

O tratamento dado à construção do conjunto dos números reais na formação inicial dos professores de Matemática das universidades públicas paulistas: uma análise a partir dos planos de ensino

The treatment given to the construction of the set of real numbers in the initial training of mathematics teachers at São Paulo state universities: an analysis based on the syllabi

El tratamiento dado a la construcción del conjunto de los números reales en la formación inicial de los profesores de Matemáticas de las universidades públicas paulistas: un análisis a partir de los planes de enseñanza

Le traitement accordé à la construction de l'ensemble des nombres réels dans la formation initiale des professeurs de Mathématiques des universités publiques de l'État de São Paulo : une analyse basée sur les plans d'enseignement

Giovana Aparecida Bertolucci¹

Secretaria Municipal de Educação do Município de Novo Horizonte, SP

Mestre em Ensino e Processos Formativos

<https://orcid.org/0000-0001-6942-4993>

Inocência Fernandes Balieiro Filho²

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Doutor em Educação Matemática

<https://orcid.org/0000-0003-4012-959X>

Resumo

A construção dos números reais deve ser tratada na formação inicial do professor de Matemática de forma que sejam abordadas de maneira rigorosa as ideias que se referem às estruturas que compõem o conjunto, porém contextualizadas em seu processo histórico de construção e tratadas de modo que permitam ao futuro professor compreender formal e amplamente conceitos trabalhados no Ensino Básico. Fundamentado nessa perspectiva, este artigo discute, a partir da análise de planos de ensino, como a construção dos números reais é tratada na disciplina Fundamentos de Análise em cursos de Licenciatura em Matemática de Instituições Públicas do Estado de São Paulo. Com esse propósito, os planos de ensino da disciplina de Análise dessas

¹ giovana.aparecida@unesp.br

² inocencia.balieiro@unesp.br

instituições foram analisados em uma abordagem qualitativa, por meio da metodologia de pesquisa documental. Também foram examinadas as obras das bibliografias básicas recomendadas nos planos de ensino por meio de pesquisa bibliográfica, a fim de verificar se as referências indicadas contemplam a construção dos números reais e de que forma essa construção é realizada. A análise dos planos de ensino revelou que apenas quatro, dos 22 cursos de Licenciatura em Matemática investigados, fazem referência à construção dos números reais na disciplina Fundamentos de Análise considerando a formação de professores e o ensino dos números reais na Matemática Escolar. Os resultados apontam a necessidade de ampliar as reflexões sobre o papel da Análise na formação inicial dos professores de Matemática, pensando sempre em sua futura prática profissional.

Palavras-chave: Construção dos números reais, Formação de professores, Prática docente, Análise real.

Abstract

The construction of the real numbers should be addressed in the initial training of Mathematics teachers in such a way that the ideas related to the structures that make up the set are approached rigorously, yet contextualized within their historical construction process and treated in a manner that allows future teachers to understand, both formally and broadly, concepts taught in Basic Education. Based on this perspective, this article discusses, through the analysis of teaching plans, how the construction of the real numbers is addressed in the Foundations of Analysis course in Mathematics Teacher Degree programs at Public Institutions in the State of São Paulo. For this purpose, the teaching plans for the Analysis course at these institutions were analyzed using a qualitative approach, through documentary research methodology. The works from the basic bibliographies recommended in the teaching plans were also examined through bibliographic research, in order to verify whether the referenced materials cover the construction of the real numbers and how this construction is carried out. The analysis of the teaching plans revealed that only four out of the 22 Mathematics Teacher Degree programs investigated make reference to the construction of the real numbers in the Foundations of Analysis course, considering teacher training and the teaching of real numbers in School Mathematics. The results indicate the need to broaden reflections on the role of Analysis in the initial training of Mathematics teachers, always considering their future professional practice.

Keywords: Construction of real numbers, Teacher training, Teaching practice,

Resumen

La construcción de los números reales debe ser abordada en la formación inicial del profesor de Matemáticas de manera que se traten de forma rigurosa las ideas referentes a las estructuras que componen el conjunto, pero contextualizadas en su proceso histórico de construcción y tratadas de modo que permitan al futuro profesor comprender formal y ampliamente los conceptos trabajados en la Educación Básica. Así, este artículo discute, a partir del análisis de planes de enseñanza, cómo se aborda la construcción de los números reales en la disciplina Fundamentos de Análisis en cursos de Licenciatura en Matemáticas de Instituciones Públicas del Estado de São Paulo. Con este propósito, los planes de enseñanza de la disciplina de Análisis de estas instituciones fueron analizados bajo un enfoque cualitativo, mediante la metodología de investigación documental. También se examinaron las obras de las bibliografías básicas recomendadas en los planes de enseñanza a través de investigación bibliográfica, con el fin de verificar si las referencias indicadas contemplan la construcción de los números reales y de qué manera se realiza esta construcción. El análisis de los planes de enseñanza reveló que sólo cuatro de los 22 cursos de Licenciatura en Matemáticas investigados hacen referencia a la construcción de los números reales en la disciplina Fundamentos de Análisis, considerando la formación de profesores y la enseñanza de los números reales en la Matemática Escolar. Los resultados señalan la necesidad de ampliar las reflexiones sobre el papel del Análisis en la formación inicial de los profesores de Matemáticas, pensando siempre en su futura práctica profesional.

Palabras-clave: Construcción de los números reales, Formación de profesores, Práctica docente, Análisis real.

Résumé

La construction des nombres réels devrait être abordée dans la formation initiale des enseignants de mathématiques de manière rigoureuse, en traitant des idées relatives aux structures qui composent cet ensemble, tout en les contextualisant dans leur processus historique de construction. Il est essentiel de les présenter de façon à permettre aux futurs enseignants de comprendre formellement et largement les concepts travaillés dans l'enseignement de base. Sur la base de cette perspective, cet article discute, à partir de l'analyse de plans d'enseignement, de la manière dont la

construction des nombres réels est traitée dans la discipline Fondements de l'Analyse dans les cursus de Licence en Mathématiques des Institutions Publiques de l'État de São Paulo. Dans ce but, les plans d'enseignement de la discipline d'Analyse de ces institutions ont été analysés selon une approche qualitative, à travers une méthodologie de recherche documentaire. Les ouvrages des bibliographies de base recommandées dans les plans d'enseignement ont également été examinés via une recherche bibliographique, afin de vérifier si les références indiquées incluent la construction des nombres réels et de quelle manière cette construction est réalisée. L'analyse des plans d'enseignement a révélé que seulement quatre des 22 cursus de Licence en Mathématiques étudiés font référence à la construction des nombres réels dans la discipline Fondements de l'Analyse, en considérant la formation des enseignants et l'enseignement des nombres réels dans les mathématiques scolaires. Les résultats indiquent la nécessité d'élargir les réflexions sur le rôle de l'Analyse dans la formation initiale des enseignants de mathématiques, en tenant toujours compte de leur future pratique professionnelle.

Mots-clés : Construction des nombres réels, Formation des enseignants, Pratique enseignante, Analyse réelle.

O tratamento dado à construção do conjunto dos números reais na formação inicial dos professores de Matemática das universidades públicas paulistas: uma análise a partir dos planos de ensino

Introdução

A compreensão de como as noções dos professores sobre os conceitos influenciam as concepções dos alunos sobre os conteúdos desenvolvidos e a forma como o professor desenvolve seu conhecimento acerca de determinado conceito e como realiza a sua reelaboração com o propósito de ensiná-lo são questões presentes nas pesquisas sobre a formação dos professores e seu desenvolvimento profissional, como, por exemplo, em Shulman (1986), Moreira e David (2007) e Fiorentini e Oliveira (2013).

Para Shulman (1986) essas questões refletem como são elaboradas as explicações, representações (como analogias, exemplos, contraexemplos e demonstrações) e quais são as condições que o docente tem para esclarecer dúvidas dos alunos, ou seja, como ocorre a transição entre o conceito em si, o conhecimento do professor a respeito desse conceito e o conceito a ser ensinado.

Ainda para Shulman (1986), é necessário que o professor tenha amplas habilidades para com o conteúdo a ser ensinado e também no que se refere aos processos de ensino. Para esclarecer essa ideia, divide os conhecimentos necessários ao professor em três categorias principais: conhecimento do conceito, conhecimento pedagógico do conceito e conhecimento curricular. O conhecimento do conceito, como categoria de conhecimento necessária ao docente, vai além da ideia de domínio de fatos. De acordo com Shulman (1986), os professores devem conhecer a estrutura que torna válida determinado conceito na forma em que é proposto, sabendo justificar para seus alunos a validade de determinada proposição, qual sua importância na disciplina em estudo e sua relação com as demais disciplinas e a prática. Assim, o autor afirma que o docente deve entender o assunto que irá lecionar de forma ampla e estrutural, sabendo definir quais são tópicos centrais e periféricos e em quais situações são adequados os usos (ou não) de determinados conteúdos, sendo capazes de ir além de uma mera definição de verdades que devem ser aceitas e memorizadas pelos alunos.

