

O estudo da dimensão tecnológica de um problema didático: ensaio teórico-metodológico

*The study of the technological dimension of a didactic problem: A theoretical-
methodological essay*

*El estudio de la dimensión tecnológica de un problema didáctico: Un ensayo teórico-
metodológico*

*L'étude de la dimension technologique d'un problème didactique : essai théorique-
méthodologique*

Naum de Jesus Serra¹

Doutorando em Educação em Ciências e Matemática

Universidade Federal do Pará – Pará – Brasil

Mestre em Educação Científica e Matemática

<https://orcid.org/0000-0003-2204-2810>

José Messildo Viana Nunes²

Universidade Federal do Pará-Brasil

Doutor em Educação Matemática

<https://orcid.org/0000-0001-9492-4914>

Saddo Ag Almouloud³

Universidade Federal do Pará-Brasil

Doutor em Matemática e Aplicações

<https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>

Resumo

É razoável pensar nas tecnologias digitais como entes intrinsecamente ligados ao nosso dia a dia e que têm se mostrado cada vez mais presentes em sala de aula, forçando diversos autores a abordar a temática e, na medida do possível, propor modelos que potencializem o ensino e a aprendizagem de conteúdos disciplinares. Quando observamos as teorias da didática da matemática (DM), vemos que diversos trabalhos trazem um forte apelo à aprendizagem de objetos matemáticos mediados por essas tecnologias. Por entendermos a importância dessa temática, apresentamos nesta

¹ nahumserra@gmail.com

² messildo@ufpa.br

³ saddoag@gmail.com

pesquisa os principais desdobramentos e discussões que permitiram a constituição do modelo da 5ª dimensão de um problema didático. Trata-se de um recorte de tese doutoral do primeiro autor, que propõe tal construção a partir das três dimensões iniciais (epistemológica, econômico-institucional e ecológica) discutidas por Gascón e da 4ª dimensão (linguagem) abordada por Brandão. A 5ª dimensão, também chamada de dimensão tecnológica, tem por objetivo principal, subsidiar inquirições que tratam de modelizações de objetos matemáticos com o auxílio de tecnologias digitais, portanto, refere-se a um modelo teórico-metodológico que juntamente com as outras dimensões possibilitarão a compreensão do problema didático em questão e permitirá uma tomada de decisão no decorrer de uma pesquisa que envolve a 5ª dimensão de um problema didático.

Palavras-chave: Didática da matemática, Teoria antropológica do didático, Dimensões de um problema didático, Tecnologia digital aplicada ao ensino da matemática.

Abstract

It is reasonable to think of digital technologies as entities intrinsically linked to our daily lives and increasingly present in the classroom, prompting several authors to address the theme and, as far as possible, propose models that enhance the teaching and learning of disciplinary content. When we examine the theories of didactics of mathematics (DM), we see that several works strongly appeal to the learning of mathematical objects mediated by these technologies. Because we understand the importance of this theme, we present in this research the main developments and discussions that allowed the constitution of the 5th dimension model of a didactic problem. This is an excerpt from the doctoral thesis of the first author, who proposes such a construction based on the three initial dimensions (epistemological, economic-institutional, and ecological) discussed by Gascón and the 4th dimension (language) addressed by Brandão. The 5th dimension, also called the technological dimension, aims to subsidize inquiries that deal with modeling mathematical objects with the help of digital technologies, therefore, it refers to a theoretical-methodological model that, together with the other dimensions, will enable the understanding of the didactic problem in question and will allow a decision making in the course of a research that involves the 5th dimension of a didactic problem.

Keywords: Didactics of mathematics, Anthropological theory of didactics, Dimensions of a didactic problem, Digital technology applied to the teaching of mathematics.

Resumen

Es razonable pensar en las tecnologías digitales como entidades intrínsecamente vinculadas a nuestra vida cotidiana y cada vez más presentes en las aulas, impulsando a varios autores a abordar el tema y, en la medida de lo posible, proponer modelos que potencien la enseñanza y el aprendizaje de contenidos disciplinares. Cuando observamos las teorías de la didáctica de las matemáticas (DM), vemos que varios trabajos aportan un fuerte atractivo al aprendizaje de objetos matemáticos mediados por estas tecnologías. Por entender la importancia de este tema, presentamos en esta investigación los principales desarrollos y discusiones que permitieron la constitución del modelo de 5ª dimensión de un problema didáctico. Este es un extracto de la tesis doctoral del primer autor, que propone tal construcción a partir de las tres dimensiones iniciales (epistemológica, económico-institucional y ecológica) discutidas por Gascón y la 4ª dimensión (lenguaje) abordada por Brandão. La 5ª dimensión, también llamada dimensión tecnológica, tiene como objetivo principal, subsidiar las investigaciones que se ocupan de modelar objetos matemáticos con la ayuda de las tecnologías digitales, por lo tanto, se refiere a un modelo teórico-metodológico que junto con las demás dimensiones permitirá la comprensión del problema didáctico en cuestión y permitirá una toma de decisiones en el curso de una investigación que involucre la 5ª dimensión de un problema.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, Teoría antropológica de la didáctica, Dimensiones de un problema didáctico, Tecnología digital aplicada a la enseñanza de las matemáticas.

Résumé

Il est raisonnable de considérer les technologies numériques comme des éléments intrinsèquement liés à notre quotidien et de plus en plus présentes dans les salles de classe, ce qui a poussé plusieurs auteurs à aborder le sujet et, dans la mesure du possible, à proposer des modèles qui optimisent l'enseignement et l'apprentissage des contenus disciplinares. Lorsque nous observons les théories de la didactique des mathématiques (DM), nous constatons que plusieurs travaux font fortement appel à l'apprentissage d'objets mathématiques médiatisés par ces technologies. Conscients de

l'importance de ce thème, nous présentons dans cette recherche les principaux développements et discussions qui ont permis la constitution du modèle de la 5e dimension d'un problème didactique. Il s'agit d'un extrait de la thèse de doctorat du premier auteur, qui propose cette construction à partir des trois dimensions initiales (épistémologique, économique-institutionnelle et écologique) discutées par Gascón et de la 4e dimension (langage) abordée par Brandão. La 5e dimension, également appelée dimension technologique, a pour objectif principal de soutenir les recherches qui traitent de la modélisation d'objets mathématiques à l'aide des technologies numériques. Elle fait donc référence à un modèle théorique et méthodologique qui, associé aux autres dimensions, permettra de comprendre le problème didactique en question et de prendre des décisions au cours d'une recherche impliquant la 5e dimension d'un problème didactique.

Mots-clés : Didactique des mathématiques, Théorie anthropologique de la didactique, Dimensions d'un problème didactique, Technologie numérique appliquée à l'enseignement des mathématiques.

O estudo da dimensão tecnológica de um problema didático: Ensaio teórico-metodológico

Introdução

Observa-se ao longo das últimas décadas que o uso das tecnologias digitais na educação vem ganhando espaço e, de forma gradual, conquistando a simpatia de docentes e pesquisadores da educação, que veem na tecnologia um potencial pedagógico capaz de melhorar e auxiliar o ensino escolar. As ferramentas digitais evidenciaram-se nos últimos anos, principalmente pelo desenvolvimento crescente de plataformas educacionais, bem como pelo surgimento de aplicativos e softwares pautados em metodologias ativas e na *gamificação* que incentivam grupos de alunos e professores a usá-las, principalmente em países mais desenvolvidos (Serra, 2022). Hoje em dia, um termo bastante utilizado no contexto dessa evolução tecnológica é a tecnologia digital da informação e comunicação (TDIC), que engloba todas as ferramentas digitais, como jogos, softwares, aplicativos e outros que podem compor ou fazer parte de micromundos virtuais.

O relatório geral da Unesco (2023) alerta que é essencial que nos foquemos nos resultados da aprendizagem e não nos instrumentos digitais, pois, apesar da tecnologia digital ter causado diversas mudanças no ensino e aprendizagem, é discutível afirmar que ela transformou de modo significativo a educação. Ao contrário de países mais desenvolvidos tecnologicamente, em países periféricos, os computadores e dispositivos não são usados em larga escala nas salas de aula; além disso, as evidências são contraditórias quanto ao impacto de tais tecnologias, mesmo naqueles países que detêm maior domínio tecnológico.

No Brasil, as justificativas para o uso de tecnologias digitais constam em documentos oficiais. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) (Brasil, 1996) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017) indicam que o docente da educação básica precisa lançar mão de estratégias metodológicas que possibilitem um ensino e aprendizagem de qualidade e, nesse sentido, os textos incentivam o uso de TDIC aliadas a boas propostas pedagógicas. Segundo a BNCC:

O estímulo ao pensamento criativo, lógico e crítico, por meio da construção e do fortalecimento da capacidade de fazer perguntas e de avaliar respostas, de argumentar, de interagir com diversas produções culturais, de fazer uso de tecnologias de informação e comunicação, possibilita aos alunos ampliarem suas compreensões de si mesmos, do mundo natural e social, das relações dos seres humanos entre si e com a natureza (Brasil, 2017 p. 56).

Além disso, esse documento reforça que os avanços tecnológicos têm promovido uma mudança profunda na sociedade, uma vez que a cultura digital tem se fortalecido com o crescente acesso à internet e pela maior disponibilidade de aparatos tecnológicos, inserindo os estudantes de forma dinâmica nessa cultura. Entretanto, chama a atenção o fato de que os discentes não podem ser tratados como meros consumidores, mas como cidadãos responsáveis, com papéis relevantes nesse processo de inserção tecnológica, e aponta dez competências gerais que devem ser desenvolvidas ao longo da educação básica. Portanto, enfatiza também a necessidade de um olhar pedagógico ativo das escolas para um engajamento produtivo e responsável, haja vista que mudanças sociais e culturais impõem à escola grandes desafios e, portanto, um papel relevante na formação das novas gerações.

Alinhado a esse pensamento, o professor deve assumir o protagonismo na mediação entre a tecnologia e o aprendizado, sendo participativo no desenvolvimento de projetos que busquem relações pertinentes entre as tecnologias e o ensino, propondo metodologias que corroborem de forma reflexiva no estudo dos objetos de ensino, contribuindo dessa forma para uma atitude crítica entre o ensino e as mídias digitais (Serra, 2022). Nesse contexto, inferimos que o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática deve perpassar por uma metodologia que possibilite a modelização desses objetos, em um processo transpositivo que facilite a aprendizagem do aluno. Nesse sentido, a 5ª dimensão de um problema didático pode auxiliar o professor/pesquisador na construção de modelos de ensino que considerem a tecnologia digital como uma ferramenta propícia à construção de conceitos dessa disciplina.

