

Generalização de sequências de padrão por estudantes dos anos iniciais: limites e possibilidades

Generalization of pattern sequences by elementary school students: limits and possibilities

Generalización de secuencias de patrón por estudiantes de años iniciales: límites y posibilidades

Généralisation des séquences de motifs par des élèves des premières années : limites et possibilités

João Alberto da Silva
Universidade Federal do Rio Grande – FURG
Doutor em Educação
<https://orcid.org/0000-0002-5259-7748>

Alina Galvão Spinillo
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Doutora em Psicologia do Desenvolvimento
<https://orcid.org/0000-0002-6113-4454>

Vania Finholdt Angelo Leite
Universidade Estadual do Rio de Janeiro – UERJ
Doutora em Educação
<https://orcid.org/0000-0003-4583-7165>

Vinicius Carvalho Beck
Instituto Federal Sul-riograndense – IFSul
Doutor em Educação em Ciências
<https://orcid.org/0000-0002-3005-6553>

Resumo

O estudo investigou a influência do tipo de sequência de padrão e da localização da incógnita na resolução de tarefas que requerem a generalização algébrica. Estudantes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental foram solicitados a resolver um problema de sequência de padrão repetitivo e outro de padrão não-repetitivo. Em cada problema havia três perguntas relativas à posição da incógnita: posição imediata, próxima e distante. Em todos os anos escolares o desempenho foi melhor na sequência de padrão

repetitivo do que na sequência de padrão não-repetitivo e quando a incógnita era imediata, seguida da próxima e da distante. O maior desafio, mesmo no 5º ano, consistiu na resolução de problemas de padrão não-repetitivo quando a incógnita era distante. Aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico relativos à generalização foram identificados, sendo apontadas implicações educacionais e questões a serem investigadas em pesquisas sobre a generalização algébrica e a identificação de padrões.

Palavras-chave: Generalização algébrica, Sequência de padrão, Incógnita, Ensino fundamental.

Abstract

The study investigated the influence of the type of pattern and the location of the unknown element in a sequence on solving tasks requiring algebraic generalization. First to 5th graders of Elementary School were asked to solve a sequence problem with a repetitive pattern and another with a non-repetitive pattern. Each problem contained three questions regarding the position of the unknown element in the sequence: immediate, near, and distant. In all grades, performance was better in the repetitive pattern sequence than in the non-repetitive, and when the unknown was immediate, followed by the near, and then the distant. The greatest challenge, even for the 5th graders, was solving non-repetitive pattern problems when the unknown was distant. Aspects of the development of algebraic thinking related to generalization were identified, highlighting educational implications and questions for further research on algebraic generalization and pattern identification.

Keywords: Algebraic generalization, Pattern sequence, Unknown, Elementary education.

Resumen

El estudio investigó la influencia del tipo de secuencia de patrón y de la localización de la incógnita en resolución de tareas que requieren la generalización algebraica. Estudiantes de 1º a 5º año de Educación Primaria

resolvieron un problema de patrón repetitivo y otro de patrón no repetitivo. Cada problema incluía tres preguntas relativas a la posición de la incógnita: inmediata, próxima y distante. En todos los años escolares, el desempeño fue mejor con el patrón repetitivo que con el patrón no repetitivo, y cuando la incógnita era inmediata, seguida de la próxima y de la distante. El mayor desafío, aún para 5º año, consistió en la resolución de problemas de patrón no repetitivo cuando la incógnita era distante. Se identificaron aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico relacionados con la generalización, señalándose implicaciones educativas y cuestiones a ser investigadas en investigaciones sobre la generalización algebraica y la identificación de patrones.

Palabras-clave: Generalización algebraica; Secuencia de patrón; Incógnita; Educación primaria.

Résumé

L'étude a examiné l'influence du type de séquence de motifs et de la position de l'inconnu sur la résolution de tâches nécessitant une généralisation algébrique. Les élèves du CP au CM2 devaient résoudre un problème de séquence avec un motif répétitif et un autre avec un motif non répétitif. Chaque problème comportait trois questions relatives à la position de l'inconnu : immédiate, proche et lointaine. Dans tous les niveaux, les performances étaient meilleures dans la séquence de motifs répétitifs que dans la séquence de motifs non répétitifs, et ce, lorsque l'inconnu était immédiate, suivie de la proche, puis de la lointaine. Le plus grand défi, même en CM2, était de résoudre des problèmes de motifs non répétitifs lorsque l'inconnu était lointain. Les aspects du développement de la pensée algébrique liés à la généralisation ont été identifiés, et les implications pédagogiques et les questions pour des recherches ultérieures sur la généralisation algébrique et l'identification de motifs ont été soulignées.

Mots-clés : Généralisation algébrique ; Séquence de motifs ; Inconnu ; École primaire.

Generalização de Sequências de Padrão por Estudantes dos Anos Iniciais: Limites e Possibilidades

Introdução

Tradicionalmente, a Matemática nos anos iniciais da escolaridade se concentrou no domínio da Aritmética e na fluência computacional. Todavia, o ensino de Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental sofreu grandes alterações nos últimos anos. Uma delas se refere à inclusão da Álgebra como unidade temática. Tanto no Brasil, como oficializado na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), como no exterior (Nctm, 2000), o desenvolvimento do pensamento algébrico passou a ter um espaço nesses segmentos da escolaridade que tradicionalmente se voltavam exclusivamente para o desenvolvimento do pensamento aritmético. Uma das alternativas para operacionalizar essa proposta seria antecipar o ensino da Álgebra, reduzir o espaço dedicado à Aritmética e ensinar Álgebra após os procedimentos aritméticos terem sido dominados pelos estudantes. Contudo, além de simplista, essa alternativa é inadequada por desconsiderar a possibilidade de integrar esses dois campos do conhecimento matemático. Para alguns autores, é necessário não apenas estabelecer uma relação entre eles, mas enfatizar essa relação que já existe, ressaltando a natureza algébrica da Matemática elementar (e.g., Carraher & Schliemann, 2018; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007; Vergnaud, 1988). A princípio pode-se pensar que esta articulação consiste em uma estratégia didática; contudo, na realidade, essa articulação é de natureza conceitual uma vez que é possível algebrizar a Aritmética.

