Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros

Transition interne du calcul dans une variable pour le calcul a plusieurs variables: un examen de livres

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES[1]

HERMÍNIO BORGES NETO[2]

Resumo

O trabalho apresenta um recorte da tese[3] de doutorado do primeiro autor, comparando e identificando os elementos que indicamos como pertinentes à transição interna do Cálculo em Uma Variável - CUV para o Cálculo a Várias Variáveis - CVV. Tais elementos são discutidos no âmbito de uma análise de livros didáticos utilizados no ambiente acadêmico, no ensino de cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática no Estado do Ceará. Assim, escolhemos os autores Guidorizzi (2008; 2010), Leithold (1994; 1999) e Stewart (2004a; 2004b), e, com base nas categorias descritas em Alves (2011) e a adoção de técnicas de análise de conteúdos (BARDIN, 1979), inspecionamos estes compêndios, com a intenção de evidenciar elementos que podem funcionar como entraves à referida transição e que não se tornaram objeto de investigação até o momento no Brasil.
Palavras-chave: Cálculo a Várias Variáveis. Transição interna. Livro didático.

Abstract

Le document présent un extrait de la thése de doctorat du premier auteur, en comparant et identifiant les éléments pertinents qui indiquent comment la transition interne du Calcul à une Variable – CUV pour le Calcul de plusieurs Variables – CVV. Ces élements sont discutés dans le contexte d´une analyse des libres utilisés dans l´environement académique, dans l´enseignement des cours en License et en Baccalauréat dans l´État du Ceará. Ainsi, ont choizi Guidorizzi (2008 ; 2010), Leithold (1994 ; 1999) et Stewart (2004a, 2004b), et basé sur les catégories décrites dans Alves (2011) et l´adoption de techniques d´analyse de contenu (BARDIN, 1979), on a inspeccioner ces manuels, avec l´intention d´souligner des éléments que peuvent agir comme des obstacles à cette transition et que ne sont pas devenus l´objet d´une recherce à ce jour au Brésil.

Keywords: Calcul a Plusieurs Variables. Transition interne. Livre didactiques.

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – fregis@ifce.edu.br
[2] Universidade Federal do Ceará – herminio@ufc.br
[3] Tese intitulada *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*, desenvolvida pelo primeiro autor e disponível no *site*: http://www.multimeios.ufc.br/teses.php

Introdução

Nos cursos de licenciatura no Brasil, de modo geral, os estudantes mantêm contato com as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, aproximadamente, por um período de um a dois anos de estudo sistemático. O modelo curricular *standart* brasileiro prescreve o estudo introdutório da formal do Cálculo em Uma Variável Real - CUV e, numa etapa posterior, o primeiro contato com o Cálculo a Várias Variáveis - CVV.

Assim, neste estudo, com ênfase nos compêndios utilizados no ensino do Cálculo, que encontramos nas instituições de ensino superior no Estado do Ceará (Universidade Federal do Ceará – UFC, Universidade Estadual do Ceará – UECE e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE), e também observando as peculiaridades inerentes em cada etapa de ensino, de modo semelhante à atenção dispensada por especialistas (GRAY et al, 1999) que desenvolvem sua atenção referente à transição da escola ao *locus* acadêmico, analisaremos e indicaremos os elementos inerentes ao que nomeamos que *transição interna* do CUV para o CVV.

Destarte, este ensaio resulta de um recorte da tese de doutorado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, e visa a apresentar uma contribuição sobre os processos envolvidos na *transição interna* do CUV para o CVV, que não podem permanecer desconsiderados no processo de ensino/aprendizagem, no âmbito de um curso de licenciatura em Matemática.

O estudo desenvolvido para a tese de doutorado envolveu a aplicação de uma metodologia para o ensino do CVV, com apoio computacional. Em razão do levantamento bibliográfico de estudos referentes ao CUV e da aparente escassez, no Brasil, de trabalhos relativos ao CVV, detectamos a importância de efetuar a análise das propostas didáticas e os elementos explorados nas abordagens dos autores de livros de CVV que, em alguns casos, à semelhança do ensino escolar, preservam o caráter indefectível dos rituais metodológicos do ensino de Matemática e que reduzem este conhecimento à algoritmização e à aplicação automática de teoremas.

Sendo assim, no próximo segmento, trazemos à discussão o momento de transição entre as etapas de estudo do CUV e do CVV que, pelo nosso entendimento, proporciona bem mais dificuldades aos estudantes, além da própria mudança ordinária notacional ou simbólica que, em virtude de sua própria natureza, possui maior visibilidade.

1 A transição interna do CUV para o CVV

Sob um olhar pouco atento, ao analisarmos e compararmos os conteúdos de CUV e de CVV, no contexto de um curso de graduação, seja no caso da licenciatura ou no bacharelado, aparentemente, o que percebemos de imediato relativo às suas diferenças, diz respeito às simbologias, fórmulas e definições formais intrínsecas a cada teoria.

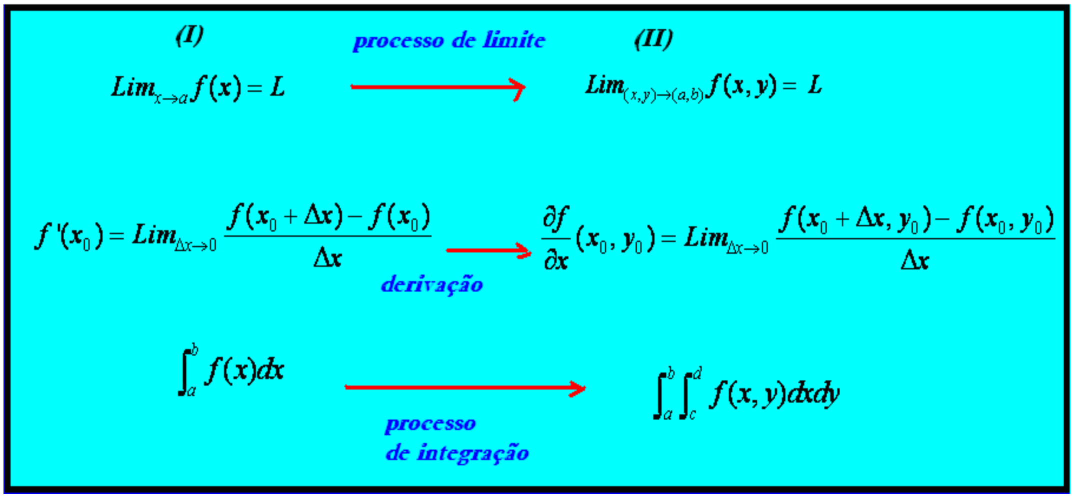

FIGURA 1. Processo de *transição interna* do CUV para o CVV.
FONTE: Alves (2011, p. 62).

Indicamos algumas simbologias, na fig. 1, relacionadas aos principais processos matemáticos estudados no período de um a dois anos, aproximadamente, nas universidades no Brasil. Os símbolos indicados acima têm a possibilidade de *evocar os processos matemáticos* (GRAY *et al*, 1999, p. 113) e, assim, originam e fornecem sentido/significado aos objetos matemáticos chamados de *limite*, *derivada* e *integral*.

O estudo sistemático de noções matemáticas avançadas (*limite, derivada, integral*), no contexto do CUV e posteriormente no CVV, à semelhança do que acontece na transição da escola para a universidade, envolve mudanças nem sempre naturais. Com o intuito de evidenciar as mudanças inerentes a esta transição que nos propomos analisar, como exemplo inicial, Alves (2011) considera a noção de *limit*e de funções do tipo $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ e $w = f(x, y, z)$. Alves (2011, p. 28) salienta ainda que *a razão da escolha deste exemplo inicial é apoiada na importância da noção de limite para toda a teoria do Cálculo* e também do *seu caráter particularmente difícil* (CORNU, 2002, p. 153).

Note-se que apenas as funções em uma variável real são tomadas como objeto de estudo no CUV. Desta forma, para introduzir nossa discussão, consideremos os seguintes limites: (i) $\lim_{x \to a} f(x) = L$; (ii) $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$, e (iii) $\lim_{(x,y,z) \to (a,b,c)} f(x,y,z) = L$.