Essa dimensão tem como carro-chefe os processos transpositivos (transposição didática (TD) (Chevallard, 1991) e transposição informática (TI) (Balacheff, 1994). Além disso, sua gênese está relacionada às dimensões de um problema didático (Gascón, 2011), ligando-se, portanto, à teoria antropológica do didático (Chevallard, 1999). Tal dimensão surgiu ao entendermos que há necessidade de acrescentar uma dimensão às quatro já existentes (epistemológica, econômico-institucional e ecológica) desenvolvidas por Gascón (2011) e à dimensão da *linguagem*, constituída por Brandão (2021).

Entendemos que as tecnologias digitais têm hoje uma grande relevância nos processos de ensino e aprendizagem da matemática com os avanços trazidos pelas TDIC e suas inferências causadas no cenário educacional; por isso, a 5ª dimensão nasce

no contexto da pesquisa doutoral do primeiro autor e busca subsidiar sua proposta de inquirição, que trata de modelizações de objetos matemáticos com o auxílio de tecnologia digital (*software Scratch*⁴). Trata-se de um modelo teórico-metodológico que, juntamente com as demais dimensões, buscará uma melhor compreensão do problema didático em questão e permitirá a tomada de decisões coerentes no decorrer da pesquisa. Além disso, esse modelo experimental anuncia a possibilidade de auxiliar não apenas esta, mas outras pesquisas que tratam da utilização de tecnologias digitais (e/ou tecnologias padrão) no contexto de modelização matemática.

A próxima seção apresentará a constituição da 5ª dimensão de um problema didático.

Dimensão tecnológica: uma nova concepção de um problema didático

O trabalho docente face às atividades didáticas é de extrema importância para a construção do conhecimento de forma mais dinâmica (Gascón, 2011), por isso entendemos que no contexto atual, o uso das tecnologias pode trazer vantagens significativas, caso sejam associadas a metodologias que visem o ensino e aprendizagem da matemática, pois “os entes tecnológicos podem permitir novas formas de representação de objetos matemáticos que trazem outras discussões a respeito do conteúdo que está sendo trabalhado” (Lima & Silva, 2015 p. 172). Nesse contexto, com o intuito de corroborar futuras pesquisas que tratem dessas temáticas, adicionaremos às dimensões de um ‘problema didático⁵’ uma dimensão extra, a ‘dimensão tecnológica’, que será constituída e implementada a partir deste recorte.

Vale ressaltar que o termo ‘tecnologia’ a qual nos referimos se aproxima da ideia trazida por Lima e Silva (2015), que utilizam este termo para definir dois tipos de tecnologias: as “**tecnologias padrão**, como, por exemplo, régua, compasso e esquadro, e **tecnologias mais avançadas**, como a Internet, softwares educacionais, vídeos digitais etc.” (Lima & Silva, 2015, p.166). Logo, em nosso contexto, as ‘tecnologias’ correspondem às digitais (softwares, aplicativos educacionais, inteligência artificial etc.) e às ‘tecnologias padrão’ (materiais concretos - ábacos, material dourado, geoplanos, Cuisenaire e outros).

⁴ O *Scratch* é um software desenvolvido em 2007 pelo projeto *Lifelong Kinder Garden Group* do *M.I.T.* (*Massachusetts Institute of Technology*), tendo como seu principal desenvolvedor, Mitchel Resnick, que influenciado por Seymour Papert⁴ e a teoria Construcionista, tornou a linguagem de programação popular e acessível, expandindo o conceito de linguagem em bloco ao ambiente escolar da educação básica (Serra, 2024).

⁵ Segundo Gascón (2011), um problema didático é aquele que se identifica como um problema relativo ao ensino e à aprendizagem das matemáticas.

Gascón (2011) contribuiu significativamente com a teoria antropológica do didático (TAD) e consequentemente, à didática da matemática, ao diferenciar um problema docente de um problema didático (ou problema de investigação), destacando que um problema docente pode ser transformado em um problema didático a partir da inserção de pelo menos três dimensões fundamentais, a saber: a **dimensão epistemológica**, a qual situa o contexto matemático no coração do problema; a **dimensão econômico-institucional**, que despersionaliza a problemática didática e determina a unidade mínima de análise dos processos de estudo; a **dimensão ecológica**, que foca nas condições necessárias para que seja possível o estudo institucionalizado das matemáticas, apontando saídas às restrições que incidem sobre as instituições de ensino.

De certa maneira, esse autor evidencia que um problema didático surge a partir das questões: O que ensinar? Para que ensinar? E como ensinar?, sendo necessária ainda a inserção dessas três dimensões fundamentais ao problema docente. Nesse contexto, de forma esquemática, o padrão heurístico (Gascón, 2011) possibilita uma visão geral do desenvolvimento de um problema didático, sendo, portanto, definido por:

$$\left\{ \left[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2 \right] \hookrightarrow P_3 \right\} \hookrightarrow P_8$$

Na expressão acima, P_1 , P_2 e P_3 representam as dimensões fundamentais de um problema didático e P_0 representa uma formulação inicial, tendo, portanto, um papel especial no processo. O símbolo $\oplus$, chamado de “disjunção aditiva”, traz a ideia de que P_0 é um problema didático incompleto, faltando acrescentar-lhe inicialmente pelo menos a **dimensão epistemológica P_1** para que este seja considerado um problema de investigação. Além disso, a **dimensão econômico-institucional P_2** e, por fim, a **dimensão ecológica P_3** (Gascón, 2011). Essas dimensões juntas são chamadas de problema didático, representado por P_8 , que contém as três dimensões fundamentais (P_1 , P_2 e P_3), as relações entre elas e algumas questões novas que podem surgir no decorrer da pesquisa e que não aparecem em nenhuma delas. Nesse modelo, o símbolo $\hookrightarrow$ não representa inclusão, mas sim um movimento em que cada uma das dimensões P_i é anterior à dimensão P_{i+1} .

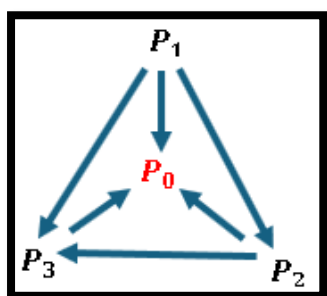
A dimensão epistemológica viabilizará o estudo dos objetos matemáticos em destaque, o que, por sua vez, possibilitará que a dimensão econômico-institucional permita realizar análises sobre documentos oficiais, manuais, livros didáticos etc. Além disso, facilitará o estudo da dimensão ecológica que evidenciará “a razão de ser” dos

objetos matemáticos existentes nessas instituições, a fim de saber por que são do jeito que são e não de outra forma, e que sugestões poderão ser adicionadas para melhorá-las. Nesse âmbito, as respostas encontradas a esses e outros questionamentos facilitarão a realização de algumas inferências e o apontamento de possíveis saídas para as problemáticas em jogo.

Diante disto, representamos na Figura 1 o modelo heurístico de Gascón (2011) e o chamamos de 'triângulo de um problema didático':

Figura 1

Triângulo de um problema didático (elaborada pelos autores)



De maneira idêntica ao modelo heurístico, o 'triângulo de um problema didático' também traz a ideia de que a dimensão epistemológica guia e possibilita a construção da dimensão econômico-institucional e da dimensão ecológica; portanto, a dupla seta parte de (P_1) para (P_2) e (P_3). Além do mais, o sentido de (P_2) para (P_3) representa uma certa lógica que, de maneira geral, faz com que o triângulo didático se movimente no sentido $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$, e ambos se conectam a P_0 , sendo esta correlação o ponto-chave para que o 'problema docente (P_0)' se transforme em um 'problema didático P_8 '.

Vale frisar que em nosso caso especificamente, P_0 é representado pela problemática inicial que gira em torno do ensino e da aprendizagem da geometria dos anos iniciais. A dimensão epistemológica tratará do estudo de grandezas e medidas no contexto da geometria plana, que nos permitirá o estudo da dimensão econômica econômico-institucional e, no que lhe concerne, possibilitará análises sobre os documentos oficiais: BNCC, livros didáticos e manuais didáticos dos anos iniciais, planos de ensinos e outros, com o intuito de saber quais praxeologias existem nas instituições. A dimensão ecológica nos ajudará a compreender a razão de ser das praxeologias existentes nas instituições em jogo, fazer inferências e sugerir novos saberes praxeológicos a estas.

Portanto, como nosso problema docente está ligado ao ensino e à aprendizagem da geometria, a questão 'O que ensinar?' está relacionada ao ensino e à aprendizagem de grandezas e medidas no contexto geométrico para os anos iniciais com o auxílio do

Scratch. Sobre a questão 'Para que ensinar?', inferimos que seja para que os professores em formação acrescentem novos saberes aos seus equipamentos praxeológicos⁶ (EP), ampliem sua visão das grandezas e medidas no contexto da geometria plana e compreendam esses objetos com mais clareza por intermédio da tecnologia digital. A respeito de 'Como ensinar?', sugerimos a implementação de um ensino mediado por um modelo epistemológico de referência (MER), com o auxílio do software Scratch, a fim de melhorar a práxis dos professores em formação e minimizar possíveis lacunas no ensino de grandezas e medidas geométricas.

A demais, como nossa temática é compatível com as tecnologias digitais no ensino da matemática, a partir das concepções de Gascón (2011), iremos além das relações existentes entre as três dimensões iniciais discutidas por esse autor, e levantaremos novas questões que não aparecem em nenhuma daquelas já descritas, havendo, portanto, a necessidade de adicionarmos uma dimensão extra ao problema didático, 'a dimensão tecnológica'.

Gascón (2011) relata não apenas a possibilidade de alteração da ordem em que pode ocorrer o estudo das dimensões básicas de um problema didático, mas também assinala a existência de outras dimensões secundárias, afirmando que:

O desenvolvimento histórico de uma investigação didática nem sempre atende e respeita de maneira estrita o padrão heurístico, já que, na história real, a ordem em que as dimensões básicas de um problema didático são estudadas pode mudar. Além do mais, as dimensões secundárias — como, por exemplo, as dimensões cognitivas, pessoais, ostensivas, instrumentais etc.— podem ser valorizadas como principais e prioritárias e, desde já, permanecer implícitas; por outro lado, podem nem sequer ser uma dimensão que a TAD julgue como básica ou fundamental, como a epistemológica (Gascón, 2011, p. 206, tradução nossa).

