EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i3p309-354

Notas para um estudo da transposição didática da prova matemática[1]

Notes for a study of the didactic transposition of mathematical proof

Notas para un estudio de la transposición didáctica de la demostración matemática

Notes pour une étude de la transposition didactique de la preuve mathématique

Nicolas Balacheff[2]
Directeur de recherche CNRS émérite, Equipe MeTAH, Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain Laboratoire d'informatique de Grenoble Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP
https://orcid.org/0000-0001-7084-3482

Tradução

Saddo Ag Almouloud[3]
Universidade Federal do Pará
Doutorado em Matemática e aplicações
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Marluce Alves dos Santos[4]
Universidade do Estado da Bahia
Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências (UFBA/UEFS-BA)
https://orcid.org/0000-0002-5935-5901

Solange Fernandes Maia Pereira[5]
Universidade do Estado da Bahia
Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática (ULBRA-RS)
https://orcid.org/0000-0002-5634-8220

Resumo

Este artigo estuda o longo caminho entre a ausência da demonstração como tal no passado e sua presença contemporânea como um conteúdo a ser ensinado em todas as séries. No entanto, a demonstração teve que passar por um processo de transposição didática para satisfazer uma série de restrições diferentes, de natureza epistêmica, didática, lógica ou matemática. O autor, portanto, segura no seu estudo uma ordem cronológica para delinear as

---

[1] HAL Id: hal-04018464 - https://hal.science/hal-04018464 - Submitted on 29 May 2023
Aparecerá no volume anual de 2023 do Philosophy of Mathematics Education Journal: https://education.exeter.ac.uk/research/centres/stem/publications/pmej/
[2] Nicolas.Balacheff@imag.fr
[3] saddoag@gmail.com
[4] maralves@uneb.br
[5] sfpereira@uneb.br

principais características desse processo, com o objetivo de compreender melhor o problema didático que nossa pesquisa atual enfrenta. Balacheff mostra que a prova é tanto um fundamento quanto um organizador do conhecimento. No curso da aprendizagem, ela contribui para reforçar a evolução do conhecimento e fornece ferramentas para sua organização. No ensino, ela legitima novos conhecimentos e constitui um sistema: conhecimento e prova, interligados, fornecem à base de conhecimento de uma estrutura que pode funcionar como precursora da base teórica necessária à matemática. A função de institucionalização das situações de prova coloca a validação explícita sob a arbitragem do professor, que é, em última análise, o garantidor de seu caráter matemático. Essa dimensão social, no sentido de que o funcionamento científico depende de uma organização construída e aceita, está no cerne da dificuldade de ensinar prova em matemática.

Palavras-chave: Prova, Demonstração, Transposição didática, Ensino, Aprendizagem.

Abstract

This article studies the long road between the absence of demonstration as such in the past and its contemporary presence as content to be taught in all grades. However, demonstration had to undergo a process of didactic transposition to satisfy a series of different restrictions, whether epistemic, didactic, logical, or mathematical in nature. The author therefore follows a chronological order in his study to outline the main characteristics of this process, with the aim of better understanding the didactic problem that our current research faces. Balacheff shows that proof is both a foundation and an organizer of knowledge. While learning, it contributes to reinforcing the evolution of knowledge and provides tools for its organization. In teaching, it legitimizes new knowledge and constitutes a system: knowledge and proof, interconnected, provide the knowledge base for a structure that can function as a precursor to the theoretical basis necessary for mathematics. The institutionalizing function of proof situations places explicit validation under the arbitration of the teacher, who is ultimately the guarantor of its mathematical character. This social dimension, in the sense that scientific functioning depends on a constructed and accepted organization, is at the heart of the difficulty of teaching proof in mathematics.

Keywords: Proof, Demonstration, Didactic transposition, Teaching, Learning.

Resumen

Este artículo estudia el largo camino recorrido desde la ausencia de la demostración como tal en el pasado hasta su presencia contemporánea como contenido que debe enseñarse en todos los cursos. Sin embargo, la demostración ha tenido que pasar por un proceso de transposición didáctica para satisfacer una serie de restricciones diferentes, de naturaleza epistémica, didáctica, lógica o matemática. Por lo tanto, el autor mantiene en su estudio un orden cronológico para delinear las principales características de este proceso, con el objetivo de comprender mejor el problema didáctico al que se enfrenta nuestra investigación actual. Balacheff muestra que la prueba es tanto un fundamento como un organizador del conocimiento. En el curso del aprendizaje, contribuye a reforzar la evolución del conocimiento y proporciona herramientas para su organización. En la enseñanza, legitima nuevos conocimientos y constituye un sistema: el conocimiento y la prueba, interrelacionados, proporcionan la base de conocimiento de una estructura que puede funcionar como precursora de la base teórica necesaria para las matemáticas. La función de institucionalización de las situaciones de prueba somete la validación explícita al arbitrio del profesor, que es, en última instancia, el garante de su carácter matemático. Esta dimensión social, en el sentido de que el funcionamiento científico depende de una organización construida y aceptada, está en el centro de la dificultad de enseñar la prueba en matemáticas.

Palabras clave: Prueba, Demostración, Transposición didáctica, Enseñanza, Aprendizaje.

Résumé

Cet article étudie le long chemin parcouru entre l'absence de la démonstration en tant que telle dans le passé et sa présence contemporaine en tant que contenu à enseigner dans toutes les classes. Cependant, la démonstration a dû passer par un processus de transposition didactique afin de satisfaire à une série de contraintes différentes, de nature épistémique, didactique, logique ou mathématique. L'auteur suit donc dans son étude un ordre chronologique pour dégager les principales caractéristiques de ce processus, dans le but de mieux comprendre le problème didactique auquel notre recherche actuelle est confrontée. Balacheff montre que la preuve est à la fois un fondement et un organisateur du savoir. Au cours de l'apprentissage, elle contribue à renforcer l'évolution des connaissances et fournit des outils pour leur organisation. Dans l'enseignement, elle légitime de nouvelles connaissances et constitue un système : connaissances et preuve, interconnectées, fournissent la base d'une structure qui peut servir de précurseur à la base théorique nécessaire aux mathématiques. La fonction d'institutionnalisation des situations de preuve place la validation explicite sous l'arbitrage de l'enseignant, qui est, en dernière analyse, le garant de leur caractère mathématique. Cette dimension sociale, dans le sens où le fonctionnement scientifique dépend d'une organisation construite et acceptée, est au cœur de la difficulté d'enseigner la preuve en mathématiques.

Mots-clés : Preuve, Démonstration, Transposition didactique, Enseignement, Apprentissage.

Notas para um estudo da transposição didática da demonstração matemática

Hoje em dia, é comum considerar que a demonstração deve fazer parte da aprendizagem da matemática, do jardim de infância à universidade. Como é fácil observar, ao analisar a história dos currículos matemáticos, isso nem sempre foi verdade, seja porque, seguindo uma antiga tradição pedagógica de aprendizagem mecânica, a demonstração foi reduzida ao formalismo de um texto e privada de seu significado, ou porque, apesar de sua presença reconhecida em qualquer área da matemática, a demonstração não recebeu o status de algo a ser aprendido pelo que é. No longo caminho entre sua ausência como tal no passado e sua presença contemporânea como um conteúdo a ser ensinado em todas as séries, a demonstração teve que passar por um processo de transposição didática para satisfazer uma série de restrições diferentes, de natureza epistêmica, didática, lógica ou matemática. Seguirei uma ordem cronológica para delinear as principais características desse processo, com o objetivo de compreender melhor o problema didático que nossa pesquisa atual enfrenta.

Uma nota sobre a transposição didática

O conceito

Assim como qualquer outro conteúdo, o ensino e a aprendizagem da matemática exigem, na medida do possível, sua especificação completa e precisa como um conhecimento a ser ensinado, seja de natureza conceitual, metodológica ou técnica (por exemplo, números inteiros, multiplicação de dois binômios – FOIL, fatoração, integração de uma função). Ele deve primeiro ser identificado, depois proferido e, finalmente, escolhido. Essa é a responsabilidade social de diversas organizações, incluindo aqueles que o utilizam, bem como os tomadores de decisão. Um processo complexo se encarrega de sua formalização como um conteúdo a ser ensinado, cujos resultados são currículos, livros didáticos e outros textos publicados e disseminados pelas organizações responsáveis. É reconhecido desde a origem da educação moderna que o conhecimento em uso e o conhecimento a ser ensinado compartilham semelhanças, mas apresentam diferenças significativas. Esses fenômenos são conceituados e modelados pelo conceito de transposição didática cunhado por Yves Chevallard (1985). Refere-se “às transformações pelas quais um objeto ou conjunto de conhecimentos passa desde o momento em que é produzido, colocado em uso, selecionado e projetado para ser ensinado, até que seja efetivamente ensinado em uma determinada instituição educacional” (Chevallard & Bosch, 2014, p. 170).

Inúmeras organizações contribuem para a decisão de transformar um conhecimento em um conteúdo a ser ensinado e participam da construção de sua transposição: matemáticos profissionais, diversos usuários, de engenheiros a comerciantes, associações de professores, órgãos nos diferentes níveis da instituição educacional e tomadores de decisões educacionais. As forças que interagem são de natureza profissional, política e social. Yves Chevallard aborda os fenômenos relacionados por meio do "estudo das condições que possibilitam e das restrições que impedem a produção, o desenvolvimento e a difusão do conhecimento e, de forma mais geral, de qualquer tipo de atividade humana em instituições sociais" (ibid., p. 173). A transposição didática é um empreendimento humano e social cujo estudo agora faz parte da Teoria Antropológica da Didática (Chevallard, 1998; Chevallard et al., 2015). Nesta estrutura teórica, levar em consideração "fenômenos transpositivos significa sair da sala de aula e receber noções e elementos para descrever os conjuntos de conhecimento e práticas envolvidos nas diferentes instituições em diferentes momentos do tempo" (Chevallard & Bosch, 2014, p. 172).

Sobre o método

O processo de transposição didática é multiestágio, envolvendo diversas formas de um conhecimento, cujas relações são moldadas pelas interações entre seus diferentes colaboradores. Quatro formas desempenham um papel fundamental: o conhecimento acadêmico, o conhecimento a ser ensinado, o conhecimento ensinado e o conhecimento aprendido (Chevallard & Bosch, 2014, p. 170). Como o objetivo destas notas é delinear

a dinâmica da transposição didática da demonstração matemática a partir de uma perspectiva histórica, alinharei minha busca às duas primeiras formas, o conhecimento acadêmico e o conhecimento a ser ensinado. Isso estabelecerá um limite para esta exploração, visto que a distância entre o conhecimento a ser ensinado e o conhecimento ensinado pode ser importante, como sabemos que é o caso entre o conhecimento ensinado e o conhecimento aprendido. Além disso, existem poucos dados históricos sobre o que acontece em sala de aula, seja da perspectiva do ensino ou da aprendizagem. Mas esse limite não é muito severo, dado o meu propósito. Espero que a abordagem escolhida para estas notas informe com suficiente precisão sobre a natureza e a complexidade dos fenômenos subjacentes ao processo de transposição.

Estas notas baseiam-se em pesquisas publicadas sobre a história da educação matemática, especialmente a história do ensino de geometria, leituras de tratados e livros didáticos originais, comentários institucionais e currículos. O estudo desses recursos se depara com a fragilidade do conhecimento que, paradoxalmente, apesar de uma “forma constante”, não mantém um significado constante (Kang & Kilpatrick, 1992, p.3). Essa observação clássica para a linguística e as ciências da comunicação tem consequências profundas para a análise epistemológica dos processos dedicados à comunicação e disseminação do conhecimento, uma vez que pressupõem alunos, professores e salas de aula hipotéticos, cuja percepção e modelos são raramente documentados (ibid. p. 5).

Portanto, os leitores devem ter em mente que a análise e os comentários compartilhados nestas notas têm uma postura conjectural, embora, paradoxalmente, pretendam uma contribuição suficientemente robusta para a pesquisa sobre a prova como conteúdo a ser ensinado. Essa robustez advém da qualidade dos dados e dos recursos e de sua significância em relação aos fenômenos identificados.

Advertência: utilizo as aspas francesas « … » ao inserir uma citação traduzida por mim do francês, e aspas clássicas “…” quando a citação é originalmente em inglês.

Geometria, o fundamento teórico da demonstração

Os elementos de Euclides

A demonstração matemática surgiu muito tardiamente como um conteúdo explícito a ser ensinado, considerando sua formalização inicial pelos gregos, no século III a.C. Hoje, ela surge com uma visão de escrita matemática com absoluto rigor, raciocínio dedutivo baseado em fundamentos, definições e postulados explícitos. De fato, trata-se de uma idealização do que sustenta os elementos euclidianos da geometria, que moldaram a construção do conceito de demonstração e estimularam o desenvolvimento da matemática como disciplina. Essa referência perene contribuiu para a constituição de padrões de comunicação entre matemáticos. Mesmo que tenha sido contestada e transformada ao longo da história da matemática, constitui um marco de sua epistemologia.

Os Elementos de Euclides são considerados um dos tesouros do legado grego antigo, embora tenham sido deixados de lado por muito tempo, até o século XII. Provavelmente, alguma geometria era ensinada por seus insumos práticos, mas não há muitas evidências sobre esse período em que a educação não era organizada de forma sistemática; o quadrivium não tinha professores nem alunos, e outros domínios além da matemática tinham prioridade (gramática, retórica) (Høyrup, 2014, sec. 2 e 3). O primeiro marco importante da perspectiva da educação matemática, seguindo Jens Høyrup, é, em algum momento da primeira metade do século XII, a tradução dos Elementos de Euclides do árabe, "presumivelmente" por Adelardo de Bath (fl. 1116-1142).

Ainda é muito comum afirmar que a jornada de Euclides a.C. a Euclides d.C. no Ocidente apenas representou um desvio através de países árabes. Ao contrário, a tradução árabe dos Elementos, no século VIII, foi objeto de discussão entre matemáticos da época sobre o texto e a utilidade de seu estudo. Em particular, Sonja Brentjes (2014) menciona Al-Sizjī discordando "veementemente" daqueles que minimizavam o estudo de Euclides e insistindo na "necessidade de estudar e trabalhar duro para se tornar um bom geômetra" (ibid., p. 92). Al-Sizjī apresenta razões para o estudo dos Elementos, entre os quais:

> [seguir] os métodos deles (estes teoremas e preliminares) de forma profunda e bem-sucedida, de modo que você não se baseie apenas nos teoremas, preliminares, construções e arranjos que mencionamos. Mas você deve combinar com isso (sua própria) inteligência, conjecturas e truques. O fator crucial nesta arte é a aplicação de truques, e não apenas (sua própria) inteligência, mas também o pensamento dos experientes (matemáticos), dos habilidosos, daqueles que usam truques” (Brentjes, 2014, p. 92).