Ora, no caso (i), no estudo do CUV, os autores de livros (LEITHOLD, 1994; STEWART, 2001a), caracterizam uma aproximação unidimensional, dos pontos da reta $\mathbb{R}$, próximos do ponto $x = a \in \mathbb{R}$. Ademais, quando nos atemos à notação ou a simbologia que simplifica e envolve o significado deste processo (cálculo dos limites laterais), escrevemos, de modo padrão, os seguintes símbolos $x \to a^- (\textit{à esquerda de } a, x < a)$ e $x \to a^+ (\textit{à direita de } a, x > a)$.

Por outro lado, no caso (ii), diferentemente da situação anterior, em que contávamos com uma função do tipo $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde X é o seu *domínio*, teremos agora uma função de duas variáveis reais a valores reais, definida em $f : Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Reparamos, por exemplo, que o *gráfico* da função $y = f(x)$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, enquanto o *gráfico* de $z = f(x,y)$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ e, com o auxílio de um *software* de Matemática, temos a possibilidade de visualizá-lo.

No caso (iii), todavia, falamos de funções do tipo $f : Z \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que possuem um *gráfico* representado por um subconjunto do $\mathbb{R}^4$ e que *não proporciona a possibilidade de uma apreensão imediata, apoiada na percepção* (ALVES, 2011, p. 69).

Reparamos que, no caso (ii), quando estabelecemos o significado do símbolo $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$, explicitamos a importância agora da aproximação da imagem da função $f(x,y)$, na medida em que os *pares ordenados* no plano tendem ao par ordenado (a,b). Assim, enquanto no caso (i) avaliamos o comportamento do limite em um ponto na reta $\mathbb{R}$, nos casos (ii) e (iii), avaliamos o comportamento e, consequentemente, a existência dos limites em pontos do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, agora representados pelos *par* e a *terna ordenados* (a,b) e (a,b,c), respectivamente.

No caso (ii), por exemplo, não tem sentido escrevermos o símbolo $(x,y) \to (a,b)^+$ ou $(x,y) \to (a,b)^-$, uma vez que a noção de lateralidade (ou direção) condicionada pela aproximação unidimensional da reta, no âmbito do $\mathbb{R}^2$, perde seu sentido. De fato, neste caso, quando os autores de livros escrevem $(x,y) \to (a,b)$, referem-se, do ponto de vista topológico, apenas à distância entre os pontos (x,y) e (a,b).

Com efeito, Stewart (2001b, p. 889), ao apresentar a definição formal de *limite* e seu significado formal por *épsilon* e *delta*, acentua que a definição em (ii), *se refere somente à distância entre* (x, y) e (a,b)*; não se refere à direção de aproximação*. Consequentemente, se o limite indicado em (ii) existe, $f(x, y)$ precisa se aproximar do limite, independentemente do modo como (x, y) e aproxima de (a,b). Na fig. 2, Stewart (2001b, p. 889) fornece um desenho explicativo para o leitor. O autor descreve trajetórias no plano que fazem referência às *curvas parametrizadas* no plano.

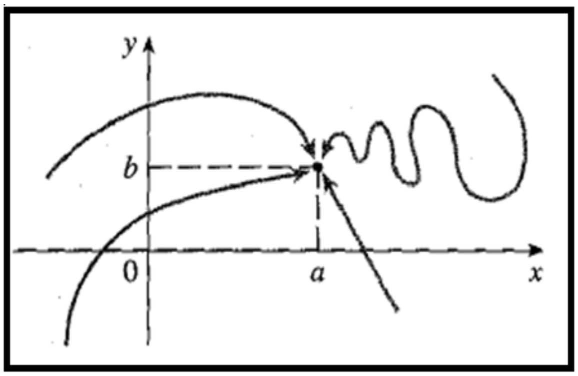

FIGURA 2. Processo de aproximação de limite no CVV, envolvendo a noção de *curvas parametrizadas*.
FONTE: Stewart (2001, p. 889).

Alves (2011, p. 65) observa ainda *os entraves que deparamos ao buscar explicar o mesmo processo de aproximação para o limite (iii)*. De fato, neste caso, segundo as definições por *épsilon* e *delta*, levamos em consideração a aproximação da *terna ordenada* (x, y, z) do ponto $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e, embora, do ponto de vista formal, se preserve a mesma noção de aproximação dependente do conceito de caminhos ou *curvas parametrizadas* (como vemos na figura 1), a representação heurística, como divisamos na figura 1, é inexequível de se reproduzir, sem o auxílio computacional, uma vez que, neste caso, a trajetória da *curva parametrizada* reside no espaço $\mathbb{R}^3$.

Alguns dos elementos que apontamos nos parágrafos anteriores merecerão ulteriores discussões e maior aprofundamento nas próximas seções, todavia, outra dessemelhança entre os limites indicados por (i), (ii) e (iii) diz respeito ao comportamento da *imagem* de cada função, na medida em que realizamos o processo de aproximação dos pontos que pertencem ao domínio de cada uma das funções $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ e $w = f(x, y, z)$, se aproximam do pontos a, (a,b) e (a,b,c), respectivamente; entretanto, nenhum deles precisa, de acordo com a definição formal, pertencer aos seus domínios respectivos.

Com efeito, no primeiro caso, analisamos o comportamento de sua *imagem* no eixo das *ordenadas* (Oy). No segundo, investigamos seu comportamento no eixo das *cotas* (Oz), enquanto no caso do limite (iii), sua imagem pertencerá, neste caso, ao quarto eixo, correspondente a um espaço quadrimenssional, inacessível à *visualização*.

Alves (2011) comenta ainda, em relação ainda aos *limites* indicados por (i), (ii) e (iii), uma perspectiva comparativa ao estabelecer suas respectivas definições por *épsilon* e *delta*. No caso de (i), sabemos que dado $\varepsilon > 0$, obtemos $\delta > 0$, de modo que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x - a| < \delta$. No caso de (ii), os autores de livros escrevem que dado $\varepsilon > 0$, existirá um $\delta > 0$, tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, sempre que $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$. Por fim, em (iii), dado $\varepsilon > 0$, obtemos $\delta > 0$, de modo que $|f(x, y, z) - L| < \varepsilon$, sempre que $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$.

Do ponto de vista topológico, no primeiro caso, a definição epsilônica, de raízes weierstrassianas faz referência a um *intervalo aberto*, do tipo $(a - \delta, a + \delta) \subset \mathbb{R}$, pois $0 < |x - a| < \delta \leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \leftrightarrow a - \delta < x < \delta + a$, para todo $x \in Dom(f(x))$. Todavia, no caso (ii), quando escrevemos $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, equivale a considerarmos $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ e esta condição refere-se ao conjunto dos pontos pertencentes a uma *bola aberta*, de raio $\delta > 0$, denotada por $B_\delta(a, b) \subset \mathbb{R}^2$, e que pertencem ao seu interior.

No caso de $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = L$, sua respectiva definição epilônica, nos leva a considerar, do ponto de vista topológico, uma *bola aberta*, de raio $\delta > 0$, denotada por $B_\delta(a, b, c) \subset \mathbb{R}^3$. Por outro lado, no contexto ensino do CUV, não *se encontra o emprego da expressão "bola aberta", como se registra nas explicações ordinárias fornecidas pelos livros didáticos de CVV* (ALVES, 2011, p. 30).

Em relação a tal fato, Revuz (1972) discute as dificuldades inerentes à compreensão da definição de *bola aberta* de centro a e raio r. Apesar de desenvolver sua argumentação no contexto do ensino da noção de *continuidad*e, Revuz (1972, p. 283) explica que, sobre a reta, a *bola aberta* de centro a e raio r é o intervalo $(a - r, a + r)$, *o que descreve um conjunto em termos de ordem*; todavia, no CVV, quando fazemos referência à expressão *bola aberta*, de centro (a,b) e raio $\delta > 0$, que denotamos há pouco por $B_\delta(a,b) \subset \mathbb{R}^2$, não há menção à ordenação dos seus elementos.

Alguns dos elementos discutidos nesta seção, podem ser divisados tanto no CUV como no CVV; outros não, como no caso do sentido topológico da *bola aberta* em $\mathbb{R}$ e uma *bola aberta* no $\mathbb{R}^2$, quando se considera a definição de *limite*. Outros elementos podem atuar positivamente, quando falamos, por exemplo, dos hábitos adquiridos pelo estudo de *regras operatórias* no CUV, e que são preservados no estudo do CVV. Outros elementos, entretanto, surgem no CVV, que não apresentam sua correspondência no tocante ao significado no estudo do CUV.