Nesse contexto, as palavras do autor possibilitam a existência de dimensões extras, o que nos motiva a acrescentar a dimensão tecnológica, uma vez que, esta dimensão pode, em muitos casos, subsidiar o pesquisador na escolha e na utilização de ferramentas que servirão para modelização de objetos matemáticos. No entanto, antes de continuarmos o estudo dessa dimensão propriamente dita, vale a pena acentuar que a 4ª dimensão do problema didático corresponde à dimensão da linguagem e foi evidenciada na tese de Brandão (2021), e posteriormente em Brandão, Silva e Almouloud (2024). Nos trabalhos citados, os autores "apresentaram a 4ª

⁶ Para Chevallard (2009a), o equipamento praxeológico é um conjunto de práticas que o professor possui para ensinar. Por exemplo, as operações que envolvem o cálculo de medidas de áreas e de comprimento de figuras planas são partes de um conjunto de praxeologias da qual esse professor é equipado.

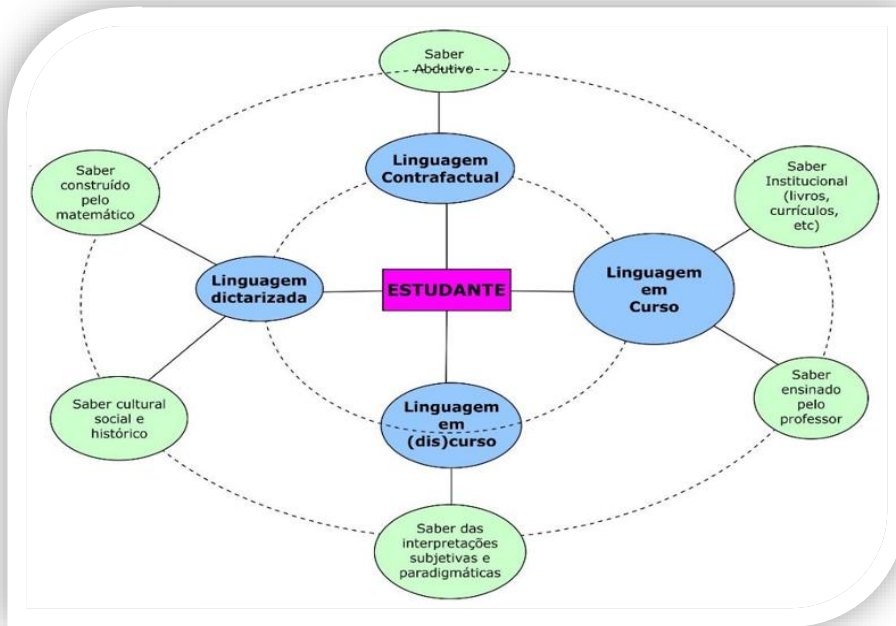
dimensão como um constructo teórico de análise para o problema didático, situando-a como “uma dimensão fundamental, com o mesmo grau de relevância atribuída às dimensões epistemológica, econômica e ecológica” (Brandão et al., 2024, p. 367), destacando-a como um campo abrangente que perpassa todas as outras dimensões. Aliás, os autores descrevem-na como interna e externa ao problema didático, pois atua como uma “dimensão de fronteira em que os movimentos são dinâmicos, em expansão ou em zona de interrelações entre diferentes meios” (p. 368).

Para eles, a dimensão da linguagem é formada por quatro eixos, a saber: 1) A ‘linguagem dictarizada’ —própria da matemática, formada por símbolos, regras e procedimentos que são inerentes ao campo da matemática, composta por técnicas, tecnologias e teorias da própria área; 2) A ‘linguagem contrafactual’, ligada ao saber abduutivo (espontâneo, *insights*) cujo papel é imprescindível na percepção sensível, atribuída a uma visão transcendental que emerge do processo criativo; 3) A ‘linguagem em curso’, ligada à transposição didática docente, evidenciada pelos livros didáticos e o plano de ensino do professor, contendo suas interpretações individuais sobre o objeto matemático. Este último eixo gira no entorno das organizações matemáticas e didáticas que visam o ensino e aprendizagem do aluno em sala de aula. Para os autores, “A linguagem em curso se baseia na repetição de livros didáticos e de metodologias de ensino pautadas no paradigma de ‘visita às obras’ (Brandão et al., 2024, p. 372). Por fim, 4) A ‘linguagem em (dis)curso’ estabelece o saber das interpretações subjetivas e pragmáticas para construir uma interpretação individual e crítica do aluno e do professor. Posiciona-se diante das relações de poder embutidas nos discursos, nas instituições.

De forma sintética, a Figura 2 apresenta os quatro tipos de linguagens propostos pelos autores, evidenciando alguns saberes que os envolvem.

Figura 2

Saberes constituintes da dimensão da linguagem (Brandão et al., 2021, p.104)



Os autores relatam a existência de uma proporcionalidade inversa entre as quatro linguagens, de modo que, quanto mais se aplica a linguagem dictarizada, menos se constrói a linguagem contrafactual; analogamente, quanto maior a linguagem em (dis)curso, menos utilizada será a linguagem em curso. Além disso, quanto menos se utiliza a linguagem dictarizada, mais elevada será a linguagem em (dis)curso e, quanto menor for a linguagem contrafactual, maior será a linguagem em curso. Para estes autores, o ponto de equilíbrio seria a forma ideal e ocorreria com o uso das quatro linguagens em um ponto “em que os níveis de proporcionalidade atingem um nível de imbricamento ideal para o ensino e a aprendizagem da Matemática” (Brandão et al., 2024, p.374).

Dito isto, com a constituição dessa nova dimensão, o modelo heurístico (Gascón, 2011) sofre uma alteração e passa a constituir-se por quatro dimensões, a epistemológica (P_1), a econômica-institucional (P_2), a ecológica (P_3) e a dimensão da linguagem (P_4):

$$\left\{ \left[\left[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2 \right] \hookrightarrow P_3 \right] \hookrightarrow P_4 \right\} \hookrightarrow P_8$$

Nessas condições, (P_4) surge como um ente que permeia as demais dimensões e reforça o ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos, ao criar possibilidades de interpretação e análise no entorno desses objetos, dentro de um sistema didático (Brandão, 2021; Brandão et al., 2024).

Voltando ao estudo da 5ª dimensão de um problema didático, podemos dizer que a gênese dessa ‘dimensão tecnológica remonta ao trabalho de Almouloud (2005), pois,

embora esse autor não tenha utilizado esse termo propriamente dito, apresentava indícios e apontava para a existência de um importante e indissociável dimensão, mesmo antes de Gascón (2011) anunciar sua contribuição à TAD envolvendo o estudo das três dimensões do problema didático (o que viria a acontecer anos mais tarde). Nesse âmbito, Almouloud (2005), ao questionar o uso do computador, das tecnologias digitais e do papel docente frente aos paradigmas existentes no ensino mediado por tais ferramentas, buscava analisar as tecnologias digitais no contexto da transposição didática (TD) e transposição informática (TI), o que nos leva hoje a teorizar e estabelecer uma nova dimensão às dimensões pré-existentes.

Como visto, Gascón (2011) evidencia que o estudo das três dimensões de um problema didático enfatiza diretamente os objetos matemáticos que perpassam um estudo aprofundado, no qual se detalham seu caráter histórico e epistemológico, bem como sua representatividade em livros didáticos, manuais e documentos oficiais. Além disso, procura entender como estes objetos vivem nas instituições de ensino.

Por outro lado, Brandão (2021), por meio de duas visões teóricas — a TAD (Chevallard, 2015) e a teoria semiótica (Pierce, 2005) —, evidencia o ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos (a integral dupla, para o cálculo da medida do volume de uma superfície quádrica, o parabolóide hiperbólico). A autora baseou-se na TAD e a visão de mudança do paradigma de ‘visita às obras’ ao paradigma de ‘questionamento de mundo’, e na teoria semiótica de Pierce (2005), que amplia o espaço de análise da matemática ao “atribuir aos objetos matemáticos significados e sentidos que emergem da leitura dos signos culturalmente instituídos, das diversas linguagens que permitem compreender o mundo e dos contextos de uso daqueles signos” (Brandão 2021, p. 106).

Portanto, entendemos que nenhum desses autores (Gascón, 2011; Brandão, 2021; Brandão et al., 2024) teve como objetivo a inserção de tecnologias como suporte à modelização matemática nas dimensões descritas. À vista disso, construiremos nesta seção a dimensão tecnológica —que comporta as tecnologias ‘digitais’ — e, embora não seja o foco deste trabalho, destacamos que o modelo abrange e pode ser utilizado também na perspectiva das ‘tecnologias padrão’. Nosso objetivo aqui é tratar das tecnologias digitais como ferramentas de modelização matemática, portanto, não entraremos na discussão sobre as tecnologias padrão (não digitais).

Desse modo, no contexto da TAD, baseados nas concepções de Gascón (2011) e de Almouloud (2005), ousamos anunciar a inserção da ‘dimensão tecnológica’: a ‘5ª

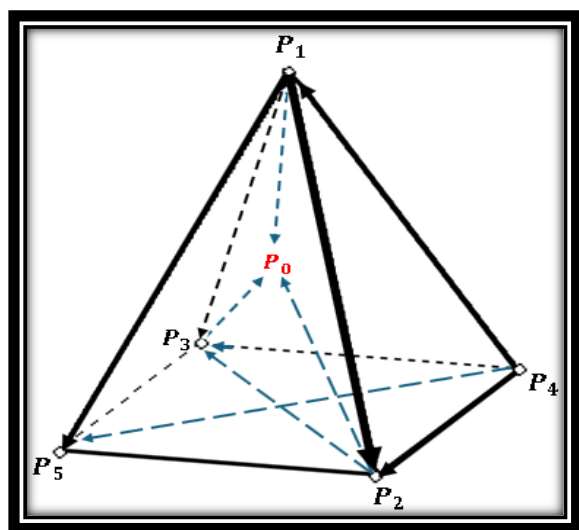
dimensão do problema didático', que amplia e modifica o modelo heurístico inicial de Gascón (2011) ao acrescentarmos a este uma dimensão extra que traz modificações, de modo a emergir um novo modelo simbólico ao qual denominamos de 'modelo heurístico expandido' (MHE).

$$\left\{ \left[\left[\left(P_0 \oplus P_1 \right) \hookrightarrow P_2 \right] \hookrightarrow P_3 \right] \hookrightarrow P_4 \right] \hookrightarrow P_5 \right\} \hookrightarrow P_6$$

Acentuamos que no MHE, P_0 é um problema docente inicial e o símbolo $\oplus$ traz a ideia de que P_0 é um problema didático incompleto, necessitando a inserção de, pelo menos, a dimensão epistemológica P_1 . Além disso, P_2 representa a dimensão econômico-institucional, P_3 , a dimensão ecológica, P_4 , a dimensão da linguagem e, finalmente, P_5 , a dimensão tecnológica. Destacamos que enquanto o modelo heurístico de Gascón (2011) é representado geometricamente por um triângulo (Figura 1), conjecturamos que o MHE será representado geometricamente por um pentaedro (Figura 3), ao qual denominamos 'pentaedro de um problema didático'.