Naquela época, a posição islâmica do século X era que “o iniciante deve aprender os primeiros teoremas dos Elementos de Euclides” (ibid.).[6] Versões posteriores dos Elementos de Euclides, derivadas da primeira tradução de Adelardo, possivelmente devido aos seus alunos (Høyrup, 2014, p. 114), eram marcadas por “preocupações didáticas”: “neste ponto, fica claro que o assunto apresentado na obra havia se tornado o objetivo principal, enquanto o que era mais útil para a astronomia (e, ainda mais, para a astrologia) havia recuado para segundo plano” (ibid.).

Em certa medida, por não ser obrigatório, os Elementos têm sido ensinados desde então, mas era um desafio, dado o escasso material educacional e o estilo das aulas. Este era o período pré-Gutenberg (ibid. 119). A impressão dos Elementos em 1482, em Veneza, mudou radicalmente o acesso ao texto. Controvérsias sobre os Elementos e suas traduções desenvolveram-se até o texto latino de Commandin (1572), que parece ter alcançado algum tipo de consenso (Loget, 2004).

O interesse pela Geometria[7] cresceu durante o século XVI, juntamente com as leituras críticas dos Elementos de Euclides por sua lógica, princípios e ordem de proposições (E.

[6] Embora difícil devido aos problemas metodológicos de trabalhar com um grande corpus histórico e evitar viés cultural na análise (Brentjes, 2019), o estudo da educação matemática islâmica neste período é definitivamente necessário.

[7] Escreverei Geometria com letra maiúscula para me referir à geometria pura, um corpo de conhecimento teórico, em oposição à geometria prática, um corpo de conhecimento destinado a ser usado para resolver problemas técnicos, profissionais ou cotidianos. Esta última não é bem definida, mas pode-se entender que esse tipo de conhecimento reivindica alguma utilidade direta. A fronteira entre teórica e prática não está na forma do texto, por exemplo. A geometria descritiva tem uma razão de ser utilitária e se baseia em uma construção teórica.

Barbin & Menghini, 2014, p. 474). A perspectiva era teórica, questionando o texto, daí o padrão euclidiano de demonstração.

As críticas a Euclides

Abramos esta seção com uma citação do prefácio dos Elementos de Euclides, de R. P. Dechalles de la Compagnie de Jésus (1660), traduzido pela primeira vez para o francês por Ozanam, membro da Real Academia de Ciências, em 1677:

> Tendo notado há muito tempo que a maioria dos que aprenderam os elementos de Euclides, muitas vezes se sentem enojadas com eles, por não saberem qual é a utilidade de proposições tão aparentemente insignificantes, mas tão úteis; pensei que seria muito apropriado, não apenas torná-las o mais fáceis possível; mas também adicionar alguns pequenos usos, após cada proposição, que demonstrassem sua utilidade. Foi isso que me obrigou a modificar algumas demonstrações, que julguei muito incômodas e fora do alcance comum de iniciantes, e substituí-las por algumas mais inteligíveis. (Dechalles, 1660, seção Prefácio - tradução minha)

Este prefácio aos Elementos expõe as principais questões que seriam disputadas nos séculos seguintes: o conflito entre as visões teórica e prática da geometria[8] e a necessidade e complexidade das demonstrações, com Euclides se destacando como a referência fundamental para o aprendizado da matemática.

O caráter teórico da Geometria, que prioriza a organização lógica do texto, foi denunciado por Descartes. Em seu ensaio sobre as Regras para a direção do espírito (c. 1628)[9], ele critica os matemáticos antigos (na verdade, os Elementos) pela prioridade dada ao convencimento em detrimento da compreensão e, portanto, sua incapacidade de permitir que a razão e o significado das demonstrações, portanto, dos teoremas, sejam apreendidos; isto é, a compreensão da própria Geometria. Essa crítica aponta para uma tensão entre convencer e explicar que sabemos agora ser inerente ao discurso argumentativo. Descartes conceituou essa tensão distinguindo análise e síntese: a primeira "é o melhor e mais verdadeiro método de ensino", enquanto a segunda "é muito adequada para ser aplicada à geometria"[10]. De fato, ele

---

Ambas foram ensinadas, e ainda são ensinadas, mas com objetivos educacionais radicalmente diferentes e com abordagens pedagógicas diferentes. A geometria foi o terreno natural dos debates sobre o ensino de provas matemáticas. Essa distinção pode ser discutível à luz de casos específicos, e eu agradeço aos primeiros leitores desta nota por seus comentários, mas ela é útil para orientar a análise.

[8] Essa tensão ainda não foi resolvida. As duas questões conflitantes "como atender à elite" versus "como atender ao grupo mais amplo de estudantes para os quais a matemática deve ser fundamentada na resolução de problemas do mundo real e em aplicações da vida cotidiana", conforme expressas por Gert Schubring (2015) em uma análise crítica do movimento "Matemática para Todos", ainda não receberam respostas adequadas.

[9] Leia no original: Regras para a Direção da Mente (ca. 1628/1953, pp. 37-118)

[10] Leitura original: Meditações, Objeções e Respostas (1641/1953, p. 387 sqq.). Traduções para o inglês das citações de (Cunning, 2015)

coloca o problema do ensino da geometria de uma forma que ainda é relevante: como administrar o equilíbrio entre convencer e explicar. Essas críticas aos Elementos de Euclides tiveram uma tradução na obra Géométrie de Arnaud (1667), que propôs uma nova organização seguindo os princípios da análise. Sylvestre-François Lacroix, mais de um século depois, escreveu sobre a Geometria de Arnaud: “Esta obra é, creio eu, a primeira em que a ordem das propostas da Geometria concorda com a das abstrações, considerando primeiro as propriedades das linhas, depois a das superfícies e, por fim, a dos corpos.” (Lacroix, 1799, p. xix).

Na primeira metade do século XVIII, Étienne Bonnot de Condillac, em Ensaio sobre as origens do conhecimento humano (1746), reconhece o modelo de rigor da Geometria, mas critica sua falta de, digamos, simplicidade. Seu postulado fundamental afirma a superioridade da metafísica para a formação de "uma mente luminosa, precisa e extensa, e que, consequentemente, deve preparar para o estudo de todas as outras ciências" (ibid., p. 13). Embora tome a geometria como modelo para a construção de seu ensaio, ele a crítica por não encontrar "uma ordem suficientemente simples e fácil para chegar ao óbvio" (ibid.). Seu ensaio inclui considerações sobre a comunicação do conhecimento, que tiveram uma influência duradoura: "Finalmente, após ter desenvolvido o progresso das operações da alma e da linguagem, procuro indicar os meios pelos quais se pode evitar o erro e mostrar a ordem que se deve seguir, seja para fazer descobertas, seja para instruir outros sobre as descobertas que se fez." (ibid. p. 16).

No mesmo período, o matemático Alexis Claude Clairaut publicou seus Elementos de Geometria (Elements de Géométrie) (1741) com um prefácio que assume uma posição didática clara, enraizada em uma observação pedagógica:

“[...] é comum que iniciantes se cansem e desanimem antes de terem uma ideia clara do que queríamos lhes ensinar.” (ibid. p. ij). Clairaut buscou uma abordagem « [...] reunindo as duas vantagens de interessar e esclarecer os iniciantes». (ibid. p. iij). Ao examinar a história da Geometria, ele escolheu os problemas de "medição de terrenos" (fr.: arpentage) para dar significado e evitar provas do óbvio, pois os interessados em geometria "gostavam de exercitar um pouco a mente"; e, ao contrário, ficavam desanimados quando eram sobrecarregados com demonstrações que eram quase inúteis"[11] (ibid. p. x). No entanto, ele também não é um livro didático. Os Elementos de Clairaut devem ser lidos como um manifesto que traz uma contribuição às discussões em andamento sobre os Elementos de

[11] Os interessados em geometria "gostavam de exercitar um pouco a mente; e, pelo contrário, desanimavam quando eram sobrecarregados com demonstrações, por assim dizer, inúteis".

Euclides (Glaeser, 1983). No final do século XVIII, os Elementos de Euclides são a referência que as críticas alimentam na busca por um texto de Geometria, tanto para seu estabelecimento teórico quanto para sua comunicação. Esta busca concentrou-se na organização do texto e na necessidade de prova para algumas proposições, mantendo-se o padrão euclidiano estável.

O século XIX, uma disputa epistemológica

A organização francesa do ensino superior no final do século XVIII ampliou a distância entre a abordagem teórica e a utilitária da geometria. Desenvolveram-se dois cursos de estudo distintos, correspondendo a dois sistemas distintos. Por um lado, um ensino de geometria voltado para aplicações, essencialmente em escolas de engenharia e militares; por outro, um ensino de geometria centrado na geometria em si, ensinado nas escolas normais[12] e faculdades. Nesse contexto, as críticas a Euclides levaram não apenas à escrita de novos Elementos, mas também à escrita de tratados com o objetivo de satisfazer necessidades práticas. Um exemplo significativo é a contribuição do matemático Gaspard Monge[13] para o projeto de uma Instrução Pública:

> Há uma ordem de conhecimento de necessidade indispensável para pedreiros, pedreiros, carpinteiros, marceneiros, marceneiros, serralheiros, empreiteiros de todos os tipos, pintores, engenheiros de pontes e estradas, oficiais de engenharia [...]. A ordem de conhecimento em questão aqui se baseia em uma geometria particular das três dimensões, que não existe em um tratado bem elaborado; em uma geometria puramente descritiva, mas rigorosa, e cujo propósito é representar, por meio de desenhos que têm apenas duas dimensões, os objetos que têm três. (Monge 1793 citado por Eveline Barbin (2021, p. 104)).

Essa "geometria particular" é a Geometria Descritiva, que não é uma geometria nova, mas um instrumento geométrico confiável, robusto e eficiente, projetado com a Geometria para manipular representações gráficas de objetos geométricos, modelando objetos do mundo físico. O rigor é evocado e exigido, mas a demonstração não é a preocupação central. Essa orientação é muito forte e pode ser vista como uma semente do que hoje é conhecido como Matemática Aplicada. Desenvolveu-se na França com o sistema de Grandes Écoles para o ensino superior. Tinha vínculos mais fracos com o ensino geral e o sistema de ensino secundário do que as Universidades, que eram mais orientadas teoricamente. Continuarei esta

[12] "Escola normal" é o equivalente à "Faculdade de educação" ou "Escola de formação de professores" dos sistemas educacionais contemporâneos.

[13] Gaspard Monge é o renomado criador da Geometria Descritiva. Este curso, ministrado na École Normale e na École Polytechni que, foi publicado em 1799, com base em notas sobre suas aulas de 1795 (seu assistente, Sylvestre-François Lacroix, havia publicado "Ensaios sobre Geometria em Planos e Superfícies Curvas – ou "Elementos de Geometria Descritiva") em 1795.

exploração com foco neste último, onde a demonstração matemática como objeto de ensino surgiu no final do século XIX. O século XIX viu o desenvolvimento de sistemas educacionais em escala nacional para o ensino primário e secundário, embora o acesso da população a este último fosse bastante limitado. Primeiro, o ensino secundário era caro; segundo, era essencialmente voltado para o ensino universitário; terceiro, era reservado para meninos. Dois livros didáticos desempenharam um papel distinto devido ao seu impacto na França e no exterior: os Elementos de Geometria (1794), de Adrien Marie Legendre, e os Elementos de Geometria para Uso da Escola Central das Quatro Nações (1799), escritos por Sylvestre-François Lacroix (E. Barbin & Menghini, 2014, seções 4.1 e 4.2). Eles influenciaram a formação de professores e o ensino de geometria nas escolas secundárias, com múltiplas edições ao longo do século. A escrita de cada um desses dois livros foi motivada por objetivos diferentes.

Adrien Marie Legendre reconheceu ter escrito seus Elementos seguindo o "método" de Euclides e Arquimedes. Ele escreveu em seu prefácio: "ao tentar igualar ou mesmo superar meus modelos de precisão, eu também queria poupar o leitor do máximo de trabalho possível, e me esforcei para dar às demonstrações toda a clareza e brevidade que o assunto exige" (Legendre, 1794, p. vj-viij). Ele não hesitou em usar a Álgebra quando relevante porque "seria infantil usar sempre um método trabalhoso quando ele pode ser substituído por um muito mais simples e seguro".[14] (ibid.). Os Elementos de Legendre são de natureza teórica.

Isso é ilustrado por sua recusa em usar o quinto dos postulados de Euclides, buscando, portanto, sempre uma nova demonstração do teorema da soma dos ângulos de um triângulo. Sylvestre-François Lacroix herda de Condillac e de seu aprendizado como assistente de Gaspard Monge. O longo prefácio de seu livro — um "discurso preliminar" — defende a prioridade da análise sobre a síntese, da compreensão sobre o convencimento e argumenta o valor educacional da Geometria "[que] é talvez, de todas as partes da matemática, a que se deve aprender primeiro; parece-me muito provável que interesse às crianças, desde que seja apresentado a elas principalmente em relação às suas aplicações, seja no papel ou no campo. »

[14] "[…] meu objetivo era produzir elementos muito rigorosos. Segui de perto o método dos elementos de Euclides e o do livro de Arquimedes, Sphaera e Cylindro: mas, ao tentar igualar ou mesmo superar meus modelos de precisão, também quis poupar o leitor o máximo de trabalho possível e me esforcei para dar às demonstrações toda a clareza e brevidade que o assunto exige. Presumo que o leitor esteja familiarizado com a teoria das proporções, que pode ser encontrada explicada em tratados comuns de aritmética ou álgebra; presumo até que ele conheça as primeiras regras da álgebra […] para nós, que temos esse instrumento mais do que eles, estaríamos errados em não o usar se isso pudesse resultar em maior eficiência. […] e seria infantil usar sempre um método trabalhoso quando se pode substituí-lo por um muito mais simples e igualmente confiável." (Legendre, 1794, p. vj-viij)

(1799/1804 p.xxix)[15] No entanto, embora sua estrutura seja diferente, o corpo do livro é escrito de acordo com o estilo euclidiano tradicional.

Ambos os livros fixam os termos geométricos no início do texto, seguindo a tradição euclidiana. Em seguida, adicionam vocabulário de segunda ordem, definindo os termos axioma, teorema, corolário e problema. Em relação à tradição grega, isso é uma inovação[16].