Conhecer a dimensão pedagógica do conceito, segundo Shulman (1986), significa saber como ensinar determinada ideia, o que exige o domínio de diversas formas de representação de um assunto de modo que ele se torne compreensível para outras pessoas, como ilustrações, exemplos, contraexemplos e demonstrações.

As pesquisas de Moreira e David (2007) e Fiorentini e Oliveira (2013) sugerem que haja uma unificação entre as formações matemática, didático-pedagógica e prática profissional. Para isso, o conhecimento matemático desenvolvido nos cursos de Licenciatura deve ser tratado de forma abrangente, compreensiva e precisa, de modo que sejam explorados os diversos sentidos que a Matemática apresenta nas diversas circunstâncias nas quais se aplica. Nessa acepção, é possível inferir que os cursos de Licenciatura em Matemática, cujo objetivo principal é a formação docente, devem desenvolver conhecimentos que contemplem a teoria matemática em suas diversas dimensões de modo que prepare o licenciando para a vida profissional.

Portanto, como consideram Fiorentini e Oliveira (2013), a Matemática trabalhada nos cursos de Licenciatura, embora tenha inúmeros elementos em comum com a Matemática Científica, deve ser pautada na Matemática Escolar (Moreira; David, 2007), uma vez que o professor deve conhecer as diferentes representações, explanações diversas e aplicações nas mais variadas situações que envolvem o mundo prático e as outras ciências.

Nessa perspectiva, não significa que o conhecimento matemático específico trabalhado nas Licenciaturas deva ser tratado de forma rasa ou inferior àquele desenvolvido nos cursos de Bacharelado. Na verdade, é o exato oposto: o professor, ao conhecer as definições e as demonstrações formais, deve ser capaz de representar e fundamentar sua argumentação de modo que os alunos compreendam e consigam construir as próprias justificativas, a partir da mediação docente, para entender a Matemática como útil e imprescindível na construção e desenvolvimento do mundo.

A construção do conjunto dos números reais e a abordagem nela utilizada tem o potencial de promover a compreensão do licenciando (Durand-Guerrier, 2016; Bertolucci; Balieiro Filho, 2024), de modo que ele consiga fundamentar o ensino dos números reais, em sua futura prática docente, com a finalidade de construir, com os alunos, uma aprendizagem significativa, em que os educandos possam compreender a Matemática e utilizá-la, adequadamente, na interpretação dos diversos contextos e na resolução dos problemas que deles decorrem, sendo capazes de interferir positivamente na construção da sociedade, rompendo com a ideia que há muito persiste de que a Matemática é difícil e apresenta pouca utilidade.

Diferentes pesquisas – por exemplo, Margolinas (1988), Bagni (2000), Bergé (2007) e Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), Penteado (2004), Moreira, Cury e Vianna (2005), Martines (2012), Broetto e Santos-Wagner (2019) – mostram as dificuldades

dos alunos, tanto do Ensino Médio quanto do Ensino Superior, em relação aos números irracionais, infinidade, pontos de uma reta, densidade e continuidade e reta numérica. Nesse sentido, considerando que a disciplina de Análise Real tem a função de consolidar os conhecimentos desenvolvidos ao decorrer da graduação, especialmente no que se refere ao conjunto dos números reais (Bergé, 2007) – conjunto numérico amplamente estudado no decorrer dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, no qual o profissional formado pela Licenciatura em Matemática irá atuar, as ideias trabalhadas nessa disciplina deveriam fundamentar o trabalho do professor.

Uma construção formal dos números reais, pelos métodos de Dedekind, Cantor ou outro, por exemplo, é uma construção em que cada uma das ideias é demonstrada formal e rigorosamente, generalizando os resultados até concluir que o conjunto, assim obtido, dos números reais pode ser descrito axiomaticamente como um corpo ordenado completo e qualquer corpo ordenado completo é necessariamente isomorfo ao corpo dos números reais, assim como feito por Spivak (1967) ou Rudin (1971). Abordagens axiomáticas consideram que existe um conjunto para o qual são válidas as propriedades básicas, explorando outras propriedades – por isso, nesses casos, não é realizada a construção dos números reais, como apresentada em Lima (2013).

Os números reais também podem ser parcialmente construídos, em abordagens formais que priorizam mostrar os procedimentos utilizados para fazer a construção, de forma resumida, como em Ávila (2001). Da mesma forma, pode ser parcialmente construído de maneira informal, porém rigorosa, de modo que proporcione a compreensão das ideias relacionadas à expansão dos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, explorar de várias maneiras o conjunto dos irracionais, trazendo as várias representações dos números reais, trabalhando suas propriedades – que justificam muitos algoritmos utilizados no Ensino Básico, e suas aplicações para a resolução de problemas, como em Paterlini (2012), que explora também o ensino desses conteúdos.

Este artigo tem como objetivo discutir como é tratada a construção do conjunto dos números reais nos planos de ensino das disciplinas de Fundamentos da Análise nos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas de Ensino Superior do Estado de São Paulo e suas implicações para a formação de professores de Matemática. Para isso, os planos de ensino da disciplina de Análise dessas instituições foram analisados em uma abordagem qualitativa, por meio da metodologia de pesquisa documental. Também foram examinadas as obras das bibliografias básicas

recomendadas nos planos de ensino mediante a pesquisa bibliográfica, a fim de verificar se as referências indicadas contemplam a construção dos números reais e de que forma essa construção é realizada.

A motivação para essa análise reside na hipótese de que a realização dessa construção ou não e a forma que ela feita pode ter impacto na formação do professor de Matemática e, em consequência, nas dificuldades apresentadas pelos alunos da Educação Básica, em razão da falta de articulação entre o ensino dos números reais nesses níveis, conforme apontado por Bertolucci e Balieiro (2024), Broetto e Santos-Wagner (2019) e Durand-Guerrier (2016).

Segundo o Relatório Síntese de Área: Matemática (Bacharelado/Licenciatura), participaram do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) da Educação Superior do ano de 2017 alunos de 450 cursos de Licenciatura na Área de Matemática. O documento ainda indica que a maioria dos cursos pertencia a Instituições Públicas, totalizando 307 cursos, o equivalente a 68,2% dos cursos que fizeram o ENADE (Brasil, 2017, p. 24).

Além disso, o Relatório indica que a região Sudeste teve maior participação de cursos de Licenciatura em Matemática no ENADE, com 159 cursos, o que representa 35,3% do total (Brasil, 2017, p. 24). Diante desses dados foram 4587 estudantes inscritos dessa região, o que representou 34,4% do total do país (Brasil, 2017, p. 32).

Da região Sudeste, o estado de São Paulo foi o que teve maior representatividade no Exame, com um total de 82 cursos (Brasil, 2017, p. 29), o equivalente a aproximadamente 51,6% do total de cursos do Sudeste e 18,2% da totalidade de cursos de Licenciatura em Matemática do Brasil.

Desse modo, por ter uma ampla representatividade de cursos de Licenciatura em Matemática em uma das mais importantes avaliações de cursos superiores do Brasil, foi escolhido o estado de São Paulo como parâmetro para esta pesquisa investigativa. No estado de São Paulo, quase metade dos cursos de Licenciatura em Matemática pertence a instituições Públicas de Ensino Superior (Brasil, 2017, p. 24). Além disso, a escolha por analisar os planos de ensino das Instituições Públicas se deu pelo fato de todas apresentarem, em seus endereços eletrônicos, as ementas das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, o que possibilitou investigar, de maneira mais ágil e direta, o plano de ensino da disciplina Análise Real (dentre outras denominações) dessas instituições.

Importância da disciplina Análise Real para a formação de professores

Diversas pesquisas têm como objetivo central desvelar a função exercida pela disciplina Análise Real para a formação de professores de Matemática que atuarão no Ensino Básico, isto é, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A pesquisa de Reis (2001), por exemplo, questionou professores-pesquisadores que se evidenciam como autores de livros didáticos buscando compreender como se estabelece a relação entre rigor e intuição no ensino de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real, necessários para uma compreensão significativa dos conceitos trabalhados nessas disciplinas. Já os estudos de Moreira, Cury e Vianna (2005) contaram com entrevistas de professores-pesquisadores das principais instituições universitárias ou de pesquisa do país com base na influência que esses profissionais exercem sobre os currículos e também por, muitas vezes, fazerem parte do corpo docente de Licenciaturas em Matemática. E, ainda, Martines (2012) ouviu professores de Análise Real e coordenadores de cursos de formação de professores de Matemática de instituições de ensino superior públicas do interior de São Paulo com o intuito de buscar compreender a importância dessa disciplina nos cursos de Licenciatura.