Mason (2018) intitula um capítulo de sua autoria com uma pergunta desafiadora: Quão cedo é muito cedo para ensinar Matemática algebricamente? A resposta do autor é que nunca é muito cedo, afirmando que para aprender Aritmética é necessário pensar algebricamente, mesmo sem o uso de símbolos (letras e números). De acordo com Mason, Aritmética sem a generalização é um ritual, enquanto a Aritmética que requer das crianças uma compreensão da generalização é matemática.

Neste capítulo foram apresentadas e discutidas uma série de atividades e as formas de resolução adotadas por crianças da Educação Infantil usadas por pesquisadores para investigar e desenvolver o pensamento algébrico. Por meio desses exemplos, o autor traz argumentos em defesa da relação entre Álgebra e Aritmética.

Essa perspectiva se baseia em resultados de estudos que de forma articulada e integrada deram origem ao que a literatura denomina *Early Algebra* que se trata do pensamento algébrico relativo a noções iniciais apresentadas por crianças. Blanton e Kaput (2011) apontam a importância de desenvolver o raciocínio algébrico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Contudo, como esclarecem Carraher, Schliemann e Schwartz (2017), a *Early Algebra* não é o mesmo que ensinar Álgebra mais cedo, mas desenvolver o raciocínio matemático de modo a envolver uma compreensão mais organizada e potente das estruturas matemáticas, em que a linguagem e outras formas de representação têm papel importante e não apenas a computação numérica. Nesta direção, Lins e Kaput (2004) argumentam que iniciar o ensino da Álgebra mais cedo não significa ensinar a mesma Álgebra usualmente ensinada para crianças mais velhas, mas sim apresentar novas maneiras de pensar algebricamente e fazê-las imergir na cultura da álgebra.

Segundo Blanton et al. (2007), apesar de ser de difícil definição por apresentar variações entre pesquisadores, há uma concordância de que a *Early Algebra* envolve duas instâncias centrais: (i) generalizar, ou identificar, expressar e justificar a estrutura, propriedades e relações matemáticas; (ii) raciocinar e agir a partir de generalizações. Em vista disso, comentam os autores, as pesquisas sobre este tema tendem a se concentrar no uso da Aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (denominada Aritmética Generalizada), descrever relações funcionais (pensamento funcional) e na generalização de padrões (numéricos, quantitativos, geométricos). Considerada uma forma de raciocinar, a *Early Algebra* traz significado e profundidade à compreensão de conceitos já ensinados, possibilitando generalizar as relações (como

conhecer o efeito de operações sobre números e a covariação entre fatores) e as propriedades matemáticas (a comutatividade, por exemplo). Sua relevância está também associada ao desenvolvimento de uma compreensão avançada de conceitos complexos necessários para o sucesso em anos escolares subsequentes.

Um aspecto que é constantemente enfatizado ao se tratar do pensamento algébrico é a generalização. Na realidade, a capacidade de generalizar é essencial para o desenvolvimento do conhecimento matemático de forma ampla (Krutetskii, 1976), sendo sua aquisição considerada um dos objetivos centrais da Educação Matemática (Nctm, 2000). A relevância desta noção para o pensamento algébrico é reconhecida pelos estudiosos da área (e.g., Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Kaput, 1999; Mason, 1996).

Pesquisadores afirmam que o pensamento algébrico é o processo pelo qual são estabelecidas generalizações, identificadas regularidades e feitas previsões que extrapolam a concretude das situações, permitindo identificar o que é constante ou o que varia em uma sequência de padrões (e.g., Blanton & Kaput, 2005; Canavarro, 2007; Kaput, 2008; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007; Radford, 2010).

Relações entre o pensamento algébrico e o aritmético são frequentemente apontadas, de forma que muitos pesquisadores afirmam que as operações aritméticas poderiam ser introduzidas como funções (e.g., Carraher & Schliemann, 2016; 2018; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007; Carraher et al., 2006; Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2016). Usiskin (1988), por exemplo, concebe a Álgebra como a Aritmética generalizada. Apesar das relações entre o pensamento algébrico e o aritmético, Radford e Peirce (2006) comentam que a generalização algébrica requer transformar uma dada relação em uma regra geral, não sendo isso necessário em uma generalização aritmética. Para Radford (2012), a generalização algébrica consiste em: (a) identificar características comuns acerca de alguns elementos de uma sequência; (b) generalizar essas características a todos os termos da sequência; e (c) usar essas

características comuns para deduzir uma expressão (verbal ou matemática) ou algum tipo de representação simbólica que permita prever ou calcular qualquer termo da sequência.

Stacey (1989) e Vale (2013) fazem a importante distinção entre tarefas de sequências de padrão que envolvem a generalização próxima e a generalização distante. Segundo as autoras, tarefas que envolvem a generalização próxima requerem que seja encontrado um termo próximo em uma sequência, podendo isso ser alcançado por meio da contagem, de desenhos por exemplo. Por outro lado, tarefas que envolvem a generalização distante requerem que seja encontrado o termo longínquo em uma sequência, o que exige a compreensão de uma regra geral. Ainda a esse respeito, Vale e Barbosa (2019) comentam que na generalização próxima há o emprego de estratégias recursivas, enquanto para uma generalização distante é necessário mobilizar relações funcionais entre os elementos de uma sequência. As generalizações próximas demandam processos indutivos para sua solução, enquanto as distantes implicam o uso de processos dedutivos mais elaborados.

A identificação de padrões é fundamental na formação de uma generalização, pois, compreender a lógica do padrão é o cerne do desenvolvimento do pensamento algébrico (Erdogan & Ay, 2022; Kaput, 1999; Du Plessis, 2018; Stacey, 1989; 2006; Zazkis & Liljedahl, 2002). Padrões consistem em uma repetição sistemática ou em uma mudança sistemática de uma estrutura matemática. Em padrões repetitivos os elementos ou termos de uma sequência são repetidos ciclicamente (Threlfall, 2005).