Os Elementos de Legendre (1794) incluem, nos termos de segunda ordem, uma definição de teorema e demonstração na mesma frase: "Teorema é uma verdade que se torna evidente por meio de um raciocínio chamado demonstração." (ibid. p. 4). O texto é organizado como uma sequência de livros, eles próprios compostos por uma sequência de Proposições numeradas. Para cada Proposição, um subtítulo indica seu tipo, Teorema ou Problema, seguido pelo texto em itálico do teorema ou do problema, imediatamente seguido pelo texto de sua prova ou solução em caráter inovador. Uma parte importante dos Elementos de Legendre são as notas sobre algumas das demonstrações.

Os Elementos de Lacroix (1798) definem os termos matemáticos e os termos de segunda ordem. Não define a palavra demonstração, mas indica que um teorema é uma afirmação que deve ser demonstrada. A estrutura de um teorema é explicitada, indicando que ele tem duas partes, uma hipótese e uma conclusão, e alertando o leitor de que seu papel não pode em geral ser trocado (ibid. p. lxxxviij). Então, a apresentação do texto se desvia do modelo euclidiano. Ele é organizado em duas partes, elas próprias divididas em seções com subseções intituladas seguindo seu tema. Em uma seção, vem uma sequência de subseções numeradas cujas subdivisões são rotuladas, primeiro indicando a natureza da subseção (teorema, problema) e depois a natureza do discurso relacionado (resp. demonstração, solução). Embora os termos demonstração ou solução não sejam definidos, eles são claramente distinguidos, chamando, portanto, explicitamente a atenção do leitor para suas diferentes funções. Outras subseções são corolário e observações (ou escólios); a primeira tem a estrutura de uma observação sem subdivisões específicas, embora contenha duas partes diferentes: a declaração do corolário e sua justificação.

Adrien Marie Legendre escreveu seus Elementos durante o Terror da Revolução Francesa. Ele não lecionava na época e aproveitou essa trágica pausa para revisitar os

---

[15] "A geometria é talvez, de todas as partes da matemática, a que se deve aprender primeiro; parece-me muito provável que interesse às crianças, desde que lhes seja apresentada principalmente em relação às suas aplicações, seja no papel ou no campo." (1799/1804 p.xxix)

[16] Seguindo Reviel Netz (1999, p. 98), os matemáticos gregos não definiram termos de segunda ordem, sendo que a metalinguagem extraiu seus termos da linguagem natural. Esta inovação não é uma criação

Elementos de Euclides. É o trabalho de um matemático, com uma agenda matemática[17]. No entanto, sua escrita foi motivada por uma preocupação com a simplicidade (Barbin, 2007), tendo em mente um público instruído[18]. Um aspecto importante do livro são as Notas que discutem e analisam certas demonstrações[19] ou dificuldades conceituais[20]. Como livro didático, é notável que os Elementos se concentrem tanto na Geometria quanto nas demonstrações, que em si mesmas precisam ser compreendidas e aprendidas.

O estilo e a organização do texto dos Elementos de Lacroix compartilham as mesmas características que colocam a questão da demonstração em primeiro plano. O conteúdo é organizado em relação à necessidade de demonstrações rigorosas sem complexidade desnecessária. Estes Elementos de Lacroix são um livro didático escrito por um matemático para um nível avançado de educação na época. Apreciado no ensino de Geometria, inclui um prefácio extraordinariamente longo dedicado ao método em matemática, enfatizando e discutindo a lógica e o rigor do discurso matemático. Ele torna a Geometria, tanto quanto a prova, o objeto de aprendizagem, como testemunha este trecho do Discurso Preliminar:

> Eu acrescentaria que não se deve deixar de apresentar, nas demonstrações geométricas, um exemplo das várias formas de raciocínio, para mostrar como as regras de Descartes e Pascal são observadas, e como a certeza da Geometria resulta da determinação precisa dos objetos que ela considera, e, portanto, cada um que só pode ser concebido sob um número muito limitado de faces, presta-se a enumerações completas, que não deixam dúvidas quanto ao resultado do raciocínio. Elementos de Geometria tratados dessa maneira se tornariam, de alguma forma, excelentes elementos de lógica, e talvez fossem os únicos que deveriam ser estudados. (Lacroix, 1799, p. xxviij).

As críticas aos Elementos de Euclides, do ponto de vista matemático e do ponto de vista de sua utilidade (ou seja, Geometria versus Geometria Prática), acompanharam sua disseminação desde o início. O que muda no final do século XVIII é o contexto social e político do ensino da matemática. Até então, a Geometria era ensinada a uma classe privilegiada de pessoas, em sua maioria adultos. Isso mudou na França, após a Revolução de 1789. O ensino da matemática tornou-se parte de uma política educacional nacional. Foi o que

---

[17] O relatório ao Conselho dos Cinquentenários sobre os livros elementares submetidos ao concurso aberto pela lei de 9 de Pluviôse, Ano II (Lakanal, 1795), cita as obras cujos manuscritos foram apresentados e retidos, apresentando as principais razões para as escolhas. Para a matemática, observa-se que obras "pouco rigorosas e pouco adequadas para acostumar a mente das crianças ao raciocínio exato" foram excluídas. A lista de obras escolhidas é seguida por uma nota recomendando Legendre, que, entre os livros impressos, "deve ser colocado em primeiro lugar" porque "sua reputação não é contestada, nem mesmo pela inveja". Esta é a única razão; na minha opinião, Legendre propôs seus Elementos sem considerar o próprio propósito do concurso.

[18] Ver em (Legendre, 1794, prefacio)

[19] A famosa nota sobre a prova da invariância da soma dos ângulos de um triângulo (por exemplo, Nota 2)

[20] Veja, por exemplo, a nota XII que parte de uma discussão sobre a definição de igualdade ou similaridade entre poliedros.

aconteceu também na maioria dos países europeus (E. Barbin & Menghini, 2014, p. 475; Schubring, 2015, p. 242-244).

A necessidade de cidadãos e trabalhadores mais bem educados levou as nações a organizarem sistemas educacionais públicos, a desenvolver o ensino primário e secundário e a estabelecer instituições para formar professores; as "escolas normais", como eram chamadas em homenagem aos seus precursores alemães do século XVIII. Na França, a primeira, conhecida como École Normale de ano III, foi criada em 1795, com duração de quatro meses, com a missão de ensinar a arte de ensinar a educadores cuja missão era criar, posteriormente, Escolas Normais nos municípios.[21] Dedicadas ao ensino primário, que tinha prioridade política, essas escolas formavam educadores para o ensino de geometria prática. A estruturação da educação além do ensino primário, durante o primeiro terço do século XIX, distinguiu diferentes tipos de ensino da matemática, dependendo das visões políticas sobre o futuro dos alunos. Como Hélène Gispert (2014) comentou: “a cada classe social ‘sua’ matemática: formação da mente versus treinamento para a prática” (ibid. seção 2.1). A necessidade de legislar sobre os conteúdos educacionais provocou a ruptura epistemológica e educacional entre Geometria e Geometria Prática. A natureza teórica da primeira e a ênfase no papel da prova – como expressão do raciocínio dedutivo – são, sem dúvida, a fonte dessa ruptura. Os recursos do sistema educacional, limitando a duração dos estudos e sujeitos às prioridades da sociedade, exigiam uma escolha.

O desenvolvimento massivo da educação básica aumentou a necessidade de livros didáticos elementares, daí a busca por uma transposição didática eficiente, considerando os alunos e privilegiando a compreensão em detrimento do convencimento (Barbin, 2021, p. 106-107). Mas a noção de elementaridade difere se considerarmos o ensino fundamental[22] ou o ensino médio. O primeiro visava a alfabetização básica e o conhecimento de valor prático para os cidadãos e uma indústria em rápido crescimento[23], o segundo visava a aquisição dos fundamentos por alunos destinados ao ensino superior. Devemos ter em mente que apenas um pequeno número de alunos, principalmente meninos[24], ingressava no ensino médio e era exposto ao ensino de Geometria. No entanto, esse ensino tinha pouco espaço em comparação

[21] (“10. 30 de outubro de 1794 (9 Brumário Ano III). Decreto relativo à criação de escolas normais”, 1992)
[22] A escola obrigatória durava até os 12 anos naquela época (Gispert, 2002, p. 6).
[23] A geometria ensinada nas escolas primárias privilegiava uma abordagem e um saber-fazer concretos, mobilizando o desenho e o trabalho manual (D’Enfert, 2003, p. 7).
[24] Na França, durante quase todo o século XIX, "o liceu" era reservado a 3 a 4% de uma faixa etária e apenas para jovens, uma educação paga, de cultura, para a qual a matemática era desqualificada, relegada às classes finais como elemento de especialização. (Gispert, 2002, p. 4). A maioria das meninas ficava de fora do ensino secundário; quando obtiveram acesso, no final do século, foi com um curso especial "feminino" que poderia ser qualificado como "educação de segunda classe" (ibid.).

com o estudo de Latim e Humanidades (Gispert, 2002, p. 4). Concentro-me, no restante desta subseção, no ensino médio.

A escrita de livros didáticos de Geometria foi impulsionada por argumentos de simplicidade[25], com um foco que variou de autor para autor, abordando a ordenação dos teoremas (lógico versus natural), ou a natureza dos objetos geométricos (objetos simples e elementares versus objetos compostos), ou a natureza das primeiras ideias (axiomas, definições) ou, eventualmente, princípios e provas (E. Barbin, 2007, p. 226-236). Nesse contexto, os Elementos de Legendre e os Elementos de Lacroix merecem atenção especial, pois foram amplamente utilizados e disseminados até o final do século XIX. Os Elementos de Lacroix, graças à centralização do sistema educacional, assumiram uma posição monopolista na França, enquanto Legendre foi o mais disseminado internacionalmente, sendo visto em alguns países como um verdadeiro rival de Euclides (Schubring, 2007). Por exemplo, Nathalie Sinclair aponta "uma invasão da matemática francesa: o livro didático de geometria de Adrien-Marie Legendre – e os livros didáticos eram o currículo definidor na época – começou a tomar o lugar de Euclides nas universidades americanas, e a influência da britânica diminuiu" (Sinclair, 2006, p. 17).

Com argumentos muito diferentes desenvolvidos em seu prefácio, os livros didáticos de Legendre e Lacroix evidenciam o surgimento da prova matemática – demonstração no texto – como parte essencial da aprendizagem de Geometria no ensino médio. Este nível de ensino era frequentado principalmente por alunos que ambicionavam estudos longos e o ingresso em universidades. A tensão entre a natureza utilitária e teórica do currículo neste nível não era muito alta; o ensino de geometria tinha uma coloração teórica. Mais importante era a tensão entre prova que explica e prova que convence, para usar os termos das discussões contemporâneas (Hanna, 2000), ou, nas palavras da época, a tensão entre análise e síntese. Os "Comentários Preliminares" de Sylvestre-François Lacroix foram dedicados a esta questão. Esta será uma das questões a serem abordadas no século XX com a democratização do ensino médio.

Patricio Herbst chama de Era do Texto[26] o período em que: "O estudo da geometria era feito por meio da leitura e reprodução de um texto; tal trabalho treinaria as faculdades de

[25] A palavra simplicidade traduz aqui o francês élémentation — que é da mesma família da palavra élément — introduzido por Evelyne Barbin (2021). Refere-se à "ordenação de uma ciência, aqui a geometria elementar, que parece ser a mais apropriada para o seu ensino".
O termo "elementos" está presente no título da obra matemática mais antiga que chegou até nós, a de Euclides, datada do século III a.C. (ibid. p. 99).
[26] Patricio Herbst cunhou essa expressão para os EUA e, na minha opinião, ela pode ser estendida para a Europa.

raciocínio dos alunos. Mas os textos não sugerem a existência de mecanismos oficiais para verificar ou orientar a evolução do raciocínio dos alunos." (P. G. Herbst, 2002b, p. 288 e seguintes). Essa discrepância entre intenções e meios recebeu atenção especial nos EUA na última década do século XIX. Nos EUA, a educação nunca foi conduzida por uma única instituição estatal, mas por muitas agências locais com uma ampla gama de visões organizacionais, pedagógicas e epistemológicas. Isso criou problemas para todas as disciplinas no recrutamento de alunos em nível universitário, que a Associação Nacional de Educação abordou criando o Comitê dos Dez em 1892. O papel do comitê era ajudar distritos escolares e escolas particulares a fazerem mudanças, fornecendo argumentos para apoiar decisões baseadas no que as universidades esperariam. Na matemática (P. G. Herbst, 2002b, seção 2), a diversidade de abordagens destacou a tensão entre educar a mente e transmitir conhecimento.

A Conferência de Matemática, convocada pelo Comitê dos Dez em 1893, chegou a um consenso de que a educação da mente dos alunos do ensino médio deveria ter prioridade e que a Geometria deveria ter um papel no desenvolvimento das habilidades de raciocínio. "[Ela] recomendou mudanças no currículo de Geometria para acomodar a tensão entre o treinamento das faculdades mentais [isto é, justificação] e a transmissão de conhecimento geométrico culturalmente valorizado" (P. G. Herbst, 2002b, p. 295). Como ensinar os alunos a construírem demonstrações em matemática tornou-se uma questão explícita. O trabalho pioneiro de George Albert Wentworth forneceu uma resposta ao propor uma norma para o layout em que "cada afirmação distinta na demonstração e cada direção particular nas construções da figura iniciam uma nova linha; e em nenhum caso é necessário virar a página ao ler uma demonstração" (Wentworth, 1877, p. iv). O prefácio da terceira edição[27] inclui uma seção "Para o professor" com, entre outras recomendações:

> Aconselha-se também que o professor realize provas escritas frequentes. Estas não devem ser muito difíceis, e deve ser concedido tempo suficiente para a construção precisa das figuras, para a escolha da melhor linguagem e para a determinação da melhor disposição. (ibid. p.vi).

Este foi um precursor do formato de duas colunas que dominou o ensino de geometria nos EUA no século XX.

[27] A terceira edição (1881) deste livro didático está disponível em [https://hdl.handle.net/2027/hvd.32044097014377].

No entanto, por enquanto, podemos notar que, no final do século XIX, a demonstração era um conteúdo nomeado, mas implícito, a ser ensinado, enquanto o ensino de Geometria permanecia a agenda explícita.

A primeira metade do século XX, a demonstração e a formação da mente científica

O rápido desenvolvimento da economia industrial e da engenharia de produção no início do século XX destacou a necessidade de aprimorar a alfabetização matemática e as habilidades da força de trabalho em todos os níveis. Essa preocupação é internacional (Nabonnand, 2007). A virada do século XX também é a época da organização internacional de matemáticos, com o estabelecimento da "Comissão Internacional para o Ensino da Matemática" (IMUK), em 1908[28], e a criação da União Matemática Internacional (IMU), em 1920. A criação da IMUK demonstra a preocupação internacional com o desenvolvimento do ensino da matemática. Uma das primeiras decisões dessa Comissão foi "pesquisar e publicar um relatório geral sobre as tendências atuais na educação matemática nos vários países" (H. F. Fehr, 1908, p. 8). Exige que a pesquisa considere tanto a matemática aplicada quanto a pura, e recomenda que ela se concentre nos princípios que devem inspirar o professor, mas deixa de lado os currículos que são de responsabilidade das nações.