Figura 3

Pentaedro de um problema didático (elaborado pelos autores)



Da mesma forma que o MHE sugere um movimento sequencial e ordenado das dimensões, sua representação geométrica é constituída de modo semelhante. No entanto, vale lembrar que a *dimensão da linguagem* (P_4) se conecta com todas as demais dimensões. A *dimensão epistemológica* (P_1), por situar o contexto matemático no coração do problema didático (Gascón, 2011), interliga-se e permite a constituição das dimensões econômico-institucional (P_2), ecológica (P_3), influenciando-as diretamente, permitindo (em P_2) analisar livros didáticos e manuais de ensino para verificar como as praxeologias existem nas instituições, evidenciando também (em P_3) a 'razão de ser' desses objetos a fim de saber porque estes se comportam de uma

determinada maneira e não diferente. Além do mais, essas três dimensões (P_1 , P_2 , P_3) se ligam ao problema docente (P_0), para que, desse modo, seja constituído um problema de investigação (P_8). A dimensão epistemológica possibilita também (juntamente com P_5) um estudo sistemático da relação entre os objetos matemáticos e as ferramentas tecnológicas para que haja uma compreensão adequada e uma escolha coerente dessas ferramentas para utilização em modelizações.

Na próxima seção, falaremos das concepções que permitirão a constituição do 'modelo da 5ª dimensão de um problema didático'.

A constituição do modelo da 5ª dimensão de um problema didático

Inicialmente, queremos destacar que o termo 'concepção' descrito aqui é concebido em um sentido filosófico, remetendo à ideia de elaboração e construção de conceitos; assim, "uma concepção também é fruto da inteligência de alguém, e muitas vezes contribui para a formação de diversas teorias"⁷. Dito isto, as concepções trazidas em Almouloud (2005) serão a mola propulsora para a formulação da 5ª dimensão, uma vez que o autor, naquela ocasião, analisava os efeitos da transposição didática (TD) e da transposição informática (TI) no ensino de matemática mediado por tecnologias digitais, levantando questões sobre o uso de ambientes computacionais e softwares na educação, bem como, as consequências destes instrumentos sobre o aprendizado dos alunos. A partir de então, algumas questões foram levantadas, tais como: Qual saber matemático ou qual conhecimento queremos ensinar? E como ensiná-lo? Sobre isso, o autor revela que:

Se o recurso informático for o suporte pedagógico escolhido pelo professor, ele deve saber que o computador e os softwares educativos são ferramentas de trabalho, cujo uso precisa de uma estratégia pedagógica. É o professor que deve definir essa estratégia, em função dos objetivos do ensino e das ferramentas de que dispõe (Almouloud 2005, p. 55).

Nesse contexto, o autor destacou a importância de uma formação docente interligada a aspectos didáticos que envolvessem questões relativas a esse tipo de tecnologia, em virtude de que o ensino e a aprendizagem vão além dos conhecimentos matemáticos, e que em contexto de ensino subsidiado por tecnologias digitais, o professor deve possuir conhecimentos que o possibilitem manusear as ferramentas

⁷ <https://www.significados.com.br/concepcao/>

tecnológicas (computadores, linguagens, ferramentas gráficas, softwares educacionais etc.). Assim, para Almouloud (2005) é imprescindível uma formação que leve em conta os novos paradigmas educacionais introduzidos pelas tecnologias digitais no ensino, de modo a contribuir efetivamente para o aprendizado do aluno, ou seja, “O objetivo do uso dos ambientes informáticos na educação é proporcionar ao aluno condições favoráveis à aquisição de conhecimentos e à superação das dificuldades de ensino-aprendizagem” (Almouloud 2005, p. 55).

Dito isso, inferimos que as teorias da transposição (didática e informática) são os fios condutores da dimensão tecnológica, pois possibilitarão, no momento adequado, a modelização de atividades por meio de tecnologias. Ressaltamos que, embora os questionamentos trazidos pelo autor tenham o foco nas tecnologias digitais, também vão ao encontro de ‘tecnologias padrão’. Sendo assim, no contexto da dimensão tecnológica, destacamos que o modelo a ser constituído poderá ser utilizado nas duas perspectivas; porém, descreveremos essas duas tecnologias, genericamente, como ‘ferramentas tecnológicas ou objetos tecnológicos’. Nesse sentido, a 5ª dimensão deve subsidiar o professor/pesquisador na busca de respostas para algumas indagações, de modo que a análise didática das respostas no entorno da ferramenta tecnológica escolhida o ajude na construção de situações-problema que atenderão aos objetivos do ensino e aprendizagem.

Os questionamentos realizados por Almouloud (2005) são relevantes e devem ser pontos fundamentais a serem levantados pelo professor/pesquisador a respeito da ferramenta tecnológica que poderá ser utilizada em sala de aula. Para alcançarmos nossos objetivos de forma satisfatória, algumas dessas questões sofreram pequenos ajustes. Nessa direção, apresentamos as novas inquirições baseadas em Almouloud (2005) que nos possibilitam o seguinte questionamento quanto ao objeto tecnológico escolhido:

- a) Permite a construção de situações em que as variáveis são controláveis?
- b) Permite a identificação e a interpretação dos erros e as condições de seu aparecimento?
- c) Pode-se construir modelos dos processos errôneos?
- d) Pode-se construir situações didáticas em que esses processos sejam desequilibrados?
- e) O uso dessa tecnologia permitirá alcançar os objetivos didáticos fixados pelo professor?

Tais questionamentos são essenciais à 5ª dimensão e farão parte da 'concepção tecnológica' (CT). São análises a priori que o docente deve realizar, uma vez que essas questões possibilitarão uma análise didática e epistemológica dos efeitos dos conhecimentos que os alunos poderão adquirir em um ambiente de ensino mediado por ferramentas tecnológicas.

Da mesma forma, outros argumentos apresentados por Almouloud (2005) sofreram pequenas modificações, com o mesmo intuito de serem mais abrangentes e de possibilitar uma análise sobre o uso de objetos tecnológicos em sala de aula. São tópicos imprescindíveis a serem ponderados pelo professor/pesquisador. A saber:

- f) Quais são as limitações (ou restrições, condições) que as tecnologias impõem ao usuário?
- g) Quais comportamentos elas induzem e qual tipo de ensino e aprendizagem elas permitem efetivamente?
- h) Quais são os efeitos do ensino e aprendizagem com um software educativo (ou com um material concreto) sobre os conhecimentos construídos em sala de aula?
- i) Quais são os efeitos da transposição informática e da transposição didática do saber matemático sobre o conhecimento construído pelo aluno na interação com a ferramenta tecnológica?

Os questionamentos (f, g, h e i) guiam a 5ª dimensão, pois as respostas encontradas possibilitarão a construção de ações, atividades ou modelos mediante um estudo sistematizado que poderá conduzir o professor/pesquisador à compreensão das temáticas subsidiadas pelas ferramentas tecnológicas no ensino. O objetivo principal da dimensão tecnológica é auxiliar pesquisas no âmbito de um problema didático que envolve o uso dessas ferramentas, a fim de permitir, ao final, inferir e fazer apontamentos estratégicos para o enfrentamento dos obstáculos e lacunas existentes no ensino mediado por esses objetos tecnológicos.

Tal dimensão traz em sua formação, além das concepções tecnológicas **(CT)** (constituídas pelos questionamentos descritos (a, b, c, d, e, f, g, h, i), o estudo histórico e epistemológico do objeto tecnológico **(EOT)** (aplicativos, softwares educacionais ou materiais concretos) a ser utilizado. Traz também em sua composição a revisão integrativa da literatura **(RIL)** e a concepção matemática **(CM)**. Essas quatro concepções, mediadas pelas concepções da linguagem **(CL)** e concepções do professor/pesquisador **(C. Sujeito)**, permitirão uma visão global e uma compreensão

mais aprofundada das ferramentas tecnológicas a serem utilizadas no processo de modelização do ensino.

Vale destacar que na inquirição, o professor/pesquisador é um sujeito de ação e mediação, sendo, portanto, uma peça-chave no desenvolvimento do trabalho científico, deixando ao longo de toda atuação suas próprias impressões, que, de certa forma, possui alguma similaridade com o movimento realizado pelo professor no contexto da CL. Porém, enquanto na 4ª dimensão o professor buscará o equilíbrio entre as quatro linguagens mediante a ação em sala de aula, utilizando sobretudo as linguagens em curso e em (dis)curso, na 5ª dimensão, a interação do pesquisador ocorre sob a perspectiva da C. Sujeito.

Entendemos que em contexto de ensino, o professor deve ser um sujeito atuante que traz suas experiências sociais e culturais, bem como sua epistemologia, constituída ao longo de sua formação acadêmica e de sua vida, inserindo no 'texto de saber' as variáveis institucionais e epistemológicas e seus respectivos valores que conformam seu *milieu* didático (Silva, 2019). Embora na pesquisa científica a interação do pesquisador com o objeto matemático traga nuances da linguagem em curso, regida pelo processo de transposição didática interna, ela ocorre sob uma dinâmica diferente, pois, na perspectiva da 5ª dimensão, o pesquisador deve realizar um estudo epistemológico aprofundado desses objetos (em consonância com P_1) e das ferramentas tecnológicas (mediante EOT), bem como as possíveis relações existentes entre elas. Portanto, as concepções do sujeito (C. Sujeito) vão além da visão na qual se baseia a linguagem em curso, sistematizada pelo 'paradigma de visita às obras'.

Na dimensão tecnológica, o pesquisador traz equilíbrio à inquirição por meio da C. Sujeito, que, subsidiada pelo paradigma de 'questionamento do mundo', representa uma relação $R(\hat{I}, E)$, em que $\hat{I}$ designa uma pessoa ou uma posição institucional e E , o saber (em grego, ἐπιστήμη, episteme). No contexto da TAD, a 'C. Sujeito' é analisada sob o viés da relação $R(\hat{I}, E)$, sendo, portanto, o professor/pesquisador ($\hat{I}$) um sujeito que deve estar alinhado com as cinco atitudes (Chevallard, 2013; Chevallard & Strømskag, 2022), sendo estas:

- A problematização ($\hbar_1$), pois consiste em reconhecer a 'problemática' das situações vividas ou observadas, ou seja, em colocar questões sobre elas. Esta é, obviamente, uma atitude essencial, da qual surgem tanto a questão q , geratriz do inquérito, quanto as questões geradas q_k .