Lian e Yew (2011) discutem acerca das diferentes configurações que os padrões podem assumir em uma tarefa. Por exemplo, padrões repetitivos podem envolver apenas um atributo (cor, forma, tamanho, números, letras etc.) ou mais de um (formas de diferentes tamanhos, formas de diferentes cores etc.); assim como envolver sequências longas (com vários termos) ou curtas (com apenas dois termos). A combinação desses aspectos torna a sequência mais simples ou mais complexa. As

relações entre os termos dos padrões podem se caracterizar por: (i) serem crescentes (5, 8, 11, 14, ...) ou decrescentes (14, 11, 8, 5, ...); (ii) se alterarem de forma crescente (3, 5, 8, 12, 17, ...) ou decrescente (17, 12, 8, 5, 3, ...); e (iii) por se alterarem de forma geométrica (3, 9, 27, 81, ...).

Santana e Magina (2025) compararam o desempenho de estudantes do 4º e 6º ano na resolução de tarefas que envolviam sequências de padrão crescente repetitivo. As sequências eram constituídas por termos numéricos e icônicos. De modo geral, os dados revelaram uma progressão entre os anos escolares, porém o fato de ser uma sequência numérica ou icônica não foi fator determinante do desempenho, tendo a localização da incógnita um impacto mais expressivo no sucesso dos estudantes que tiveram dificuldades com a incógnita distante.

Amit e Neria (2007) analisaram as estratégias de generalização, justificativas e notações adotadas por estudantes de 11-13 anos, competentes em Matemática, na resolução de problemas de sequência de padrão. Três tarefas foram apresentadas, cada uma envolvendo itens relativos a generalizações próximas e distantes. Por meio de uma análise qualitativa dos procedimentos utilizados pelos participantes foi possível identificar duas estratégias de generalização: (i) a global-recursiva, de natureza local e operacional, permitia expandir as sequências operacionalmente, mas de forma limitada a por ser efetiva nos casos de generalização próxima; e (ii) a global-funcional era de natureza conceitual, sendo muito mais efetiva que a recursiva por garantir o acerto em todos os casos, inclusive aqueles relativos à generalização distante, permitindo que os participantes identificassem a posição de qualquer termo da sequência, descobrindo as variáveis, as constantes e suas relações. De modo geral, os participantes apresentavam flexibilidade em transitar entre diferentes formas de representação (pictórica, simbólica e verbal) e tendiam a substituir procedimentos aditivos por multiplicativos que eram mais efetivos na resolução das tarefas. O estudo reiterou o papel central desempenhado pela generalização no raciocínio algébrico

Enquanto Amit e Neria (2007) estavam interessados em investigar estudantes com um bom nível de conhecimento matemático, outros estudiosos se voltam para crianças mais jovens, com vistas a examinar a emergência do pensamento algébrico (e.g., Borralho et al., 2007; Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011; Rodrigues & Serra, 2015).

Rodrigues e Serra (2015), por exemplo, investigaram como o pensamento algébrico emergia em crianças de quatro anos de idade, examinando as estratégias que adotavam para criar, identificar, analisar e generalizar padrões repetitivos. A pesquisa, de natureza qualitativa, foi conduzida no ambiente escolar, sendo os dados registrados em áudio, vídeo e fotos das produções das crianças ao resolverem tarefas envolvendo padrões. Os procedimentos de resolução foram analisados, assim como os diálogos mantidos entre elas e a professora e entre as próprias crianças. As autoras destacam a relevância de atividades que requeriam não apenas completar sequência de padrões oferecidos às crianças, mas a criação de padrões repetitivos por elas próprias. Essas atividades foram consideradas uma abordagem que facilitava a compreensão das crianças acerca da noção de padrão e a tomada de consciência acerca da estrutura da sequência. Segundo Borralho et al. (2007), a aprendizagem de padrões na pré-escola auxilia o desenvolvimento do pensamento lógico, sendo uma forma de explorar outros conteúdos matemáticos e criar uma base para a futura aprendizagem da álgebra.

Esta perspectiva é reiterada por Papic, Mulligan e Mitchelmore (2011) que enfatizam que explorar padrões repetitivos na Educação Infantil é uma abordagem apropriada para este neste segmento escolar, como evidenciado no estudo de intervenção conduzido por esses autores. Neste estudo, as crianças do grupo experimental demonstraram uma maior compreensão da unidade de repetição dos padrões do que as do grupo controle, tanto no pós-teste como em avaliações de acompanhamento um ano após a intervenção.

Warren (2005) examinou as ações do professor que tinham por objetivo estimular os estudantes de nove anos de idade a considerar

padrões repetitivos como uma relação de covariação. Os resultados revelaram que a instrução explícita acerca desta relação auxiliava os estudantes a identificar os padrões e a expressar essa relação de forma abstrata. A conclusão foi que problemas de padrão são muito eficientes em revelar a habilidade de generalizar e simbolizar e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Objetivos e proposição do estudo

Os estudos apresentados ressaltam a importância da identificação de padrões e a compreensão de sua lógica na formação de uma generalização, que é o cerne do pensamento algébrico. Essa relevância é reiterada em pesquisas conduzidas com pré-escolares e com estudantes do Ensino Fundamental em que sequências de padrão repetitivo são apresentadas às crianças. Alguns autores descrevem as diferentes configurações que os padrões repetitivos podem assumir em uma tarefa, enquanto outros comentam acerca da natureza da localização da incógnita que é o termo que precisa ser descoberto em uma sequência, fazendo a importante distinção entre tarefas que envolvem a generalização próxima e a generalização distante. Esses pontos, tomados em conjunto, revelam a necessidade de se investigar a generalização algébrica por meio da associação entre diferentes tipos de sequências de padrão e a localização da incógnita em crianças do Ensino Fundamental. Um estudo com esta configuração pode revelar os limites e as possibilidades do raciocínio das crianças frente à capacidade de fazer generalizações algébricas, bem como pode contribuir com implicações educacionais.

A partir dessas considerações, a presente pesquisa tem por objetivo examinar a influência do tipo de sequência de padrão e da localização da incógnita no desempenho de estudantes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de tarefas que requerem a generalização algébrica. Para isso, os seguintes aspectos são considerados:

(i) a natureza da sequência, sendo investigadas sequência de padrão repetitivo e não-repetitivo. A hipótese é que as crianças terão um

melhor desempenho no primeiro tipo de sequência do que no segundo. Enquanto sequências de padrão repetitivo são amplamente tratadas nas pesquisas na área (ver Lian & Yew, 2011), sequências de padrão não-repetitivo são menos consideradas. Na presente investigação, padrão não-repetitivo seria aquele que envolve uma constante em todos os termos da sequência; ou seja, cada termo da sequência envolve uma relação entre a constante e outro aspecto que varia (exemplo: uma bolinha preta e duas brancas na primeira posição, uma bolinha preta e quatro brancas na segunda posição, uma bolinha preta e seis brancas na terceira posição, ...). Essa sequência está associada a uma função afim.