Bolognezi (2006) investigou a importância da disciplina Análise Real para a formação de professores, voltando o estudo à atuação no Ensino Médio e apontou que a maioria dos licenciandos afirmou apresentar dificuldades na compreensão dos conteúdos e na utilidade da disciplina Análise Real em sua futura prática docente. Os professores do curso atribuíram as dificuldades dos graduandos na disciplina a um despreparo anterior. Os professores do Ensino Médio indicaram não conceber a disciplina Análise Real como primordial às suas aulas, por não demonstrar o caráter pedagógico dos conceitos trabalhados e pelo excesso de rigor, que não é aplicável às suas práticas.

Em comum, os autores traçaram conclusões referentes às abordagens propostas na disciplina Análise Real. É possível concluir que uma abordagem axiomática dos conteúdos com excesso de formalismo e rigor não favorece a formação para docência, uma vez que não proporciona compreensão múltipla e abrangente dos conteúdos que serão ensinados na prática docente do futuro professor. Nesse sentido, isso dificulta a síntese e a representação necessárias para o ensino de conteúdos do Ensino Básico, seguindo as ideias de Shulman (1986), prejudicando o conhecimento do conceito e seu

aspecto pedagógico, uma vez que dificulta a percepção desses conteúdos como objeto de trabalho da Matemática Escolar.

Uma abordagem coerente, portanto, segundo a concepção de Reis (2001), valoriza as intuições dos alunos, ou seja, suas percepções iniciais sobre os conceitos estudados e as ideias que constroem ao longo do ensino. Nesse processo, segundo o autor, insere-se o rigor necessário para uma boa fundamentação matemática dos conceitos estudados, promovendo com os alunos uma compreensão ampla e bem fundamentada da Análise Real.

Seguindo essa ideia, a Análise Real teria sim o papel de consolidar e formalizar conhecimentos desenvolvidos ao longo do curso de Licenciatura em Matemática, identificado por Moreira, Cury e Vianna (2005) e Martines (2012), porém sem deixar de proporcionar um conhecimento matemático amplo acerca do currículo que fundamenta o trabalho do professor, suprimindo dificuldades apontadas por Bolognezi (2006) e Martines (2012). Nesse sentido, entendemos que a disciplina Análise Real tem a atribuição de promover e concretizar os conhecimentos trabalhados anteriormente no curso de Licenciatura em Matemática, com ênfase nos conjuntos numéricos, que é um assunto trabalhado em diversos aspectos ao longo de toda a Educação Básica. Não se deve perder de vista, portanto, que os conceitos estudados devem ser percebidos como objeto de ensino para a futura prática profissional do professor.

Vale destacar que isso não significa reduzir a formação matemática do futuro professor, como também ressaltam esses autores. O que se propõe como função da disciplina Análise Matemática para Licenciaturas, na verdade, é o contrário: aperfeiçoar o conhecimento matemático do futuro professor, de modo que possa desenvolver uma flexibilidade de pensamento que proporcione uma síntese bem elaborada e fundamentada a respeito, especialmente, do conjunto dos números reais, facilitando, assim, sua reelaboração para o ensino de acordo com as inúmeras situações-problemas propostas pelos currículos do Ensino Básico com os quais irão trabalhar e pelos múltiplos condicionantes de aprendizagem com os quais irão se deparar durante sua atuação profissional.

Essa perspectiva exige um trabalho docente que proporcione avançar muito com o intuito de conceber o conjunto dos números reais como corpo ordenado completo, em uma abordagem puramente axiomática, seguindo um trabalho essencialmente formalista, como destaca Martines (2012). Trata-se de fundamentar o conhecimento de tais conteúdos a partir do currículo e do trabalho da Matemática Escolar, de modo

que o licenciando consiga assimilar e reformular tais conhecimentos com base nos desafios que encontrará em sua prática profissional.

O tratamento dado ao conjunto dos números reais na formação de professores

Em acordo com os autores Moreira, Cury e Vianna (2005), Bolognezi (2006) e Martines (2012), cabe aos cursos de formação de professores de Matemática desenvolver nos graduandos uma concepção ampla e estrutural a respeito do conjunto dos números reais, de modo que o concebam como objeto de ensino, desenvolvendo a capacidade de justificar, representar e relacionar os números reais, suas propriedades e aplicações, com base em um processo ensino-aprendizagem significativo para os licenciandos.

Esse aspecto reitera a importância de ser realizado um trabalho na disciplina de Análise Real que esteja voltado à formação de professores, já que cabe a essa disciplina formalizar os conhecimentos desenvolvidos anteriormente, em especial, no que se refere ao conjunto dos números reais, em uma abordagem coerente, como considerada por Reis (2001) e Martines (2012), que proporcione formação nas três categorias de conhecimento estabelecidas por Shulman (1986).

Para compreender melhor as necessidades formativas dos professores de Matemática no que se refere especialmente aos conhecimentos sobre os números reais, foram considerados os estudos realizados por Iglioni e Silva (1999), Penteado (2004) e Corbo (2012).

Os estudos de Iglioni e Silva (1999), Penteado (2004) e Corbo (2012) revelaram dificuldades nas definições de números racionais e irracionais, com expansões de conjuntos, com a representação de números reais na reta numérica, relação de ordem no conjunto dos números reais e representações diversas desses números. Além disso, ficou explícita a dúvida em relação ao conceito de densidade dos números racionais e irracionais no conjunto dos números reais, além de evidenciada a dificuldade de interpretações diversas, como no entendimento dos enunciados, na reformulação e registro do próprio raciocínio e na interpretação das concepções dos alunos.

Nessa perspectiva, isso indica que o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo pautados no conhecimento curricular, não foram desenvolvidos na formação inicial desses professores, quando se trata dos conjuntos numéricos, de forma adequada. Os resultados encontrados por Corbo (2012) confirmam essa afirmação quando analisadas as possíveis abordagens indicadas pelos

docentes investigados, mostrando que eles até tinham certa noção, porém não conseguiam estabelecer objetivos claros com as propostas sugeridas, revelando, lacunas na compreensão dos conceitos, dificuldades também de reelaboração pedagógica dos conteúdos a serem ensinados. Corbo (2012) e Penteado (2004) realizaram intervenções interessantes à formação continuada desses professores, que indicaram êxito quanto à superação de dúvidas e conceitos internalizados erroneamente.

Diante disso, consideramos ser importante a discussão das várias representações dos números reais e suas propriedades, tendo em vista os diversos significados dessas ideias, suas relações com outros conceitos matemáticos e com o mundo prático no âmbito do curso de Licenciatura em Matemática. Ademais, entendemos que uma compreensão aprofundada desses conceitos permite que sejam reelaborados como objetos de ensino, trabalho esse que deve ser realizado durante a formação inicial do professor. Assim, as dúvidas sobre números irracionais, infinidade, pontos de uma reta, densidade e continuidade, entre outras, podem ser trabalhadas, em especial, na disciplina de Análise Real, considerando seu papel de consolidar e formalizar os conhecimentos dos licenciandos no que se refere, sobretudo, aos números reais. Ainda, insiste-se também na necessidade de considerar a prática docente, incluindo, segundo Reis (2001), o rigor de acordo com as intuições (iniciais e transitórias) dos licenciandos, formalizando os conceitos de modo que propicie a compreensão dos vários significados das operações e propriedades, de maneira multifacetada, segundo Martines (2012).

Branchetti (2017) aponta que a relação entre o contínuo e os números reais é uma das questões mais complexas dos fundamentos da Matemática por envolver importantes desafios. Como exemplo, a autora destaca que o cálculo diferencial lida com a magnitude contínua, mas uma explicação dessa continuidade não é fornecida de forma puramente aritmética. Na construção do conjunto dos números reais feita por Dedekind como cortes de sequências de racionais, ressaltando que os novos números – os irracionais – foram criações necessárias para identificar os pontos de uma reta e os números.

Branchetti (2017) aponta que pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de números reais e continuidade no Ensino Médio e na universidade foram realizadas em vários países e que a maior parte delas dizem respeito às dificuldades dos estudantes do Ensino Médio e universitário e dos futuros professores. As principais dificuldades relatadas envolvem a compreensão de números irracionais, infinitude, pontos de uma

reta, densidade, continuidade e reta numérica, mostrando que os alunos não conseguem definir de forma correta os conceitos de números racionais e irracionais. As principais implicações do seu estudo realizado com um professor de Ensino Médio com doutorado em Matemática é que, mesmo com doutorado em Análise, em sua transição para a profissão docente, o professor não aproveita seu conhecimento matemático na sua atuação docente por não ter conhecimento didático e epistemológico sobre o ensino dos números reais. Além disso, a autora defende que para se tornar capaz de desenvolver boas atividades de aprendizagem sobre os números reais, os professores (mesmo os matemáticos) devem ter uma formação que ultrapasse o conhecimento do conteúdo, mas que envolva aspectos epistemológicos e didáticos do conteúdo. Dessa forma, podemos considerar que a construção dos números reais, ainda que seja importante para a formação do professor, não é suficiente para que um futuro professor tenha a capacidade de abordar aspectos importantes do conjunto dos números reais em sala de aula, de forma efetiva.