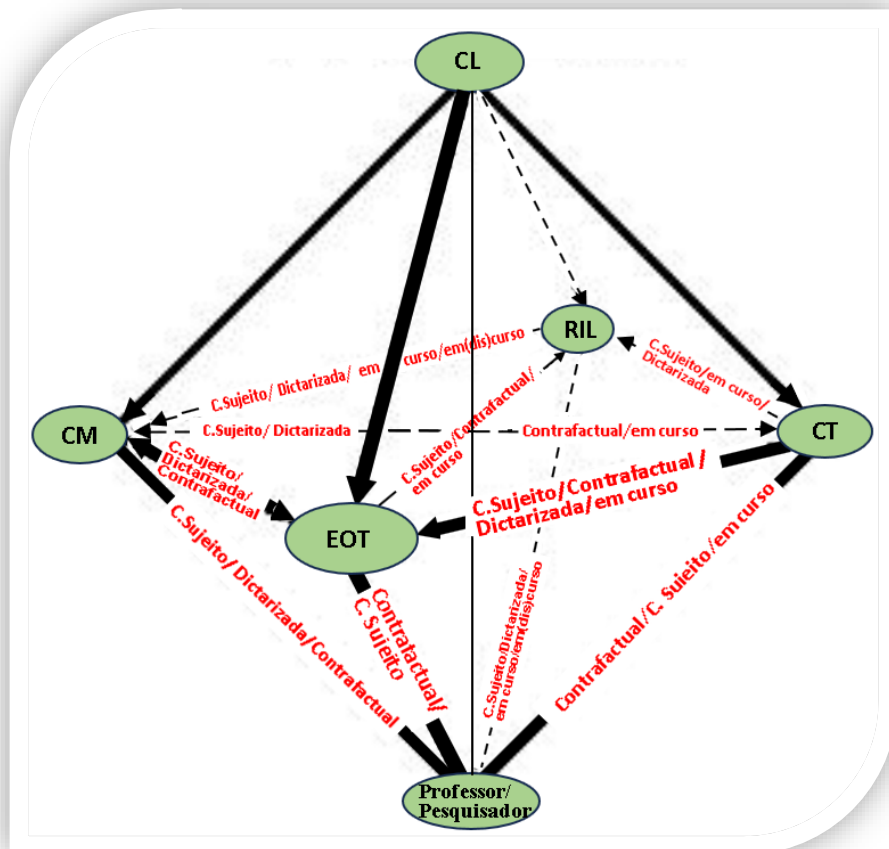
- A herbartiana (h_2), que consiste em não fugir de qualquer questão q enquanto tal (negando-a, ignorando-a, reprimindo-a) e, concretamente, em doar-se a seu estudo aqui e agora ou, pelo menos, colocar seu estudo em espera.
- A procognitiva (h_3), que se opõe à atitude retrocognitiva típica do paradigma 'de visita às obras', que nos faz 'olhar para trás' para os conhecimentos adquiridos até agora, que são, por vezes, duvidosos.
- A exotérica (h_4), que se opõe à ilusão esotérica de quem pensa que sabe tudo (pelo menos em determinada área). Em contrapartida, a atitude exotérica consiste em se olhar sempre como tendo que estudar para aprender mais ou, já, para verificar ou questionar o que se pensa saber.
- A enciclopedista comum (h_5), que consiste em ver-se como não alheio ao conjunto de campos praxeológicos possíveis, mesmo que seja com um 'grau de exotericidade' próximo de zero, enquanto se esforça constantemente para fazê-lo crescer, tanto quanto seja útil, o dito grau de exotericidade.

Nesse contexto, a C. Sujeito procura alinhar o pesquisador às cinco atitudes para que este seja problematizador, herbartiano, procognitivo, exotérico e enciclopedista comum (Chevallard & Strømskag, 2022, p.23).

Dito isso, a 5ª dimensão, alinhada às outras dimensões do problema didático, permitirá compreender 'a razão de ser' dessas ferramentas tecnológicas, como vivem e transitam pelas instituições de ensino (formais ou não formais) e como se integram aos objetos matemáticos. Além disso, a dimensão tecnológica, em consonância com a dimensão ecológica, poderá traçar diretrizes e apontar possíveis saídas, uma vez que ela visa corroborar com a (re)construção de conceitos matemáticos por meio de ações ou atividades de forma integradas as ferramentas tecnológicas. Logo, pela pertinência, e por entendermos que essa dimensão é indissociável de um problema didático voltado ao uso de ferramentas tecnológicas, destacamos que tal dimensão possui o mesmo grau de relevância das dimensões anteriores. Nesse sentido, evidenciamos o modelo que representa a 5ª dimensão de um problema didático, conforme ilustra a Figura 4.

Figura 4

Modelo da 5ª dimensão de um problema didático (elaborado pelos autores)



Este modelo é constituído por quatro pilares principais que associados à dimensão da linguagem (CL) e às concepções do professor/pesquisador (C. Sujeito), visam uma escolha coerente e um estudo sistematizado da ferramenta tecnológica a ser utilizada para que esta possibilite a modelização dos objetos matemáticos.

Nesse âmbito, os quatro pilares a que nos referimos são:

1. A epistemologia do objeto tecnológico (EOT) – corresponde ao estudo histórico/técnico do objeto escolhido, em que prevalecem, principalmente, as linguagens ‘dictarizada’ e ‘contrafactual’, pois podem mobilizar ideias de diagramas, símbolos e programações, além do pensamento abduutivo em que se revela a criatividade ao pesquisador para a construção de objetos de aprendizagem (OA);
2. A revisão integrativa da literatura (RIL) – traz informações globais sobre outros trabalhos que utilizaram ferramentas tecnológicas no ensino. A RIL colabora com uma nova visão e novos saberes relevantes para o fortalecimento do equipamento praxeológico (EP) do professor/pesquisador. Traz modulações da linguagem dictarizada, pois pode evidenciar regras matemáticas, símbolos e representações nos estudos. Além disso, evidencia

nuances da linguagem 'em curso' (com possibilidades da linguagem em (dis)curso), representadas pelos OA.

3. A concepção matemática (CM) – traz as perspectivas do estudo epistemológico do objeto matemático (dimensão epistemológica, P_1) e do pensamento matemático, contendo os saberes necessários à articulação com as ferramentas tecnológicas que serão utilizadas na modelização. Neste caso, destaca-se principalmente a 'linguagem dictarizada'.
4. A concepção tecnológica (CT) – visa auxiliar a pesquisa na busca de uma escolha adequada da ferramenta tecnológica digital, está alinhada às questões (a, b, c, d, e, f, g, h, i), e é mediada principalmente pela C. Sujeito, ligada ao professor/ pesquisador; esta por sua vez, juntamente com a linguagem em curso, poderá possibilitar a mobilização da linguagem contrafactual, importante na criação de objetos de aprendizagens por meios transpositivos.

Vale ressaltar que a concepção tecnológica (CT) guia o modelo da 5ª dimensão e, em termos ideais, essa concepção deve ser a primeira a ser observada, uma vez que traz a análise a priori (subsidiada pelas questões: a, b, c, d, e), fundamental para que se tenha clareza do objeto tecnológico a ser utilizado nas modelizações, de modo a possibilitar observar, analiticamente, se este é capaz de alcançar os objetivos didáticos fixados pelo professor. Este modelo sugere, em seguida, que se enfatize o estudo do objeto tecnológico por meio da epistemologia do objeto tecnológico (EOT), de modo a permitir ao professor/pesquisador maior aprofundamento e possibilitar o conhecimento de propriedades que possivelmente ainda não lhe foram reveladas. Por isso, a 'seta' é direcionada no sentido de CT para EOT e depois para revisão integrativa da literatura (RIL), de tal forma que esta última possa permitir uma visão abrangente sobre os trabalhos nacionais e/ou estrangeiros, ajudando o pesquisador a observar e compreender as concepções matemáticas (CM) e tecnológicas (CT) existentes nos projetos analisados, bem como condições e/ou restrições e possíveis relações entre eles.

Ao tratarmos de estudos de conceitos matemáticos subsidiados por tecnologias, há uma forte dialética entre as concepções matemáticas (CM) e as concepções tecnológicas (CT), pois uma visão aprofundada da primeira, aliada aos questionamentos da segunda, poderá permitir uma modelização adequada dos objetos matemáticos intermediados pelas ferramentas tecnológicas. Da mesma forma, a 'dupla seta' entre as CM e a EOT mostra a estreita relação que deve haver entre essas duas

concepções, pois as convergências entre elas trazem diversas possibilidades para a elaboração de atividades.

A lógica da movimentação de cada seta descrita no 'modelo da 5ª dimensão' não é algo estanque, pois, de acordo com a especificidade ou a necessidade de cada pesquisa, ela pode sofrer alguma alteração. No entanto, tais concepções descritas neste modelo são constitutivas dessa dimensão e não devem, portanto, ser ignoradas.

O modelo evidencia também as principais nuances entre a 4ª e 5ª dimensão de um problema didático, tanto a partir de múltiplas interações entre as concepções do sujeito (C. Sujeito) com as demais concepções (CL, CT, CM, RIL, EOT), assim como nas relações existentes entre estas. Nessas condições, o professor/pesquisador, ao interagir com as CM, mobiliza as 'C. Sujeito', além de evidenciar principalmente as concepções da linguagem dictarizada. Na sua interação com a EOT, podem ocorrer essencialmente as C. Sujeito, a linguagem dictarizada e, possivelmente, a linguagem contrafactual, ligada à criatividade e ao pensamento abduutivo. Em sua relação com as CT, ocorrem principalmente as C. Sujeito e a linguagem em curso, podendo aparecer, também, a linguagem contrafactual. No contato com a RIL, prevalecem as C. Sujeito, e nuances da linguagem dictarizada e em curso (com chances de se observar a linguagem em (dis)curso).

Podemos conjecturar que, na interface entre a epistemologia do objeto tecnológico (EOT) e a revisão integrativa da literatura (RIL), podem prevalecer as C. Sujeito aliadas à linguagem dictarizada e em curso, mobilizadas pelas relações existentes entre as linguagens de programação, softwares, aplicativos e outros (com possibilidades do surgimento da linguagem contrafactual por meio de *insights*, além da linguagem em (dis)curso). Entre a RIL e as concepções matemáticas (CM), destacam-se, basicamente, as C. Sujeito, linguagem dictarizada e linguagem em curso, evocadas pelas percepções de outros pesquisadores que trazem novos saberes sobre o ensino da matemática e a construção de objetos de aprendizagem (OA) modelizados por ferramentas tecnológicas. É razoável supor que diversos trabalhos trazem atividades realizadas por alunos, que, atraídos pelos saberes da cultura digital (programações, computadores, celulares, aplicativos e outros), deixam suas impressões, que podem ser acessadas pelo pesquisador ao observar nuances da linguagem em (dis)curso.