A questão do rigor recebeu atenção especial. Um relatório sobre esta questão é apresentado aos delegados do IMUK. O relator, Guido Castelnuovo, propôs limitar a discussão ao ensino secundário superior e ao ensino de geometria. O tema é até que ponto a apresentação sistemática da matemática pode ser considerada. Propõe-se uma classificação do grau de rigor:

> A) Método inteiramente lógico – Todos os axiomas são enunciados; sua independência é discutida; o desenvolvimento posterior é rigorosamente lógico. Não há apelo à intuição; noções primitivas (ponto etc.) estão sujeitas apenas à condição de satisfazer os axiomas.
> B) Fundamentos empíricos, desenvolvimento lógico – A partir da observação do espaço real, deduzimos as proposições primitivas nas quais o desenvolvimento lógico a seguir se baseia. O desenvolvimento lógico a seguir se baseia nessas proposições – três subgrupos podem ser distinguidos: BA todos os axiomas são enunciados, BB alguns axiomas são enunciados, BC apenas os axiomas que não são absolutamente auto evidentes são enunciados.
> C) Considerações intuitivas alternam-se com o método dedutivo – A evidência é usada sempre que apropriado, sem que fique claro o que é admitido e o que é demonstrado.

[28] Em 1954, o IMUK mudou seu nome para ICMI (Comissão Internacional de Instrução Matemática) com a missão de "[a] condução das atividades da IMU, relacionadas à educação matemática e científica" (Furinghetti & Giacardi, 2008).

D) Método intuitivo-experimental – Os teoremas são apresentados como fatos que são intuitivos ou podem ser demonstrados pela experiência, sem que a conexão lógica entre esses fatos seja aparente. (H. Fehr, 1911, p. 462)

Parece que nenhum país escolheu A ou D. Guido Castelnuovo observou que as nações romanas e o Reino Unido preferem B, e que as nações germânicas estão mais próximas de C. Seus comentários sugeriram uma influência da cultura e possivelmente do contexto econômico (especialmente o "industrialismo").

As trocas sublinham a importância de um rigor não excessivo, considerando a inteligência média dos alunos: o rigor deve ser compatível com o ensino e, se a aprendizagem da geometria favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, não é necessário chegar à instalação de uma axiomática (ibid. pp. 465-466). A referência à psicologia dos jovens é frequente na justificação das escolhas feitas pelas nações. Propõe-se discutir futuramente a organização do ensino da geometria e estudar seus fundamentos psicológicos. A partir de então, a educação matemática moderna tornou-se uma questão nacional na maioria das nações, algumas buscando currículos que equilibrem o valor teórico e aplicado do ensino da geometria (por exemplo, González & Herbst, 2006). A classificação dos argumentos do curso de Geometria de Gloriana González e Patricio Herbst facilita a distinção e a compreensão dos diferentes fundamentos que configuram a transposição didática da demonstração matemática (ibid. p. 13):

1. um argumento formal que define o estudo da geometria como um caso de aprendizagem do raciocínio lógico por meio da prática e aplicação da dedução;
2. um argumento utilitário de que a geometria forneceria ferramentas para trabalhos futuros ou estudos não matemáticos;
3. um argumento matemático justifica o estudo da geometria como uma oportunidade de vivenciar o trabalho de fazer matemática;
4. um argumento intuitivo alinha o curso de geometria com oportunidades de aprender uma linguagem que permitiria aos alunos modelarem o mundo;

Esses argumentos não são mutuamente exclusivos; vários deles poderiam contribuir para a transposição didática da geometria, mas com pesos diferentes. No que diz respeito à demonstração matemática, o “argumento formal” e o “argumento matemático” sustentam a razão de ser de seu ensino. Os outros dois argumentos são menos decisivos porque seu ensino não pode pretender fornecer um modelo de demonstração para todas as áreas do conhecimento, sejam elas científicas ou práticas, como sugere o quarto argumento. Acontece que a demonstração é frequentemente vista como um obstáculo à aprendizagem da geometria por sua falta de valor prático. Ao contrário, os argumentos dos matemáticos do início do século são de que a demonstração matemática é constitutiva da geometria como um paradigma da matemática como ciência. Essa preocupação com o ensino da matemática como ciência é bem ilustrada por um comentário de Giuseppe Veronese após a reportagem de Castelnuovo: “Se o industrialismo ou o utilitarismo geral fossem de fato uma influência dominante na educação do ensino médio, os matemáticos teriam que combatê-los. » (H. Fehr, 1911, pág. 465).

Na virada do século XX, ficou claro que a aprendizagem do raciocínio dedutivo era um importante objetivo educacional. A matemática ganhou mais importância do que as humanidades, que até então eram a prioridade educacional. Ela deveria desempenhar um papel privilegiado na formação do espírito científico, como a chamavam as Instruções Gerais francesas de 1946. A geometria foi o domínio eleito: "É importante fazer sentir desde cedo a diferença entre a certeza dada pelo método geométrico e a resultante do método experimental: é sob essa condição que se desenvolverá a necessidade de demonstração" (Instruções francesas de 2 de setembro de 1925). No entanto, atingir esse objetivo para as séries iniciais provou ser um desafio:

> Mas é possível garantir a compreensão da matemática entre os alunos mais jovens, especialmente nas sextas e quintas séries?" A questão ainda está em discussão e as instruções que se seguiram à reforma de 1902 chegaram a proibir explicações teóricas sobre certos pontos e em certas classes. Era preciso contentar-se em ter as regras aprendidas e aplicadas, para um mecanismo bem fixado. (Instruções Francesas, 1923).

Os tomadores de decisão buscavam soluções introduzindo recomendações pedagógicas, como por exemplo as seguintes:

> Como as hipóteses ou dados são registrados na própria figura, pelos meios mais adequados para garantir sua visão e alcance imediatos, o professor deduziria lentamente, com a ajuda da turma, se possível, as hipóteses ou dados; ele ou ela resumiria os resultados adquiridos a cada momento e faria com que os alunos os formulassem eles mesmos. Os alunos não mais ficariam confusos com o conjunto de termos acumulados em enunciados sintéticos, cuja formação seria em parte trabalho deles. Eles se deteriam mais nos mais importantes: os teoremas tomariam forma no momento certo; seriam fixados na memória pelos procedimentos usuais. (Instruções Francesas de 2 de setembro de 1925).

As limitações de tal abordagem eram antecipadas: «a fé na correção da regra e a confiança na autoridade do professor contribuem para retardar o despertar do senso crítico» (ibid.).

A busca pela maneira mais eficiente de ensinar provas matemáticas foi constante ao longo desta primeira parte do século XX. A ideia motriz era envolver os alunos na resolução de problemas e gerenciar uma transição perfeita da manipulação de objetos para o raciocínio com base em representações abstratas. Podemos dizer que tomadores de decisão e matemáticos compreenderam a ruptura entre o pensamento prático e o pensamento teórico, mas buscaram uma maneira de contorná-la em vez de enfrentá-la. Aqui está outra evidência dessa abordagem:

> Guiada pelo professor e realizando primeiramente operações concretas aplicadas a objetos dados, a criança adquirirá a noção abstrata de uma operação de natureza bem definida, mas referente a um elemento indeterminado. Então, ela se tornará capaz de imaginar que está aplicando outra operação ao resultado da primeira sem tê-la realizado. Finalmente, projetando a continuação dos mecanismos das operações assim definidas, ela será capaz de prever certas propriedades dos resultados: ela terá realizado sua primeira demonstração. (Decreto francês de 20 de julho de 1960).

Durante a primeira metade do século XX, o ensino de Geometria incluía exercícios e problemas, oferecendo aos alunos a possibilidade de elaborar demonstrações para realizar tarefas dedutivas simples de uma ou duas etapas, ou para tarefas mais complexas que exigem que os alunos se envolvam na resolução de problemas; no entanto, esses problemas mais complexos eram frequentemente divididos em partes, tornando-os mais fáceis de resolver. Por fim, embora a aprendizagem fosse apoiada por atividades mais significativas, a abordagem básica consistia em observar, ler e replicar provas.

Patricio Herbst identifica os resultados do Comitê dos 10 como um ponto de virada entre abordagens pedagógicas, após as quais os alunos tiveram a oportunidade de usar seu raciocínio em corolários de teoremas ou teoremas que não deveriam ser incluídos no texto principal do curso, a saber, a Era dos Originais (P. G. Herbst, 2002b, seção 4), e abordagens que propunham atividades voltadas para o aprendizado do que é uma demonstração e para a prática da demonstração, a saber, a Era do Exercício (ibid. seção 6). Essa evolução foi acompanhada pelo desenvolvimento de uma ferramenta didática distinta, da qual o padrão de layout proposto por Wentworth foi um precursor: a demonstração de duas colunas. O padrão deste layout é composto por duas linhas formando um T. Acima da linha horizontal está escrita a afirmação a ser demonstrada; abaixo dessa linha, separadas por uma linha vertical, duas colunas exibem a prova escrita, com à direita a sequência de inferências e à esquerda a garantia de cada uma delas. É comumente reconhecido que o layout diferenciado foi usado pela primeira vez na segunda edição do livro didático de Geometria de Schultze e Sevenoak, em 1913[29]. O objetivo era ser uma ferramenta tanto para os alunos quanto para o professor:

[29] (para uma análise em apoio a este livro, veja O’Reilly, 1902)

> [Este arranjo em duas colunas] parece enfatizar mais fortemente a necessidade de justificar cada afirmação feita, e economiza tempo quando o professor está inspecionando e corrigindo trabalhos escritos. (Comentário de Shibli (1932) citado por P. G. Herbst, 2002b, p. 297)

As demonstrações em duas colunas trouxeram estabilidade ao curso de Geometria nos EUA, mas, ao enfatizar excessivamente uma exibição formal da estrutura lógica das demonstrações, tenderam a ocultar seu papel na construção do conhecimento. (P. G. Herbst, 2002b, seção 7).

Durante a primeira metade do século XX, a demonstração adquiriu o status explícito de uma ferramenta matemática a ser ensinada e aprendida, mas cuja aprendizagem era induzida pela aprendizagem da Geometria, que tinha um foco exclusivo nos currículos. Seguindo a fórmula de Patricio Herbst: "Conhecer geometria e ser capaz de provar os teoremas da geometria eram indistinguíveis." (P. G. Herbst, 2002b, p. 289)

A segunda metade do século XX, a prova libertada da Geometria

Em meados do século XX, a matemática estava presente em todos os domínios, das ciências naturais às humanas e sociais. As competências matemáticas impuseram-se por seu papel fundamental no desenvolvimento da indústria moderna e dos setores econômicos (D'Enfert & Gispert, 2011, p. 30; Gispert, 2002, p. 9). A matemática emergia como uma linguagem universal para o acesso ao conhecimento. Novamente, os países expressaram a necessidade de pessoas com melhor formação em matemática. No âmbito acadêmico, a crescente distância entre a matemática escolar e a matemática como ciência e a influência intelectual do grupo de matemáticos franceses Bourbaki e de seus Elementos, sem mencionar a crise do Sputnik nos EUA, levaram a uma ruptura definitiva com o texto de Geometria herdado de Euclides. O seminário de Royaumont sobre matemática escolar, em dezembro de 1959,[30] deu a direção para o futuro. O texto euclidiano foi definitivamente considerado obsoleto, tanto do ponto de vista matemático quanto pedagógico, mas isso deixou a comunidade da educação matemática com mais problemas do que soluções. A exclamação de Dieudonné "à bas Euclide" atraiu a atenção do público em geral, mas não levou em conta as discussões sobre como deveria ser a evolução desejada. Houve um amplo consenso sobre o objetivo final do ensino de geometria, a saber, que após os estágios iniciais da aprendizagem

[30] A origem do Seminário talvez possa ser remontada à reunião do CIEAEM de 1952, em La Rochette par Melun, sobre "estruturas matemáticas e mentais", que reuniu Dieudonné, Choquet e Servais em diálogo com o psicólogo Jean Piaget e o filósofo Ferdinand Gonseth. Em vários países, a reforma da matemática escolar já estava em andamento em 1959, com um grande número de reuniões de especialistas regulares" (Bock & Vanpaemel, 2015, p. 165-166).

intuitiva, deveria ocorrer "a quebra da ponte com a realidade – isto é, o desenvolvimento de uma teoria abstrata" (OCDE[31] citado por (Bock & Vanpaemel, 2015, p. 159)). O relatório oficial da OECD[32] foi publicado em 1961, sob o título "Novo Pensamento em Matemática Escolar" (popularizado como "Nova Matemática") e "Mathématiques nouvelles" para a versão francesa (ibid. p. 163).

O movimento impulsionado por alguns matemáticos buscou uma ruptura epistemológica. Isso levou a dois princípios norteadores para a concepção de novos currículos (D'Enfert & Gispert, 2011, p. 35):

1. A matemática é uma ciência dedutiva, não uma ciência experimental.
2. A matemática constitui uma teoria[33] que deve reunir sob a mesma estrutura conhecimentos que até então eram apresentados de forma dispersa.

