, permite abrir un proyecto de investigación que transita desde Secundaria a la Universidad. Empezamos por proponer a los estudiantes tareas familiares que les permitieron relacionarse con el proyecto que queremos construir. Denotamos por T_S las tareas propuestas en Secundaria.

T_S: Cuál es el volumen del contenedor si la altura toma diferentes valores, por ejemplo 2, 4 y 5 m?

T_S:¿Podemos saber cuándo aumenta el volumen del contenedor y cuando disminuye ?

Una primera técnica que utilizan los alumnos es la fórmula del Volumen = área de la base x altura, que tiene un comportamiento estático (actúa como una regla que lo que hace es sustituir letras por valores numéricos). Este tipo de tareas comporta únicamente escribir la fórmula del cálculo del volumen del contenedor y ha resultado sencilla. Los alumnos discuten sobre el coste y la fiabilidad de esta técnica y concluyen que es poco fiable y tiene un coste enorme para resolver nuestro problema Además no ofrece resultados generales.

Momento Exploratorio: Se abre un debate sobre la necesidad de buscar una técnica que les permita explorar la cuestión de partida y obtener información del proyecto, lo que los introduce en el programa de geometría dinámica Geogebra (OML8), que permite recoger en una tabla los cambios producidos en el volumen al ir variando la altura del contenedor.

Los alumnos se encuentran muy cómodos con esta técnica que les permite obtener una relación entre la altura del contenedor y su volumen. Se les pide que exploren y conjeturen de acuerdo con (Polya, 1954) que propone que se le debe enseñar a conjeturar y después dejarles aprender a demostrar. Empiezan a trabajar de forma autónoma y a tomar responsabilidades en el proyecto. Con esta técnica obtienen una primera información de cuando el volumen crece, alcanza un valor máximo y cuando decrece. No tienen dificultades en afirmar que el volumen máximo del contenedor se produce cuando la altura está entre 2,6 y 2,8 m. Le hacemos ver que estamos ante una primera hipótesis y que la necesidad de validar (OML1) los resultados nos obligan a recurrir a las matemáticas.

Aparece de esta forma el *Momento del trabajo de la técnica.* Se les propone la creación de un modelo algebraico que incluya la identificación y designación de variables que se consideran pertinentes y que lo caracterizan (Segundo Estadio). Se pasa de esta forma de una fórmula a una función matemática V(x)= (20-2x) (14-2x) x con representación de variación dinámica donde x es la altura del contenedor y V su volumen (los alumnos de secundaria están acostumbrados a ver el volumen de un paralelepípedo como una fórmula y no tienen claro que estemos ante una función).

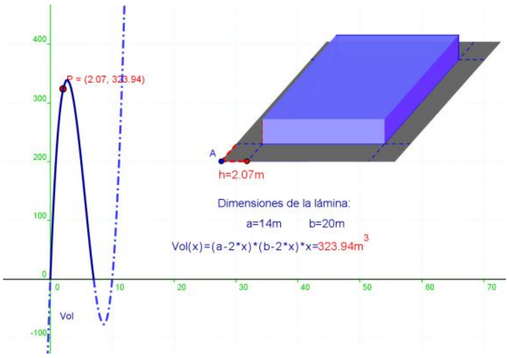


FIGURA 1: Una propuesta para la visualización del problema utilizando Geogebra

Discutimos sobre las ventajas de tener el modelo algebraico construido: si es una técnica rigurosa, si permite codificar relaciones, si podemos obtener información sobre sus propiedades y cuál es su validez institucional. Después de un pequeño debate, en el que el profesor interviene más de lo deseado, los alumnos concluyen que una vez construido el modelo algebraico, para el trabajo manipulativo (Tercer estadio) de ese modelo la técnica matemática a utilizar es la derivada.

A continuación se les propuso que estudiaran los valores que puede tomar la altura del contenedor.

T_S: Calcula el dominio de la función volumen e interpreta el resultado en el contexto que nos ocupa, tarea que entra en conflicto con la están acostumbrados a resolver los alumnos (calcular dominios de funciones algebraicas abstractas).

T_S: Estudiar la variación de la función volumen V(x) del contenedor para cada valor x de la altura, es decir, que indiquen cuanto cambia la variable dependiente V(x) por cada unidad de cambio de la variable independiente x. No figura como tarea natural en secundaria la interpretación en términos de variación (de y respecto de x) de la derivada en puntos determinados, algo que ayudaría a comprender el concepto de derivada. Las contestaciones de los alumnos reflejan las dificultades que tienen para obtener una respuesta.

A partir de esta noción se formulan diversas cuestiones (OML7) que permiten construir y manipular distintos modelos matemáticos que dan lugar a la construcción de un proyecto amplio y completo.