Ante tais circunstâncias, quando identificamos elementos (conceito, teorema, propriedades, simbologias etc.) presentes tanto no CUV como no CVV, e que determinadas circunstâncias preservam sua relação e/ou sentido, chamaremos, daqui por diante, de *elementos de transição*. Por outro lado, no caso em que temos um elemento presente apenas no CUV ou somente no CVV, chamaremos de *elementos de ruptura* e, no âmbito de nossa investigação, declararemos que estes últimos dificultam a transição do estudante no contato com ambos os conteúdos.

Apesar da escassez de estudos no Brasil, alguns trabalhos (ALVES & BORGES NETO, 2007, 2011; IMAFUKO, 2008) concernentes ao ensino deste conteúdo apontam questões e elementos que precisam ser considerados nesta *transição interna*, a saber:
(i) um sistema de representação simbólica mais complexo do que o outro; (ii) as argumentações envolvidas nas demonstração dos teoremas do CVV envolvem ideias generalizadas dos *teoremas* do CUV, inclusive a natureza das *definições formais* envolvidas; (iii) a mudança da natureza geométrica dos objetos matemáticos envolvidos; (iv) a mudança de significação conceitual; (v) o surgimento de *regras operatórias* semelhantes, tanto no CUV, como no CVV; (vi) *regras operatórias* válidas num contexto e inapropriadas em outro; (vii) teoremas do CUV sem interpretações semelhantes no CVV e vive-versa; (viii) *definições formais* que envolvem uma mudança de significado de acordo com a teoria formal e (ix) generalização de noções e *definições formais*.
Antes de encerrar esta seção, vamos ilustrar, por exemplo, neste contexto de transição, os itens (vi) e (vii). De fato, ao decorrer do primeiro contato com o Cálculo, os estudantes dedicam um tempo considerável às manipulações algébricas condicionadas

pelas *regras operacionais*. Em vários casos, prerrequisitos como *produtos notáveis*, possibilitam o emprego indefectível de métodos algoritimizados[4] que privilegiam a obtenção da resposta (por intermédio de substituições de variáveis), em detrimento do entendimento do processo envolvido no cálculo de *limites* ou, segundo Revuz (1972, p. 297), *da apropriação, por parte do estudante, de uma ideia geral mais importante*.

Ademais, teoremas importantes, como aqueles envolvendo a regra de L´Hopital, Teorema de Fermat e Teorema do Valor Intermediário, não possuem resultados equivalentes, no contexto do CVV, a não ser na verificação e demonstração formal de outras propriedades que, em alguns casos particulares, se restringem na avaliação do comportamento em separado, para cada uma das variáveis em $\mathbb{R}$.

Deste modo, com arrimo nas noções de *elementos transição* e *elementos de ruptura*, buscaremos indicar, no conjunto das obras didáticas investigadas, quais delas proporcionam melhor *transição interna* do CUV para o CVV. No próximo segmento, as apresentamos, descrevemos as *categorias de análise* e precisaremos os conceitos/propriedades que funcionaram como objetos de nosso estudo.

2 As obras analisadas

Este estudo foi desenvolvido com base em técnicas de *análise de conteúdo* (BARDIN, 1979). Primeiro, no quadro1, indicamos as obras didáticas escolhidas. Sublinhamos que sua escolha foi condicionada com base na adoção como livro-texto, para cursos de graduação em Matemática (licenciatura e bacharelado), em universidades do Estado do Ceará (UFC, UECE e IFCE).

Livros de Cálculo	Autores	Editora
Um curso de Cálculo – v. 1 e v. 2	Hamilton Luiz Guidorizzi	LTC
O Cálculo com Geometria Analítica – v. 1 e v. 2	Louis Leithod	HARBRA
Cálculo – v.1 e v. 2	James Stewart	Thomson

Quadro 1. Obras analisadas.
Fonte: Elaboração dos autores.

Segundo, no quadro 2, apresentamos as *categorias de análise* (coluna à esquerda) que empregaremos no sentido de comparar/diferenciar os livros de Cálculo supracitados

[4] Cornu (2002, p. 153) acentua que os exercícios encontrados nos livros dão ênfase restrita às inequações.

(quadro 1). Na coluna da direita, indicamos o significado (unidades de significado) com que interpretaremos cada uma delas.

A escolha das *categorias de análise* descritas no quadro 2 foi baseada a partir da formulação das seguintes questões que encontramos em Alves (2011): (a) Que mudanças identificamos na transição do CUV para o CVV, com respeito à simbologia adotada pelos livros? (b) Ocorrem mudanças nas *regras operacionais* aplicadas aos conceitos do CUV e do CVV? (c) Que mudanças registramos referentes aos teoremas do CUV e do CVV? (d) No contexto de transição, definições formais adquirem novo significado? (e) Com vista a uma exploração intuitiva na transição do CUV e do CVV, registramos o uso de metáforas nos dois conteúdos nos livros didáticos?

Descrição da categoria de análise	Significado da análise
Apresentação e descrição das simbologias	Livros que simplificam ou apresentam as simbologias de modo pormenorizado e detalhamento.
Regras operatórias	Propriedades e regras de inferência condicionadas pela definição formal e/ou teoremas.
Teoremas e contra-exemplos	Argumentos empregados na demonstração e a exploração de contraexemplo.
Definição formal	Explicação e significado dispensado pelo autor do ponto de vista geométrico.
Uso de metáforas	Livros que exploram a interpretação intuitiva (geométrica), com o auxílio de metáforas na significação dos conceitos.

Quadro 2. Critério e categorias de análise.
Fonte: Alves (2011).

Observamos que na seção inicial, indicamos alguns elementos discutidos em Alves (2011), relacionados com a formulação de *limite*, por meio do *épsilon* e *delta*. Deste modo, no quadro 3, acrescentamos o conceito a ser investigado de *continuidade de funções*, que se mostra presente tanto no CUV (LEITHOLD, 1994; STEWART, 2004a) como no CVV (GUIDORIZZI, 2010, LEITHOLD, 1999; STEWART, 2004b).

Ademais, o conceito de *diferenciabilidade* também é encontrado em ambos os conteúdos, todavia, haja vista sua importância no contexto do CVV, optamos também por discutir a noção de *comutatividade das derivadas mistas*, com o escopo de apontar/descrever dificuldades que surgem referentes à sua abordagem. Terceiro, apresentamos os conceitos e propriedades consideradas no estudo. Sublinhamos que os conceitos há pouco mencionados constituem o *corpus* textual (BARDIN, 1979) sobre o qual nos debruçamos.

Conceitos e propriedades investigadas	Categorias de análise consideradas	Elementos presentes no
Continuidade/descontinuidade de funções	Uso de metáforas e definição formal Apresentação e descrição das simbologias Teoremas e contra-exemplos	CUV e CVV
Função derivável, função diferenciavel	Uso de metáforas e definição formal Apresentação e descrição das simbologias Regras operatórias	CUV e CVV
Comutatividade das derivadas mistas	Apresentação e descrição das simbologias Regras operatórias Teoremas e contra-exemplos	Apenas no CVV

Quadro 3. Descrição dos conceitos e propriedades analisadas.
Fonte: Elaboração dos autores.

Assim, os conteúdos do quadro 3 serão analisados a partir dos elementos que elencamos a no quadro 2. Na próxima seção, introduziremos a discussão dos dados.

3 Discussão dos dados

O conceito formal de *continuidade de funções* é objeto de estudo, tanto no contexto do CUV, como no âmbito do CVV. Este poderia funcionar como importante *elemento de transição*, todavia, em decorrência da interpretação intuitiva apoiada no uso de metáforas, no contexto do CUV (LEITHOLD, 1994; STEWART, 2004a), e a verificação da lacuna, no que concerne a uma interpretação intuitiva do mesmo conceito, que observamos nos livros didáticos que consultamos de CVV, a noção de *continuidade* funciona como *elemento de ruptura* na *transição interna*.

Recordamos, entretanto, que quando falamos de metáforas (figuras de caráter semântico), nos referimos a algo que é frequentemente *compreendido exclusivamente em termos do seu uso, do que seu próprio conteúdo*. (OTTE, 2008, p. 64). Assim, alguns dos termos que divisamos nas abordagens de autores de livros do CUV carregam, de modo subjacente, a intenção, descrita por Otte (2008), da promoção do "insight metafórico", ou seja, um tipo de busca ou intuição que proporciona tornar um processo mental consciente ao próprio investigador.