A Geometria precisava evoluir. Essa evolução foi radical nos EUA, onde a Geometria foi relegada à formação de professores e se tornou opcional nas escolas (Sinclair, 2006, p. 73-74). Em outros lugares, ela foi profundamente transformada. Na França, manteve-se nos currículos do ensino médio, mas com uma nova faceta, na qual o estudo de objetos geométricos deu lugar ao de estruturas, com muita atenção para não confundir o mundo concreto com seu modelo matemático, utilizando terminologias diferentes. As principais influências que levaram a essas evoluções tiveram origens diferentes nos diferentes países. Dirk De Bock e Geert Vanpaemel, analisando o seminário da OEEC em Royaumond, observaram que "Na França, a demanda por modernização vinha das universidades e visava à introdução da moderna 'matemática Bourbaki' nas escolas secundárias; nos Estados Unidos, a renovação do ensino de matemática era incentivada pela indústria e pela política, e visava à modernização dos métodos de ensino" (Bock & Vanpaemel, 2015, p. 167). Além disso, os participantes deste seminário, que foi decisivo para a evolução de meados do século XX, não estavam todos alinhados com a posição de Dieudonné, frequentemente citada como o slogan da matemática moderna[34]. Uma abordagem muito mais equilibrada para a reforma estava sendo proposta (ibid. 152). O próprio Dieudonné delineou um currículo "bastante concreto,

[31] Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
[32] Organização para a Cooperação Económica Europeia
[33] Em francês, até o nome da matemática muda, perdendo a marca do plural para se tornar "La Mathématique", seguindo o modelo de "la physique", que é uma palavra singular em francês (mas plural em inglês, "physics"). Isso não durou muito.
[34] A seção do relatório do seminário tinha como subtítulo "Controvérsia Aguda Provocada". "Após alguma discussão, ambos os grupos modificaram suas posições sobre o programa e chegaram a um acordo geral sobre um conjunto de propostas que não removeram Euclides inteiramente do currículo do ensino médio" (OEEC, 1961, p. 47) (citado por (Bock & Vanpaemel, 2015, p. 157)).

partindo aproximadamente da matemática 'experimental', concentrando-se em técnicas e trabalho prático, até um tratamento rigoroso e axiomático do espaço bidimensional e tridimensional" (ibid. 157). Isso encontrou uma tradução direta na documentação oficial francesa dos currículos: "O sucesso será alcançado quando o aluno, tendo se dado conta da diferença entre uma verificação experimental, mesmo que repetida cem vezes, e uma demonstração, não se contentar com a primeira e exigir a segunda." (Decreto de 20 de julho de 1960). No entanto, a transição da chamada verificação experimental para a prova matemática (ou seja, demonstração) foi radical; classicamente, a ruptura ocorreu no 8º ano. Como enfatiza Gert Schubring (2015), a França empreendeu uma reforma sem levar em consideração as necessidades da orientação dos diferentes alunos para os estudos vocacionais ou universitários: "[para o 8º e o 9º ano], comum a todas as diversas direções curriculares, a Comissão havia planejado ensinar os mesmos conteúdos e de acordo com o mesmo espírito e metodologia – concebendo isso exclusivamente a partir da lógica de um currículo para aqueles que continuariam os estudos universitários." (ibid. p. 250).

A axiomática, que considero a verdadeira herança de Euclides, é de suma importância na reforma. A prova é sua espinha dorsal, axiomas e definições são sua base. A geometria é o terreno privilegiado para a aculturação a esta nova epistemologia: «nascida da experiência, [ela] deve aparecer aos alunos como uma verdadeira teoria matemática» ao final do 8º ano (Decreto Francês de 22 de julho de 1971). No entanto, isso não se aplica apenas à geometria, mas a toda a matemática. A aprendizagem da matemática como disciplina deve treinar os alunos no pensamento dedutivo, incentivá-los a serem rigorosos na lógica, ensiná-los a construir uma cadeia de deduções, a desenvolver – de forma construtiva – seu espírito crítico[35].

A orientação teórica da Nova Matemática foi criticada internacionalmente, tanto por educadores matemáticos quanto por formuladores de políticas, com – pelo menos – dois argumentos: a ruptura entre a matemática e suas aplicações, incluindo seu uso por outras disciplinas científicas, e sua irrelevância para uma grande população de estudantes. Isso foi bem expresso por este julgamento do pioneiro francês da matemática aplicada, Jean Kuntzmann (1976, p. 157):

> Poderíamos lamentar que não seja possível conduzir os alunos à fase dedutiva. Na realidade, nada se perde, pois, a filosofia desta fase: a autonomia da matemática organizando-se em vista de seus próprios objetivos, é perfeitamente inútil para o

[35] Trecho da circular francesa de 29 de abril de 1977.

francês médio[36] (mesmo do ano 2000). Afirmo muito claramente que, para o francês médio, portanto, para o ensino do primeiro ciclo, a filosofia adequada é a da fase conceitual. Ou seja:
- Modelo de situação dual, fundamental para os usos da matemática;
- Treinamento em raciocínio lógico, mas sem ir tão longe quanto a teoria dedutiva organizada (encontraremos na vida cotidiana ocasiões para raciocinar, mas poucas teorias dedutivas constituídas).

Nos EUA, o movimento da Nova Matemática entrou em declínio no início da década de 1970, sob a pressão da preocupação pública, refletida no slogan "De volta ao básico", da queda no desempenho dos alunos e das críticas de alguns matemáticos renomados (Sinclair, 2006, p. 108 sqq). De fato, teve fortes opositores desde o início (por exemplo, Goodstein, 1962). Além disso, o rápido desenvolvimento de tecnologias baseadas em computadores e a crescente evidência de que os computadores mudarão o papel e a demanda da matemática exigiram o questionamento dos currículos. O Comitê Consultivo Nacional sobre Educação Matemática (NACOME) publicou em 1975 recomendações para uma evolução dos currículos escolares obrigatórios que não rejeitavam todas as contribuições da Nova Matemática, mas redefiniam os "princípios básicos" (Hill, 1976), colocando em primeiro plano as aplicações da matemática, estatística e probabilidade, o uso de calculadoras e computadores. Notavelmente, a Geometria não fazia parte das habilidades matemáticas básicas listadas pelo relatório da NACOME, mas o trabalho de reformas que seguiu as recomendações a incluiu (Sinclair, 2006, p. 111). A demonstração e o raciocínio lógico foram minimizados em favor de uma "concepção mais ampla de geometria", dando espaço à visualização e à intuição (ibid., p. 113); um movimento que ecoou o apelo dos principais oponentes para o abandono da "principal inovação" da Nova Matemática: a abordagem lógica para o ensino da matemática (Kline, 1976, p. 451-453). No final do século, os Princípios e Padrões para a Matemática Escolar (PSSM) do NCTM sintetizaram ambas as posições:

> A geometria tem sido considerada há muito tempo como o lugar no ensino médio onde os alunos aprendem a provar teoremas geométricos. O Padrão de Geometria adota uma visão mais ampla do poder da geometria, convidando os alunos a analisar características de formas geométricas e a elaborar argumentos matemáticos sobre a relação geométrica, bem como a usar visualização, raciocínio espacial e modelagem geométrica para resolver problemas. A geometria é uma área natural da matemática para o desenvolvimento das habilidades de raciocínio e justificação dos alunos. (NCTM, 2000, p. 3)

[36] Apenas um terço dos alunos ingressa no ensino secundário (D'Enfert & Gispert, 2011, p. 40).

O movimento da Nova Matemática desapareceu em todos os países no início da década de 1980. Esse fim foi consequência das constantes críticas aos currículos que, nas palavras de José Manuel Matos[37], "tornam a matemática hermética" tanto para os alunos quanto para seus pais e para a maioria das partes interessadas, e da falta de consenso entre tomadores de decisão, educadores matemáticos e professores, bem como entre os próprios matemáticos. Acontece que a lacuna entre a reforma e a realidade das salas de aula era tal que não foi surpreendente ver a Nova Matemática coabitar com o ensino clássico anterior, ou mesmo ser ignorada, em particular onde o sistema educacional deixou autonomia suficiente para escolas e professores. Na França, onde os matemáticos tiveram uma responsabilidade peculiar no lançamento do movimento, a tensão entre os protagonistas levou à criação de uma União dos Usuários da Matemática que se opunha à reforma[38]. As reformas subsequentes não retornaram aos currículos antigos. A concepção de matemática, sua organização escolar, o conteúdo de seus vários componentes e o foco na atividade matemática em vez do texto matemático evoluíram significativamente. O debate iniciado nos EUA no início da década de 1970 durou dez anos antes da divulgação de recomendações consensuais na forma de Uma Agenda para Ação, endossada pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática em 1980.

> Uma Agenda para Ação (NCTM 1980) recomendou que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar, que as habilidades básicas deveriam ser definidas de forma mais ampla do que simples cálculos aritméticos e algébricos, que calculadoras e computadores deveriam ser usados em todos os níveis de ensino e que mais matemática deveria ser exigida dos alunos (Fey e Graeber 2003, p. 553 citado por (Kilpatrick, 2014, p. 331))

Essa Agenda do NCTM levou a um questionamento do ensino da demonstração que, por meio de uma mudança metacognitiva,[39] evoluiu na prática para o ensino da técnica de demonstração em duas colunas. Isso acabou motivando a recomendação nos Padrões de 1989 para aumentar a atenção aos "argumentos dedutivos expressos oralmente e em forma de frase ou parágrafo" (p. 126) e diminuir a atenção às "demonstrações em duas colunas" (p. 127)." (Citado por P. Herbst, 1999).

A criação do Congresso Internacional de Educação Matemática em 1969 e do Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática em 1976 favoreceu a disseminação das

---

[37] Em (Ausejo & Matos, 2014, p. 298)
[38] A UPUM, criada em 1972, desapareceu desde então com a Nova Matemática.
[39](Brousseau, 1997, p. 26 ff.)

diversas posições e ideias, permitindo debates e intercâmbios internacionais entre educadores e professores de matemática em nível internacional. Assim, a orientação pós-Nova Matemática dos currículos foi bastante semelhante na maioria dos países. Por exemplo, no Sul da Ásia:

> As Reformas Matemáticas duraram 12 anos, terminando no início da década de 1980, quando se percebeu que não funcionavam e tiveram que ser interrompidas. Embora muitos novos tópicos introduzidos durante as Reformas Matemáticas tenham permanecido (por exemplo, diagramas de Venn e estatística), a abordagem formal no ensino de matemática foi substituída pela chamada abordagem de resolução de problemas. Nos anos que se seguiram, a mudança no conteúdo foi mínima. A principal mudança foi na abordagem de ensino utilizada em sala de aula. (Lee, 2014, p. 388 - grifo meu)

Linhas semelhantes foram escritas em diversos outros contextos educacionais[40].

Na França – o que constitui um caso interessante, dadas as restrições de uma administração educacional forte e centralizada e a posição influente de matemáticos profissionais – a década de 1980, após a era da Nova Matemática, preparou uma ruptura nas políticas de educação matemática do século XXI:

> Além disso, contestada desde o início da década de 1970, inclusive por seus apoiadores que acreditavam que a reforma não correspondia às suas recomendações, a reforma da "matemática moderna" foi abandonada no início da década de 1980 em favor de um método de ensino que, vislumbrando a matemática na diversidade de suas aplicações, enfatizava a resolução de problemas e privilegiava os componentes "aplicados" da disciplina. Esses dois aspectos ocupam agora um lugar central no ensino da matemática. Ao mesmo tempo, desde o início dos anos 2000, desenvolveu-se a ambição de tornar a matemática uma disciplina que permita aos alunos se lançarem em um verdadeiro programa de pesquisa, capaz de desenvolver suas habilidades de raciocínio e argumentação, mas também de experimentação e imaginação. (Gispert, 2014, p. 239)

Mas, no final do século XX, a Geometria havia perdido sua posição especial e um tanto isolada nos currículos de matemática. Ela não é mais a Geometria da tradição educacional euclidiana, nem é a Geometria da Nova Matemática. O estudo de figuras-objetos geométricos faz parte de seu conteúdo educacional, juntamente com transformações geométricas, com diferenças, por vezes, importantes entre os currículos nacionais, mas essa orientação é compartilhada.

A ênfase está em tornar a matemática significativa e na compreensão; a demonstração matemática perde terreno[41] para o raciocínio dedutivo, que abre uma concepção mais ampla

---

[40] Para referências, veja por exemplo (Karp & Schubring, 2014, parte V)

de validação na aprendizagem e no ensino de matemática. Observa-se mais uma revolução epistemológica do que uma nova revolução educacional.

O século XXI, prova para todas as séries

Desde 1995, o "Trends in International Mathematics and Science Study" (TIMSS) fornece um instrumento para obter uma visão das visões institucionais da educação matemática[42]. Seu objetivo é estudar o desempenho de alunos do 4º e 8º anos em matemática e ciências em todos os países participantes[43].

Desde 2003, a publicação da estrutura de avaliação apresenta uma visão sobre o ensino e a aprendizagem que se concentra na inclusão de objetivos considerados importantes em um número significativo de países. Pode ser vista como uma concepção consensual da base essencial do currículo, embora existam muitas diferenças, algumas das quais substanciais. Esses documentos fornecem uma base confiável para ter uma ideia de como a prova e a comprovação são percebidas no início do século XXI. O design das avaliações do TIMSS distingue dois tipos de domínios: os domínios de conteúdo e os domínios cognitivos: "Os domínios de conteúdo definem a matéria matemática específica abordada pela avaliação, e os domínios cognitivos definem os conjuntos de comportamentos esperados dos alunos à medida que se envolvem com o conteúdo matemático." (TIMSS 2003 / O'Connor et al., 2003, p. 9).[44]

Questões relacionadas à validação são abordadas no subdomínio "raciocínio", que é apresentado da seguinte forma:

> O raciocínio matemático envolve a capacidade de pensamento lógico e sistemático. Inclui raciocínio intuitivo e indutivo baseado em padrões e regularidades que podem ser usados para chegar a soluções para problemas não rotineiros. Problemas não rotineiros são problemas muito provavelmente desconhecidos para os alunos. Eles exigem cognição além daquelas necessárias para a solução de problemas rotineiros, mesmo quando o conhecimento e as habilidades necessárias para sua solução foram aprendidos. Problemas não rotineiros podem ser puramente matemáticos ou podem ter contexto da vida real. Ambos os tipos de itens envolvem a transferência de conhecimento e habilidades para novas situações, e as interações entre as habilidades de raciocínio geralmente são uma característica. A maioria dos outros comportamentos

---

[41] Esta afirmação pode ter exceções, como é o caso da Rússia, onde "os estudantes russos das décadas de 1980 e 1990, e até mesmo os estudantes de hoje, dedicam muito mais tempo do que os seus colegas ocidentais a transformações e demonstrações algébricas". (Karp, 2014, p. 320)

[42] Existem duas grandes campanhas internacionais de avaliação: o PISA e o TIMSS. O primeiro avalia o desempenho escolar de jovens de 15 anos. O segundo avalia alunos do 4º e 8º anos. Acredito que este último seja mais relevante para as questões que estou abordando aqui.

[43] Eles eram 64 em 2019

[44] Da mesma forma, as estruturas das avaliações TIMSS 1995 e TIMSS 1999 incluíam áreas de conteúdo e expectativas de desempenho.

> listados dentro do domínio do raciocínio são aqueles que podem ser utilizados ao pensar e resolver tais problemas, mas cada um, por si só, representa um resultado valioso da educação matemática, com o potencial de influenciar o pensamento dos alunos de forma mais geral. Por exemplo, o raciocínio envolve a capacidade de observar e fazer conjecturas. Também envolve fazer deduções com base em suposições e regras e justificar resultados. (ibid. p.26 – grifo meu)

Os "domínios cognitivos" incluem "Conhecer", "Aplicar" e "Raciocínio". Cada um deles é caracterizado por "uma lista de objetivos abrangidos pela maioria dos países participantes, no grau 4 ou 8" (ibid., p. 9). No caso do Raciocínio, os objetivos expressos em termos comportamentais são: Analisar, Generalizar, Sintetizar/Integrar, Justificar. Este último foi denominado Justificar/Provar em 2003, mas apenas justificar[45] permaneceu para as campanhas de avaliação seguintes.