T_S :Manipular el Geogebra (OML8) y analizar el valor de la pendiente de la recta tangente en puntos próximos al máximo de la función.

T_S: Construir la tabla de valores de la función volumen y de la primera y segunda derivada e interpretarlas (OMl5) utilizando el Mathematica.

Interpretar la segunda derivada en puntos concretos como una variación de una variación, permite saber si el crecimiento de la función volumen es rápido o lento. En Secundaria la primera derivada es una técnica que se utiliza como herramienta para resolver tareas de modelización de situaciones económicas, físicas, biológicas... todas ellas relacionadas con el cálculo de extremos relativos. No ocurre lo mismo con la segunda derivada, está pensada en bachillerato como una técnica algorítmica para delimitar los puntos de inflexión o para representar graficas de funciones. Pero tecnológicamente hay una riqueza mayor si pensamos que a su vez la primera derivada también es una función (los alumnos no tienen claro que lo sea) y, que la segunda derivada como técnica nos permite estudiar la monotonía de la función derivada, es decir, saber si el crecimiento de la función es rápido o lento (situaciones que se dan con frecuencia también en las tareas de modelización, aunque en la actividad matemática de secundaria, tengan un carácter casi marginal). En el mundo económico, por ejemplo, no solo interesa saber si los ingresos aumentan sino a qué velocidad lo hacen.

T_S: Pasaremos después al registro gráfico y le pediremos que representen la función y las funciones primera y segunda derivada y que las interpreten utilizando el Mathematica.

Los dos registros estudiados ayudan a interiorizar el concepto de derivada y aportan información de la primera y segunda derivada y de los extremos de ambas. El contrato institucional vigente enfatiza la actividad matemática en el registro algebraico de tal forma que solo parece posible aportar resultados a cualquier problema únicamente desde este registro. El alumno pasa fácilmente del registro algebraico de la primera a la segunda derivada, algo que no ocurre cuando ese hecho se da en el registro gráfico. Tiene dificultades para pasar de la construcción gráfica de la primera derivada a la segunda, dificultad que se acentúa si se hace el proceso inverso.

Debatimos si con la información obtenida (numérica y gráfica) (OML3) de la que dispone el grupo podemos conjeturar:

- T_S: ¿cuándo crece el volumen del contenedor? ¿cuándo decrece?
- T_S: ¿cómo saber si ese crecimiento del volumen del contenedor es más rápido o más lento?
- T_S: ¿cuándo es máximo el volumen?

Los alumnos reflexionan si las técnicas numéricas y gráficas son rigurosas y llegan a la conclusión de que están manejando datos aproximados. La necesidad de mejorar la técnica buscando datos más exactos les introduce en la técnica analítica de estudio de intervalos de monotonía, extremos relativos, concavidad y convexidad, puntos de inflexión. Pasamos de un nivel de Secundaria que tiene un carácter tecnológico a otro nivel que situamos en la Universidad donde se justifica (Momento Tecnológico-Teórico) en la clase de teoría el discurso tecnológico anterior.

La necesidad de que el alumno de ingeniería sea capaz de simplificar y articular todo el proceso anterior a través de un programa informático (Mathemática) fue propuesta a los alumnos. Es una técnica muy económica porque permite de una forma sencilla y rápida conocer las propiedades representadas por el modelo matemático, y el coste y el tiempo son dos variables que se tienen muy en cuenta en el mundo de la ingeniería. La condición era que el desarrollo se hiciese siguiendo la técnica de bolígrafo y papel y que se tuviese en cuenta el contexto (ver anexo). Este trabajo fue realizado por todos los grupos en 2 horas en un Seminario (figura que recomienda utilizar el EEES). Algunos de los grupos tuvieron dificultades para completarla porque combinaba conocimiento matemático con conocimiento instrumental.

Como resumen de esta primera sesión los alumnos estaban obligados a presentar un primer informe en la sesión siguiente donde se hiciese constar:

- Cuál era el secretario de cada grupo que se responsabiliza del informe.
- Que medios y medias se utilizaron y con qué criterios.
- Cuestiones y respuestas de todo el recorrido matemático desarrollado en la primera sesión y cómo se tradujo esa información en nuestro proyecto.
- Propuestas intramatemáticas de nuevas cuestiones que se pudiesen extender a cualquier función algebraica. Debían figurar: la representación de la función a partir de las gráficas de la primera y segunda derivada, cómo se interpretan los cálculos de ambas en puntos concretos, cómo se interpretan los puntos de corte con los ejes, cómo es el modelo de crecimiento que representa la función a partir de ambas gráficas, y si la gráfica de la función es única.