Com o objetivo de discutir as dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de continuidade na passagem do estudo de Cálculo para o estudo de Análise, Bergé (2007) argumenta que, considerando o desenvolvimento histórico da Matemática, a completude surge como uma ferramenta para a construção de provas em um contexto onde a existência de números não é uma garantia. “Esta gênese distingue a completude de outros conceitos em Análise” (Bergé, 2007, p. 232). Com essa perspectiva, a autora aponta que não faz sentido a inclusão da completude como um tópico de estudo em um curso introdutório de Cálculo Diferencial, já que nessa disciplina não se prioriza a justificação teórica. Entretanto, a completude adquire significado quando os alunos têm de provar resultados que são óbvios para eles, como se espera nas disciplinas de Análise. Nesse momento, é possível a reflexão e discussão sobre o que é uma demonstração, a necessidade da existência de um sistema axiomático para a construção das demonstrações e, em consequência, a necessidade de se afastar da intuição. Portanto, a disciplina de Análise Real proporciona o momento para a construção dos números reais, abordando aspectos didáticos e epistemológicos que contribuirão para a formação do professor.

Em acordo com Durand-Guerrier (2016), entendemos que a construção dos números reais e a forma como essa construção é feita no curso de Licenciatura têm impacto na compreensão dos alunos sobre conceitos de Análise Real e, em consequência, no ensino e aprendizagem desses conteúdos. A autora, ao considerar a

fragilidade do conhecimento de estudantes universitários sobre números reais percebidos por meio da sua pesquisa, corrobora sua hipótese de que é necessário o desenvolvimento de um trabalho específico com estudantes universitários sobre a construção dos números reais.

Assim, a realização da construção dos números reais na disciplina de Análise é uma oportunidade para que o futuro professor de Matemática possa ter uma compreensão ampla das operações algébricas, das operações de ordem e da completude relacionadas ao conjunto dos números reais.

A Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação), definida na Resolução nº 2/2019 (Brasil, 2019), ao introduzir a ideia do conhecimento especializado do conteúdo, enfatiza que o professor deve ter um conhecimento aprofundado do conteúdo, um conhecimento pedagógico (como ensinar o conteúdo) e um conhecimento dos alunos (como os alunos aprendem o conteúdo), buscando uma articulação com a Educação Básica.

Portanto, em acordo com o preconizado pela BNC-Formação, na formação de professores, não basta que se adote uma abordagem puramente formal e axiomática na construção dos números reais, de modo que as ideias sejam trabalhadas de forma generalizada, mas a construção dos números reais deve auxiliar o futuro professor na compreensão das operações utilizadas como algoritmos no Ensino Básico, conhecendo seus significados com o intuito de utilizá-los na resolução de problemas e sabendo justificar sua validade, para ajudar a entender as ideias de densidade dos números reais, comensurabilidade e incomensurabilidade, por exemplo, de modo que consigam explorar essas noções em sua futura prática profissional.

A construção dos números reais nos cursos de licenciatura em Matemática

Dentre as várias indagações que motivaram esta pesquisa, as duas principais questões, que podem ser consideradas norteadoras da pesquisa realizada, são: Os planos de ensino indicam que é feita a construção dos números reais na disciplina Análise Real? Os planos de ensino dessas disciplinas apontam a forma como essa construção é realizada?

Para a investigação e a interpretação dos dados obtidos foi utilizada a metodologia de pesquisa documental inserida em uma abordagem predominantemente qualitativa. Os documentos selecionados como fonte de dados foram os planos de

ensino da disciplina Análise Real dos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições públicas de Ensino Superior do Estado de São Paulo.

Segundo Castro, Tucunduva e Arns (2008), o planejamento da atividade docente deve funcionar como um guia para a prática, que direciona o professor, de maneira autônoma, para realizar seus objetivos quanto à formação de seus alunos como cidadãos, revelando a importância desse ato.

O plano de ensino da disciplina Análise Real deve expressar, portanto, os objetivos, conteúdos e metodologias que nortearão o trabalho docente ao ministrar a disciplina. Para Libâneo (2013), o plano de ensino deve apresentar um programa a ser seguido durante o curso de determinada disciplina, contendo “justificativa da disciplina em relação aos objetivos da escola; objetivos gerais; objetivos específicos; conteúdo (com a divisão temática de cada unidade); tempo provável e desenvolvimento metodológico (atividades do professor e dos alunos).” (LIBÂNEO, 2013, p. 257).

Tendo em vista o papel do planejamento e do plano de ensino para o ensino de Análise Matemática, consultamos os documentos com o objetivo de investigar se há indicações de como é feita a construção dos conjuntos dos números reais nessa disciplina, caso seja realizada. Para tanto, a pesquisa atenta aos conteúdos descritos nas ementas e aos objetivos expressos nesses documentos (dados explícitos), com a intenção de refletir sobre a bibliografia básica indicada nos planos de ensino (dados implícitos), com a finalidade de compreender amplamente os documentos analisados, tendo em vista as indagações que moveram a investigação. Desse modo, as informações contidas nos planos de ensino revelaram a necessidade de investigar também as bibliografias mencionadas nesses documentos.

A pesquisa realizada contou com planos de ensino como fonte de dados principais (fontes primárias de dados), que foram fornecidos pelas instituições em seus endereços eletrônicos (websites) ou, quando não estavam disponíveis, pedidos por e-mail a essas instituições. A pré-análise desses documentos revelou a necessidade de conhecer como era a construção do conjunto dos números reais nas bibliografias básicas indicadas nesses documentos (fontes secundárias de dados). Assim, é possível afirmar que foi utilizada, predominantemente, a metodologia de pesquisa documental com caráter qualitativo, mas também foi realizada a pesquisa bibliográfica para refinar a exploração dos materiais coletados.

Para realizar essa investigação, foram consultados os planos de ensino da disciplina Análise Real (dentre outras diversas denominações) dos cursos de

Licenciatura em Matemática das seguintes instituições públicas de Ensino Superior do Estado de São Paulo:

i. Instituto Federal de São Paulo (IFSP) das cidades de Araraquara, Birigui, Bragança Paulista, Campos do Jordão, Caraguatatuba, Cubatão, Guarulhos, Hortolândia, Itapetininga, São José dos Campos e São Paulo;

ii. Universidade Federal do ABC (UFABC) de Santo André;

iii. Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) das cidades de São Carlos e Sorocaba;

iv. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) das cidades de Bauru, Guaratinguetá, Ilha Solteira, Presidente Prudente, Rio Claro e São José do Rio Preto;

v. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP);

vi. Universidade de São Paulo (USP) das cidades de São Paulo e São Carlos.

O curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de Guaratinguetá, no momento da realização da pesquisa, não contemplava a disciplina Análise Real. Segundo as informações recebidas por e-mail, a disciplina fazia parte da estrutura antiga do curso, vigente até o ano de 2014, retornando no ano de 2020 na nova reestruturação, que até a data da finalização desta pesquisa não havia sido regularizada. Além disso, o curso de Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em Matemática da USP de São Carlos não possuía, em sua grade curricular, disciplinas relacionadas à Análise Real.

Com os planos de ensino, foi realizada a análise dos conteúdos seguindo as fases de pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados (GODOY, 1995) em uma perspectiva predominantemente qualitativa. A pré-análise contou a organização dos documentos, que foram armazenados digitalmente em nuvem por meio dos serviços da plataforma Google Drive. Esses planos de ensino foram impressos e foi realizada uma primeira leitura, a qual permitiu formular hipóteses iniciais.

Em seguida, foi realizada a exploração desses materiais, o que levou a um levantamento bibliográfico dos referenciais indicados como bibliografia básica dos documentos investigados. Cabe aqui destacar uma das principais dificuldades dessa pesquisa: nem todos os livros indicados foram encontrados e, quando obtidos, nem sempre se tratava da mesma edição indicada pelos planos de ensino. No entanto, as indicações resumem-se em 23 referências, das quais foram analisadas 20, ou seja,

aproximadamente 87% do total, o que forneceu uma boa quantidade de materiais para o levantamento dos dados implícitos.

Assim, esse aperfeiçoamento possibilitou uma interpretação mais abrangente dos planos de ensino, que foram, na sequência, interpretados um a um, gerando os resultados e as conclusões deste trabalho.

Resultados

A construção dos números reais pode ser realizada de maneira estritamente formal e abstrata, com resultados generalizados que são aplicáveis na busca por outros resultados e resolução de problemas dentro da lógica processual estabelecida, atendendo às necessidades do futuro matemático (profissional formado por cursos de Bacharelado em Matemática). Por outro lado, essa construção pode ser fundamentada no ensino de conteúdos relacionados ao conjunto dos números reais, isto é, realizada com rigor matemático no que se refere às definições e demonstrações, porém não de modo estritamente formal, em uma abordagem que proporcione a compreensão ampla desses conceitos de maneira que possibilite seu ensino e a utilização na resolução de problemas práticos com os quais os estudantes do Ensino Básico podem se deparar em seu cotidiano, por exemplo, de modo que o futuro professor (profissional formado pelo curso de Licenciatura em Matemática) consiga justificar os resultados e lidar com as dúvidas e erros de seus alunos.