Com efeito, no contexto do CUV, Stewart (2004a, p. 122) comunica ao leitor que podemos pensar uma *função contínua* em todo número de um intervalo *como sendo uma função cujo gráfico não se quebra. O gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel*. Por outro lado, do ponto de vista formal, todos os autores de livros de CUV e de CVV, consultados neste estudo, são concordes na apresentação da seguinte *definição formal*: dizemos que uma função f é *contínua* em um número $x = a \in \mathbb{R}$ se

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. E no caso do CVV, temos as modificações formais necessárias que acarretam que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$, quando no referimos a *continuidade* no ponto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Ora, alguns elementos relacionados com a noção de *limites* já foram expressos quando discorremos sobre a transição do Cálculo. O que acrescentamos, neste caso, por exemplo, é que, ao recorrermos à própria *definição formal* de *continuidade*, em nada nos sugere seu caráter geométrico, muito menos situações de uso em que necessitamos ou não retirar "a ponta da caneta do papel"[5].

Outro conceito restrito ao CUV que não apresenta correlação imediata a uma noção estudada no CVV refere-se ao que os autores de livros chamam de *descontinuidade removível*. Stewart (2004a, p. 123) explica que "quando identificamos, com o apelo visual, no gráfico, vários pontos em que a função "pula" de um valor para o outro, dizemos que a função apresenta uma *descontinuidade infinita*.".

No tocante às simbologias, no contexto do CUV, podemos falar da noção de *continuidade à esquerda* e *continuidade à direita*, denotadas por $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$. Por outro lado, apontamos um *elemento de ruptura* neste caso, quando não temos uma noção equivalente no contexto do CVV. E, ainda, as *regras operatórias* neste caso, explicadas e aplicadas pelos autores no âmbito do CUV, perdem seu sentido no estudo do CVV. De fato, não tem sentido algum a seguinte simbologia $\lim_{(x,y)\to(a,b)^+} f(x,y)=f(a,b)$ ou $\lim_{(x,y)\to(a,b)^-} f(x,y)=f(a,b)$.

Duval (2011, p. 28) menciona a perspectiva de Condillac, a qual se manifesta em tempos atuais, em que presenciamos que a simbologia e o estabelecimento de notações, em qualquer área da Matemática, possibilita *a economia de pensamento e uma maior precisão para o desenvolvimento dos cálculos* e, também, a aplicação das regras de inferência intrínsecas à cada teoria. A emergência e a predominância do simbolismo, semelhante ao que divisamos de modo particular na evolução do Cálculo, *com uma forte influência de Leibniz* (EDWARDS, 1979, p. 232), caracteriza o que Duval (2011,

[5] Edwards (1979, p. 308) lembra que B. Bolzano (1781-1848) se referiu à noção geométrica e intuitiva relacionada à *continuidade* como sendo inadequada. O autor comenta ainda que A. L. Cauchy (1789-1857) usou a mesma definição de *continuidade* formulada por Bolzano, todavia, Cauchy errou ao formular a noção de *continuidade* para funções em duas variáveis reais.

p. 24) denomina de desenvolvimento do pensamento matemático.

No caso do CUV e do CVV, afiançamos a ocorrência de mudanças drásticas no que concerne ao seu simbolismo. No contexto histórico, por exemplo, encontramos as variações notacionais relativas aos principais conceitos, com destaque para o CUV. Vale salientar, com efeito, a interpretação dinâmica da noção de *derivada*, vinculada ao problema da determinação das tangentes, e que Newton, no século XVII, empregava simbologias do tipo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, que designava o quociente das fluxões $\dot{y}$ e $\dot{x}$ que, hodiernamente, designam as seguintes derivadas $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$, como assim explica Edwards (1979, p. 190).

Nos livros atuais, encontramos, seguindo esta tradição histórica, as variações notacionais no CUV, em relação, por exemplo, ao conceito de *derivada* de uma função $y = f(x)$, em ponto $x = a$, denotada por $df(a)$, $f'(a)$, $\frac{d}{dx}f(a)$, $d_x f(a)$, $\frac{dy}{dx}(a)$. No caso do CVV, com respeito às simbologias, deparamos situações mais complexas, ao considerar notações do tipo: $\frac{\partial z}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)_{y=b}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right]_{y=cte}, \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ ou $\frac{\partial}{\partial x}[f(a,b)]$.

Um exemplo que merece atenção diz respeito ao significado das *simbologias* $\frac{df}{dx}(0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right]$. O símbolo "0" é invariante em todos os casos, todavia, no caso do símbolo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \underset{definição}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x}$, ao recorrermos à sua definição formal por meio de *limite*, podemos distinguir que o primeiro símbolo do *par ordenado* $(0,0)$ indica o valor ao qual a variável x, da função $f(x,y)$, se aproxima ($\Delta x \to 0$), na condição em que $y = 0$, enquanto que o segundo símbolo "0", do mesmo *par ordenado*, indica um valor constante assumido por y, ao avaliarmos o limite em questão. Esta natureza de descrição das simbologias atua como *elemento de ruptura*.

Vale observar que, no contexto do CUV, os livros didáticos, de modo geral, fazem referência ao conceito de *função derivável*. Por outro lado, os livros de CVV descrevem o conceito de *função diferenciável*. Notamos que, dependendo do contexto no qual fazemos indicação a tais propriedades, nos referimos a conceitos completamente distintos. De fato, ao consultar o livro de Análise no $\mathbb{R}^n$ de Lima (2009, p. 124), observamos que a noção de *função diferenciável*, respeitadas às particularidades, é a mesma que encontramos nos livros do CVV, e que é devida a Fréchet e Stolz. Por outro lado, no contexto do CUV, *derivabilidade* é o mesmo que *diferenciabilidade*. Enquanto isso, no CVV, a noção de *diferenciabilidade* é bem mais geral do que a de *derivabilidade*.

No CUV, dizer que $y = f(x)$ é *derivável* é o mesmo que declarar que ela é *diferenciável*, como se observa em Guidorizzi (2008, p. 137). Enquanto no contexto do CVV, quando declaramos que uma função do tipo $z = f(x, y)$ é *diferenciável*, como consequência, será *derivável* em relação às variáveis x e y, ou seja, existem suas *derivada parciais* e que podem ou não ser contínuas, entretanto, não tem sentido dizer que $z = f(x, y)$ é uma função *derivável*, a menos que mencionemos a quais das variáveis consideramos.

No que concerne às *simbologias*, na fig. 3 indicamos a diversidade de notações possíveis para as noções de *derivada parc*iais. Destacamos um modo de descrição detalhada da *simbologia*, como no caso de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, e uma maneira "simplificada" ou "comprimida", que reduz o objeto ao símbolo f_x (outro exemplo ocorre com os símbolos $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]$ e f_{yx}). Em relação ao emprego de simbologias, não podemos deixar de comentar que tais escolhas não são acidentais, e sim arbitrárias. E, em muitos casos, podem ocorrer por conveniência e até mesmo razões estéticas implicitamente assumidas pelo autor.

Em relação a isto, Lima (2009, p. 117) esclarece que, estritamente falando, *a melhor notação para a i-ésima derivada parcial é* $\partial_i f$ *, mas continuaremos escrevendo* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *por respeito à tradição, pelo apelo estético e, principalmente, porque isto torna mais naturais certas fórmulas, como por exemplo, a Regra da Cadeia*. Na fig. 3, divisamos simbologias detalhadas e outras “comprimidas” ou “simplificadas”.

Defendemos que o uso detalhado de simbologias pode atuar como um *elemento de transição*, na medida em que auxilia a compreensão da natureza das definições e dos objetos com que lidamos. Além disso, sua exploração introdutória em termos do uso da língua natural, com vistas a uma descrição verbal, e posterior introdução sistemática de simbologias, obedecerá com fidelidade à própria evolução histórica do Cálculo, como assim o atesta Edwards (1979, p. 242), ao referir-se aos trabalhos de Leibniz, em 1675; e, em tempos atuais, Gray *et al* (1999, p. 125) aconselham uma atitude semelhante, no sentido de se constituir o significado do conceito a partir de sua definição formal.

Notação para Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

FIGURA 3. Diversidade notacional para o conceito de derivada parcial discutida em Stewart (2004).
FONTE: Stewart (2004).