- Propuestas extramatemáticas de nuevas cuestiones que permitan ampliar y completar el proyecto.

Segunda Sesión

Los datos aportados por los alumnos y el debate que se abre pone de manifiesto que siguen teniendo dificultades en interpretar las funciones derivadas, especialmente la segunda derivada como una variación de la variación. También tienen dificultades en la construcción de la gráfica de una función a partir de la gráfica de la derivada, dificultad que se acentúa cuando se pide construir la gráfica de la función a partir de la gráfica de la segunda derivada. Estas tareas no forman parte del contrato de Secundaria.

Todo lo anterior nos obligó a cambiar de forma importante la segunda sesión. Hubo necesidad de reformular las tareas anteriores y dedicar la primera parte de la sesión a discutir colectivamente las tareas propuestas por los alumnos, lo que permitió mejorar de forma importante las respuestas.

Un grupo planteó en el debate si la existencia de más de una gráfica asociada a la gráfica de la función derivada es única o estamos ante una familia de funciones, lo que permitió abrir todavía más el recorrido matemático del REI. Paralelamente el profesor interviene después para sugerir que el proyecto obtenido en la segunda sesión es muy limitado y que solo resuelve una situación muy concreta. Se plantea entonces la necesidad de ampliarlo y completarlo. Aparece entonces el paso del estudio de funciones aisladas a otro que corresponde a familia de funciones, que es el *segundo nivel de modelización funcional* y que situamos en la Universidad.

Ahora el objetivo de cada grupo era otro: pasar del estudio de una función asilada al estudio de una familia de funciones. Se hacen modificaciones (OML9) variando las hipótesis iniciales (no forma parte del contrato didáctico de Secundaria). Esto provoca la aparición de nuevas cuestiones problemáticas con nuevas respuestas, dando lugar a una segunda OM que denotamos por OM2 en donde emergen diferentes modelos matemáticos. Este segundo nivel de complejidad nos traslada a la Universidad y hace más visible (OML1) el proceso de modelización de la TAD: a partir de una cuestión inicial de partida muy limitada se generan nuevas tareas que dan lugar a una actividad matemática de complejidad creciente, donde la nueva OM que aparece amplía y completa la OM anterior. Esto último tiene una traducción en el proyecto: amplía y completa también su marco de actuación.

Denotamos por T_U las tareas universitarias. Una *primera* modificación que se les propone a los alumnos es estudiar qué ocurre si hacemos un cambio de parámetros.

T_U: se mantiene fijo el ancho y se cambia el largo ($V_b(x)= (20-2x)(b-2x)x$).

T_U: se mantiene fijo el largo y se cambia el ancho ($V_a(x)= (a-2x)(b-2x)x$).

Ambas tareas son realizadas por todos los grupos con un fuerte protagonismo del programa Mathematica. Se pedía que la respuesta dada por los alumnos completase la dada anteriormente a nivel instrumental (ver anexo). Este trabajo fue realizado por todos los grupos en 1 hora en un Seminario.

Hubo un consenso general de que el modelo construido era más potente que el anterior y que era muy útil para aplicarlo a otras situaciones.

Una *segunda* modificación que se propone ya en la parte final de esta sesión es la búsqueda por los propios alumnos de cuestiones derivadas de la geometría del contenedor para poder ampliar el campo de actuación de nuestro proyecto.

Tercera Sesión

Los grupos presentaron nuevas cuestiones problemáticas por cambios en geometría del contenedor. La mayoría de las cuestiones que plantearon estaban pensadas para trabajar en el primer nivel de modelización funcional, puesto que en Secundaria lo natural es dar unos datos concretos para resolver un problema de optimización. De acuerdo con este contrato los alumnos proponen tareas como:

"*La suma de las longitudes de las aristas del contenedor de base cuadrada es 72m. Halla las dimensiones del contenedor para que su volumen sea máximo*".

El profesor interviene para sugerir que, ya que el desarrollo matemático del REI se situaba en el segundo nivel de modelización funcional, las propuestas debían reformularse de acuerdo con ese nivel. Cada grupo debía responsabilizarse de las respuesta a la cuestión aportada por él. De este modo se consigue ir completando un proyecto que iba involucrando a toda la clase. Algunas de estas tareas fueron:

T_U: *Si la plancha es un cuadrado de lado A m ¿Cuál sería el volumen máximo del contenedor?*

T_U: *La base de la plancha es un cuadrado y la longitud más el perímetro igual a B metros*.

T_U: *La base del contenedor es un cuadrado de lado l y el lado de la base mas la altura es S metros*.

T_U: *La suma de las longitudes de las aristas de un contenedor de base cuadrada es k metros*.