No caso em que a abordagem é feita de maneira estritamente axiomática, em outras palavras, o conjunto dos números reais é apresentado como corpo ordenado completo, não é realizada a construção desse conjunto, mas apenas são apresentadas suas propriedades de modo que seja possível continuar o trabalho de outros conteúdos na disciplina.

Em vista disso, foi realizada uma primeira leitura dos planos de ensino, que foram os dados principais dessa pesquisa. Esse primeiro contato com os documentos permitiu conhecer as ementas, objetivos e conteúdos tratados nos cursos de Análise Real das instituições pesquisadas. Em alguns planos de ensino, essa primeira leitura já permitiu inferir se a construção dos números reais era ou não realizada em cada um dos cursos de Licenciatura em Matemática, no entanto, antes de realizar afirmações do gênero, houve a preferência por investigar os dados implícitos contidos nesses documentos que, no caso, eram as bibliografias básicas. Isso se deve ao fato de que, segundo Libâneo (2013), os conteúdos são indicados pelos professores e têm a função de guiar a preparação das aulas. Por isso, esses conteúdos estão presentes nas referências

bibliográficas, que também trazem as possíveis abordagens desses conceitos, cuja função é guiar os estudos dos alunos, de acordo com Libâneo (2013).

Cabe ressaltar novamente a dificuldade para encontrar as mesmas edições das referências bibliográficas indicadas e mesmo os próprios livros, cujas buscas deram-se na internet e na biblioteca da UNESP, utilizando como ferramenta de busca o Catálogo Athena e consultas aos acervos pessoais.

É importante observar que, caso das indicações de artigos da Revista do Professor de Matemática (RPM) – que foi citada em dois planos de ensino, de artigos da Educação Matemática em Revista (EMR) – citada em um plano de ensino, do Periódico Tendências de Matemática Aplicada e Computacional (TEMA) – citado em um plano de ensino, e da Revista Eletrônica Paulista de Matemática – citada em um plano de ensino, não foram indicados, especificamente, quais os artigos utilizados, o que inviabilizou a análise dessas referências.

O Quadro abaixo traz, de maneira resumida, as edições que foram consultadas, assim como as que não foram encontradas, trazendo também o número de vezes em que foram indicadas nos planos de ensino investigados e, em síntese, se foi realizada a construção do conjunto dos números reais.

Tabela 1

Resumo das bibliografias básicas citadas nos planos de ensino

Referência consultada	Números de vezes que foi indicada nos planos de ensino	Realização da construção do conjunto dos números reais
Ávila, G. (2001). Análise Matemática para a Licenciatura. 1ª ed. São Paulo: Edgard Blücher.	20	Parcialmente realizada, isto é, o autor esboça um roteiro para a construção.
Ávila, G. (1999). Introdução à Análise Matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher.	8	Parcialmente realizada, ou seja, o autor esboça um roteiro para a construção.
Bartle, R. G. (1983). Elementos de Análise Real. Trad. Alfredo A. de Farias. Rio de Janeiro: Campus.	1	Não.
Bourchtein, A.; Bourchtein, L. (2010). Análise real: funções de uma variável real. São Paulo: Ciência Moderna.	1	O livro não foi encontrado.

Ferreira, J. A (2013). Construção dos Números. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM.	1	Parcialmente realizada, quer dizer, não demonstra todas as propriedades necessárias para a construção dos reais.
Figueiredo, D. G. (2008). Análise I. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.	11	Não.
Guidorizzi, H. L. (2001). Um Curso de Cálculo (Vol. 1). Rio de Janeiro: LTC, 2001.	2	Não.
Lima, E. L. (2013). Análise Real, vol 1. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA.	14	Não.
Lima, E. L. (2017). Curso de Análise. vol. 1. 14ª ed. Rio de Janeiro: IMPA.	7	Não.
Lima, P. C. (2013). Fundamentos de Análise I [Formato eletrônico]. Belo Horizonte: CAED-UFMG.	1	Não.
Muniz Neto, A. C. (2015). Fundamentos de Cálculo – Coleção PROFMAT – Ed. Sociedade Brasileira de Matemática.	1	O livro não foi encontrado.
Niven, I. (2012). Números: Racionais e Irracionais. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM.	1	Não.
Panonceli, D. M. (2017). Análise Matemática. São Paulo: Pearson.	2	O livro não foi encontrado.
Paterlini, R. R. (2012). A Aritmética dos Números Reais. [Formato eletrônico] São Carlos: UFSCar.	1	Parcialmente realizada, ou melhor, não demonstra todas as propriedades necessárias para a construção dos números reais.
Golderg, R. R. (1963). Methods of Real Analysis. New York.	1	Não.
Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis. 3ª ed. New York: McGraw-Hill.	1	Sim.
Rudin, W. (1971). Princípios de Análise Matemática. São Paulo: Ao livro técnico.	3	Sim.
Simmons, G. F. (1988). Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 1. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGrawHill.	2	Não.
Spivak, B. (1967). Calculus. New York: W. A. Benjamin Inc.	2	Sim.
Stromberg, K. R. (1981). An Introduction to Classical Real Analysis. Belmont: Wadsworth Inc.	1	Não.

Táboas, P. Z. (2008). Cálculo em uma variável real. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.	1	Não.
Villanueva, D. A. Z. (2014). Princípios de Análise e Exercícios de Cálculo. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física	1	Parcialmente realizada, em outros termos, não demonstra todas as propriedades necessárias para a construção dos reais.
White, A. J. (1975). Análise real: uma introdução. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, EDUSP.	1	Não.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Na obra de Ávila (2001) são citadas as construções realizadas por Dedekind e Cantor (Ávila, 2001, p. 29 – 32), indicando os livros de Rudin e Spivak para um entendimento completo do leitor (Ávila, 2001, p. 31). A construção de Cantor também é esboçada, de modo que o leitor compreenda a ideia utilizada, mas sem maiores detalhes (Ávila, 2001, p. 71 – 73).

Em Ávila (1999), o autor realiza uma abordagem histórica interessante sobre a construção do conjunto dos números reais, embora não realize essa construção no livro, trazendo as ideias de importantes matemáticos sobre o tema, como Eudoxo e Dedekind, destacando a ideia de Dedekind para a construção dos números reais (Ávila, 1999, p. 12-15), mas indica os livros de Dedekind e Spivak para que o leitor possa encontrar a construção completa dos números reais por cortes.

Na obra de Bartle (1983), o autor menciona que é possível realizar a construção dos números reais a partir do conjunto dos números naturais, inteiros e racionais ou a partir do conjunto dos números racionais, no entanto não realiza essa construção, privilegiando a apresentação de uma lista de propriedades (propriedades algébricas, propriedades de ordem e a propriedade de completeza) relacionadas ao sistema de números reais (Bartle, 1983, p. 38).

Em Ferreira (2013) é feita a construção do conjunto dos números reais a partir do conjunto dos números racionais com suas propriedades algébricas e aritméticas e elege como roteiro para sua apresentação desse assunto o modelo estabelecido por Rudin.

No livro de Figueiredo (2008), a construção dos números reais não é feita de forma rigorosa, mas o autor fornece uma noção bem breve da ideia de corte de Dedekind, e sinaliza também a possibilidade de realizar a construção dos números reais utilizando sequências de Cauchy (Figueiredo, 2008, p. 3 – 13).

Em Lima (2017), o autor adverte o leitor da possibilidade de se construir os números reais partindo dos números naturais, por meio de extensões sucessivas do conceito de número, chegando à construção dos números reais. Além disso, salienta que isso pode ser feito de várias maneiras e que a etapa crucial dessa construção é que passa dos números racionais para os números reais e que pode ser realizada pelo método dos cortes de Dedekind ou pelo processo de Cantor via sequências de Cauchy. O autor cita alguns livros (Dedekind, Landau, Cohen e Ehrlich) que tratam apenas das extensões do conceito de número e outros (Rudin e Jacy Monteiro) que dedicam capítulos sobre o assunto. Lima (2017) define um corpo ordenado completo K e adota, a partir de exposições precedentes, o axioma fundamental da Análise Matemática: existe um corpo ordenado completo, R , denominado o corpo dos números reais. Por fim, examina algumas propriedades dos números reais em razão de ser um corpo ordenado completo.

Na obra de Lima (2013) são exploradas as propriedades da soma, produto, relação de ordem e representação decimal dos números racionais. Os números irracionais são introduzidos por meio de exercícios e exemplos. O conjunto dos números reais, no entanto, é definido como corpo ordenado, sendo exploradas suas propriedades. No entanto, não é realizada a construção desse conjunto numérico.

No livro de Niven (2012), embora o autor não realize uma construção formal dos números reais, é desenvolvido um trabalho interessante sobre os números racionais e irracionais que certamente pode contribuir à formação e atuação do futuro professor de Matemática.