No tocante às *regras operatórias*, observamos em Guidorizzi (2010, p. 189) a seguinte condição $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0$, significando a *diferenciabilidade* no ponto $x = x_0$. Por outro lado, o caso do CVV, o mesmo autor escreve $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h.k)\|} = 0$, para indicar o mesmo conceito. Nestes casos, tanto as *regras operatórias* para a verificação da existência destes dois limites são distintas, como os significados geométricos atribuídos a cada uma delas. De fato, no CUV, o significado atribuído em relação ao primeiro limite refere-se à melhor aproximação possível da função $y = f(x)$ a uma reta no $\mathbb{R}^2$, descrita por $(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)$, todavia, a segunda condição significa a melhor aproximação da função por um plano no $\mathbb{R}^3$, descrito por $T(x, y) = f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y$.

Reparamos que, no CUV são essenciais o estudo que se faz do comportamento e as informações geométricas (crescimento/decrescimento, identificação de extremos e concavidade) que se pode extrair das funções $f'(x)$ e $f''(x)$, e que representam a primeira e a segunda derivadas da função $y = f(x)$. Por outro lado, no âmbito do CVV, Guidorizzi (2010), ao destacar as *derivadas de ordem superior*, diz que se pode evidenciar o caráter intricado e regras de natureza intrínseca complexa, relacionadas aos *operadores diferenciai*s $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ que indicam a operação de diferenciação (figura 4). Além disso, diferentemente do que ocorre no CUV os autores de livros de CVV, não relacionam as *derivadas de ordem superior*, por exemplo, com a *concavidade* da curva.

14.1. DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

Seja a função $z = f(x, y)$; na Seção 10.1 vimos como construir as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Da mesma forma, podemos, agora, construir as funções:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) \text{ etc.}$$

FIGURA 4. Diversidade notacional para o conceito de derivada parcial discutida em Stewart (2004).
FONTE: Guidorizzi (2010, p. 186).

Outro episódio referente ao uso de metáforas pode ser registrado no contexto do CUV. Stewart (2004a, p. 170), em relação ao conceito de *diferenciabilidade*, esclarece que *em geral, se o gráfico de uma função f tiver uma "quina" ou "dobra", então o gráfico de f não será tangente nesse ponto, e f não será diferenciável ali*. Em guidorizzi (2008) não divisamos este apelo intuitivo para o conceito. Já no contexto do CVV, a ideia geométrica de função *diferenciável*, em duas variáveis reais, é a existência de um plano tangente num ponto. Na fig. 5, vemos o desenho sugerido por Guidorizzi (2010, p. 201).

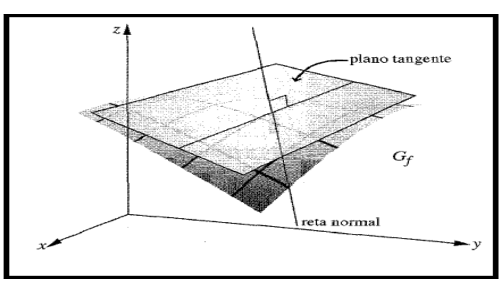

FIGURA 5. Diversidade notacional para o conceito de derivada parcial discutida em Stewart (2004).
FONTE: Guidorizzi (2010).

Com respeito ainda às *derivadas de ordem supe*rior, no CVV encontramos um importante teorema que possui natureza insólita, se comparado ao que se estuda no CUV. Chamado de Teorema de Schwarz, segundo Guidorizzi (2010), ou o Teorema de Clairaut-Schwarz, consoante Stewart (2004b), ou ainda sem nenhuma atribuição com respeito à autoria do teorema, como no caso de Leithold (1999, p. 756), o mesmo caracteriza a *comutatividade* do processo de derivação parcial.

Chamamos a atenção quanto a diversidade de enunciados e a variação da descrição das hipóteses necessárias para a verificação do Teorema de Clairaut-Schwarz. Na fig. 6, colocamos em evidência a descrição fornecida por Stewart (2001b, p. 902). Note-se que os comentários do autor, referentes à demonstração, remetem o leitor ao apêndice F da obra (p. A3).

> Note que $f_{xy} = f_{yx}$ no Exemplo 6. Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática. O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$. A prova é feita no Apêndice F.
>
> Suponha que f seja definida numa bola D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então
>
> $$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

FIGURA 6. Descrição do teorema de Clairaut-Schwarz descrito em Stewart (2001b).
FONTE: Stewart (2001b).

Observamos que o enunciado conhecido como Teorema de Schwarz (figura 7), que encontramos em Guidorizzi (2010, p. 276), é distinto do enunciado da fig. 6, no que diz respeito à caracterização da classe de *diferenciabilidade* da função. Guidorizzi diz que uma função é de classe C^2, quando suas derivadas de 1ª e de 2ª ordem são contínuas, enquanto que Stewart (2001, p. 902) menciona a continuidade das *derivadas mistas*.

> **Teorema** (*de Schwarz*). Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^2 em A, então,
>
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in A.$$

FIGURA 7. Descrição do teorema de Clairaut-Schwarz descrito em Guidorizzi (2001).
FONTE: Guidorizzi (2010, p. 276).

Guidorizzi (2010) fornece as intricadas relações possíveis para as simbologias relacionadas ao citado teorema que atuam como *elemento de ruptura* (figura 8).

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

FIGURA 8. A diversidade notacional para o conceito de derivada parcial como *elemento de ruptura*.
FONTE: Guidorizzi (2010, p. 276).

Leithold (1999, p. 754-756), por sua vez, apresenta o enunciado do mesmo teorema, como exibimos na figura 9, e comenta, na mesma seção, a diversidade de notações para o mesmo objeto matemático, ao apresentar as seguintes notações: $D_2(D_1 f)$, $D_{12}f$, f_{12}, f_{xy}, $D_{xy}(f)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Podemos agora comparar os enunciados das figuras 6, 7 e 9.

Teorema Suponhamos que f seja uma função de duas variáveis x e y definida sobre um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ e que f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} também são definidas em B. Além disso, suponhamos que f_{xy} e f_{yx} sejam contínuas em B. Então,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

FIGURA 9. Descrição do teorema de Clairaut-Schwarz descrito em Leithold (1999).
FONTE: Leithold (1999).

Seguindo as categorias de nossa análise (quadro 2), sublinhamos que as situações de aplicação de contraexemplos, por parte de cada autor que consultamos, evidenciam um caráter limitado. Na verdade, os autores Alves & Borges Neto (2011) encontraram duas tendências de abordagens e aplicação deste teorema de destaque no CVV.

A primeira tendência se manifesta pela analise restrita em um ponto (a,b) particular, onde se verifica a ocorrência de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ e, em nenhum momento, se faz referência à verificação da classe de *diferenciabilidade* da função; enquanto isso na segunda tendência, autores como Stewart (2004b, p. 901) exploram uma situação em que sempre temos a verificação da propriedade, sem, no entanto, discutir as hipóteses (classe de diferenciabilidade da função) do teorema. Tal atitude não nos parece ser vantajosa, na medida em que se perde a oportunidade de se estimular o raciocínio lógico do leitor, relativo ao entendimento da relação entre *hipótese* e *tese* no CVV.

4 O uso da tecnologia no contexto da transição interna

Na seção anterior, destacamos os *elementos de transição* e os *elementos de ruptura* relacionados ao processo de *transição interna* do CUV para o CVV. Nesta parte, a partir dos elementos apontados em Alves (2011), discutiremos as possibilidades de se fortalecer, no contexto do ensino, os *elementos de transição* e de evitar e/ou superar os *elementos de ruptura*. A existência de elementos que podem atuar no sentido de dificultar a aprendizagem no contexto do CVV é indicada, por exemplo, nos estudos de Imafuko (2008) e Martínez-Planell & Trigueros (2009; 2010).

Nossa posição, relativa à possibilidade de explorar o uso da metáfora como *elemento de transição* é posta em destaque, entretanto, ao advogarmos tal uso, colocamos ênfase no conhecimento baseado na intuição, em detrimento do conhecimento baseado apenas nos símbolos e na algoritmização.