(ii) a localização da incógnita em cada uma das sequências apresentadas: imediata, próxima e distante. A incógnita imediata é aspecto ainda pouco examinado em tarefas de sequência de padrão, porém é considerado relevante que merece ser investigado, como apontado por Merlini, Spinillo e Magina (2025). Essas localizações representam diferentes níveis de generalização requeridos para a resolução de problemas algébricos. A hipótese é que as crianças terão um melhor desempenho quando a incógnita é imediata do que quando a incógnita é próxima ou distante.

(iii) a escolaridade dos participantes: estudantes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. A hipótese é que o desempenho será melhor com o avanço da escolaridade. A predição é que os estudantes do 1º ao 3º ano terão grande dificuldade com problemas de sequência de padrão não-repetitivo em que a incógnita é distante, mas que essa dificuldade será superada pelos estudantes do 4º e 5º ano.

Método

O estudo se caracteriza como pesquisa empírica descritiva e comparativa de natureza quantitativa que buscou examinar as condições sob as quais o desempenho dos estudantes em tarefas que envolvem sequências de padrão varia com o avanço da escolaridade. A análise dos dados versou sobre o desempenho de um número expressivo de

participantes e não sobre os processos de resolução por eles adotados, justificando-se, assim, a escolha de uma abordagem quantitativa que permitisse mapear o progresso e as limitações em relação às tarefas apresentadas.

Participaram do estudo 985 crianças de ambos os sexos, estudantes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental de escolas públicas de cinco cidades brasileiras de três regiões do país: sul (Rio Grande e Pelotas), sudeste (Rio de Janeiro) e nordeste (Ilhéus e Feira de Santana). Os participantes foram assim distribuídos: 130 estudantes do 1º ano, 149 do 2º ano, 214 do 3º ano, 222 do 4º ano e 270 do 5º ano. As crianças não apresentavam limitações sensoriais ou qualquer tipo de transtorno do neurodesenvolvimento, sendo esses aspectos considerados fatores de exclusão para participação no estudo. De forma voluntária, os participantes assinaram o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido Lúdico (TALE-LÚDICO) e seus responsáveis assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). O projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CAAE 58016222.9.0000.5526) atendendo a todas as disposições legais e éticas no campo das Ciências Humanas.

Ainda que os participantes fossem oriundos de cidades localizadas em diferentes regiões do país, este fato não foi considerado um aspecto a ser analisado na presente investigação, uma vez que os objetivos não estavam relacionados ao papel desempenhado por possíveis diferenças regionais na realização das tarefas. Embora a variável regional seja relevante, podendo ser investigada em pesquisa futura voltada para este fim, no presente estudo a diversidade de regiões visou apenas obter uma amostra mais ampla de participantes.

Em uma única seção, com tempo livre, os participantes foram solicitados a realizar uma tarefa composta por dois itens: um envolvendo uma sequência de padrão repetitiva (Item 1) e outro a uma sequência de padrão não repetitiva (Item 2). Cada item continha três perguntas relativas à localização da incógnita: incógnita imediata (Pergunta A), incógnita

próxima (Pergunta B) e incógnita distante (Pergunta C), como consta na Figura 1.

Incógnita imediata é o termo desconhecido posicionado imediatamente após o último termo conhecido que é apresentado no item. A relação entre a posição e o termo que ali se encontra pode ser estabelecida simplesmente com o apoio restrito nos suportes de representação apresentados. Incógnita próxima é o termo desconhecido cuja posição se afasta do último termo conhecido que é apresentado no item. A relação entre a posição e o termo que ali se encontra pode ser estabelecida sem necessariamente envolver a generalização, por meio da produção dos termos desconhecidos até se alcançar o termo que se deseja conhecer. Incógnita distante é o termo desconhecido cuja posição se afasta expressivamente do último termo conhecido que é apresentado no item. A relação entre a posição e o termo a ser conhecido só pode ser estabelecida por meio da generalização que permite deduzir qualquer termo desconhecido sem a necessidade de produzir todos os termos até alcançar o termo que se deseja conhecer.

Figura 1

Item 1 (sequência de padrão repetitiva), Item 2 (sequência de padrão não repetitiva)

1) João tem muitas bolinhas. Ele sempre arruma elas assim: primeiro vem a azul, depois a vermelha e depois a amarela. E aí ele continua arrumando suas bolinhas sempre seguindo essa ordem das cores das bolinhas.

Posição 1 Posição 2 Posição 3 Posição 4 Posição 5 Posição 6

2) Veja como é a sequência das figuras formada por bolinhas que Beto fez.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

Pergunta A (incógnita imediata): “Desenhe a bolinha que será a do lugar 6. Pinte-a, seguindo a ordem das cores de João”.

Pergunta B (incógnita próxima): “Desenhe uma bolinha e, seguindo a ordem das cores de João, pinte a bolinha com a cor que ela terá no lugar 8.”

Pergunta A (incógnita imediata): “Qual a próxima figura desta sequência?”

Pergunta B (incógnita próxima): “Qual a figura da 10ª posição?”

Pergunta C (incógnita distante): “Qual a figura da 20ª posição?”

Pergunta C (incógnita distante): "E se fosse o lugar 18? Qual seria a cor da bolinha? Desenhe e pinte-a com a cor certa."

A tarefa, realizada individualmente, foi aplicada coletivamente em sala de aula na presença do(a) examinador(a) e da professora da sala. Cada participante recebia lápis, borracha e um pequeno livro em que em cada página estava impresso um dos itens com suas respectivas perguntas e espaço para respondê-las. Os itens eram resolvidos um por vez em uma ordem fixa após a leitura de cada pergunta em voz alta feita pelo(a) examinador(a). A criança acompanhava a leitura, sendo fornecidas explicações e esclarecimentos acerca de cada item e respectivas perguntas.