Na obra de Paterlini (2012) é realizada uma abordagem muito interessante dos números reais para a formação do futuro professor, a partir de contextualização histórica, resolução de problemas, proposta de investigação e atividades voltadas a licenciando e a professores. O autor explora os números naturais, inteiros e racionais, com importantes ideias como sucessor e antecessor no conjunto dos naturais, números primos, múltiplos, máximo divisor comum, representação decimal e fracionária de números racionais, e frações equivalentes, por exemplo. Os números racionais são introduzidos por meio do exemplo $\sqrt{2}$, e o autor apresenta diversas formas de demonstrar a sua não-racionalidade. Em seguida, explorou as ideias de comensurabilidade e incommensurabilidade. O autor apresenta os modelos de Eudoxo e de Dedekind, dando ideia da construção dos números reais realizadas por esses matemáticos, seguindo de um resumo com as propriedades desse conjunto numérico.

É possível inferir que o autor realiza uma construção dos números reais via cortes de Dedekind de maneira informal (enunciando as definições, proposições e teoremas sem demonstrá-los), porém com rigor matemático, embora não a faça de maneira formal.

A obra de Goldberg (1963) traz a representação decimal dos números reais (expansão decimal), demonstra que esse conjunto é não-enumerável e utiliza os números reais para diversos exemplos, porém não é realizada a construção desse conjunto numérico.

A obra de Rudin (1976), citada em outros livros, realiza a clássica construção dos números reais por meio de cortes de Dedekind e obtém um corpo ordenado completo cujos elementos são coleções de números racionais (Rudin, 1976, 17-21). O mesmo ocorre em Rudin (1971).

Na obra de Simmons (1988), o autor desenvolve estudos centrados nas propriedades dos números reais no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e da Geometria Analítica. Entretanto, o autor, indica por meio de exemplos numéricos os conjuntos (natural, inteiro, racional), expõe alguns exemplos de números irracionais e representa na reta real alguns números (naturais, inteiros, racionais e irracionais), salientando que o descrito acima é uma correspondência um a um (ou biunívoca) entre todos os números reais e todos os pontos da reta. E, ainda, nos tópicos adicionais, seção A.1, demonstra a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Porém, não é realizada a construção dos números reais.

No livro de Spivak (1967) é feita a construção dos números reais por cortes de Dedekind. O autor demonstra propriedades dos números reais e, no capítulo 29, demonstra a unicidade dos números reais (como único corpo ordenado completo, a menos de um isomorfismo).

Em Villanueva (2014), o autor explora formalmente os conjuntos dos números reais, inteiros, racionais e irracionais, dando ideia de expansão de conjuntos e da construção do conjunto dos números reais baseando-se na ideia de cortes de Dedekind, realizando parcialmente essa construção em uma abordagem formal.

Em White (1975), o autor ressalta a importância das demonstrações na Matemática, mas introduz os números reais e suas propriedades por meio de treze axiomas (adição, multiplicação, distributividade, ordem e completude), já que pretende explorar outras ideias relacionadas desse conjunto. Desse modo, não realiza a construção dos números reais.

Em Guidorizzi (2001), Lima (2013), Stromberg (1981) e Táboas (2008) não é tratada a construção dos números reais.

Nossa análise mostra que a maior parte das obras que discutem em alguma medida a construção dos números reais, se baseia na ideia da construção dos números reais realizada por Dedekind no século XIX, conforme a apresentação de Rudin (1971, p. 3-11). Nessa abordagem da construção dos números reais, supõe-se conhecido o conjunto dos números racionais, procedendo de maneira formal e rigorosa na construção das estruturas até chegar a uma definição para os números irracionais, consolidando a construção dos reais. Nota-se que os conceitos são tratados de maneira abstrata, a fim de caracterizar esse conjunto, voltando atenções maiores às suas estruturas. É interessante destacar o raciocínio exigido para realizar as demonstrações, de forma construtiva ou por absurdo, exigindo do leitor apuramento e cuidado na realização do procedimento, realizado de maneira muito bem articulada para elaboração das provas.

No entanto, cabe enfatizar que as obras de Rudin (1971) ou Spivak (1967), que trazem uma construção formal do conjunto dos números reais, são necessárias para o rigor matemático, mas tornam-se insuficientes quando adotadas de forma isolada, sem uma discussão adequada sobre a dimensão didático-pedagógica dos conteúdos abordados. A forma abstrata, embora interessante por garantir a validade e consistência dos resultados, não é suficiente para contribuir para a formação do professor que irá atuar na Educação Básica. De fato, a maneira como são tratados os números reais nessa construção não contribui diretamente para o trabalho do professor. É claro que essa abordagem permite que sejam compreendidas as noções de ordem, as operações, suas propriedades e, por exemplo, estabelecer a ideia de densidade dos racionais e irracionais. Todavia, o modo como são tratados os números reais, como cortes ou a separação entre eles, não consiste propriamente em um objeto de ensino do futuro professor do Ensino Básico.

Dentre as obras analisadas, Paterlini (2012) propõe uma abordagem dos números reais em *Análise Matemática* que possibilita uma compreensão da Matemática trabalhada no Ensino Básico por intermédio da Matemática do Ensino Superior, trabalhada nos cursos de Licenciatura. O autor usa uma abordagem histórica, iniciando pela necessidade humana de contar, introduzindo as ideias de sucessor e antecessor de números naturais, comentando os diferentes sistemas de numeração. De fato, essa construção traz uma abordagem histórica para o conjunto dos números naturais,

tratando ideias como a de sucessor de um número nesse conjunto, noção de ordem, operações e propriedades, além de noções muito trabalhadas no Ensino Básico, como os conceitos de múltiplo e divisor, máximo divisor comum, números primos e paridade, também esclarecendo a ideia do número zero. É feita a ampliação para o conjunto dos números inteiros e suas propriedades e também realizada uma abordagem histórica do conjunto dos números racionais, com esclarecimento de operações entre frações e frações irredutíveis – ideias muito estudadas no Ensino Básico – e representação decimal de números racionais (como números decimais finitos ou dízimas periódicas). Para introduzir a ideia de número irracional, novamente por meio de abordagem histórica, é explorado o número $\sqrt{2}$, com diversos tipos de demonstração de sua irracionalidade. Desse modo, são trabalhadas as ideias de comensurabilidade e incomensurabilidade, situando essas ideias historicamente, abordando o Teorema de Thales e trazendo, de forma sintética, as propriedades do conjunto dos números reais.

Nota-se que a proposta de construção de R realizada por Paterlini (2012) traz definições e demonstrações rigorosas, mas não de maneira estritamente formal, de modo que o licenciando consiga compreender a ideia de algoritmos e ideias que são amplamente trabalhadas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, como a ideia da divisão, soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, “regras de sinais” e multiplicação “em cruz”, por exemplo.

O modo como são apresentadas as definições e realizadas as demonstrações pode evitar que ocorra a internalização de concepções equivocadas pelos licenciandos e, por consequência, compartilhadas com seus futuros alunos, como constatadas por Corbo (2012), Penteado (2004) e Igliori e Silva (1999). A construção de R realizada por Paterlini (2012) trata, inclusive, de dificuldades de professores que já atuam no ensino e de futuros docentes, apontadas por aqueles autores, como, por exemplo, a definição dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, representação decimal e ideia de sucessor no conjunto dos números naturais e de densidade de conjuntos.

A construção do conjunto dos números reais realizada por Paterlini (2012) fundamenta-se na Matemática Escolar (Moreira; David, 2007), promovendo discussões por meio de resolução de problemas, temas para investigação e atividades voltadas para licenciando e professores sobre o ensino das ideias relacionadas para aqueles conjuntos numéricos. É interessante ressaltar que a abordagem rigorosa, porém não estritamente formal, proporciona uma compreensão estrutural e ao mesmo tempo

ampla dos conceitos desenvolvidos. Um trabalho realizado dessa forma é apontado como essencial por Martines (2012), uma vez que articula a formação matemática do futuro professor com os saberes necessários para o ensino dessa disciplina nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Após a análise dos livros referenciados nos planos de ensino, as explorações realizadas permitiram categorizar os dados produzidos, como segue nos itens 1 a 8 a seguir. É importante ressaltar que essa categorização desempenha apenas a função de resumo das investigações que foram realizadas na seção anterior, que são imprescindíveis para uma correta interpretação dos resultados.

1- O plano de ensino indica a construção formal do conjunto dos números reais, demonstrando preocupação com o ensino e a prática docente.

- i. IFSP Araraquara;
- ii. UFABC;
- iii. UNESP Presidente Prudente;
- iv. USP São Paulo;
- v. USP São Carlos;
- vi. UNICAMP (disciplina: Introdução à Análise Real).

2- O plano de ensino indica a construção formal do conjunto dos números reais, porém não dá muitas indicações quanto à prática docente e o ensino.