Na região entre as concepções matemáticas (CM) e as concepções tecnológicas (CT), destacam-se, sobretudo, as C. Sujeito, a linguagem dictarizada, em curso e possivelmente, a contrafactual, atraídas pelo pensamento computacional (PC) e pelo

pensamento matemático (PM). Essa interface sofre a influência da epistemologia do professor/pesquisador, de sua filosofia de trabalho e suas influências culturais, que associadas aos manuais e aos livros didáticos e estudos mediados pelo 'questionamento de mundo' (Chevallard, 2022), permitem uma "cara nova" e possibilitam a construção de objetos de aprendizagem mediados por objetos tecnológicos. Entre as CT e a EOT prevalecem essencialmente as C. Sujeito, a linguagem dictarizada, em curso, com a viabilidade da linguagem contrafactual.

Na fronteira entre a EOT e as CM prevalecem, sobretudo a C. Sujeito, a linguagem dictarizada, com oportunidade do aparecimento da linguagem contrafactual, impulsionadas pelas ferramentas digitais escolhidas e pelos saberes matemáticos que estes podem mobilizar. Na interface entre a RIL e as CT, emergem principalmente as C. Sujeito, a linguagem dictarizada e a linguagem em curso, estimuladas pelas análises dos OA, evidenciadas nas pesquisas e na relação destes com os tópicos matemáticos a serem mobilizados pelo professor/pesquisador. Presumivelmente, também é possível observar nuances da linguagem em (dis)curso promovidas por trabalhos de alunos que deixam suas impressões nas atividades.

Vale lembrar que a dimensão da linguagem prevê um equilíbrio entre os quatro saberes que a compõem; caso contrário, pode comprometer a qualidade do ensino e a aprendizagem em sala de aula, sendo, portanto, o papel do professor fazer a mediação e buscar o equilíbrio entre estes saberes. De maneira idêntica, quando essas concepções da linguagem se juntam às da 5ª dimensão, todo o sistema deve manter um certo equilíbrio para que a pesquisa tenha solidez, e neste caso, essa equilibrção deve ser mediada pelas C. Sujeito, conforme descrito anteriormente.

A quinta dimensão tem uma forte ligação com os fenômenos transpositivos, uma vez que se constitui no cenário de um problema didático, que, por sua vez, movimentase no contexto da TAD e, conseqüentemente, da TD e da TI. Portanto, essa dimensão alinha-se às praxeologias que impulsionam diretamente a modelização dos objetos matemáticos escolhidos. Em nosso caso, por se tratar de ferramentas digitais, a TI tem uma presença marcante, pois o *milieu* investigativo estará ligado às ideias e conceitos desta teoria, visto que as transformações do saber a ser ensinado com a mediação dos objetos digitais complementam-se e integram-se à TD (Balacheff, 1994). Neste caso, o professor/pesquisador deve participar de todo o processo de transposição didática integrado à dimensão informática, de modo que as interações e as transformações do

saber matemático na representação informática sejam associadas e combinadas de maneira complexa às da transposição didática (Balacheff, 1994).

O modelo tecnológico trata especialmente de pesquisas científicas, mas, para além de uma inquirição, o estudo mediado pelas concepções do modelo da 5ª dimensão permite a modelização de objetos matemáticos por meio de ferramentas tecnológicas (digitais ou tradicionais) em diferentes circunstâncias (na formação de professores e no ensino em sala de aula, por exemplo). Seja qual for a conjuntura, as modelizações levam em conta a existência de uma dialética em jogo (S-OM-OT) de modo que:

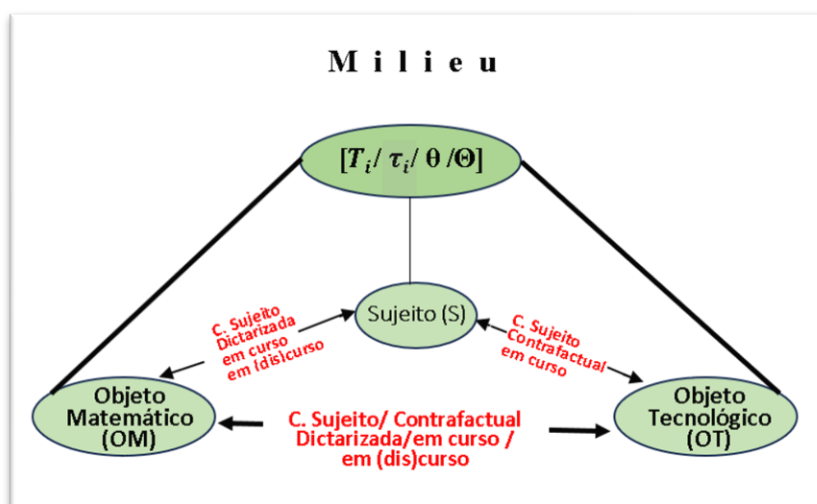
O sujeito (S) — representa um professor/pesquisador, um aluno ou grupo de pessoas envolvidas com a utilização da ferramenta tecnológica.

O objeto matemático (OM) —constituído pelo(s) tópico(s) da matemática relacionados ao problema docente e que posteriormente, fará parte do problema de investigação.

O objeto tecnológico (OT) —representa a ferramenta tecnológica que será utilizada pelo sujeito com intuito de modelizar o(s) objeto(s) matemático(s) escolhido(s) subsidiados pelos processos transpositivos (informáticos e/ou didáticos). Nessa direção, evidenciamos a dinâmica dessa dialética (Figura 5), que, em nosso caso, será mediada por um *milieu* investigativo subsidiado pela TI, de modo a possibilitar o trabalho de modelização.

Figura 5

Dialética: S-OM-OT (Elaborada pelos autores)



Nesse *milieu* de investigação, a dialética (S-OM-OT) será conduzida pelos blocos praxeológico $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ (Chevallard, 1991), integrados à dimensão informática; e ambos estarão alinhados aos quatro pilares da 5ª dimensão (CT, CM, RIL, EOT), bem como aos saberes da dimensão da linguagem e as concepções do sujeito (C. Sujeito).

Desse modo, no desenvolvimento de um modelo epistemológico de referência (MER), por exemplo, os tipos de tarefa (T_i), técnica (τ_i), tecnologia (θ) e teoria (Θ) têm um papel fundamental, pois dentre outras coisas, possibilitarão uma relação dinâmica, entre os saberes internos à 5ª dimensão, além de propiciar um diálogo com as outras dimensões de um problema didático (epistemológica, econômico-institucional e ecológica).

No contexto de modelizações, a relação entre S-OT evidencia a C. Sujeito que se integra às linguagens em curso (ou (dis)curso), com possibilidade de aparecer nessa dinâmica, a linguagem Contrafactual. Entre S-OM podem prevalecer principalmente as C. Sujeito, a linguagem dictarizada, em curso (ou (dis)curso). Por outro lado, na relação OM-OT, destacam-se a linguagem dictarizada, C. Sujeito, em curso (ou (dis)curso) com viabilidades de surgir a linguagem contrafactual. Na próxima secção, apresentaremos alguns autores que abordaram a utilização de tecnologias digitais no ensino e propuseram modelos de inquirição para a modelização de objetos matemáticos.

Pesquisas e modelos que trataram de tecnologias digitais no ensino

Vale lembrar que diversos autores já trataram da temática 'tecnologias digitais na educação' (Mishra & Koehler, 2006; Resnick, 2007; Papert, 1980; Wing, 2006, 2011; Balacheff, 1994; Lima & Silva, 2015; Santos, 2016). Mishra e Koehler (2006), por exemplo, utilizaram experimentos de design como uma metodologia de pesquisa e desenvolveram um modelo chamado de conhecimento pedagógico tecnológico de conteúdo (TPCK, no acrônimo em inglês), baseados em Shulman (1996), com o intuito de integrar a complexidade e a interação entre três principais componentes de ambientes de aprendizagem: conteúdo, pedagogia e tecnologia.

Para além das ideias de Shulman (1996), os autores, acrescentaram a tecnologia digital e integraram-na em vários níveis: teórico, pedagógico e metodológico e argumentaram que o advento da tecnologia digital mudou drasticamente as rotinas e práticas na maioria das áreas do trabalho humano; no entanto, na esfera educacional, a realidade ficou muito atrás da visão, devido a uma forte tendência de se olhar apenas para a tecnologia e não para a maneira na qual ela é usada. Desse modo, Mishra e Koehler (2006) afirmam que introduzir simplesmente as 'novas tecnologias' na educação não é suficiente; os professores precisam incorporá-las adequadamente ao ensino.

Lima e Silva (2015) abordaram 'conhecimentos didáticos' relacionados à didática da matemática (DM) e acrescentaram outros grupos de conhecimentos àqueles construídos por Mishra e Koehler (2006). Além disso, aprofundaram as discussões sobre as diferenças entre os conhecimentos didáticos e os pedagógicos, baseados em Bailleul e Batalle (2014), destacando a didática como uma ciência que leva em conta a maneira sistemática a qual os conteúdos disciplinares são tratados, diferentemente da pedagogia.

Santos (2016) cunhou o termo 'engenharia didático-informática' fundamentando-se na engenharia de software com os contributos teóricos e metodológicos da engenharia didática (ED) de Artigue (1996), destacando que as fases da ED possuem o desenvolvimento de sequências didáticas com características comuns às dos processos de softwares. Para Santos (2016), essa associação se fez necessária mediante a percepção da ausência de elementos para o desenvolvimento de produtos que contemplem necessidades tanto do ensino e da aprendizagem da matemática quanto das tecnologias (aspectos didáticos, cognitivos, epistemológicos, tecnológicos, entre outros).

Mishra e Koehler (2006), pensando nos conhecimentos articulados que o professor deve ter, criaram uma estrutura com ênfase nas conexões, interações, possibilidades e restrições entre conteúdo (C), pedagogia (P) e tecnologia (T), afirmando que a articulação entre os saberes é central para o desenvolvimento de novas práticas e é tratada de forma orgânica. Assim, enfatizam uma interação complexa entre esses três corpos de conhecimento. Por outro lado, Lima e Silva (2015) voltaram atenção para um curso de formação inicial de professores de licenciatura em matemática, e procuraram identificar os conhecimentos que poderiam ser desenvolvidos nas disciplinas de geometria, a partir da análise dos materiais didáticos, observando quais elementos poderiam dar condições para que os alunos relacionassem diferentes tipos de conhecimentos: de conteúdo (CC), didático (CD), pedagógico (CP) e tecnológico (CT), construídos ao longo do curso.