Una *tercera* modificación fue hacerles ver a los alumnos que algunas de las cuestiones que plantearon podíamos considerarlas como problemas inversos (OML4):

T_U: *La capacidad del contenedor ha de ser de 1000* m^3 *con base rectangular, con un lado de doble longitud que el otro, ¿cuáles son las dimensiones para que su superficie sea mínima?*

Al final debatimos el tipo de tareas y técnicas de la sesión anterior y hay una coincidencia muy general: el trabajar con familias de funciones complica mucho el proceso de estudio, porque a la dificultad de construir el modelo algebraico (aparecían nuevas funciones) se le añade la aparición de parámetros, que representa un nivel de complejidad mayor. En este caso el instrumento informático guiado por el profesor fue de gran ayuda en la construcción de las respuestas a las cuestiones planteadas.

El REI desarrollado hasta este momento aumenta el equipamiento praxeológico del alumno y amplía el proyecto inicial. Aparecen cuestiones que no estaban previstas inicialmente.

En la última parte de la sesión, por problemas de tiempo, solo fue posible plantear una serie de cuestiones que mejoraban y completaban el proyecto y que no tenían respuesta con la actividad matemática desarrollada hasta este momento. Esto provocó la necesidad de obtener nuevos saberes que aparecieron como una posible razón de ser de la actividad matemática a estudiar. Se produce entonces el *tercer nivel de modelización funcional* que corresponde en el REI al estudio de modelos de funciones de dos o más variables. Aparece entonces la *cuarta* modificación.

T_U: Hallar el volumen máximo del contenedor si la suma de las longitudes de sus aristas es 100 m.

Este tipo de tareas nos sirve para introducirnos en el estudio de las derivadas parciales de una función con más de una variable y para poder utilizarlas como razón de ser de una nueva Praxeología: extremos de funciones de varias variables.

Aparece de esta forma una nueva ampliación de la OM2, denotada por OM3, que permite dar respuestas a cuestiones que no eran posibles formular en ninguna de las OM anteriores. Esto genera un proyecto que completa y amplia de forma considerable su ámbito de aplicación.

Este nivel es el que tenemos mas abierto y el que tendremos que completar en futuros trabajos, ampliándolo también al estudio de la organización matemática correspondiente a las *ecuaciones diferenciales* (“El Volumen de un contenedor cambia a una tasa V’(x) = 900-272 x+12 x^2 donde x es la altura del contenedor y V el volumen del contenedor. El volumen del contenedor para una altura de 5 el volumen es 1600. ¿Qué volumen esperamos tenga el contenedor si la altura es de 8 m? “)

En el desarrollo del REI han ido apareciendo distintos estados en los que aparecían cuestiones que no eran posible formular en el estado anterior, lo que provocó la necesidad de movilizar nuevos saberes, que aparecen como la razón de ser de una nueva OM que amplía la OM anterior. Todo ese proceso de construcción de la actividad matemática genera un proyecto final situado en el mundo de la ingeniería que rompe con la rigidez del problema cerrado que con el que trabaja frecuentemente el estudiante. Esta sucesión (cuestión, respuesta) resulta ser una composición muy apropiada para potenciar la actividad de modelización matemática.

Hasta aquí la actividad matemática se mueve alrededor de una CG situada en un contexto concreto que da lugar a distintos niveles de modelos funcionales.

A continuación describiremos de una forma muy resumida el REI desarrollado en un taller de otra especialidad (Ingeniería Química). El modelo de REI que se propone a continuación está desarrollado con mayor amplitud en (FONSECA, PEREIRA, CASAS, 2010). Se quiso añadir algo más a lo que ya se experimentó: el mismo modelo funcional permite integrar los conocimientos alcanzados en las otras asignaturas.

Cuestión Generatriz (CG):

La podemos describir de la forma siguiente:

"Un barco a motor que navega a velocidad constante transporta trabajadores de un pozo petrolífero a otro, pero debe efectuar una parada en una estación situada en la playa. ¿Dónde deberíamos construir la estación?"

***Momento del Primer Encuentro*:**

“Un barco a motor que navega a velocidad constante transporta trabajadores de un pozo petrolífero A situado a 500 km de una playa a otro pozo B situado a 200 km de la misma, pero debe efectuar una parada en una estación situada en la playa. Los pozos distan entre sí 500 km. ¿Dónde deberíamos construir la estación?"

A partir de aquí se desarrolló un proceso de estudio paralelo al anterior, con una visión más interdisciplinar. Figuran además de la tarea anterior, tareas del tipo:

Primera modificación: Replantear el problema y la solución siendo las distancias de los pozos a la orilla constantes no determinadas.

Segunda modificación: la costa no es recta. La respuesta nos trasladaría a la Universidad.