Como um exemplo inicial (figura 10), apesar de fazer referência a um conceito em *Análise Real*, Lima (2010, p. 364) explica que há *convergência pontual* da função $f_n(x) = x^n \cdot (1 - x^n)$ para a função identicamente nula em $[0,1]$, e que não pode ser uniforme, pois cada gráfico *apresenta um calombo, cuja altura se mantém constante, igual a* $1/4$. Duval (2011, p. 25) recorda a perspectiva de Leibniz, quando este imprimiu ênfase ao conhecimento simbólico em Matemática, todavia, as explicações há pouco sublinhadas por Lima (2010) acentuam um conhecimento amparado na intuição e nas qualidades visuais do objeto (figura 10), e não apenas ao conhecimento simbólico, posto há séculos em primazia por Leibniz.

Neste caso, a metáfora que envolve o uso do termo "calombo" evoca uma imagem fornecida pelo computador e indica uma região, nas proximidades do ponto $x = 1$, em que os vértices das curvas no plano $\mathbb{R}^2$ se aproximam (fig. 10). Sublinhamos que o uso do computador proporciona a exploração de vivências apropriadas para a construção deste e de outros conceitos do Cálculo, como evidencia Cornu (2002, p. 166). Todavia, seu uso de modo casual ou esporádico é pouco produtivo. Deste modo, concordando com Cornu (2002), se torna importante a reflexão em torno de estratégias pedagógicas de maior eficacidade e a busca de resultados de maior significância.

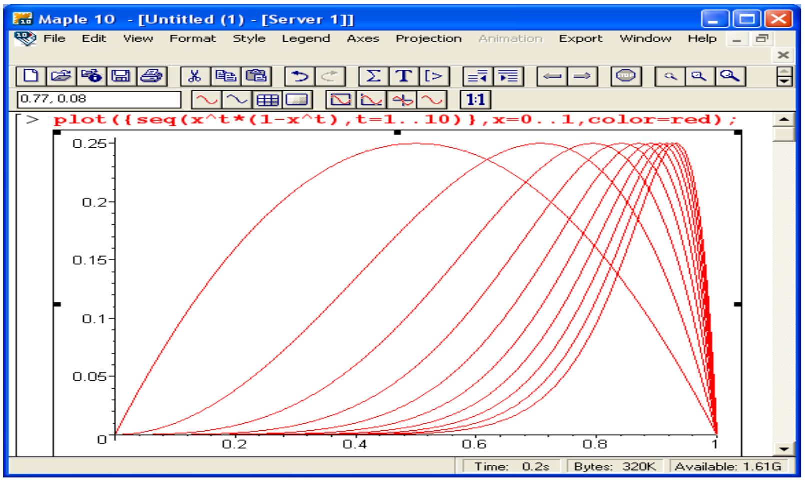

FIGURA 10. Gráfico fornecido pelo *software* Maple que explica o sentido do uso de um termo metafórico
FONTE: Alves (2011).

Com esta preocupação, propomos maior "precisão", se é que assim podemos chamar, das terminologias metafóricas empregadas no caso da *descontinuidade* no CUV e no CVV. No CUV, podemos ter descontinuidades que sugerem a ideia de: um "furo" (a), uma "rampa" (b) e um "precipício" e/ou "desfiladeiro" (c) (fig. 11). De modo semelhante, como consequência da deficiência dos livros que consultamos, em relação ao CVV, descrevemos descontinuidades que sugerem a ideia de: "buraco" (d), "rasgo" (e) e "vulcão" (f) (fig. 12).

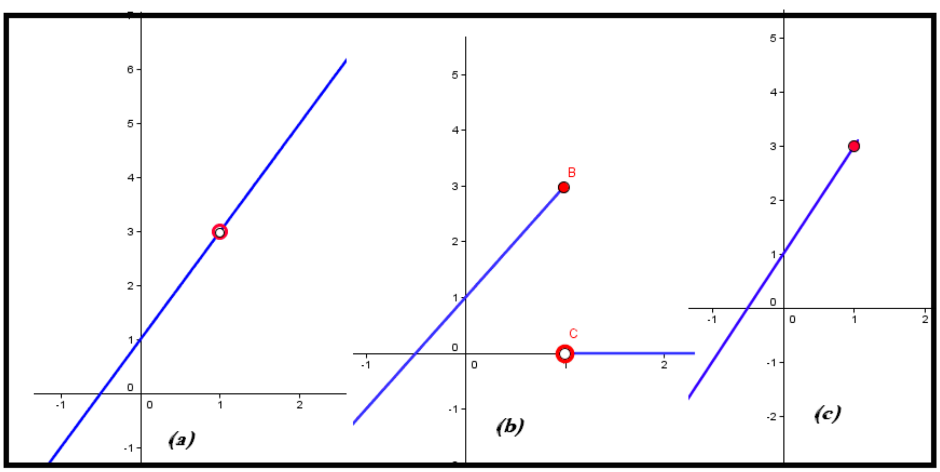

FIGURA 11. Uma hierarquização do uso de metáforas com respeito à noção de continuidade no CUV.
FONTE: Elaboração dos autores.

No quadro anterior, com amparo nos termos metafóricos que designamos, do ponto de vista intuitivo, torna-se mais claro a relação, por exemplo, do termo "furo", com o caso de uma *descontinuidade removível*, como os livros de CUV fazem referência, ou, do ponto de vista da *Análise Real*, temos uma *descontinuidade de 1ª espécie*. O vocábulo "precipício" dá a entender que ocorre uma interrupção na trajetória, se imaginamos um móvel descrevendo o gráfico (c), figura 11. Aqui temos uma *descontinuidade não removível*, ou, do ponto de vista da *Análise Real*, uma *descontinuidade de 2ª espécie*.

Ao compararmos as palavras "furo" e "buraco" que empregamos no sentido metafórico, podemos discriminar, no primeiro caso, que o auxílio a uma terceira dimensão não se faz necessário para a significação dele. Por outro lado, quando pronunciamos o termo "buraco", a ideia que buscamos evocar na mente do sujeito é o movimento executado em três dimensões, com vistas a superar o obstáculo (fig. 12d).

Tal discriminação harmoniza as dimensões necessárias para a significação, uso de cada metáfora e a evolução de *concepções espontâneas* (CORNU, 2002, p. 154), haja vista que no primeiro caso no restringimos ao $\mathbb{R}^2$, enquanto no segundo caso consideramos o $\mathbb{R}^3$. Esta descrição pode atuar como *elemento de transição*, na medida em que impulsiona o raciocínio por analogia e a ligação conceitual. Registramos uma posição semelhante à nossa defendida na tese de Cruz (2000, p. 82).

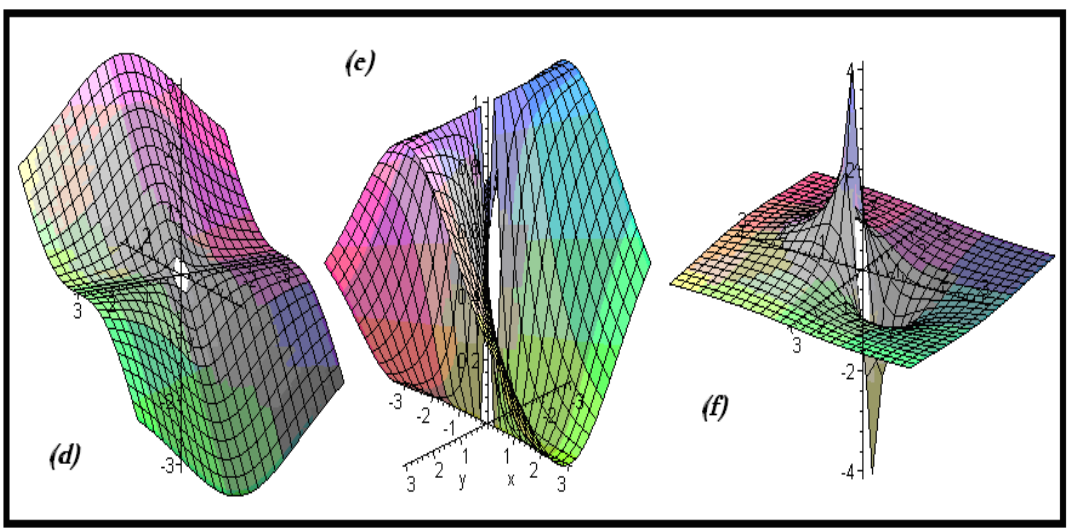

FIGURA 12. Uma hierarquização do uso de metáforas com respeito à noção de continuidade no CVV.
FONTE: Elaboração dos autores.