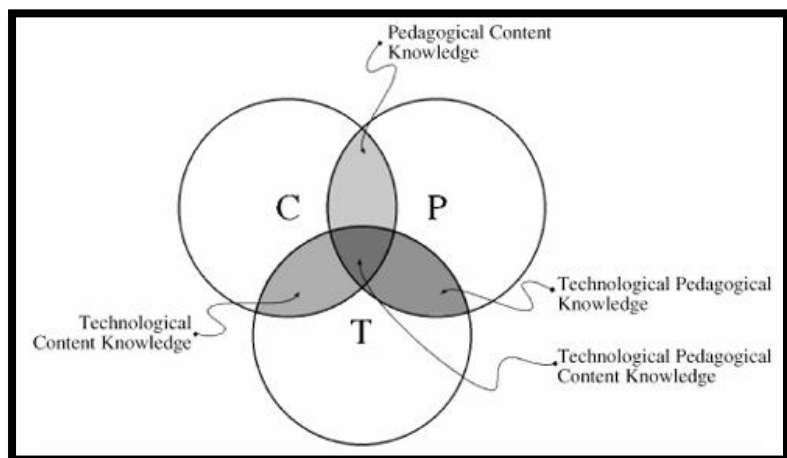
Portanto, Lima e Silva (2015) assumem a concepção de Mishra e Koehler (2006), mas, para além disso, introduzem o conhecimento didático e o reconhecem como o conhecimento dos processos de ensino e aprendizagem da matemática, abrangendo "teorias, processos e práticas que dizem respeito ao ensino e à aprendizagem de conceitos dessa ciência e [...] adaptações, que visam aplicação no processo educativo de Matemática, de noções pedagógicas gerais" (Lima & Silva, 2015, p. 163).

Santos (2016) uniu a engenharia didática e de software, por acreditar que a didática traz elementos importantes para a concepção, o desenvolvimento e a análise de softwares educativos. O objetivo central do trabalho desse autor foi analisar e validar um processo de desenvolvimento de micromundo para a aprendizagem da matemática por meio dessas duas engenharias. Sua metodologia foi composta de concepção, criação e análise de um processo de desenvolvimento de software educativo que articula potencialidades tecnológicas a teorias de ensino e aprendizagem. Para isso, contou com uma equipe de colaboradores pluridisciplinar que o auxiliou na concepção, desenvolvimento e aperfeiçoamento do processo de software para o ensino de taxa de variação de funções matemáticas.

Mishra e Koehler (2006) destacam que “o TPACK é a base do bom ensino com tecnologia e requer uma compreensão da representação de conceitos usando tecnologias; técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneiras construtivas para ensinar conteúdo” (2006, p. 11, tradução nossa). Destacam que o professor, além de olhar para cada um dos componentes isoladamente, também precisa olhá-los em pares, ou seja, para o conhecimento pedagógico de conteúdo (PCK, no acrônimo em inglês), conhecimento tecnológico de conteúdo (TCK, no acrônimo em inglês), conhecimento pedagógico tecnológico (TPK, no acrônimo em inglês) e todos os três juntos como conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo (TPCK, no acrônimo em inglês), conforme indica o modelo na Figura 6. Esse movimento é semelhante ao realizado por Shulman (1986), que considerou a relação entre conteúdo e pedagogia, que intitulou conhecimento pedagógico de conteúdo (PCK, no acrônimo em inglês).

Figura 6

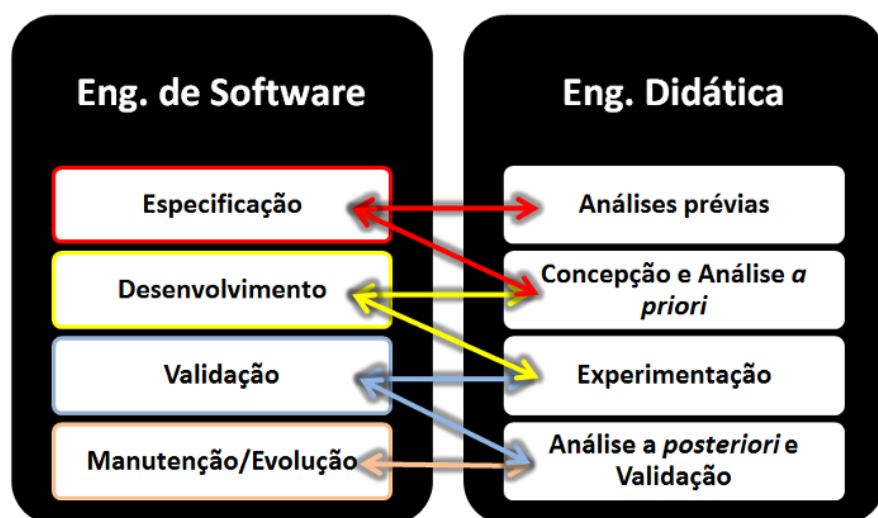
Conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo. Os três círculos, conteúdo, pedagogia e tecnologia, se sobrepõem para levar a mais quatro tipos de conhecimento inter-relacionado (Mishra & Koehler, 2006, p. 9)



com a criação de sequências de ensino, a outra com a criação de produtos que auxiliem o ensino e a aprendizagem” (Santos 2016, p. 47).

Figura 8

Comparativo entre as engenharias (Santos, 2016, p. 46)

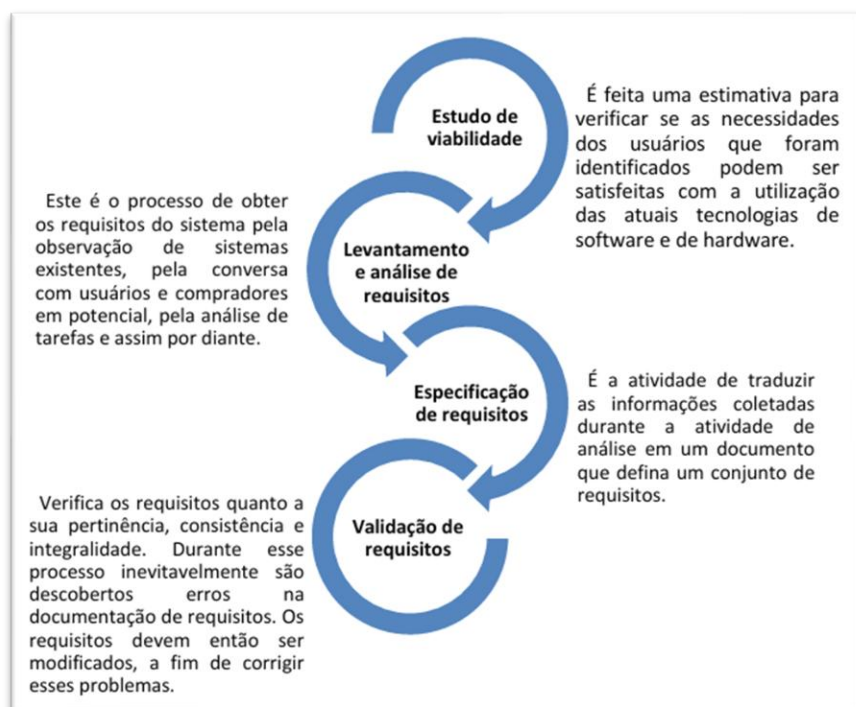


Segundo o autor, tais similaridades possibilitaram a integração de conhecimentos teóricos sobre o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos com as potencialidades tecnológicas que permitiram o desenvolvimento do software e pode contribuir para especificação e implementação dos requisitos alcançando as especificidades dos conhecimentos em questão. Para Santos (2016), a engenharia de software (ES) está vinculada à engenharia de requisitos (ER), sendo esta última uma etapa da ES que corresponde a um processo para se descobrir a finalidade, por intermédio da identificação das partes interessadas (professor e alunos) e suas necessidades, e documentá-las de uma forma passível de análise, comunicação e posterior implementação. A Figura 9 ilustra as principais características da ER.

Para o autor, o processo que constitui a ER é fundamental para a construção de softwares educacionais, uma vez que observa as exigências de desenvolvimento desse tipo de produto e funciona como análise a priori da ES, pois esta é utilizada antes da implementação do software em questão.

Figura 9

Atividades da engenharia de requisitos segundo Sommerville (2004) (Santos, 2016, p. 41)



Na próxima secção, apresentaremos as conclusões, incluindo algumas análises sobre a dimensão tecnológica, bem como possíveis aproximações e distanciamentos desta em relação aos modelos evidenciados até aqui.

Conclusão

Para a Unesco (2023), embora a tecnologia prometa um acesso mais fácil à educação, a realidade é que ainda existem abismos digitais, a ponto de as desigualdades educativas serem exorbitantes. Além disso, mesmo que a conectividade fosse universal, ainda seria necessário evidenciar, do ponto de vista pedagógico, que a tecnologia digital oferece um verdadeiro valor acrescentado em termos de aprendizagem eficaz. Uma das formas de alcançar tal aprendizagem pode estar centrada em um trabalho de natureza interativa/ativa, capaz de inserir o aluno no mundo da compreensão, possibilitando a ele o desenvolvimento de habilidades cognitivas e de raciocínio lógico e dedutivo (Brasil, 2017).

Nesse contexto, estudos apontam (Papert, 1980; Resnick, 2007; Serra, 2022; Santos, 2016; Lima & Silva, 2015; Almouloud, 2005, entre outros) que a tecnologia digital, quando relacionada ao ensino mediante uma proposta didática coerente, é capaz de potencializar o ensino e a aprendizagem do aluno, tornando-se uma

importante aliada da matemática e de outras áreas do conhecimento através da busca de estudos que evidenciam a construção dos conceitos disciplinares. Papert (2008) propõe que a tecnologia digital pode mudar a forma como as crianças aprendem matemática. Win (2011), Papert (1980) e Resnick (2007) ressaltam que o uso de tais suportes pode corroborar ativamente o desenvolvimento de habilidades cognitivas, potencializando o aprendizado de conceitos matemáticos e do pensamento computacional.

Nossa preocupação com a temática em questão visa corroborar pesquisas em didática da matemática que abordam a utilização de ferramentas tecnológicas (sobretudo as digitais) para a modelização de objetos matemáticos. Portanto, o modelo da 5ª dimensão de um problema didático busca auxiliar inquições na construção de modelos, utilizando esses aportes tecnológicos para fins de ensino e aprendizagem da matemática, haja vista que os documentos oficiais exigem respostas cada vez mais eficientes quando o assunto é a utilização dessas ferramentas na educação. Os quatro pilares da 5ª dimensão, associados à dimensão da linguagem e à C. Sujeito, buscam garantir de forma sistemática que o professor/pesquisador faça uma escolha assertiva do objeto tecnológico, bem como uma modelização mediada pelos blocos praxeológicos, sendo estes, portanto, ferramentas fundamentais e mediadoras, mostrando que o processo transpositivo (didático/informático) é o fio condutor no processo de modelização das atividades matemáticas.