Tercera modificación: Podemos perturbar y ampliar la cuestión inicial si escribimos una función en dos variables y añadimos una restricción, cuya respuesta estaría también en la Universidad.

Podemos variar el contexto y mantener el modelo matemático.

Cuarta modificación*:* Un pueblo y otro que dista de éste 12 km, están situados a 5 y 3 km de una autopista larga y recta. Tu ayuntamiento propone, que se haga una carretera nueva desde tu pueblo A hasta un punto C de la autopista y luego conectar este punto con el otro pueblo B. Como el presupuesto de tu ayuntamiento es muy pequeño, quiere que la longitud de la carretera sea la menor posible. Sabe cuánto le cuesta el km construido, pero no sabe cuántos km tendrá que construir. ¿Cuál sería tu respuesta?”

Quinta modificación: El trayecto recorrido es el mismo que recorre un haz de luz cuando ésta se refleja en un espejo o los rayos de sol en un lago.

Sexta modificación: El modelo serviría también para estudiar la posición que adoptaría una cuerda que une dos poleas y que pasa por una rueda fija.

Los resultados finales de este REI no fueron tan positivos como el anterior. Tenían mayor complejidad porque el campo de trabajo era más interdisciplinar y los alumnos no estaban acostumbrados a compartir las matemáticas con problemas de mecánica o electricidad como los que figuraban aquí.

Finalmente el modelo de REI estudiado en ambos casos es extrapolable (Cuarto estadio) a otro tipo de sistemas (físicos, químicos, eléctricos, mecánicos, médicos,…). Los alumnos trabajaron proyectos, fuera del aula, generados por las CP de la legitimidad funcional de acuerdo con el modelo anterior. Las respuestas de los alumnos reflejan que se mueven bien por los niveles de modelización funcional (especialmente por los dos primeros).

Momento Institucional:

En el primer REI desarrollado hemos visto que a partir de cierto cuestionamiento tecnológico (cuestión, respuesta) hemos creado una OM en donde: no existe rigidez en la nomenclatura, se interpretan las técnicas, se trabaja con más de una técnica, se proponen tareas directas e inversas, se trabaja con tareas abiertas cercanas al mundo profesional del alumno, se justifica la razón de ser de la actividad matemática, se modifican las hipótesis iniciales, se pone a disposición de los alumnos recursos informáticos, lo que provoca matemáticamente hablando la construcción de una OMLRC, o bien una OM más completa que la que figura actualmente en las instituciones escolares. Paralelamente este modelo ha ido creando un proyecto situado en el mundo de la ingeniería cada vez más amplio y completo que el proyecto limitado y cerrado que aparece como natural en la actividad matemática institucional.

El REI que esbozamos en este trabajo además, de crear secuencias de enseñanza relativas a la optimización de funciones y, de establecer puentes de unión con el futuro profesional de la ingeniería, comparte protagonismo con muchos de los recursos que utiliza el ingeniero (construcción de diversos modelos matemáticos, elaboración de materiales, consultar bibliografía, competencias transversales, responsabilizarse de las respuestas, hacer cuestionamientos tecnológicos, escribir distintos informes del proyecto, etc.).Se puede hablar de un equipamiento final del alumno más rico y completo que el aporta el modelo institucional vigente, lo que nos permiten pensar en la posibilidad de institucionalizarlos en el paso de Secundaria a la Universidad.

Momento de la Evaluación: (Chevallar, 2010) en una conferencia que impartió para el segundo congreso de Didácticas Especiales celebrado en Buenos Aires en 2010 afirma :

> […] La evaluación de los saberes respecto a un proyecto dado es contigua a la evaluación de las personas. Pero encontramos aquí, a un grado sin duda más elevado, una técnica que sigue prevaleciendo a partir de sus pésimos resultados: se examina el objeto por evaluar, no en situación, sino en si mismo; se le valora en cierto sentido por su estructura y no por su funcionamiento. El resultado es algo que todos conocemos: formaciones que imponen el estudio de saberes que se seleccionaron en el pasado según una técnica "estructural" y cuya utilidad es, como mucho, parcial. Estas formaciones acaban por tener una funcionalidad limitada y, además ignoran saberes cuya ausencia debilita de forma notable la realización del proyecto social considerado.

El REI descrito pone de manifiesto como a partir de una cuestión inicial muy limitada se derivan nuevas cuestiones que se sitúan en distintos niveles de modelización funcional que hemos resumido en tres sesiones. Al principio de cada una de ellas el profesor comprueba el aprendizaje de los alumnos y esto lo utiliza como una estrategia para seguir avanzando o bien para poder rectificar lo que no está bien hecho.