Resultados

Ao todo foram analisadas 5.910 respostas. Os dados foram analisados de duas maneiras: em função do número de acertos obtidos e de acordo com o perfil de desempenho dos participantes. Ambas as formas de análise levaram em consideração os anos escolares, os tipos de itens (sequência de padrão repetitivo e não-repetitivo) e tipos de perguntas relativas à localização da incógnita (imediata, próxima e distante).

O desempenho em cada item

Houve um aumento gradativo no percentual de acertos em cada ano escolar: 23,9% no 1º ano, de 38,03% no 2º ano, de 53,71% no 3º ano, de 63,42% no 4º ano e de 70,19% no 5º ano. De modo geral, os estudantes dos dois anos iniciais acertavam menos que 50% das perguntas, enquanto aqueles que frequentavam os dois últimos anos acertam mais de 60% das

perguntas. As crianças do 3º ano, por sua vez, apresentaram um percentual de acertos intermediário.

Como mostra a Tabela 1, e confirmado pelo teste de Wilcoxon, o padrão de resultados foi o mesmo em todos os anos escolares, uma vez que os estudantes tiveram sistematicamente um melhor desempenho nos itens de sequência de padrão repetitivo do que nos itens de sequência de padrão não-repetitivo (valores de $p < 0,001$).

Tabela 1

Percentual de acertos nos dois tipos de sequência em cada ano escolar.

	Sequência de padrão repetitivo	Sequência de padrão não-repetitivo
1º ano	39,28	8,53
2º ano	44,07	31,99
3º ano	59,56	47,85
4º ano	62,81	48,02
5º ano	73,95	66,66

O Teste Kuskal-Wallis detectou diferenças significativas entre os anos escolares tanto na sequência de padrão repetitivo ($\chi^2 = 200,84$, gl = 4; $p < 0,001$) como não-repetitivo ($\chi^2 = 258,27$, gl = 4; $p < 0,001$). De acordo com o teste de Dunn, isso ocorreu porque nos dois tipos de sequência foram identificadas diferenças significativas entre os anos escolares (valores de $p < 0,001$) à exceção do 3º ao 4º ano, cujos percentuais de acertos foram próximos tanto na sequência de padrão repetitivo (59,56% e 62,81%,

respectivamente) como não-repetitivo (47,85% e 48,02, respectivamente). Esses resultados indicam que o desempenho foi o mesmo no 3º e no 4º ano.

Na Tabela 1 o melhor desempenho ocorreu no 5º ano em relação à sequência de padrão repetitivo (73,95%) e o pior desempenho no 1º ano em relação à sequência de padrão não-repetitivo (8,53%). Também, é possível notar que com o avanço da escolaridade, os estudantes apresentaram progressos mesmo em relação à sequência de padrão não-repetitivo, que foi a mais difícil.

As relações entre a distância da incógnita (Pergunta A: imediata, Pergunta B: próxima e Pergunta C: distante) e os anos escolares são ilustradas na Tabela 2. Como pode ser visto, a distância da incógnita teve papel determinante no desempenho de modo geral, como revelado pelo Teste Friedman ($\chi^2 = 510,62$, $gl = 2$, $p < 0,001$). O melhor desempenho dos estudantes foi no 5º ano em relação à incógnita próxima com 85,17% de acertos, enquanto o pior desempenho foi no 1º ano em relação à incógnita distante com 15,51% de acertos.

Tabela 2

Percentual de acertos nas perguntas em cada ano escolar

	Pergunta A (incógnita imediate)	Pergunta B (incógnita próxima)	Pergunta C (incógnita distante)
1º ano	30,62	25,59	15,51
2º ano	49,00	37,92	27,18
3º ano	70,28	53,93	36,92
4º ano	76,24	63,79	50,23
5º ano	85,17	71,23	54,18

O Teste Wilcoxon identificou que em cada ano escolar o percentual de acertos na Pergunta A (incógnita imediata) foi significativamente maior do que nas demais perguntas, enquanto o percentual de acertos na Pergunta C (incógnita distante) foi invariavelmente menor do que o observado nas demais perguntas (valores de $p < 0,001$)

Comparações entre os anos escolares em cada pergunta foram examinadas por meio do Teste Kruskal-Wallis que revelou que em cada uma das três perguntas houve um aumento significativo do percentual de acerto entre os anos escolares (Pergunta A: $\chi^2 = 245.6$, gl = 4, $p < 0,001$; Pergunta B: $\chi^2 = 211.24$, gl = 4, $p < 0,001$; Pergunta C: $\chi^2 = 204.12$, gl = 4, $p < 0,001$).

O que se observa, a partir desses dados, é que o padrão de resultados é semelhante em todos os anos escolares investigados e que o tipo de sequência e a localização da incógnita contribuem para isso. Assim, é interessante examinar em maiores detalhes o desempenho dos estudantes em função das relações entre esses dois fatores, considerando todos os participantes conjuntamente, como consta na Tabela 3.

Tabela 3.

Percentual de acertos nas perguntas em cada tipo de sequência.

	Sequência de padrão repetitivo	Sequência de padrão não- repetitivo
Pergunta A (incógnita imediate)	70,84	53,68
Pergunta B (incógnita próxima)	58,27	42,71
Pergunta C (incógnita distante)	38,58	35,02

De modo geral, o melhor desempenho ocorreu na Pergunta A (incógnita imediata) na sequência de padrão repetitivo (70,84%) e o

desempenho mais limitado ocorreu na Pergunta C (incógnita distante) na sequência de padrão não-repetitivo (35,02%). A única diferença significativa entre o tipo de sequência em cada pergunta foi observada apenas em relação ao percentual de acertos na Pergunta A (incógnita imediata) que era maior na sequência de padrão repetitivo (70,84%) do que no não-repetitivo (53,68%), como revelado pelo Teste de Wilcoxon (valores de $p < 0,01$).

Tomados de forma conjunta, os resultados indicam que tanto os tipos de sequências como a distância das incógnitas são fatores determinantes do desempenho em todos os escolares. Embora haja uma progressão com o avanço da escolaridade, o padrão de resultados é o mesmo em cada ano escolar, de modo que a natureza da dificuldade permanece a mesma desde do 1º ano ao 5º ano, sendo o grande desafio dos estudantes lidar com a incógnita distante em situações que envolvem sequência de padrão não-repetitiva.