É factível inferir que o modelo tecnológico apresenta algumas aproximações e distanciamentos dos modelos descritos na secção anterior. Construindo um paralelo entre o modelo da 5ª dimensão e a engenharia 'didático-informática' (Santos, 2016), podemos notar que as análises feitas pela engenharia de requisitos (ER) são semelhantes à concepção tecnológica (CT) apresentada pela 5ª dimensão. No entanto, no contexto da dimensão tecnológica, essa análise é realizada pelo professor/pesquisador que, após certificar-se das potencialidades do objeto tecnológico, testa o software, e busca adequar as utilidades do aplicativo em problemas matemáticos para fins de modelizações que serão realizadas mediante os processos transpositivos, diferentemente do que ocorre em Santos (2016), que faz uma análise a priori basicamente por meio de usuários (professor e alunos) interessados.

Por outro lado, a dimensão tecnológica, ao contrário da 'engenharia didático-informática', não intenciona a criação de softwares educativos, mas sim, de analisar aqueles que têm potencialidades para o ensino e aprendizagem da matemática (sendo

criados ou não para este fim), como é o caso do *Scratch*, por exemplo, que nasceu no contexto da informática, sendo constituído para incentivar o ensino de programação a crianças a partir de oito anos de idade, mas que traz possibilidades de aprendizagens de conceitos disciplinares.

Além da relação do trabalho de Santos (2016) com a dimensão tecnológica, quais aproximações e/ou distanciamentos também podem existir entre os modelos PCK (Shulman, 1986), TPCK (Mishra & Koehler, 2006), CDTC (Lima & Silva, 2015) e o modelo da 5ª dimensão de um problema didático?

Como visto, o TPCK e o CDTC baseiam-se nas ideias iniciais de Shulman (1986), portanto, apresentam similaridades com o PCK. O diferencial de Mishra e Koehler (2006) foi acrescentar ao modelo de Shulman (1986) as tecnologias digitais e considerar quatro novos saberes: TK, TCK, TPK e TPCK. Por outro lado, Lima e Silva (2015), baseados nas ideias desses últimos autores, introduziram a didática da matemática (DM), por entender que o conhecimento pedagógico, embora importante, é mais generalista e, por si só, não alcança os objetivos específicos de disciplinas, uma vez que trata de processos e práticas ou métodos de ensino e de aprendizagem de maneira global (conhecimentos pedagógicos gerais) e não relacionados especificamente a determinado conteúdo ou determinada área do conhecimento. Além disso, “se atribui à Pedagogia a gestão da situação de sala, ou seja, das interações entre a situação de ensino, o professor e os alunos, enquanto a Didática da Matemática trata das relações entre alunos, professor e saberes” (Lima & Silva, 2015, p. 163).

Neste sentido, levando em conta os aportes teóricos discutidos (PCK, o TPCK e o CDTC), nosso estudo tem maior proximidade com o CDTC e as ideias de Lima e Silva (2015), pois no contexto da 5ª dimensão, os aportes teóricos da DM (TAD, TD e TI) são centrais e possibilitam os processos de modelizações matemáticas, além de observar as relações pessoais e institucionais em jogo (Chevallard, 2022). Ademais, o “Conhecimento Didático Tecnológico do Conteúdo (CDTC) permite ao professor analisar, com base nas teorias da Didática da Matemática, como as diferentes tecnologias podem ser utilizadas para o ensino e para a aprendizagem de um determinado objeto matemático” (Silva & Lima, 2015, p. 172). Fazendo um paralelo entre a CDTC e a 5ª dimensão, esse processo de verificação da utilização do objeto tecnológico digital ocorre à medida que o professor/pesquisador, guiado pela C. Sujeito, inicia a inquirição com base na análise a priori proporcionada pela concepção tecnológica (CT).

Silva e Lima (2015) destacam que o conhecimento pedagógico do conteúdo (CPC) busca relacionar conhecimentos pedagógicos gerais com a área específica. No contexto da 5ª dimensão, essa relação é aprofundada e mediada pela TAD, que, com sua visão antropológica, traz para o contexto da pesquisa as relações culturais, sociais, bem como o conhecimento histórico e epistemológico sobre os objetos matemáticos, de modo a privilegiar possíveis escolhas 'didáticas' que serão importantes para as modelizações. São processos mediados pela concepção do sujeito (C. Sujeito) que busca o equilíbrio da inquirição no entorno do *milieu* do professor/pesquisador no decorrer da transposição didática e informática.

Silva e Lima (2015) enfatizam que o conhecimento tecnológico do conteúdo (CTC) é o conhecimento a respeito da maneira pela qual a tecnologia e determinado conteúdo (ou determinado campo) da matemática estão relacionados. No modelo da 5ª dimensão, o CTC se assemelha aos processos que envolvem os conhecimentos da concepção matemática (CM) com os conhecimentos do estudo do objeto tecnológico (EOT), que, mediados pelas C. Sujeito, permitem ao professor/pesquisador analisar a melhor maneira de modelizar os objetos matemáticos.

Em relação ao trabalho de Shulman (2006), podemos inferir que o conhecimento de conteúdo (CK) está para o PCK assim como a dimensão epistemológica (P_1) e a concepção matemática (CM) estão para a 5ª dimensão. No entanto, os estudos dos objetos matemáticos na dimensão tecnológica são feitos de maneira sistemática, baseados no 'paradigma de questionamento de mundo', pois em uma inquirição por meio da C. sujeito, o pesquisador deve ser problematizador, herbartiano, procognitivo, exotérico e enciclopedista comum (Chevallard, 2022).

Ademais, os conhecimentos próprios da didática da matemática vão além do conhecimento pedagógico (PK) do modelo de Shulman (1996) e sua visão generalista, pois no contexto da TAD, o estudo conforma também os processos de transposição didática mediados por um *milieu* específico de inquirição ligada à pesquisa de objetos matemáticos para fins de modelização.

Em relação ao TPCK, os autores Mishra e Koehler (2006) propõem ideias gerais sobre a utilização da tecnologia no ensino, pois a intenção dessa estrutura é fornecer modelos de possibilidades didáticas ao associar conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo por meio de metodologias de design. No entanto, os autores não especificam, por exemplo, como desenvolver modelizações de objetos matemáticos com essas tecnologias digitais, como ocorre no modelo da 5ª dimensão, que sugere a

mediação das praxeologias como ferramentas modelizadoras de conceitos matemáticos.

Dito isso, inferimos que a dimensão tecnológica traz possibilidades e novas diretrizes para esta pesquisa e, possivelmente, para outras que evidenciem, em seu contexto, a utilização de objetos tecnológicos com a finalidade de modelização de objetos matemáticos, pois, juntamente com as outras dimensões, permitirá a compreensão do problema didático e possibilitará a tomada de decisão no decorrer da inquirição.

Referências

- Almouloud, Saddo Ag. Informática e Educação Matemática. In: Revista de informática Aplicada. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo-PUC-SP, ano I, n. 1, p. 50-60, 2005.
- Balacheff, N. Didactique et intelligence artificielle. Recherches en didactique des mathematiques (Revue), La Pensée sauvage, v. 14, p. 9-42, 1994.
- Brandão, A. K. D. C; Silva, F.J.M.; Almouloud, S. Ag. A inserção da dimensão da linguagem na análise do problema didático. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 26, n. 1, p. 360-389, 2024.
- Brandão, A. K. D. C. Um Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino da Integral Dupla: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de Engenharia e de licenciatura em Matemática. 2021. 439p.Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2021.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base nacional comum curricular. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: out. 2018.
- Chevallard, Yves, Strømskag, Heidi. Condições de uma transição para o paradigma do questionamento do mundo. In Almouloud, Saddo Ag et al. (org.): Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático: fundamentos teórico-metodológicos para a formação. Editora CRV, p. 27-58, 2022. Aix-Marseille University, 13007 Marseille, France. (Corresponding author), <https://orcid.org/0000-0002-28705681> y.chevallard@free.fr.
- Chevallard, Y. Unconcept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques le 23 mars 2007. Paru in G. Gueudet & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007*, ARDM et IREM de Paris 7, Paris, pp. 344-366.
- Chevallard, Y. *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, *Recherches en didactiques des mathématiques*. Grenoble. La pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, p. 221-265, 1999.
- Chevallard, Y. *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las

Matemáticas. Universidad de Sevilla. Con la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martínez Montañes, Sevilla. Disponível em: http://www.ing.unp.edu.ar/asignaturas/algebra/chavallard_tad.pdf .

Chevallard, Y. *L'Humble séminaire 2022-2023. Questions à la TAD*. Un bloc-notes (6). Mai. 2023. pp. 1-47.

Gascón, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, v. 4, n. 2, p. 129-159. 2001. Gómez-Mendoza, M. A. La transposición didáctica: história de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia)*, v. 1, n. 1, jul/Dez. p. 83-115. 2005.

Mishra, P. Koehler, M. J., &. Technological Pedagogical Content Knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record* Volume 108, Number 6, pp. 1017–1054, June 2006, Copyright r by Teachers College, Columbia University. 2006.

Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional: lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. – 7. ed. – Brasília: Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2012.

Papert, Seymour: Construcionismo vs. Instrucionismo. Discurso para um público de educadores no Japão (1980). In: http://www.papert.org/articles/const_inst/const_inst1.html..

Papert, S. M. Logo: Computadores e Educação. São Paulo, Ed. Brasiliense, 1985. Tradução e prefácio de José A. Valente, da Unicamp, SP.

Resnick, Mitchel. Sowing the Seeds for a More Creative Society. *Learning and Leading with Technology*. Canada, p.18-22, dec./jan., 2007/2008. Acesso em: <http://web.media.mit.edu/~mres/papers/Learning-Leading-final.pdf> .

Santos, R.T. Processo De desenvolvimento de software educativo: um estudo da Prototipação de um software para o ensino de função. Dissertação (Mestrado). 2016. 110 f. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco Centro de Educação. 2016.

Serra, N.J. Modelização de Organizações Praxeológicas de Sistema de Numeração Decimal: Ensino de Soma e Subtração Aritmética Utilizando a Linguagem de Programação Scratch. Universidade Federal do Pará - (UFPA). Dissertação de Mestrado Acadêmico pelo Instituto de Ensino em Educação Matemático e Científica – IENCI (UFPA). 2022.

Shulman, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14, 1986.

Shulman, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22, 1987.

Silva, M. J. F.; Lima, G. L. Conhecimentos Docentes para o Ensino de Geometria em um Curso de Licenciatura em Matemática. *VIDYA*, v. 35, n. 2, p. 159-177. Santa Maria. jul./dez., 2015.

Unesco. 2023. Global Education Monitoring Report 2023: Technology in education – A tool on whose terms? Paris, UNESCO.