Hemos ejemplificado lo que podría ser una cuestión inicial capaz de constituir la "razón de ser" de una OMLRC. Partiendo de una cuestión situada en el mundo de la ingeniería, hemos mostrado que el desarrollo del bloque práctico-técnico puede ser el motor que genere necesidades tecnológico-teóricas suficientemente ricas como para construir una OM local relativamente completa en torno a la optimización de una función.

Los alumnos aceptaron bastante bien este modelo de trabajo. Muchos lo encontraban útil, cercano a sus intereses y al mundo de ingeniería. Se debatió disponer de más tiempo y la necesidad de tener un periodo de adaptación mayor al modelo propuesto. En el proyecto final de contenedor que debían entregar los alumnos nos encontramos con una sorpresa: inventaron muchas cuestiones derivadas a las ya existentes sobre la geometría del contenedor.

El desarrollo del taller ha puesto de manifiesto algunas limitaciones:

Falta de experiencia del profesorado y del alumnado para trabajar en grupo. Debemos establecer pautas más claras que comprometan a los alumnos de cada grupo en la construcción de un proyecto y que noten que su participación es necesaria. El trabajo experimental desarrollado pone de manifiesto poca imaginación cuando se les pide que propongan tareas que aporten información al proyecto. Asumen que no forman parte de su responsabilidad, porque en el contrato actual lo natural es trabajar con problemas cerrados y con un fuerte protagonismo del profesor.

En la estructura del tiempo didáctico. El profesor debe gestionar mejor el tipo de tareas que permitan optimizar el aprendizaje autónomo del alumno.

Los alumnos no cuestionan la información que les aporta el instrumento informático.

Problemas entre el tiempo didáctico y tiempo institucional.

Conclusiones

El REI que presentamos prima el carácter funcional de las matemáticas, transita desde la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria y pone a disposición de los sujetos de la institución (sean estos alumnos o profesores) recursos que van a necesitar en su vida profesional. Un REI permite que sea toda la comunidad conjuntamente la encargada de estudiar colectivamente la cuestión generatriz y producir solidariamente una respuesta propia.

El carácter visible de la actividad matemática actúa como un elemento motivador como un buen elemento motivador del aprendizaje y esto se ha notado en el interés del alumno por buscar respuestas a las cuestiones que iban surgiendo.

El tiempo institucional en los actuales sistemas educativos es muy limitado, por ello es necesario establecer prioridades. En un REI se construye los conocimientos que consideramos necesarios para dominar la disciplina acercándolos a las necesidades de la ingeniería.

Una de las dificultades que surgen a la hora de poner en marcha un REI es que los alumnos todavía no están familiarizados con la forma de trabajo que requiere, por lo que la participación del profesor se hace más necesaria de lo preciso y tiene que orientarlos en el proceso.

Se tiene en cuenta no solo el volumen de información que puede recibir el alumno, sino también como es el proceso de construcción de esa información. El debate en grupo es muy importante. En él es fundamental la colaboración de profesores y alumnos, y es necesario que acepten ambos el hecho de que sin ella se hace difícil poder avanzar. Es un cambio metodológico importante, porque lo que pretende es que los alumnos se sientan mas involucrados en el estudio de las matemáticas, se comprometan y se en responsabilicen en la construcción de respuestas a proyectos que pueden formar parte de su futuro profesional. Podemos hablar de convergencia entre escuela y sociedad.

La introducción de los REI en los actuales sistemas de enseñanza provocaría un cambio en los diseños curriculares. Estos se tendrían que estructurar en torno a cuestiones “vivas” y “fecundas”. Construir un REI para la matemática escolar no tiene una solución inmediata, está muy abierto y queda por delante mucha experimentación e investigación.

Referencias Bibliográficas

ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano. 97-140

BARQUERO, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

BLUM, W. ; NISS, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, aplications and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.

BLUM, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics,* 51, 149–171.

BOSCH, M. ; GASCÓN, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La PenséeSauvage: Grenoble.

CANTORAL, R. ; MIRÓN, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(3), 265-292.

CHEVALLARD, Y. ; BOSCH, M. ; J. GASCÓN (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona, Horsori.

CHEVALLARD, Y. (2002b). Organiserl'étude. 3. Écologie&régulation. In DORIER,J.-L. *et al.* (eds) *Actes de la 11^e^Écoled'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001* (pp. 41-56). Grenoble: La PenséeSauvage.

CHEVALLARD, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelleépistémologiescolaire. *Texto preparado para una comunicación en «Journées de didactiquecomparée».* Lyon, 3-4 mayo de 2004. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

CHEVALLARD, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. EnBosch, M. (Ed.). *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4),* 21-30. Barcelona, España: Universidad RamonLlul.