- i. UFSCar Sorocaba;
- ii. UNESP Ilha Solteira;
- iii. UNICAMP (disciplina: Análise I).

3- O plano de ensino aponta a realização de diversas abordagens para a construção do conjunto dos números reais, demonstrando preocupação com o ensino e a prática docente.

- i. IFSP Campos do Jordão.

4- O plano de ensino mostra que é realizada parcialmente a construção do conjunto dos números reais em uma abordagem formal, revelando também preocupação com o ensino e a prática docente.

- i. IFSP Cubatão;
- ii. IFSP Guarulhos;
- iii. IFSP Hortolândia;
- iv. IFSP Itapetininga.

5- O plano de ensino aponta que a construção do conjunto dos números reais é realizada parcialmente, em uma abordagem formal. No entanto, há poucas indicações quanto à formação para a docência e o ensino.

- i. IFSP Caraguatatuba;
- ii. UNESP Bauru;
- iii. UNESP Rio Claro.

6- É realizada abordagem axiomática para os números reais, todavia o plano de ensino demonstra preocupação com a futura prática docente do licenciando e com o ensino.

- i. IFSP Birigui;
- ii. IFSP Bragança Paulista.

7- É realizada abordagem axiomática para os números reais, e o plano de ensino traz poucas indicações quanto à formação para a docência e o ensino na Matemática Escolar.

- i. IFSP São José dos Campos;
- ii. UNESP São José do Rio Preto (disciplina: Introdução à Análise Matemática);
- iii. UNESP São José do Rio Preto (disciplina: Análise na Reta).

8- O plano de ensino mostra que não é realizada a construção do conjunto dos números reais, porém a disciplina explora amplamente esse conjunto, revelando significativa preocupação com a formação do futuro professor e o ensino na Matemática Escolar.

- i. IFSP São Paulo;
- ii. UFSCar São Carlos.

É importante agora que sejam retomados os conhecimentos imprescindíveis à formação do futuro professor, segundo Shulman (1986), para aperfeiçoar a análise dos resultados: conhecimento do conceito, conhecimento pedagógico do conceito e conhecimento curricular.

As categorias 2, 5 e 7 incluem planos de ensino que demonstram pouca preocupação com as dimensões de conhecimento do conceito e conhecimento pedagógico do conceito. De fato, a categoria 2 engloba planos de ensino que indicam a construção formal do conjunto dos números reais, no entanto há poucas indicações quanto ao ensino dos conteúdos relacionados a essa construção na Educação Básica – o que parece ser mais adequado, segundo Moreira e David (2007) à formação do Bacharel em Matemática. O mesmo ocorre com a categoria 5, em que os planos de

ensino não apontam como é realizada a articulação dos saberes desenvolvidos na disciplina (nesse caso, em relação aos números reais, que são parcialmente construídos) com a Matemática Escolar, ou como o conhecimento dos conteúdos trabalhados auxilia o ensino de Matemática na Educação Básica. Já os planos de ensino abrangidos pela categoria 7 demonstram uma abordagem axiomática para o conjunto dos números reais, não demonstrando nos documentos preocupação com a prática docente e o ensino da Matemática Escolar.

Abordagens como as indicadas pelos planos de ensino pertencentes às categorias 2, 5 e 7 deixam de explorar, formalizar e aprofundar estruturalmente conceitos e propriedades relevantes do conjunto dos números reais, que são constantemente trabalhados no Ensino Básico, fundamentais para compreender algoritmos e enunciados, com a finalidade de auxiliarem na resolução de problemas práticos com os quais os estudantes podem se deparar e apresentar dúvidas. Moreira e David (2007) consideram fundamental que o futuro professor conheça os conceitos matemáticos em diversos contextos, conhecendo também possíveis dificuldades na aprendizagem de tais conteúdos e como lidar com elas, e a formação inicial deve preparar o futuro professor para a ação pedagógica de ensinar Matemática – o que pode não ocorrer em abordagens como indicadas pelos planos de ensino pertencentes às categorias 2, 5 e 7. Além disso, as abordagens indicadas nessas categorias podem indicar pouca aderência desses planos de ensino com as atuais diretrizes para a formação de professores da Educação Básica, como a BNC – Formação (Brasil, 2019), que enfatizam que os conteúdos específicos estejam alinhados a componentes curriculares da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018), que sejam desenvolvidos de modo que haja uma formação sólida e profunda, mas em articulação com a formação pedagógica, buscando transpor o conhecimento científico em conhecimento escolar.

Fiorentini e Oliveira (2013) destacam que o professor deve conhecer os múltiplos sentidos e usos da Matemática, aprendendo a concebê-la em seus aspectos conceituais e didático-pedagógicos, sabendo, demonstrar resultados e resolver exercícios e problemas, e justificar esses procedimentos para os alunos. Desse modo, no caso do conjunto dos números reais, é necessário, portanto, que seja feita uma construção desse conjunto, para que o licenciando conheça e saiba trabalhar com suas estruturas, suas propriedades e suas operações, e também que o futuro professor conheça esse conjunto numérico, cujo estudo permeia todo o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, do ponto de vista a Matemática Escolar, ou seja, conhecendo como se apresentam os

conteúdos relacionados aos números reais nesses níveis de ensino, quais as possíveis abordagens para o ensino desses conceitos e, por exemplo, como lidar com possíveis dificuldades dos alunos.

Desse modo, segundo Fiorentini e Oliveira (2013), a Matemática que é trabalhada nos cursos de Licenciatura deve englobar os conceitos, os procedimentos necessários para comprová-los e compreendê-los e as possíveis abordagens para o ensino dessas ideias. As categorias de planos de ensino 1, 3, 4, 6 e 8 são as que mais se aproximam dessa concepção.

No entanto, as abordagens indicadas pelos planos de ensino que se enquadram nas categorias 6 e 8 não incluem a construção do conjunto dos números reais. De fato, na categoria 6 esse conjunto numérico é abordado de maneira axiomática. Várias propriedades, representações e algoritmos deixam de ser explorados quando os números reais são apenas tratados de modo axiomático, dimensões essas que podem ser importantes para o ensino de conteúdos relacionados e para o tratamento de dúvidas e concepções equivocadas dos alunos do Ensino Básico. Desse modo, a preocupação com ensino e a prática docente, demonstrada pelos planos de ensino que se incluem na categoria 6, deveria incluir também as várias dimensões que apresenta o trabalho com os números reais.

Os planos de ensino inseridos na categoria 8 não realizam a construção do conjunto dos números reais, porém demonstraram realizar um trabalho amplo com esse conjunto numérico, destacando a importância da compreensão e do ensino dos conceitos na futura prática docente do licenciando.

Para Moreira, Cury e Vianna (2005) e Branchetti (2017) um trabalho em Análise Real que considera apenas a Matemática em sua apresentação formal, lógico-dedutiva, não será suficiente para a formação do profissional que irá atuar no ensino de conteúdos relacionados aos que foram trabalhados na disciplina. Esses autores consideram primordial que a formação inicial do professor contemple também questões decorrentes da prática docente no Ensino Básico, do ensino da Matemática Escolar. Os planos de ensino que mais se aproximam dessa concepção são os que foram englobados pelas categorias 1, 3 e 4.

Os planos de ensino incluídos pela categoria 1 demonstram a realização da construção formal do conjunto dos números reais englobando uma formação direcionada para o ensino dos números reais e suas propriedades, assim como os planos de ensino inseridos na categoria 3 e 4 (que realiza a construção parcial desse

conjunto) – o que representa apenas dez dos vinte e quatro planos de ensino investigados.

Cabe destacar que apenas uma exposição axiomática do conjunto dos números reais, em uma abordagem que não considere as intuições dos licenciandos, suas percepções iniciais e transitórias, de modo que não proporcione uma compreensão ampla das estruturas desse conjunto, não é suficiente para a formação do professor. De fato, segundo Reis (2001), é necessário que o futuro docente compreenda os conceitos para utilizá-los adequadamente na resolução de problemas, compreendendo também suas dimensões pedagógicas e curriculares, uma vez que, em sua prática profissional, irá trabalhar com o ensino de conteúdos fundamentados nesses conceitos.

Ao realizar a construção do conjunto dos números reais, é importante que sejam trabalhadas noções de expansão de conjuntos, de modo que o licenciando consiga compreender a definição de cada um dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais e as propriedades que são válidas (ou não) em cada um deles. Ainda, segundo Cunha (2014), devem ser trabalhadas questões apresentadas no Ensino Básico, como densidade, infinitude, incomensurabilidade, compreensão das propriedades e operações, representações e funções no conjunto dos números reais, de modo que apenas a construção formal também não é suficiente – mais adequada, segundo Moreira e David (2007), à Matemática Acadêmica.