Tabela 1

Expressão do objetivo "Justificar" no documento de enquadramento da Avaliação do TIMSS de 2003 a 2019

2003	Justifica/provar	"Fornecer evidências da validade de uma ação ou da veracidade de uma afirmação por referência a resultados ou propriedades matemáticas; desenvolver argumentos matemáticos para provar ou refutar afirmações, com base em informações relevantes." (TIMSS 2003 p. 33)
2007	Justificar	"Fornecer uma justificativa para a verdade ou falsidade de uma afirmação por referência a resultados ou propriedades matemáticas" (TIMSS 2007 /Mullis et.al., 2007, p. 38)
2008	Justificar	"Forneça uma justificativa para a verdade ou falsidade de uma afirmação por referência a resultados ou propriedades matemáticas." (TIMSS 2008 / Garden et al., 2008, p. 22)
2011	Justificar	"Forneça uma justificativa com referência a resultados ou propriedades matemáticas conhecidas." (TIMSS 2011 / Mullis et al., 2009, p. 46)
2025	Justificar	"Forneça argumentos matemáticos para apoiar uma estratégia ou solução." (TIMSS 2015 / Mullis & Martin, 2014, p. 27)
2019	Justificar	"Forneça argumentos matemáticos para apoiar uma estratégia ou solução." (TIMSS 2019 / Mullis et al., 2017, p. 24)

A estrutura de avaliação do TIMSS de 2003 associa justificar e provar; no entanto, "provar" não deve ser interpretado como fornecer uma prova matemática, mas sim como fornecer argumentos matemáticos. Essa interpretação é coerente com a necessidade de uma formulação adequada tanto para o 4º ano quanto para o 8º ano. "Provar matematicamente" aparece explicitamente apenas no último ano na maioria dos currículos, quando o faz.

[45]A expressão «fazer deduções» no documento de 2003, tornou-se «fazer deduções lógicas» no documento de 2007 e permaneceu estável desde então.

A referência à prova matemática foi abandonada, e a palavra-chave escolhida foi "justificação", com requisitos específicos: "referência a resultados ou propriedades matemáticas" (TIMSS 2007, TIMSS 2008), "referência a resultados ou propriedades matemáticas conhecidas" (TIMSS 2011). Em seguida, retorna a expressão-chave "argumento matemático" (TIMSS 2015, TIMSS 2019) em uma breve e alusiva declaração em comparação com a formulação anterior.

Além disso, a seção do documento TIMSS de 2003, intitulada "Comunicando matematicamente", desaparece nas edições seguintes. Ela afirmava que "a comunicação é fundamental para cada uma das outras categorias de conhecimento de fatos e procedimentos, uso de conceitos, resolução de problemas rotineiros e raciocínio, e a comunicação dos alunos em e sobre matemática deve ser considerada avaliável em cada uma dessas áreas" (ibid., p. 34).

Esses documentos da estrutura de avaliação do TIMSS refletem, por um lado, uma visão institucional de um distanciamento do ensino de demonstração da Geometria e, por outro, um objetivo de introduzir a aprendizagem de uma maneira adequada de abordar a questão da "verdade" na sala de aula de matemática. Essa evolução do TIMSS testemunha uma tendência nos currículos de muitos países. Ela fortalece uma revolução epistemológica escolar que a seguinte citação exemplifica claramente:

> Uma característica marcante da compreensão matemática é a capacidade de justificar, de forma apropriada à maturidade matemática do aluno, por que uma determinada afirmação matemática é verdadeira ou de onde vem uma regra matemática. (NGA Center & CCSSO, 2010, p. 4 - grifo meu).

Deve-se notar que, naquela época, a pesquisa em educação matemática estava atingindo a maturidade acadêmica. A comunidade científica havia adquirido as ferramentas profissionais necessárias para consolidar e estabelecer uma ciência que se afirmava desde meados da década de 1970: periódicos e conferências internacionais com políticas científicas claras e controle de qualidade. As conferências do ICME e os estudos do ICMI, sob a égide da IMU, mantiveram os vínculos entre pesquisadores em educação matemática e matemáticos. A criação dos prêmios do ICMI em 2000, mantendo a tradição da comunidade matemática, é outra evidência. Todos esses são indicadores de que os pesquisadores em educação matemática agora são membros da comunidade de partes interessadas,[46] o que contribui para a transposição didática da matemática a ser ensinada e aprendida.

[46] A noosfera é "a esfera daqueles que "pensam" sobre o ensino, um intermediário entre o sistema de ensino e a sociedade". (Chevallard & Bosch, 2014, p. MS 1)

Pesquisadores em educação matemática abraçaram plenamente os problemas do ensino de provas, que consideram essenciais para a aprendizagem da matemática. O número de artigos e trabalhos de conferências sobre a aprendizagem e o ensino de demonstração e prova na sala de aula de matemática aumentou impressionantemente desde o trabalho pioneiro de Alan Bell (1976). O número de grupos de trabalho e de estudo representa a dinâmica da comunidade, incluindo livros editados que contribuem para diminuir as lacunas na pesquisa (por exemplo, Boero, 2007; Hanna & de Villiers, 2012; Reid & Knipping, 2010).

Em seu prefácio ao livro "Teoremas na Escola" (Boero, 2007), Gila Hanna escreve em palavras claras que "[...] a demonstração merece um lugar de destaque no currículo porque continua a ser uma característica central da própria matemática, como o método preferencial de verificação, e porque é uma ferramenta valiosa para promover a compreensão da matemática" (ibid., p. 3). A ideia deste livro, de Paolo Boero, nasceu no contexto da 21ª conferência PME (Pehkonen, 1997, vol. I-p. 179-198), após um fórum de pesquisa que demonstrou "o interesse renovado pela demonstração e pela prova na educação matemática" e que "a reconsideração da importância da demonstração na educação matemática estava levando a mudanças importantes na orientação dos currículos em diferentes partes do mundo" (Boero, 2007, p. 20).

Em 2007, o ICMI lançou seu 19º estudo sobre "Demonstração e Prova na Educação Matemática" (Hanna & de Villiers, 2012/2021), cujo documento de discussão introduz a ideia de "demonstração de desenvolvimento" (ibid. p. 444):

> O estudo considerará o papel da demonstração e da prova na educação matemática, em parte como um precursor da demonstração disciplinar (em suas várias formas) usada por matemáticos, mas principalmente em termos de demonstração desenvolvimental, que cresce em sofisticação à medida que o aluno amadurece em direção a concepções coerentes. Às vezes, o desenvolvimento envolve a construção das percepções e ações dos alunos a fim de aumentar sua sofisticação. Às vezes, baseia-se no uso de símbolos aritméticos ou algébricos pelos alunos para calcular e manipular simbolismos a fim de deduzir consequências. Formular e comunicar essas ideias requer um desenvolvimento simultâneo de sofisticação em ação, percepção e linguagem.
>
> A concepção de "demonstração de prova" do estudo tem três características principais:
>
> 1. A demonstração e a prova nos currículos escolares têm o potencial de fornecer um vínculo de longo prazo com a disciplina da demonstração compartilhada por matemáticos.
> 2. A demonstração e a prova podem fornecer uma maneira de pensar que aprofunda a compreensão e a natureza mais ampla do raciocínio humano.
> 3. A demonstração e a comprovação são, ao mesmo tempo, fundamentais e complexas, e devem ser gradualmente desenvolvidas desde os primeiros anos do ensino fundamental.

Essas características ressoam com os argumentos modais – para o curso de Geometria – propostos por Gloriana Gonzáles e Patricio Herbst (2006), a saber, o formal, o utilitário e o matemático. Essa categorização pode ser reutilizada, substituindo a geometria por demonstração e demonstração, sem perder sua relevância. A análise, sob a perspectiva da demonstração desenvolvimentista, de textos institucionais contemporâneos que fornecem aos professores comentários e indicações pedagógicas demonstra a necessária modulação desse ensino, considerando tanto os níveis escolares quanto as necessidades sociais e sua possibilidade em relação a Requisitos matemáticos. Tomemos o caso da França (Balacheff, 2022): do 1º ao 3º ano, o discurso dos alunos deve ser argumentado e baseado em observações e pesquisas, e não em crenças; do 4º ao 6º ano, o ensino deve contribuir para que os alunos construam a ideia de prova e argumentação (por exemplo, passando gradualmente de validações empíricas para validações baseadas exclusivamente em raciocínio e argumentação). Do 7º ao 9º ano, o desafio é passar do raciocínio indutivo para o dedutivo e transformar esse raciocínio dedutivo em uma prova comunicável (ou seja, uma demonstração no texto em francês)[47]. Isso é, com variações, o que é observado internacionalmente e refletido no TIMSS. O principal ponto de divergência é o ponto em que a aculturação à norma sociomatemática da prova matemática é direcionada; em muitos países, isso é deixado para o nível do ensino secundário superior e frequentemente, mas nem sempre, para a aprendizagem de Geometria (por exemplo, nos EUA, Jones & Herbst, 2012, p. 263).

Embora as instituições enfatizem que o ensino e a aprendizagem de provas não devem se limitar à Geometria, este domínio permanece um nicho ecológico para atingir esse objetivo. Escrevendo um artigo “Destaque sobre o Padrão” para o periódico do NCTM “Ensino de Matemática no Ensino Fundamental”, Edward A. Silver (2000) observou que “Embora muitos alunos do ensino fundamental adorem argumentar (sobre quase tudo!), eles precisam aprender a argumentar eficazmente em matemática. O estudo da geometria oferece muitas oportunidades para adquirir experiência com argumentação e prova matemáticas” (ibid., p. 23). Acontece que o documento de discussão do 19º estudo do ICMI reserva um lugar especial para a geometria ao questionar a comunidade de pesquisa sobre a relação entre prova e ciência empírica, “dado que a geometria lida com afirmações empíricas sobre o espaço circundante, bem como com um sistema teórico sobre o espaço” (Hanna & de Villiers,

[47] É interessante notar que o discurso institucional evita a referência ao raciocínio abdutivo – Polya escreveria raciocínio plausível. Possivelmente por medo de abrir espaço para erros lógicos graves (frequentemente induzidos pelo raciocínio natural), embora o raciocínio abdutivo tenha um valor heurístico e seja a fonte de ideias criativas.

2012, p. 451). A disponibilidade de micromundos de Geometria Dinâmica ressoa com esse questionamento, a ponto de os idealizadores do estudo dedicarem a ele uma seção inteira sob o título “Software de Geometria Dinâmica e a Transição para a Demonstração”, cuja primeira pergunta é: “Em que medida as explorações dentro do DGS podem promover uma transição para os aspectos formais da demonstração? Que tipos de engenharia didática podem desencadear e aprimorar esse suporte? Que ações específicas dos alunos poderiam apoiar essa transição?” (ibid. p. 449).

Uma ruptura epistemológica que necessita de uma ponte instrucional[48]

Retornando a várias décadas de estudo dos problemas levantados pelo ensino da demonstração na sala de aula de matemática, percebi que me faltava um estudo abrangente da história desse objetivo instrucional. A pesquisa sobre a história da educação matemática nos fornece uma série de informações e análises, especialmente na literatura sobre a história do ensino de geometria.

Meu objetivo era reunir essas informações, adicionando, quando necessário, algumas evidências de fontes primárias, e estruturá-las para obter um panorama da história do ensino da demonstração que pudesse ser útil para a realização de um estudo que ainda precisa ser feito.

Para concluir estas notas, primeiro delinearei o que pode ser retido de um ponto de vista histórico e, em seguida, apresentarei argumentos a favor da busca por um conceito precursor da matemática.

Marcos em uma longa jornada em busca de uma solução para o aprendizado inicial da demonstração

De c. 300 a.C. até o final do século XVIII, os Elementos de Euclides permaneceram como o modelo do texto do “conhecimento acadêmico”[49] da Geometria, que é o material para o processo de transposição didática. Na virada do século XIX, sob as crescentes críticas aos Elementos e o desenvolvimento das ideias progressistas sobre educação, iniciou-se um trabalho científico com o objetivo de escrever uma apresentação rigorosa da Geometria, mas com a intenção associada de facilitar sua compreensão para um leitor ávido por aprendê-la.

[48]Seguindo e compreendendo as observações de Keith Jones e Patricio Herbst (2012, p. 261-262), uso a palavra instrucional como uma interpretação – se não uma tradução – da palavra francesa didactique, embora tenha uma denotação mais ampla; mas, como o objetivo instrucional e o didático estão intimamente relacionados, isso não abre espaço para mal-entendidos graves no contexto desta Nota.

[49] (Chevallard & Bosch, 2014, fig. 1)

No entanto, trata-se de uma obra transpositiva na medida em que “melhora a organização do conhecimento e o torna mais compreensível, estruturado e preciso, a ponto de o próprio conhecimento originalmente transposto ser aprimorado”. (Chevallard & Bosch, 2014, p. MS 2).

Até o final do século XVIII, a geometria de Euclides era ensinada a uma classe privilegiada da sociedade, em particular – parafraseando Legendre – àqueles que se dedicavam à matemática; eles eram principalmente adultos. Ao longo do século XIX, com o desenvolvimento de políticas nacionais, o desafio de ensinar Geometria iniciou um processo de transposição que incluiu progressivamente questões de aprendizagem, com preocupações para segmentos cada vez maiores da população. Os casos de Dechalles, Legendre, Clairaut e Lacroix são marcos significativos desse período inicial da história do ensino de Geometria e da maneira como a questão da Prova foi discutida e abordada. O primeiro e o segundo escreveram livros didáticos com uma posição crítica explícita em relação aos Elementos seminais, enquanto os outros dois escreveram tratados pela primeira vez. Mas o trabalho dos quatro evidencia a consciência da complexidade epistêmica do projeto:

- a tensão entre provar e explicar;

- o conflito entre a abstração da Geometria como construção teórica e seu valor prático como ferramenta para inúmeras atividades humanas.

A demonstração e a demonstração eram uma preocupação central por seu papel na compreensão da Geometria e no estabelecimento da verdade das afirmações geométricas. Legendre e Lacroix incluíram a demonstração entre os termos metamatemáticos cuja compreensão era necessária para a apresentação de seus tratados. Todos discutiram a necessidade de provar, a dificuldade e a clareza das demonstrações. No entanto, apesar de ser um objeto matemático nomeado, a demonstração ainda não era constituída como objeto de ensino. A Geometria era o tema em questão e o nicho ecológico para que a demonstração fizesse sentido. Foi com o surgimento de políticas educacionais estatais que, em meados do século XIX, o processo de transposição didática começou a sério. No entanto, no início do século, Sylvestre-François Lacroix já estava ciente da complexidade epistêmica de um projeto educacional para a matemática. Seus Elementos podem ser considerados o primeiro livro didático como tal: “é seu mérito histórico ter contribuído substancialmente para a reestruturação de um corpus mal organizado e disperso de conhecimento matemático, guiado por objetivos educacionais” (Schubring, 1987, p. 43).