Com respeito ainda à noção de *limites*, nos livros de CUV, encontramos várias páginas dedicadas à apresentação de suas *regras operatórias*, por exemplo, no caso de propriedades do tipo $\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$ (*). Neste e em outros casos, toda a argumentação é desenvolvida pelos autores, baseando-se no modelo por *épsilon* e *delta*, que evidencia todo seu poder de generalidade, quando, dado um $\varepsilon>0$, se escolhe a seguinte relação emblemática $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ (LEITHOLD, 1994, p. 65; GUIDORIZZI, 2008, p. 97), o que verifica a igualdade (*). Por outro lado, no caso do CVV, não registramos o mesmo empenho dos autores consultados, na verificação das mesmas propriedades envolvendo o *épsilon* e *delta*.

Neste sentido, Guidorizzi (2010, p. 163) sublinha no início do capítulo 9 que *esta seção é quase uma reprodução dos tópicos abordados no Cap. 3 sobre limite... razão pela qual a maioria dos resultados será enunciada em forma de exercícios*. E, dando prosseguimento à sua exposição, um pouco mais adiante, acrescenta que continuam válidas para funções de duas variáveis reais a valores reais *as seguintes propriedades dos limites cujas demonstrações são exatamente iguais às que fizemos pra funções de uma variável real (reveja o Cap. 3 do Vol. 1).* (GUIDORIZZI, 2010, p. 166).

No mesmo capítulo, não encontramos nenhum exercício, resolvido ou proposto, no qual o leitor evidencie o emprego da referida propriedade no caso do CVV, que pode ser descrita por $\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left(f(x,y)\pm g(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\pm\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$. Não obstante, em virtude da complexidade das operações envolvidas fora da origem, quando encontramos a indicação desta última igualdade na aplicação de exercícios, ela é descrita como segue $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(f(x,y)\pm g(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\pm\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ (**).

A noção de limite é exigida para a verificação de vários teoremas do CVV. Por outro lado, com a exploração de tecnologia podemos evitar determinados *elementos de ruptura*, como as propriedades e as *regras operacionais* que discutimos há pouco.

Com esta preocupação, na figura 13, com o auxílio do *software* Maple, exibimos os gráficos das seguintes *derivadas*: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$, para valores $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. No que se refere, por exemplo, à verificação das hipóteses necessárias para a comutatividade das *derivadas mistas*, evidenciamos a tarefa fastidiosa, ante o tamanho das expressões exibidas na figura seguinte.

Ao recorrermos, porém, ao *software*, de posse das expressões das derivadas de 1ª e de 2ª ordem, podemos verificar $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\pm\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\pm\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)(***)$ e, em seguida, investigar a continuidade das *derivadas parciais* de 1ª ordem.

Sublinhamos a semelhança das igualdades (*), (**) e (***), entretanto, nenhum dos autores consultados explora situações como a que fizemos referência em (***). E em virtude disto, perdem a oportunidade de realizar uma relação conceitual inerente às propriedades operatórias, tanto para o caso de *limite* como no de *derivadas parciais*.

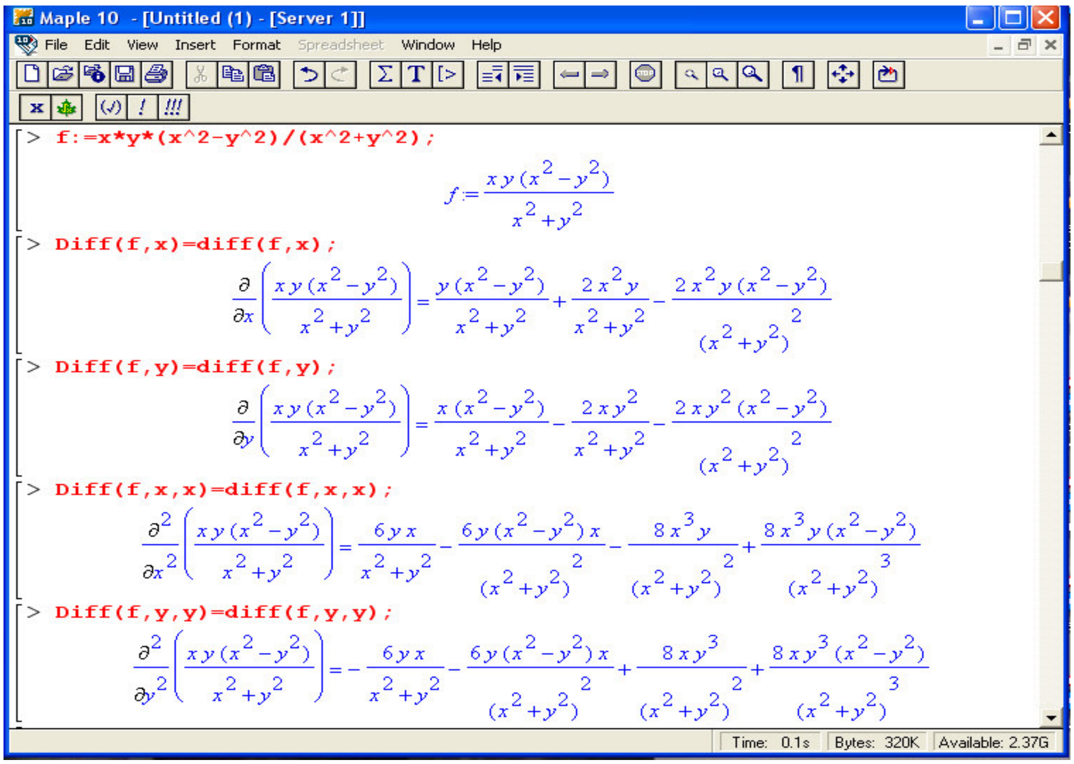

FIGURA 13. Uma hierarquização do uso de metáforas com respeito à noção de continuidade no CVV.
FONTE: Alves (2011).

Os autores aqui consultados apresentam para o leitor o único contra exemplo relativo à função que nos referimos em seções anteriores, definida por $f(x,y)=xy\cdot\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

Assim, perdem a oportunidade de explorar, como arrimo na tecnologia, outros contra-exemplos interessantes, como os fornecidos por Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) e por Giuseppe Peano (1858-1932).

Hairer & Wanner (2008, p. 317) sugerem, ainda, empregando uma notação moderna, as propriedades da função $f(x,y)=xy\cdot g(x,y)$, onde a função $g(x,y)$ é limitada e não necessariamente contínua nas vizinhanças da origem do sistema $\mathbb{R}^2$. Assim, os autores consideram $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0} y\cdot g(x,y)$.

E, em seguida, avaliam a seguinte expressão da derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\left[\frac{\left[\lim_{x\to 0} y\cdot g(x,y)\right]-0}{y}\right]$. Na sequência, obedecendo ao mesmo raciocínio, os autores explicitam $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)}_{\textit{derivada mista}}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left[\lim_{y\to 0} g(x,y)\right]}_{\textit{limite}\ \text{interado}}$.

O aspecto que merece atenção aqui é a descrição do comportamento das *derivadas mistas* com base no comportamento dos *limites interados*, que indicamos há pouco, por $\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} g(x,y)]$, que obtivemos a partir da função $g(x,y)$. Notamos, ainda, que, de acordo com o teorema enunciado (figuras 6, 7 ou 9), devemos ter $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} g(x,y)\right]=\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} g(x,y)\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. E a verificação final requer a avaliação do comportamento e da igualdade dos *limites interados*, tratamento omitido pelos autores que investigamos.

Argumentações desta natureza proporcionam relação ainda mais estreita entre os próprios conceitos do CVV e podem auxiliar a *transição interna do CUV para o CVV*, pois evidenciam a relação entre os próprios conceitos do CVV.

Nas seções anteriores, discutimos também e analisamos os enunciados do teorema que caracteriza a comutatividade das *derivadas mistas* (figuras 6, 7 e 9), entretanto, quando exploramos as potencialidades do *software*, podemos proporcionar ao aprendiz um modo de "acesso direto" aos objetos envolvidos. Assim, recordamos que Duval (2011, p. 19) descreve um modo de "acesso direto" aos objetos matemáticos, por intermédio do uso de suas representações, ao colocar em evidência a importância do termo plurívoco "intuição".