COMISIÓN PARA LA RENOVACIÓN DE LAS METODOLOGÍAS EDUCATIVAS EN LA UNIVERSIDAD (2006). *Propuestas para la renovación de las metodologías educativas en la Universidad*. Madrid: MEC.

CHEVALLARD, Y.(2010). Conferencia inaugural del Segundo Congreso Internacional de Didácticas Específicas. Buenos Aires, 30 de septiembre – 2 de octubre de 2010.

FONSECA, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñanza Secundaria y la Enseñanza Universitaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Vigo.

FONSECA, C. ; CASAS, J. M.; GONZÁLEZ,H. (2008). Un recorrido de estudio e investigación: el cálculo del volumen máximo de una piscina. *Actas XVI Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas*, Cádiz

FONSECA, C. ; BOSCH, M. ; GASCON, J. (2010). El Momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios, *Educación Matemática*, vol. 24, nº 2, 5-34.

FONSECA, C. ; PEREIRA, A. ; CASAS, J. M. (2010). Los Recorridos de Estudio e Investigación como Productos de Ingeniería Didáctica. *Actas del Congreso 5ª Conferencia Ibérica de Sistemas y Tecnologías de Información*.

FONSECA, C. ; PEREIRA, A. ; CASAS, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación. *Educación Matemática*, Vol23, nº1, 97-121.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel, Dordrecht.

ICMI (1986). *School mathematics in the 1990s*. Cambridge University Press.

LUCAS, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas.* Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados. Universidad de Vigo.

MORENO, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* 81-96. Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

NISS, M. (1999). Aspects of the Nature and State of Research in MathematicsEducation. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 1-24.

OECD (2006) Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006.

POLYA, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Traducción castellana de José Luis Abellán, Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos: Madrid, 1966.] (1954).

RICO, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación*, 275-294.

INFORME ROCARD. COMISIÓN EUROPEA (2007) ROCARD, M. ; CSERMELY, P. ; JORDE, D. ; H. WALWERG-HENRIKSSON, H. ; HEMMO, V. (2007). *Enseñanza de las ciencias ahora: Una nueva pedagogía para el futuro de Europa***,** ISBN: 978-92-79-05659-8

RUIZ, M. ; BOSCH, M. ; GASCÓN, J. (2006), Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris, EnRuiz Higueras, L., Estepa, A., García, F. J. (eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico,* Publicaciones de la Diputación de Jaén, 635-660.

RUIZ–MUNZÓN (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

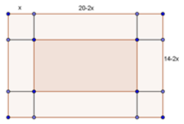
TRIGUEROS, M. (2005). *La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior.* Educación Matemática, Vo1. 17 (1), 5-31.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.

WHITEHEAD, A.N. (1929). *The Aims of Education, and Other Essays*. Trad.: 1957, *Los fines de la Educación y otros ensayos.* (Paidós: Buenos Aires).

ANEXO

I) PRIMER NIVEL DE MODELIZACIÓN FUNCIONAL.



Construcción do modelo matemático

```
V[x_] := (14 - 2 x) (20 - 2 x) x // Expand
```

Dominio

```
Reduce[{V[x] ≥ 0, 14 - 2 x > 0}, x]
0 ≤ x < 7
```

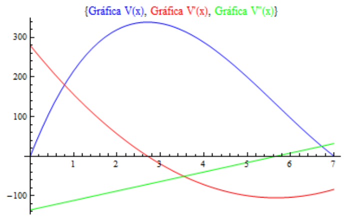
Registro numérico

```
TableForm[Table[{x, 14 - 2 x, 20 - 2 x, V[x], V'[x], V''[x]}, {x, 0, 7, 0.5}],
  TableHeadings → {None, {"x", "ancho", "largo", "V[x]", "V'[x]", "V''[x]"}}, TableSpacing → {1, 4}] //
 N
```

x	ancho	largo	V[x]	V'[x]	V''[x]
0.	14.	20.	0.	280.	-136.
0.5	13.	19.	123.5	215.	-124.
1.	12.	18.	216.	156.	-112.
1.5	11.	17.	280.5	103.	-100.
2.	10.	16.	320.	56.	-88.
2.5	9.	15.	337.5	15.	-76.
3.	8.	14.	336.	-20.	-64.
3.5	7.	13.	318.5	-49.	-52.
4.	6.	12.	288.	-72.	-40.
4.5	5.	11.	247.5	-89.	-28.
5.	4.	10.	200.	-100.	-16.
5.5	3.	9.	148.5	-105.	-4.
6.	2.	8.	96.	-104.	8.
6.5	1.	7.	45.5	-97.	20.
7.	0.	6.	0.	-84.	32.