O processo de transposição didática da Geometria continuou a se desenvolver para responder às crescentes necessidades da indústria e da economia, e das ciências naturais.

Nessa dinâmica, a demonstração matemática permaneceu intocada em suas normas euclidianas. Organizados como um corpo profissional na virada do século XX,[50] os matemáticos reconheceram sua responsabilidade para com a educação matemática e contribuíram para a reflexão sobre o que a matemática deveria ser como conteúdo a ser ensinado. Sua preocupação era, primeiramente, garantir que ela mantivesse sua natureza teórica, não sendo reduzida a uma ferramenta a serviço de aplicações. Eles estavam cientes do problema de ensinar alunos, mas não estavam dispostos a sacrificar sua disciplina; uma das primeiras questões que consideraram foi a do rigor. Na verdade, tratava-se de decidir os limites aceitáveis da transposição didática da demonstração matemática. Esse processo didático assumiu outra dimensão quando os tomadores de decisão publicaram a especificação do "conhecimento a ser ensinado". Isso assumiu diferentes formas em diferentes nações, dependendo de sua organização e política educacional, mas o movimento foi geral.

Três etapas principais marcaram a disseminação do ensino da matemática pelos sistemas educacionais modernos do século XX e das primeiras décadas do século XXI. Elas determinaram a transposição da demonstração:

- Primeira etapa: A extensão do ensino de Geometria do 10º ao 12º ano para o 6º ao 9º ano; sendo este último parte da escola obrigatória, portanto, o ensino para todas as crianças. Isso exigiu a escolha de um momento para a introdução da demonstração matemática. Em geral, a escolha foi fazê-la no 8º ano. Este foi um verdadeiro desafio e, principalmente, um fracasso, revelando a impossibilidade de escapar de uma ruptura na natureza da matemática "antes" e "depois" da vontade de ensinar a demonstração.

- Segunda etapa: O golpe de força da Nova Matemática tornou a demonstração matemática um padrão de validação em uma matemática unificada. O rápido fracasso desse movimento radical teve como efeito a substituição, na maioria dos currículos seguintes, da demonstração matemática pelo raciocínio dedutivo associado à prioridade dada à resolução de problemas.

- Terceira etapa: a disposição de introduzir a demonstração no ensino em todos os níveis da escola obrigatória. Este objetivo não poderia ser alcançado sem renunciar aos padrões de demonstração matemática para o ensino nos níveis iniciais. Isso vem com um vocabulário que agora inclui as palavras argumentação, justificação e demonstração, mas sem

[50]The community of professional mathematicians emerged as such with journals and societies in the course of the XIX° century. A first milestone is the creation of the French journal “Annales de Mathématiques Pures et Appliquées”, founded and edited by J. D. Gergonne. It was published from 1810 to 1831. The first professional mathematical society is the Wiskundig Genootschap, founded in Amsterdam in 1778, but most others were founded in the second half of the nineteenth century (Bartle, 1995, p. 3).

estabelecer uma relação clara entre os termos (e compreender as consequências dessa ausência no ensino).

A transposição didática é um processo interminável, pois depende fortemente da evolução da sociedade, de sua prioridade e epistemologia compartilhada, bem como da evolução da própria matemática e do progresso do conhecimento em seu ensino e aprendizagem.

Como responder à questão da verdade antes da disponibilidade da prova matemática?

Até o início do século XX, a ideia de preparar a transição para a prova matemática antes de sua introdução nos currículos simplesmente não era considerada. Por assim dizer, a dificuldade de aprender a prova matemática era reconhecida, mas vista como o custo a pagar pelo engajamento na aprendizagem da matemática como disciplina. O fracasso de muitos alunos no contexto da democratização da educação matemática exigiu uma resposta mais eficaz do que aquela dada quando a psicologia do desenvolvimento levou a pensar que a transição poderia, por si só, ser possibilitada pelo acesso das crianças ao estágio operacional formal[51]. Isso exige uma evolução da epistemologia escolar necessária para responder à pergunta que melhor captura a situação contemporânea: O que deve ser ensinado antes de ensinar a prova matemática? Ou, melhor: como responder à questão da verdade na sala de aula de matemática antes de ter a prova matemática disponível?

A evolução da transposição didática evidencia uma resposta pragmática de organismos internacionais (por exemplo, TIMSS) e instituições educacionais nacionais: o ensino deve permitir o desenvolvimento de uma competência argumentativa – ou seja, justificação fundamentada – como parte da aprendizagem inicial da matemática, antes da aprendizagem da demonstração matemática[52]. Por sua vez, a pesquisa tem realizado trabalhos e projetos para responder a essas questões[53]. Mas ainda faltam contribuições e resultados suficientemente robustos para permitir que currículos e abordagens de ensino sejam concebidos de forma confiável e eficiente. A pesquisa contemporânea sobre demonstração e demonstração pinta

[51] O trabalho de Jean Piaget teve um impacto histórico e significativo na especificação curricular, possivelmente não apenas pelo que o Construtivismo trouxe para a aprendizagem das crianças, mas também pela clareza dos estágios piagetianos e sua aparente simplicidade. Na prática, as partes interessadas e os tomadores de decisão reduziram os níveis de argumentação a duas categorias: antes e depois do estágio operacional formal. O desenvolvimento cognitivo natural foi considerado o fator determinante dos níveis de argumentação. O pensamento de Piaget era um pouco mais sofisticado do que isso (ver, por exemplo, Piaget, 1973).

[52] Ou seja, o padrão euclidiano de prova, que ainda é a estrutura de referência do discurso matemático nas salas de aula.

[53] e.g. (Bieda et al., 2022; Hanna & de Villiers, 2012, Chapitre 15)

um quadro complexo da relação entre argumentação e demonstração. Há debate e talvez ainda falta de consenso, embora alguns pontos pareçam ser aceitos:

- A estrutura do texto de uma argumentação e do texto de uma demonstração elementar não são radicalmente estranhos um ao outro.

- Argumentação e demonstração têm relações estreitas no processo de resolução de problemas, mas a transição da argumentação para a demonstração requer um trabalho específico.

- Para obter o status de prova, uma argumentação precisa passar por um processo social que garanta sua aceitação coletiva pelos alunos e pelo professor

Essa proximidade sugere que a questão da relação entre argumentação e prova pode ter uma resposta que se abre para uma transposição didática da prova na forma de uma argumentação na sala de aula de matemática, aceitável tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista docente. No entanto, a argumentação não tem status formal para o matemático profissional, embora esteja presente na história da matemática e nos processos de resolução de problemas. Então, com essa ausência de status científico na matemática contemporânea: poderia a argumentação na sala de aula de matemática ser uma transposição didática da prova matemática ajustada às exigências e restrições do ensino e da aprendizagem nos anos escolares obrigatórios?

Textos institucionais contemporâneos, sejam internacionais ou nacionais, sugerem uma resposta positiva, mas não compartilham seus fundamentos. O que se obtém, em vez disso, e em primeiro lugar o que os professores obtêm, é a ideia de uma transição perfeita da argumentação para a demonstração na sala de aula de matemática. Além disso, a comprovação está presente no texto dos currículos e em seus comentários, não como um objeto (ou seja, domínio de conteúdo), mas como uma competência (ou seja, domínio cognitivo). Ela induz que não pode ser ensinada diretamente, mas sim estimulada e desenvolvida em situações que possuem características matemáticas e sociais para justificar e dar acesso a normas sociomatemáticas (P. G. Herbst, 2002b; Yackel & Cobb, 1996). Pesquisas desde o início da década de 1970 têm desenvolvido características de situações que envolvem os alunos no estabelecimento ativo da validade de uma afirmação (por exemplo, Brousseau, 1997, Capítulo 1, seção 6) e a maneira como tais situações desafiam os professores (por exemplo, Ball, 1993; P. G. Herbst, 2002a; Lampert, 1990). Andreas Stylianides (2007) propôs uma caracterização a partir da qual poderíamos começar:

1. utiliza afirmações aceitas pela comunidade da sala de aula (conjunto de afirmações aceitas) que são verdadeiras e disponíveis sem justificativa adicional;
2. emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidas e conhecidas pela comunidade da sala de aula, ou dentro do alcance conceitual dela; e
3. é comunicada com formas de expressão (modos de representação de argumentos) que são apropriadas e conhecidas pela comunidade da sala de aula, ou dentro do alcance conceitual dela." (ibid. p. 291)

Esta caracterização é apropriada, mas aplica-se a qualquer disciplina científica. É demasiado geral, deixando em aberto a questão principal para professores e educadores de matemática: quais seriam as características específicas a acrescentar para dar conta do caso da matemática?

Partiremos de uma observação: a matemática desenvolve-se a partir da matemática. Esta observação expressa a epistemologia introspectiva que cunha a sua forma de abstração. Isto não contradiz uma atividade matemática que, em muitos aspetos, se assemelha à atividade científica, mas como afirmou Christian Houzel (1979): na matemática, o «conhecimento já teorizado... desempenha o papel da instância experimental»[54]. Esta é a origem da abstração radical da matemática e da natureza específica da prova nesta disciplina.

O conjunto de afirmações aceites – critério 1 da proposta de estilínides – é mais do que um conjunto, nem é um repertório: é um conjunto organizado como um sistema que constitui o material e o meio[55] para o trabalho matemático. Foi o objetivo da construção de tal sistema que, em última análise, impulsionou a escrita dos Elementos de Euclides, ao mesmo tempo em que introduziu uma ruptura com o mundo sensorial[56]. A organização do conjunto de enunciados é consequência do fato de que qualquer um de seus elementos está relacionado a um subconjunto do todo pelos vínculos que uma demonstração estabelece.

No contexto da sala de aula, esse conjunto estruturado de enunciados não é uma teoria propriamente dita, na medida em que sua evolução é ágil, incluindo novos elementos admitidos quando necessário, e os modos de argumentação podem variar em sua natureza, tendo raízes mais fortes no consenso da comunidade do que em um fundamento formalizado. Por essa razão, sugiro que nos refiramos a ela como uma base de conhecimento estruturada[57]. Ela corresponderá ao primeiro termo da Teoria do tripleto definidor do Teorema Matemático no sentido de Alessandra Mariotti:

---

[54] Poderíamos encontrar consequências cognitivas desta afirmação em (Tall et al., 2012)
[55] Meio é usado no sentido de Teoria da situação didática (Brousseau, 1997).
[56] Isso não é contraditório com o uso de experimentos mentais em algumas das provas dos Elementos e com o reconhecimento de que o mundo físico e as outras ciências contribuem para o desenvolvimento da matemática pela importação de certas intuições ou pelo levantamento de problemas que questionam conceitos e modelos matemáticos.
[57] (Balacheff, pré-impressão)

> A prova é tradicionalmente considerada em si mesma, como se fosse possível isolá-la da afirmação à qual ela fornece suporte e do arcabouço teórico dentro do qual esse suporte faz sentido. Quando se fala em prova, todos esses elementos, embora nem sempre mencionados, estão, na verdade, envolvidos ao mesmo tempo, e não é possível compreender o sentido de uma prova matemática sem vinculá-la aos outros dois elementos: uma afirmação e, em geral, uma teoria. (2006, p. 183)

Além disso, temos que adicionar mais duas restrições para que uma argumentação atinja o padrão matemático:

- por um lado, que uma norma comum de argumentação seja aceita e que qualquer afirmação na sequência de afirmações de uma argumentação seja apoiada por uma argumentação que atenda aos mesmos requisitos ou venha da base de conhecimento ou,

- por outro lado, que seja garantido que qualquer lacuna na argumentação possa ser preenchida com uma argumentação em conformidade com a norma acordada.

Isso significa estabelecer uma prática que exige uma transição deliberada de uma concepção pragmática para uma concepção rigorosa de demonstração. Ou seja, a mudança do aluno da posição de praticante para a posição de teórico (Balacheff, 1990).

Eventualmente, é muito improvável que consigamos encontrar uma solução para uma transição perfeita da argumentação, no sentido geral, para a demonstração matemática. Por essa razão, minha posição é aceitar a criação de um objeto didático: a argumentação matemática, e trabalhar em sua definição para que ela forneça uma base para a construção de pontes instrucionais, criando as condições para que uma norma sociomatemática se torne precursora da demonstração matemática.

Este objeto, a argumentação matemática, não pode ser concebido como uma transposição da prova matemática, a menos que se considere que a função "social" desta última, dentro da comunidade científica, é constitutiva dela (Balacheff, pré-impressão). Isto seria um erro epistemológico e teórico: embora seja o produto de uma atividade humana que é certificada no final de uma No processo social, a prova matemática é independente de uma pessoa ou grupo específico (Delarivière et al.,2017). Este não será o caso de uma argumentação matemática em sala de aula. A padronização da prova em matemática, além do caráter institucional de sua referência (o conhecimento matemático), exigiu sua despersonalização, sua descontextualização e sua atemporalidade. No entanto, a argumentação é intrinsecamente carregada por um agente, individual ou coletivo, e dependente das circunstâncias de sua produção.

As características da argumentação matemática não devem apenas distingui-la de outros tipos de argumentação utilizados em atividades científicas ou não científicas, a fim de garantir a possibilidade de transição para a norma da prova matemática, mas também devem ser operacionais quando se trata de arbitrar as propostas dos alunos e, eventualmente, institucionalizá-las, a fim de organizá-las e capitalizá-las em sala de aula. A argumentação matemática requer uma institucionalização. O reconhecimento de seu caráter matemático não pode ser reduzido a um julgamento apenas sobre sua forma. Como, por exemplo, podemos arbitrar o caso do exemplo genérico que equilibra o geral e o particular, cujo equilíbrio se encontra ao final de um debate contraditório em busca de um acordo o menos possível contaminado por concessões?

Finalmente, a prova é tanto um fundamento quanto um organizador do conhecimento. No curso da aprendizagem, ela contribui para reforçar a evolução do conhecimento e fornecer ferramentas para sua organização. No ensino, legitima novos conhecimentos e constitui um sistema: conhecimento e prova, interligados, fornecem à base de conhecimento uma estrutura que pode funcionar como precursora da base teórica necessária à matemática. A função de institucionalização das situações de prova coloca a validação explícita sob a arbitragem do professor, que é, em última análise, o garantidor de seu caráter matemático. Essa dimensão social, no sentido de que o funcionamento científico depende de uma organização construída e aceita, está no cerne da dificuldade de ensinar prova em matemática.