Os perfis de desempenho dos participantes em cada tipo de sequência Como mencionado, além do número de acertos, os dados foram analisados em função do perfil de desempenho dos participantes nas três perguntas em cada tipo de sequência. Esses perfis foram definidos a partir do nível de generalização requerido para responder corretamente as três perguntas, a saber: a Pergunta A (incógnita imediata) não requeria uma generalização, a Pergunta B (incógnita próxima) requeria um nível intermediário de generalização e a Pergunta C (incógnita distante) requeria o nível mais alto de generalização.

Por meio desta análise buscou-se examinar se os participantes que acertavam os itens relativos à incógnita distante (Pergunta C), expressando, assim, uma noção de generalização algébrica, seriam aqueles que também acertavam as duas outras perguntas (Pergunta B: próxima e Pergunta A: imediata). Tendo isso em consideração, foram identificados quatro perfis de participantes:

Perfil 1: formado por participantes que acertam a Pergunta C (incógnita distante), erram a Pergunta B (incógnita próxima) e a Pergunta A (incógnita imediata)

Perfil 2: formado por participantes que acertam a Pergunta C (incógnita distante), erram a Pergunta B (incógnita próxima).

Perfil 3: formado por participantes que acertam a Pergunta C (incógnita distante) e erram a Pergunta A (incógnita imediata).

Perfil 4: formado por participantes que acertam a Pergunta C (incógnita distante), acertam a Pergunta B (incógnita próxima) e a Pergunta A (incógnita imediata).

A Tabela 4 apresenta a distribuição desses perfis em relação a cada tipo de sequência.

Tabela 4

Percentual de participantes de cada perfil em cada tipo de sequência

	Sequência de padrão Repetitivo	Sequência de padrão não-repetitivo
Perfil 1	4,57	1,22
Perfil 2	8,52	2,47
Perfil 3	12,55	3,60
Perfil 4	22,10	26,71

Nota: Perfil 1: participantes que acertam a Pergunta C (incógnita distante), erram a Pergunta B (incógnita próxima) e a Pergunta A (incógnita imediata). Perfil 2: participantes que acertam a Pergunta C (incógnita distante) e erram a Pergunta B (incógnita próxima). Perfil 3: participantes que acertam a Pergunta C (incógnita distante), erram a Pergunta A (incógnita imediata). Perfil 4: participantes que acertam a Pergunta C (incógnita distante), acertam a Pergunta B (incógnita próxima) e a Pergunta A (incógnita imediata).

O Perfil 1 (acerta Pergunta C, erra Pergunta A e Pergunta B) foi o menos frequente, sendo isso observado em ambos os tipos de sequência (padrão repetitivo: 4,57%, não-repetitivo: 1,22%). Isso indica que raramente um participante que acertava a Pergunta C (incógnita distante) errava as demais perguntas. Por outro lado, o percentual de crianças do

Perfil 4 (acerta Pergunta C, acerta Pergunta A e Pergunta B) foi o mais alto, tanto na sequência de padrão repetitivo (22,10%) como no não-repetitivo (26,71%). Esse resultado evidencia que as crianças que acertavam a Pergunta C (incógnita distante) tendiam a acertar as demais perguntas.

Como os percentuais de crianças do Perfil 1 e do Perfil 4 nos dois tipos de sequência foram muito próximos (ver Tabela 4), é possível supor que a forma de lidar com a localização da incógnita independe do tipo de sequência. Em outras palavras, quando a criança apresenta uma noção de generalização suficiente para lidar de forma bem-sucedida com os itens em que a incógnita é distante, ela aplica essa noção tanto na resolução de sequências de padrão repetitivo como nas sequências de padrão não-repetitivos que são as mais difíceis. Ao que parece, a natureza do padrão passa a ter um menor impacto sobre o desempenho quando a criança é capaz de generalizar. Contudo, essa afirmação precisa ser tomada com cautela, sendo necessário investigar uma maior diversidade de tarefas de sequência de padrões repetitivos e não-repetitivos.

Discussão e Conclusões

O presente estudo investigou a influência do tipo de sequência de padrão (repetitiva e não-repetitiva) e da localização da incógnita (imediata, próxima e distante) no desempenho de estudantes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas que requerem a generalização algébrica. Embora o estudo não seja de natureza procedimental, relativa às estratégias adotadas pelo participantes na resolução dos itens, as discussões são, fortemente, sustentadas por dados oriundos da literatura científica presente até o momento e que evidenciam as relações entre a localização da incógnita e os procedimentos empregados pelos estudantes.

A generalização foi examinada a partir do que Stacey (1989) denominou generalizações próximas e distantes. Essas generalizações

tomam por base a localização da incógnita em problemas que envolvem o raciocínio algébrico. As generalizações próximas e distantes se diferenciam quanto à complexidade que apresentam, uma vez que as distantes demandam um maior nível de abstração por parte das crianças do que as próximas. Essa afirmação encontra suporte empírico em estudos que envolvem a resolução de problemas que requerem o raciocínio funcional como por exemplo, a pesquisa de Merlini, Spinillo e Magina (2025) sobre função linear e afim. Em suas conclusões, as autoras apontam a necessidade de investigar um outro tipo de incógnita que seria a imediata, sendo isso explorado na presente pesquisa. Como mencionado, a incógnita imediata é o termo desconhecido posicionado imediatamente após o último termo conhecido que é apresentado no item. A relação entre a posição e o termo que ali se encontra pode ser estabelecida simplesmente com o apoio restrito nos suportes de representação apresentados. A incógnita imediata foi incluída na presente investigação com o objetivo de explorar o papel que este tipo de incógnita teria no pensamento algébrico de crianças.

Além da perspectiva teórica de Stacey (1989) e das evidências trazidas por Merlini, Spinillo e Magina (2025), outro pressuposto que serviu de base para a presente investigação foi a ideia preconizada por Vergnaud (1994; 1997) de que, em linhas gerais, é necessário investigar o raciocínio matemático a partir de diferentes situações. Esse pressuposto tem caracterizado o delineamento metodológico de inúmeras pesquisas na área, criando cenários investigativos em que os participantes resolvem diferentes tipos de problemas inseridos em um mesmo campo do conhecimento matemático. Em vista disso, foram examinados dois tipos de problemas algébricos que envolviam sequência de padrão repetitivo e não-repetitivo. Os resultados obtidos são apresentados e discutidos em relação a esses aspectos, retomando-se as hipóteses levantadas.