Registro gráfico

```
Plot[{V[x], V'[x], V''[x]}, {x, 0, 7}, PlotStyle -> {{RGBColor[0, 0, 1]}, {RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]}},
 PlotLabel → {"Gráfica V(x)", "Gráfica V'(x)", "Gráfica V''(x)"}]
```



Registro algebraico

Intervalos de crecimiento. Extemos relativos

```
Reduce[{V'[x] ≥ 0, x > 0, x < 7}, x] // N
0. < x ≤ 2.70394
```

Intervalos de decrecimiento. Extemos relativos

```
Reduce[{V'[x] ≤ 0, x > 0, x < 7}, x] // N
2.70394 ≤ x < 7.
```

Como se puede ver, la función presenta un máximo relativo en x=1/3

Intervalos de Concavidad. Puntos de Inflexión.

```
Reduce[{V''[x] ≤ 0, x > 0}, x]
```

$0 < x \leq \frac{17}{3}$

Intervalos de Convexidad. Puntos de Inflexión.

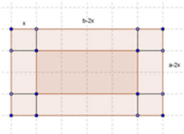
```
Reduce[{V''[x] ≥ 0, x > 0}, x]
```

$x \geq \frac{17}{3}$

Como se puede ver, la función presenta un punto de inflexión en x=17/3

Sea a = ancho y b = largo y x = profundidad

```
a; b;
```




```
V[x_] = (a - 2 x) (b - 2 x)
```

II)   SEGUNDO NIVEL DE MODELIZACIÓN FUNCIONAL, FAMILIAS DE FUNCIONES.

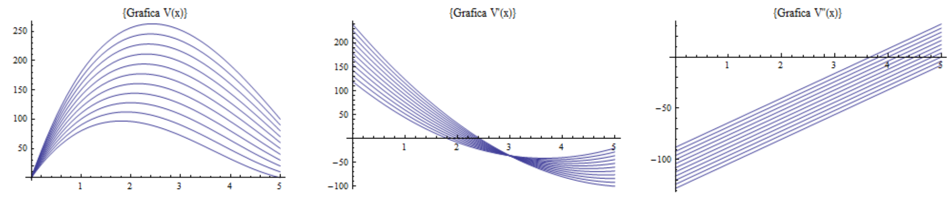
Ahora fijamos el ancho como un parámetro, con lo cual tendremos una familia de funciones.

```
Clear[a]
```

En este caso, el registro numérico tiene un coste enorme en relación con la información que aporta, por lo cual no es una técnica adecuada.

```
p = 10;
q = 20;
```

```
Show[GraphicsArray[{Plot[Table[V[x], {a, p, q}], {x, 0, Min[p / 2, b / 2]}, PlotLabel → {"Grafica V(x)"}],
   Plot[Table[V'[x], {a, p, q}], {x, 0, Min[p / 2, b / 2]}, PlotLabel → {"Grafica V'(x)"}],
   Plot[Table[V''[x], {a, p, q}], {x, 0, Min[p / 2, b / 2]}, PlotLabel → {"Grafica V''(x)"}]}]]
```



Establecemos una tabla que nos de los diversos extremos relativos

```
Table[{a, Solve[{V[x] == 0}, x]}, {a, 10, 14, 1}]
```

$\{\{10, \{\{x \to 0\}, \{x \to 5\}, \{x \to 6\}\}\}, \{11, \{\{x \to 0\}, \{x \to \frac{11}{2}\}, \{x \to 6\}\}\},$
$\{12, \{\{x \to 0\}, \{x \to 6\}, \{x \to 6\}\}\}, \{13, \{\{x \to 0\}, \{x \to 6\}, \{x \to \frac{13}{2}\}\}\}, \{14, \{\{x \to 0\}, \{x \to 6\}, \{x \to 7\}\}\}\}$

```
Table[{a, Solve[{V'[x] == 0}, x]}, {a, 10, 14, 1}] // N
```

```
{{10., {{x → 1.81075}, {x → 5.52259}}}, {11., {{x → 1.91124}, {x → 5.75543}}},
 {12., {{x → 2.}, {x → 6.}}}, {13., {{x → 2.07834}, {x → 6.25499}}}, {14., {{x → 2.14752}, {x → 6.51915}}}}
```

```
Table[{a, Solve[{V''[x] == 0}, x]}, {a, 10, 14, 1}]
```

$\{\{10, \{\{x \to \frac{11}{3}\}\}\}, \{11, \{\{x \to \frac{23}{6}\}\}\}, \{12, \{\{x \to 4\}\}\}, \{13, \{\{x \to \frac{25}{6}\}\}\}, \{14, \{\{x \to \frac{13}{3}\}\}\}\}$