Agradecimentos

Sou grato a Gert Schubring por sua leitura cuidadosa e atenção à precisão histórica. Gostaria de agradecer particularmente a Evelyne Barbin, Gila Hanna, Patricio Herbst, Janine Rogalski e Nathalie Sainclair por seus comentários e sugestões. É claro que a responsabilidade por todo o artigo, e especialmente por quaisquer erros ou interpretações errôneas remanescentes, é exclusivamente minha.

Referências

Ausejo, E., & Matos, J. M. (2014). Mathematics Education in Spain and Portugal. In A. Karp & G. Schubring (Éds.), Handbook on the History of Mathematics Education (p. 283-302). Springer Science & Business Media.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. For The Learning of Mathematics, 10(3), 2-8.

Balacheff, N. (2022). Penser l’argumentation pour la classe de mathématique. Petit x, 116, 75-105https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-116-petit-x/4-penser-l-argumentation-pour-la-classe-de-mathematique-1114578.kjsp?RH=1661422241433

Balacheff, N. (preprint). Mathematical Argumentation, a Precursor Concept of Mathematical Proof. Proceedings ICME14 Invited Lectures, 17.

Balacheff – Notes for the study of the didactic transposition of proof - 03/03/2023 09:20 26 / 29 Delarivière, S., Frans, J., & Van Kerkhove, B. (2017). Mathematical Explanation: A Contextual Approach. Journal of Indian Council of Philosophical Research, 34(2), 309-329. https://doi.org/10.1007/s40961-016-0086-2

Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon : Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. The Elementary School Journal, 93(4), 373-397.

http://www.jstor.org/stable/1002018

Barbin, E. (2007). On the argument of simplicity in Elements and schoolbooks of Geometry. Educational Studies in Mathematics, 66(2), 225-242. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9074-9

Barbin, É. (2021). L'écriture de manuels de géométrie pour les Écoles de la Révolution : Ordre des connaissances ou « élémentation ». In A. Le Goff & C. Demeulenaere-Douyère (Éds.), Enseignants et enseignements au cœur de la transmission des savoirs. Éditions du Comité des travaux historiques et scientifiques. https://doi.org/10.4000/books.cths.14562

Barbin, E., & Menghini, M. (2014). History of teaching of geometry. In A. Karp & F. Furinghetti (Éds.), Handbook on the History of Mathematics Education (p. 473-492). Springer New York.

Bartle, R. G. (1995). A brief history of the mathematical literature. Publishing Research Quarterly, 11(2), 3-13. https://doi.org/10.1007/BF02680421

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. Educationa Studies in Mathematics, 7(1-2), 23-40. https://doi.org/10.1007/BF00144356

Bieda, K. N., Conner, A., Kosko, K. W., & Staples, M. (Éds.). (2022). Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6

Bock, D. D., & Vanpaemel, G. (2015). Modern mathematics at the 1959 OEEC Seminar at Royaumont. In K. Bjarnadottir, F. Furinghetti, J. Prytz, & G. Schubring (Éds.), Proceedings of the Third Conference on the History of Mathematics Education (p. 151-168). Department of Education, Uppsala University.

Boero, P. (Éd.). (2007). Theorems in school : From history, epistemology and cognition to classroom practice. Sense Publishers.

Brentjes, S. (2014). Teaching the Mathematical Sciences in Islamic Societies Eighth–Seventeenth Centuries. In A. Karp & G. Schubring (Éds.), Handbook on the History of Mathematics Education (p. 85-107). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_5

Brentjes, S. (2019). Pourquoi et comment étudier l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans les sociétés islamiques entre 750 et 1500. Médiévales, 77, 11-35.

https://doi.org/10.4000/medievales.10194

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Kluwer Academic Publishers. 1997

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques :

L'approche anthropologique. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des

mathématiques, 91-120.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. In S. Lerman (Éd.), Encyclopedia of Mathematics Education (p. 170-174). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_48

Chevallard, Y., Bosch, M., & Kim, S. (2015). What is a theory according to the anthropological theory of the didactic? Proceedings of the Ninth Congressof the European Society for Research in Mathematics Education, 2614-2620.

Clairaut, A. C. (1741). Elemens de géométrie (1753e éd.). David fils. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k15218356

Condillac, E. (1746). Essai sur l'origine des connaissances humaines (édition 1798, édition numérique UQAC 2010). Ch. Houel imprimeur. http://classiques.uqac.ca/

Cunning, D. (2015). Analysis versus Synthesis. In L. Nolan (Éd.), The Cambridge Descartes Lexicon (p.7-12). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511894695.007

Dechalles, P. (1660). Les elemens d'Euclide (M. Ozanam, Trad.; Nouvelle édition 1720). Claude Jombert.

D'Enfert, R. (2003). Inventer une géométrie pour l'école primaire au XIXe siècle. Tréma, 22, 41-49. https://doi.org/10.4000/trema.1536

D'Enfert, R., & Gispert, H. (2011). Une réforme à l'épreuve des réalités : Le cas des « mathématiques modernes » au tournant des années 1960-1970. L'État et l'éducation, 1808-2008, 27-49.

Descartes, R. (1953). Œuvres et lettres. Gallimard.

Fehr, H. (1911). Compte-rendu du congrès de Milan. A1- La rigueur dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes. IV - Deuxième séance. L'enseignement mathématique, 13, 461-468. https://dx.doi.org/10.5169/seals-13544

Fehr, H. F. (1908). Rapport préliminaire sur l'organisation de la commission Internationale de l'enseignement mathématique et le plan général de ses travaux (p. 9). https://www.icmihistory.unito.it/documents/RapportPreliminaire.pdf

France> 10. 30 octobre 1794 (9 brumaire an III). Décret relatif à l'établissement des écoles normales. (1992). In L'enseignement du Français à l'école primaire – Textes officiels.: Vol. Tome 1 : 1791-1879 (p. 50-51). Institut national de recherche pédagogique. https://www.persee.fr/doc/inrp_0000-0000_1992_ant_5_1_1722

Furinghetti, F., & Giacardi, L. (2008). The First Century of the International Commission on

Mathematical Instruction (1908-2008)—History of ICMI. https://www.icmihistory.unito.it/timeline.php

Garden, R. A., Lie, S., Robitaille, D. F., Angell, C., Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P., & Arora, A. (2008). TIMSS Advanced 2008 assessment frameworks. International

Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The

Netherlands. Tel: +31-20-625-3625; Fax: +31-20-420-7136; e-mail: department@iea.nl; Web

site: http://www.iea.nl. https://timssandpirls.bc.edu/timss_advanced/frameworks.html

Gispert, H. (2002). Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes de mathématiques dans la société française auXXe siècle. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34(4), 158-163. https://doi.org/10.1007/BF02655809

Gispert, H. (2014). Mathematics Education in France: 1800–1980. In A. Karp & G. Schubring (Éds.), Handbook on the History of Mathematics Education (p. 229-240). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_11

Glaeser, G. (1983). A propos de la pédagogie de Clairaut vers une nouvelle orientation dans l'histoire de l'éducation—Revue RDM. Recherches en didactique des mathématiques, 4(3), 332-344. https://revue-rdm.com/1983/a-propos-de-la-pedagogie-de/

González, G., & Herbst, P. G. (2006). Competing Arguments for the Geometry Course: Why Were American High School Students Supposed to Study Geometry in the Twentieth Century? The International Journal for the History of Mathematics Education, 1(1), 7-33.

http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.404.6320&rep=rep1&type=pdf#p

age=11

Goodstein, R. L. (1962). Reviewed Work(s): New Thinking in School Mathematics: Synopses for Modern Secondary School Mathematics. The Mathematical Gazette, 46(355), 69-72.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. Educational Studies in

Mathematics, 44, 5-23.

Hanna, G., & de Villiers, M. (Éds.). (2012). Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study (corrected edition 2021). Springer.

Herbst, P. (1999). On proof, the logic of practice of geometry teaching and the two-column proof format [Webzine]. Lettre de la Preuve. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990102Theme/990102ThemeUK.html

Herbst, P. G. (2002a). Engaging Students in Proving: A Double Bind on the Teacher. Journal for Research in Mathematics Education, 33(3), 176. https://doi.org/10.2307/749724

Herbst, P. G. (2002b). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. Educational Studies in Mathematics, 49, 283-312.

Balacheff – Notes for the study of the didactic transposition of proof - 03/03/2023 09:20 27 / 29 Hill, S. (1976). Issues from the NACOME Report. The Mathematics Teacher, 69(6), 440-446. http://www.jstor.org/stable/27960539

Houzel, C. (1979). Histoire des mathématiques et enseignement des mathématiques. Bulletin Inter-IREM, 18, 3-6.

Høyrup, J. (2014). Mathematics Education in the European Middle Ages. In A. Karp & G. Schubring (Éds.), Handbook on the History of Mathematics Education (p. 109-124). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_6

Jones, K., & Herbst, P. (2012). Proof, Proving, and Teacher-Student Interaction: Theories and

Contexts. In G. Hanna & M. de Villiers (Éds.), Proof and Proving in Mathematics Education

(Vol. 15, p. 261-277). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_11

Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992). Didactic Transposition in Mathematics Textbooks. For the Learning of Mathematics, 12(1), 6.

Karp, A. (2014). Mathematics education in Russia. In A. Karp & G. Schubring (Éds.), Handbook of the History of Mathematics Education (p. 303-322). Springer New York.

Karp, A., & Schubring, G. (Éds.). (2014). Handbook on the History of Mathematics Education. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2

Kilpatrick, J. (2014). Mathematics Education in the United States and Canada. In A. Karp & G. Schubring (Éds.), Handbook on the History of Mathematics Education (p. 323-334). Springer Science & Business Media.

Kline, M. (1976). NACOME: Implications for Curriculum Design. The Mathematics Teacher, 69(6), 449-454. http://www.jstor.org/stable/27960539 Kuntzmann, J. (1976). Évolution et étude critique des enseignements de mathématique. CEDIC-

Nathan.

Lacroix, S. F. (1799). Élémens de géométrie, à l'usage de l'école centrale des quatre nations (1804e éd.). Courcier, imprimeur libraire pour les mathématiques. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k147494xLakanal, J. (1795). Rapport fait au Conseil des Cinq-cents, par Lakanal, un de ses membres, sur les livres élémentaires présentés au concours ouvert par la loi du 9 pluviôse, an II: séance du 14 brumaire, an IV ([Reprod.]) Corps législatif, Conseil des Cinq-cents. 43. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k489424

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. American Educational Research Journal, 27(1), 29-63.

Lee, P. Y. (2014). Mathematics Education in Southeast Asia. In A. Karp & G. Schubring (Éds.), Handbook on the History of Mathematics Education (p. 384-388). Springer Science &

Business Media.

Legendre, A.-M. (1752-1833) A. du texte. (1794). Éléments de géométrie, avec des notes. Par Adrien-Marie Legendre. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1521831j

Loget, F. (2004). Héritage et réforme du quadrivium au XVIe siècle. La Pensée numérique, 211-230.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Éds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (p. 173-204). Sense Publishers. http://math.unipa.it/~grim/YESS-5/PMEbook_MariottiNew.pdf

Mullis, I. V. S., Ed, Martin, M. O., Ed, Boston College, T. & P. I. S. C., & International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (Netherlands). (2017).

TIMSS 2019 Assessment Frameworks. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands. Tel: +31-20-625-3625; Fax: +31-20-420-7136; e-mail: department@iea.nl; Web site: http://www.iea.nl. http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/

Mullis, I. V. S., International Association for the Evaluation of Educational Achievement, & TIMSS (Éds.). (2007). TIMSS 2007 assessment frameworks. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. https://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/frameworks.html

Mullis, I. V. S., & Martin, M. O. (2014). TIMSS advanced 2015 assessment framework. TIMSS & PIRLS International Study Center.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G., O'Sullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2009). TIMSS 2011 assessment frameworks. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Nabonnand, P. (2007). Les réformes de l'enseignement des mathématiques au début du XXe siècle. Une dynamique à l'échelle international. In H. Gispert, N. Hulin, & C. Robic (Éds.), Sciences et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XXe siècle (p. 293-314). INRP & Vuibert.

NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSum mary.p

df Netz, R. (1999). The shaping of deduction in Greek Mathematics. Cambridge University Press.

NGA Center, & CCSSO. (2010). Common core state standard for mathematics. National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, Washington D.C. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf

O'Connor, K. M., Mullis, I. V. S., Garden, R. A., Martin, M. O., & Gregory, K. D. (2003). TIMSS assessment frameworks and specifications 2003 (2nd ed). International Study Center.

https://timssandpirls.bc.edu/timss2003i/frameworksD.html OEEC. (1961). New Thinking in School Mathematics. Organisation for European Economic Cooperation.

O'Reilly, M. F. (1902). Plane and Solid Geometry. By Arthur Schultze, Ph.D., and F. L. Sevenoak, A.M., M.D. The Macmillan Company, New York. Science, 15(375), 384-386.

https://doi.org/10.1126/science.15.375.384

Pehkonen, E. (1997). Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the

Psychology of Mathematics Education. University of Helsinki. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED416082.pdf

Piaget, J. (1973). Remarques sur l'éduction mathématique. Math-école, 12(58), 1-7. https://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/crypt/index.php?DOCID=865 Reid, D. A., &

Knipping, C. (2010). Proof in mathematics education: Research, learning and teaching.

Sense Publishers. Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. For the Learning of Mathematics, 7(3), 41-50.

Schubring, G. (2007). La diffusion internationale de la géométrie de Legendre—Différentes visions des mathématiques. Revue française d'éducation comparée, 2, 31-55.

Schubring, G. (2015). From the few to the many: On the emergence of mathematics for all.

Recherches En Didactique Des Mathématiques, 35(2), 221-260.

Silver, E. A. (2000). Spotlight on the standards: Improving Mathematics Teaching and Learning: How Can Principles and Standards Help? Mathematics teaching in the Middle School, 6(1), 20-23. http://www.jstor.org/stable/41182261

Sinclair, N. (2006). The History of the Geometry Curriculum in the United States. Information Age Pub.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. Journal for Research in

Mathematics, 38(3), 289-321. Stylianides, A. J., & Harel, G. (Éds.). (2018). Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Éds.), Proof and Proving in Mathematics Education (Vol. 15, p. 13-49). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2

Wentworth, G. A. (1877). Elements of geometry. (1881e éd.). Ginn and Heath.https://hdl.handle.net/2027/hvd.32044097014377

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in

Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 458-477.

https://doi.org/10.2307/749877