No que tange à natureza da sequência, a hipótese era que as crianças teriam um melhor desempenho na sequência de padrão repetitivo do que na sequência de padrão não-repetitivo. A hipótese foi confirmada, sendo isso observado em relação a cada ano escolar, indicando que o padrão de resultados foi o mesmo do 1º ao 5º ano. Contudo, houve progresso entre os anos escolares quanto aos dois tipos de sequência. Esse progresso se caracterizou por avanços antes do 3º ano e após o 4º ano, indicando que do 3º ao 4º ano há certa estabilidade no desempenho. Mesmo no 5º ano, a sequência de padrão não-repetitivo continuou sendo um desafio para alguns desses estudantes.

A hipótese de que o melhor desempenho seria nos itens em que a incógnita era imediata foi confirmada, sendo isso observado em cada ano escolar. Os dados mostraram que o sucesso dos estudantes era decrescente da incógnita imediata para a incógnita próxima e para a distante. Esse resultado corrobora a ideia de que a localização da incógnita envolve níveis distintos de generalização que aumentam da próxima para a distante, como proposto por Stacey (1989). Contudo, Merlini, Spinillo e Magina (2025) em estudo acerca da resolução de problemas de função linear e afim observaram que o desempenho dos estudantes do 1º ao 5º ano era igualmente limitado tanto quando a incógnita era próxima como quando era distante. Na conclusão da referida investigação, as autoras apontam a relevância de se examinar um outro tipo de incógnita: a imediata. Segundo elas, ainda que não envolva a generalização, o papel desempenhado pela incógnita imediata na resolução de problemas algébricos precisa ser examinado. Em vista disso, a presente investigação inseriu a incógnita imediata na resolução de problemas de sequência de padrões repetitiva e não-repetitiva, cujos resultados, como mencionado, indicaram um efeito da localização da incógnita no desempenho de ambos os tipos de problemas.

Ao que parece, os resultados ora obtidos e aqueles observados por Merlini, Spinillo e Magina (2025) apresentam divergências quanto ao papel da localização da incógnita na resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico. Uma possível explicação para isso é que problemas de função linear e afim são mais difíceis que problemas de sequência repetitiva e não repetitiva. Naquele estudo a dificuldade dos estudantes na resolução dos problemas era tão expressiva que independentemente da localização da incógnita o desempenho era igualmente limitado. Na presente investigação, as sequências de padrão repetitivo e não-repetitivo eram menos complexas, de forma que o efeito da localização da incógnita ficou evidente. Ao que parece, o efeito da localização da incógnita emerge quando os problemas algébricos não estão além da capacidade de resolução das crianças.

Em termos de desenvolvimento do pensamento algébrico, a análise acerca dos perfis dos participantes revelou que aqueles que tinham um bom desempenho com a incógnita distante (maior nível de generalização) eram capazes de resolver com sucesso as perguntas com incógnitas imediata e próxima, enquanto o inverso não era verdadeiro. Esse resultado revela uma progressão que pode ser explorada didaticamente, como discutido adiante. Além disso, como mencionado, o fato do padrão ser repetitivo ou não-repetitivo passa a ter um menor impacto sobre o desempenho quando um alto nível de generalização é alcançado pela criança que parece estar apta a fazer generalizações sobre uma ampla variedade de tarefas. Essa afirmação, todavia, precisa ser tomada com cautela, sendo necessário conduzir investigações que examinem uma maior diversidade de sequências de padrão repetitivo e não-repetitivo do que a presente pesquisa examinou.

Outro aspecto que merece ser tratado é o papel da incógnita imediata no pensamento algébrico. Como mencionado, essa incógnita não requer a generalização, uma vez que é posicionada imediatamente após o último

termo conhecido apresentado em uma dada sequência. Neste caso, a incógnita pode ser determinada simplesmente a partir dos suportes de representação apresentados, não requerendo uma regra que englobe todos os casos possíveis. Todavia, segundo nossa análise, ela pode desempenhar papel importante no desenvolvimento do pensamento algébrico em situações de instrução, sobretudo com estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, servindo como um ponto de partida para a generalização próxima e distante. Ao atribuir papel relevante à incógnita imediata, é possível, teoricamente, ampliar a perspectiva que enfatiza apenas a generalização próxima e distante (ver Vale, 2013; Stacey, 2013), assim como, em termos aplicados, ampliar as implicações educacionais.

Kieran (2022) comenta que o interesse pelo desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais começou a surgir na década de 1990. Desde lá, tem havido um crescimento constante na pesquisa dedicada a explorar maneiras de promover esse pensamento. No início, o interesse recaía, sobretudo, em lidar com a questão de quais tipos de pensamento algébrico seriam viáveis para estudantes no início da escolaridade. Nos últimos 30 anos, continua a auto-ra, houve uma evolução nas pesquisas que levou a uma gama cada vez maior de atividades que são verdadeiramente multidimensionais, sendo a generalização o fio condutor que percorre todas as instâncias dessa multifuncionalidade. A presente pesquisa reitera a importância da generalização associada a outra faceta do pensamento algébrico que é a sequência de padrões, reiterando o papel desempenhado pela localização da incógnita que, em neste cenário investigativo, materializa a generalização.

Do ponto de vista aplicado, seria interessante propor situações didáticas em que:

(i) houvesse a manipulação da localização da incógnita, de modo que fossem apresentadas aos estudantes situações que envolvessem

incógnita imediata, próxima e distante. Carraher, Schliemann e Brizuela (2001) comentam que manipular incógnitas é fundamental para desenvolver a capacidade de fazer generalizações algébricas.

(ii) fossem inicialmente apresentadas situações fáceis como a sequência de padrão repetitivo com incógnita imediata, próxima e distante, nesta ordem; e em seguida, situações mais desafiadoras que envolvessem a sequência de padrão não-repetitivo com os três tipos de incógnita nessa mesma ordem.

(iii) além de atividades em que tivessem que continuar a sequência completando o que falta, os estudantes poderiam ser também solicitados a eles próprios, criarem os padrões, como feito por Rodrigues e Serra (2015).