A pesquisa realizada nos permite afirmar que os planos de ensino dos cursos de Análise Real que mais se adequam no que se refere à realização da construção do conjunto dos números reais voltada ao curso de Licenciatura em Matemática (formação de professor para a Educação Básica) são os planos do IFSP Araraquara, da UFABC, da USP São Paulo e da USP São Carlos – o que representa quatro das 22 instituições investigadas, aproximadamente 18% dessas instituições.

Conclusão

Para compreender melhor o conhecimento desenvolvido na formação inicial do professor de Matemática com respeito aos números reais, este trabalho investigou como é indicada a realização da construção desse conjunto numérico nos planos de ensino de instituições públicas do Estado de São Paulo. Foram escolhidas as Instituições Públicas do Estado de São Paulo por conta de disponibilizarem, na maioria dos casos, acesso aos planos de ensino em seus endereços eletrônicos.

O principal resultado encontrado é que apenas quatro das vinte e duas Instituições investigadas expressam, nos planos de ensino da disciplina Análise Real, a

construção do conjunto dos números reais em abordagens que permitam que o licenciando compreenda esse conjunto numérico estrutural e amplamente, como objeto de ensino em sua futura prática profissional.

A análise dos livros referenciados nos planos de ensino nos permitiu observar que é possível abordar o conjunto dos números reais de maneira puramente axiomática, como um corpo ordenado completo, e construir esse conjunto em abordagens formais que sejam mais abstratas, como feito por Rudin (1971), ou embasada na construção histórica, privilegiando a compreensão das ideias abrangidas pelos números reais, como realizado por Paterlini (2012).

Consideramos que construções de R como realizada por Paterlini (2012) são mais adequadas para o ensino desse conceito na disciplina Análise Real de cursos de Licenciatura em Matemática, uma vez que trata as ideias de maneira rigorosa no que se refere às estruturas que compõem o conjunto, porém contextualizadas em seu processo histórico de construção e tratadas de modo que permita ao futuro professor compreender formal e amplamente conceitos trabalhados no Ensino Básico, porém sem um tratamento abstrato e estritamente formal dessas ideias. Além disso, Paterlini (2012) propõe uma abordagem que inclui a resolução de problemas e discussões sobre como ensinar os conceitos trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, propondo também que os licenciandos aprofundem seus conhecimentos por meio de temas para investigação.

Nessa perspectiva, os conceitos são tratados de maneira ampla e estrutural, de modo que possibilite ao futuro professor conhecer as justificativas das ideias trabalhadas e a importância do conteúdo para o ensino de Matemática, estimulando-os a refletir sobre como reelaborar ou abordar o conjunto dos números reais com a finalidade de auxiliar seus futuros alunos a construir seus conhecimentos sobre esse tema, proporcionando em sua formação as três categorias de conhecimentos necessárias ao professor delineadas por Shulman (1986). Por considerar o conceito e suas formas de representação, proporcionando compreensão das definições e demonstrações através de exemplos e ilustrações, com o intuito de se preocupar com a construção histórica e concreta desses conceitos, estimulando uma reflexão sobre os aspectos conceituais, didáticos e pedagógicos do conteúdo trabalhado, essa abordagem da construção dos números reais está em conformidade com as ideias de Fiorentini e Oliveira (2013) para o ensino de conceitos matemáticos para o futuro professor.

A discussão proposta neste artigo se limitou à análise dos planos de ensino, mas consideramos que possa haver práticas docentes que considerem o papel da Análise na Licenciatura, bem como as implicações da construção dos números reais para a compreensão de conteúdos que são desenvolvidos no Ensino Médio. Entretanto, os planos de ensino analisados não nos permitem uma discussão sobre tais práticas. Ainda assim, consideramos que é importante que os planos de ensino possam refletir as intencionalidades do professor, uma vez que esses documentos devem estar articulados com o Projeto Pedagógico do Curso e são considerados nas reestruturações curriculares e renovações de reconhecimento de Curso submetidas, por exemplo, ao Conselho Estadual de Educação (CEE), no caso das IES estaduais.

Acreditamos que os resultados das análises dos planos de ensino de cada Instituição, juntamente com o estudo teórico que explicitou a importância de uma abordagem coerente para o ensino de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática, acrescentem ideias para a reflexão que é continuamente estabelecida sobre o aprimoramento desses cursos, com a intenção de aperfeiçoar a formação inicial do professor de Matemática – o que acreditamos que terá reflexos diretos no Ensino Básico.

De fato, os estudos realizados neste trabalho mostram que é necessário refletir constantemente sobre a formação inicial dos professores, pensando sempre em sua futura prática profissional. Assim, é necessário que a Matemática trabalhada nesses cursos embase o ensino de Matemática na Educação Básica – o que não significa atenuar a Matemática lecionada para as Licenciaturas, mas sim formalizar e aprofundar as ideias de modo que o futuro professor compreenda e consiga reformular adequadamente para proceder seu ensino. É importante que isso ocorra especialmente em Análise Real, que tem a função de consolidar e ampliar os conhecimentos relativos aos números reais – assunto trabalhado continuamente no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, campo de atuação profissional do futuro professor.

Referências

- Ávila, G. (2001). *Análise Matemática para a Licenciatura*. 1ª ed. São Paulo: Edgard Blücher.
- Bagni, G. T. (2000) Insiemi infiniti di numeri reali. Infinite sets or real numbers. *L'educazione matematica*. XXI, VI, 2, 1, 22–46.
- Bergé, A. (2007). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, v. 67, n. 3, p. 217–235, 30 nov.

- Bertolucci, G. A.; Balieiro Filho, I. F. (2024). A construção dos números reais na licenciatura em Matemática: perspectivas para a formação do professor ante a BNCC. In: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva. (org.). *Perspectivas da Educação Matemática envolvidas em processos formativos*. 1ed. Cachoeirinha - RS: fi, p. 35-58.
- Bolognezi, R. A. L. (2006). *A disciplina de Análise Matemática na formação de professores de Matemática para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação). Curitiba: PUC.
- Branchetti, L. (2017). High school teachers' choices concerning the teaching of real numbers: A case study. [s.l: s.n.]. *CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Ireland. Disponível em: <https://air.unimi.it/retrieve/dfa8b9a5-fd70-748b-e053-3a05fe0a3a96/TWG14_07.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- Brasil. (2017). Ministério da Educação. *Relatório Síntese de Área: Matemática* (Bacharelado/Licenciatura). Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2017/Matematica.pdf> Acesso: 30 jul. 2025.
- Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf> Acesso em: 3 nov. 2025.
- Brasil. (2019). *Resolução nº 2/2019*, de 20 de dezembro de 2019. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). Ministério da Educação (MEC). Conselho Nacional de Educação (CNE). Diário Oficial da União, Brasília, DF, 15 abr. 2019a. Seção 1, p. 44.
- Broetto, G. C.; Santos-Wagner, V. M. P. dos. (2019). O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 33, n. 64, p. 728-747.
- Castro, P. A. P. P; Tucunduva, C. C; Arns, E. M. (2008). A importância do planejamento das aulas para a organização do trabalho do professor em sua prática docente. *Athena*, v. 10, n. 10, p. 49-62.
- Corbo, O. (2012). *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: UNIBAN.
- Cunha, C. L. (2014). *O ensino dos números reais na formação do professor de Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação). Presidente Prudente, SP: UNOESTE.
- Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, v. 2, n. 3, p. 338-361.
- Fiorentini, D.; Oliveira, A. T. C C. (2013). O lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, v.27, n. 47, p. 917-938.

- Fischbein, E.; Jehiam, R.; Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, v. 29, n. 1, p. 29-44.
- Godoy, A. S. (1995). Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de Empresas*, v.35, n. 3, p. 20-29, mai./jun.
- Igliori, S. B. C.; Silva, B. A. (1999). Conhecimento de concepções prévias dos estudantes sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino-aprendizagem. In: Reunião anual da Anped, 21. 1998. *Anais...* Caxambu, MG.
- Libâneo, J. C. (2013). *Didática*. 2. ed. São Paulo: Cortez.
- Lima, E. L. (2013). *Análise Real*. Vol. 1. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA.
- Margolinas, C. (2004). Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques. *Education*. Université de Provence, Aix-Marseille I.
- Martines, P. T. (2012). *O papel da disciplina de Análise segundo professores e coordenadores*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: UNESP.
- Moreira, P. C.; Cury, H. N.; Vianna, C. R. (2005). Por que análise real na licenciatura?. *Zetetiké*, v. 13, n. 23, p. 11-42.
- Moreira, P. C.; David, M. M. M. S. (2007). *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Paterlini, R. R. (2012). *Aritmética dos números reais*. São Carlos, SP: UFSCar. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_reais_02_07_2012.pdf> Acesso: 20 ago. 2025.
- Penteado, C. B. (2004). *Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC.
- Reis, F. S. (2001). *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: UNICAMP.
- Rudin, W. (1971). *Princípios de Análise Matemática*. São Paulo: Ao livro técnico.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v.15, n. 2, p. 4-14, fev.
- Spivak, M. (1967). *Calculus*. New York: W.A. Benjamin Inc.