(iv) o professor explicitasse para os estudantes a estrutura da sequência, ressaltando como se configura o padrão, os termos e as relações entre eles. Em outras palavras, a sequência seria objeto de reflexão e análise por parte dos estudantes, como sugerido por Warren (2005), Mulligan e Mitchelmore (2009) e Du Plessis (2018).

(v) levassem os estudantes a descobrir a regra geral que seria aplicada a todos os casos apresentados, como discutido por Carraher e Earnest (2003) ao relatarem uma experiência conduzida em sala de aula em que se solicitava aos estudantes que descobrissem a regra secreta que estava subjacente a cada situação.

Os pontos acima mencionados requerem, como pode ser notado, um papel ativo por parte do professor, assim como consideram os limites e as possibilidades apresentados pelos estudantes, conforme os resultados obtidos no presente estudo.

Para finalizar, reitera-se a importância de duas instâncias fundamentais ao pensamento algébrico: a generalização e a identificação de padrões. A generalização é tanto um objetivo instrucional por si mesmo como um meio para alcançar formas mais elaboradas de raciocinar. Por sua

vez, a identificação de padrões e a descoberta dos princípios que rege esses padrões são fundamentais para chegar a uma generalização.

A estreita associação entre generalizar e identificar padrões é ressaltada por Mason et al. (1985, p. 8) ao afirmarem que “a Álgebra é a linguagem por meio da qual a generalidade é expressa. Para aprender a linguagem da Álgebra, é necessário ter algo a dizer. É necessário identificar algum padrão ou regularidade, e em seguida tentar expressar isso de forma sucinta, de modo que seja possível comunicar uma dada perspectiva a alguém, e usar isso para responder questões específicas.” Embora feita há quatro décadas, essa afirmação continua atual, servindo de pressuposto na condução de pesquisas com crianças acerca do pensamento algébrico.

Referências

- Amit, M., & Neria, D. (2007). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, 40, 11–129.
- Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F., & Confrey, J. (2007). Early Algebra. In V.J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a Technological Future* (pp. 7-14). New York: The Mathematical Association of America.
- Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., ... & Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in grades 3 to 5. *American Educational Research Journal*, 56(5), 1930-1972.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Berlin: Springer.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.
- Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., & Davis, F. (2007), ‘Early algebra’, In V.J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a technological future* (pp. 7–14). New York: Mathematical Association of America.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students’ capacity for functional thinking. In M. J. Hoines, & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the*

- Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.
- Brasil. (2018). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília, DF: MEC/SEB.
- Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81-118
- Carraher, D., & Blanton, M. (2007). *Algebra in the Early Grades*. London: Routledge.
- Carraher, D., & Earnest, D. (2003). Guess my rule revisited. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the Twenty-seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 173-180). Honolulu, Hawaii: University of Hawaii.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115.
- Carraher, D.W., Schliemann, A.D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). New York: Routledge.
- Carraher D.W., Martinez M., & Schliemann A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.). *Teaching and learning algebraic thinking with 5 – 12 year-olds*. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice. ICME-13 Monographs (pp. 107-138). Chaim, Switzerland: Springer.
- Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2016). Arithmetic and algebra in early mathematics education. In E.A. Silver, & P.A. Kenney (Eds). *More Lessons Learned from Research: Volume 2. Helping All Students Understand Important Mathematics* (pp. 109-122). NCTM.
- Carraher, D.W. & A.D. Schliemann (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. In L. English, & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 191-218). New York: Taylor & Francis.

- Erdogan, F. & Ay, S. (2022). Generalization, algebraic thinking, and pattern: An overview. In Ş. Durukan (Ed.), *Education & Science 2022-IV* (pp. 85-102). EFE Academy Publishing.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J. J. (2008). 'What is algebra? What is algebraic reasoning?', in J. J. Kaput, D. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*, (pp. 235-272). New York: Routledge.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131-1150.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lian, L. H. L., & Yew, W. T. (2011). Developing Pre-algebraic Thinking in Generalizing Repeating Pattern Using SOLO Model. *US-China Education Review A* 6, 774-780.
- Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In: N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? In C. Kieran (Ed.). *Teaching and learning algebraic thinking with 5 - 12 year-olds*. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice. ICME-13 Monographs (pp. 329-350). Chaim, Switzerland: Springer.
- Mason, J, Graham, A. Pimm, D. & Gower, N. (1985). *Routes to/ roots to algebra*. Milton Keynes, UK: Open University.
- Merlini, V.L., Spinillo, A.G. & Magina, S.M.P. (2025). O papel da localização da incógnita na resolução de problemas de função por estudantes do Ensino Fundamental, *REnCiMa*, 16 (3), 1-22.
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33-49.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268.
- Du Plessis, J. (2018). Early algebra: Repeating pattern and structural thinking at foundation phase, *South African Journal of Childhood Education*, 8(2), a578. [https:// doi.org/10.4102/sajce.v8i2.578](https://doi.org/10.4102/sajce.v8i2.578)
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA- Pensamiento Numérico Avanzado*, 6(4), 117-133.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA- Pensamiento Numérico Avanzado*, 4(2), 37-62,
- Radford, L., & Peirce, C. S. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Rodrigues, M., & Serra, P. (2015). *Generalizing repeating patterns: a study with children aged four*. The Eurasia Proceedings of Educational & Social Sciences (EPESS), Volume 2, Pages 81-95.
- Santana, R. C. C. L., & Magina, S.M.P. (2025). Um estudo comparativo entre o desempenho de estudantes dos 4º e 6º anos na resolução de tarefas de sequência de padrões. *Educação Matemática Debate*, 9, 1-14.
- Schliemann, A. D., Carraher, D., & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: from children's ideas to classroom practice*. Mahwah, New Jersey (NJ): Lawrence Erlbaum.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164. doi:10.1007/BF00579460
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. Coxford, & A. P. Schulte (Eds.), *Ideas of algebra, K-12, 1988 Yearbook* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics
- Vale, I. (2013). Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. *REVEMAT Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 8 (2), 64-81.
- Vale, I., & Barbosa, A. (2019). Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. *Educação Matemática Pesquisa*, 21 (3), 398-418.

- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.). *Research agenda in mathematics education*. Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp. 141–161). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In H. Gershon, & J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: University of New York Press.
- Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes, & P. Bryant (Orgs.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove: Psychology Press.
- Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking: Building connections. *Research, Theory and Practice*, 2, 759-766.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379-402.