No caso da figura 14, por meio de uma apreensão perceptiva e intuitiva, um observador, avaliando as propriedades qualitativas dos gráficos em 3D, pode desenvolver uma atividade argumentativa com o objetivo de abstrair as propriedades concernentes à *continuidade* e *diferenciabilidade* das funções envolvidas. Pode ainda, ao visualizar o comportamento dos gráficos de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, comprender que, geometricamente, fora da origem, estas representações particulares de um objeto matemático coincidem (fig. 14, lado direito).

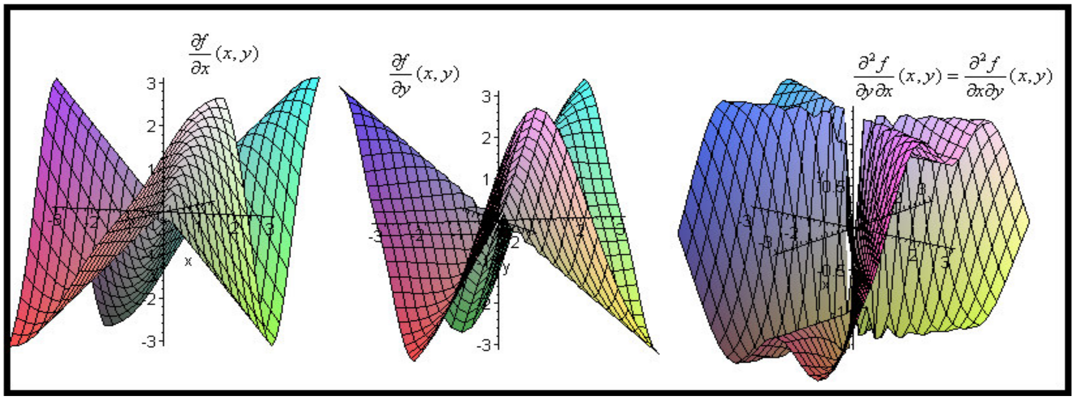

FIGURA 14. Identificação e reconhecimento visual das derivadas de 1ª e de 2ª ordem.
FONTE: Alves (2011).

Encontramos em Hairer & Wanner (2008, p. 328) um contraexemplo histórico fornecido do H. A. Schwarz, encontrado em 1873, descrito pela seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Salientamos o caráter pouco produtivo de requisitarmos dos aprendizes a verificação do comportamento das derivadas de 1ª e de 2ª ordem dessa função, fora da origem, sem o auxílio computacional. Sendo assim, a tarefa se resume no domínio da habilidade em lidar com expressões algébricas complexas e, ao final desta árdua tarefa, não podemos esperar que os aprendizes se tornem mais inteligentes, e mesmo que isto assegure sua compreensão do significado geométrico de simbologias do tipo $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]$ e $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right]$.

Por outro lado, o estímulo à habilidade cognitiva fundada na *visualização* e compreensão geométrica dos conceitos, quando estimulada de modo contíguo, tanto no CUV como no CVV, pode funcionar como um *elemento de transição* relevante. Esta preocupação deveria ser constante nos livros de Cálculo e se mostra mais adequada para um curso de licenciatura em Matemática.

Considerações finais

Quando reportamos ao ensino do CUV e do CVV, precisamos respeitar as características intrínsecas de cada conteúdo. De fato, o primeiro possui seus fundamentos em *Análise Real*, enquanto no segundo caso, sua fundamentação reside em *Análise no* $\mathbb{R}^n$.

Toda nossa discussão cotejou apenas o contexto da *transição interna* do CUV para o CVV, no âmbito de um curso de licenciatura. Deste modo, com respeito aos parâmetros curriculares atuais que delineiam o perfil do licenciado, que o distinguem do perfil do bacharel (RESOLUÇÃO CNE/CES 1.302/2001), não reconhecemos a importância do domínio aprofundado, por exemplo, das provas e demonstrações usuais presentes nos livros de CVV, uma vez que, apenas no caso do bacharel, o aprofundamento em *Análise no* $\mathbb{R}^n$ se torna uma exigência.

No Brasil, do ponto de vista curricular, os conteúdos do CUV funcionam como prerrequisitos para o que se apresenta depois no CVV. A ênfase na algoritmização, do que se estuda neste período de transição acadêmica, parece não ser um problema apenas nosso. De fato, Cornu (2000, p. 153) indica dificuldades semelhantes no programa oficial francês, e por ele são exemplificados alguns casos nos livros utilizados em seu País, todavia, aspectos positivos devem ser registrados, uma vez que os textos matemáticos franceses, como esclarece Cornu (2000, p. 153), *usam a noção de limite de um modo intuitivo, sem a definição formal, para introduzir a noção de derivada*.

O importante é atentar para o fato de que mudanças curriculares possibilitam as mudanças nas práticas metodológicas, entretanto, na condição em que os conteúdos são abordados pelos livros didáticos no Brasil e, consequentemente, na dependência da metolodologia empregada, temos a oportunidade de explicitar e fazê-los sentir a necessidade e a reutilização de saberes matemáticos adquiridos em um novo contexto matemático e, neste caso, falamos do CVV.

Nem tudo, entretanto, transcorre de modo natural e deparamos situações recorrentes em que os aprendizes levantam questionamentos sobre a *regra de L´Hopital* ou outros teoremas importantes no contexto do CUV, que deles exigiram horas de estudo, na etapa anterior, e que agora, no contexto do CVV, não encontram resultados semelhantes.

Não advogamos, todavia, a relevância inquestionável do continuísmo do estudo dos vários conceitos do Cálculo, e sim a evidência de que os saberes matemáticos adquiridos no CUV apoiam, fortalecem e auxiliam, de modo prático e direto, ao entendimento dos saberes matemáticos inerentes ao CVV.

De modo esquemático, neste estudo, a partir das analises das obras didáticas elencadas em nosso intróito, esquematizamos os dados exibidos no quadro abaixo. Nele imprimimos ênfase nos *elementos de transição* e nos *elementos de ruptura* atuantes no processo de *transição interna* do CUV para o CVV.

A relevância de colocarmos em destaque os *elementos de ruptura* é justificada na medida em que o professor, consciente destes entraves, a partir de sua metodologia, possa atenuar e mesmo evidenciar os saberes matemáticos comuns a ambos os conteúdos, bem como os saberes de natureza insólita do CVV, mas que necessitam, todavia, do aprendizado anterior, para o seu entendimento e a contiguidade do processo de aprendizagem.

Noções e conceitos	**CUV**	**CVV**	**Comentários**
Modelo ou formulação por ε e δ	Sim	Sim	(*Elemento de transição*). Presente tanto no CUV como no CVV, todavia, as *regras operatórias* condicionadas por sua definição formal e as expressões algébricas tratadas são distintas.
Limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ **e** $\lim_{x\to a^-} f(x)$	Sim	Não	(*Elemento de ruptura*). As simbologias e o significado geométrico no CUV perdem o sentido no CVV.
Limites interados $\lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x)]$ **e** $\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x)]$	Não	Sim	(*Elemento de transição*). A aplicação de regras operatórias envolvidas com este conceito proporciona o tratamento de funções em uma variável real, semelhante ao caso do CUV.
Descontinuidade removível	Sim	Não	(*Elemento de ruptura*). Não há um conceito semelhante, que indica a generalização desta ideia, correspondente no CVV.
Derivabilidade	Sim	Não	(*Elemento de ruptura*). Esta noção formal possui sentido apenas no contexto do CUV
Diferenciabilidade	Sim	Sim	(*Elemento de transição*). Noção mais geral e admite sentido e descrição formal, tanto no CUV e no CVV.
Derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ **e** $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$	Não	Sim	(*Elemento de ruptura*). Apesar de ser um conceito restrito ao CVV, o mesmo conceito pode ser explorado, de modo intuitivo, no CUV.

Derivadas de ordem superior $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y)$ **e** $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y)$	Sim	Sim	(*Elemento de ruptura*). Por outro lado, possuem significados completamente distintos em cada teoria de base. Os livros consultados apresentam uma diversidade de enunciados.
Comutatividade das derivadas	Não	Sim	(*Elemento de ruptura*). Podem ser descritas, em certos casos como *limites interados*. Os livros consultados não realizam esta ligação conceitual.
Uso de metáforas na explicação/significação dos conceitos	Sim	Não	(*Elemento de transição*). Nos livros observamos a exploração de metáforas apenas no contexto do CUV. O uso deste recurso pedagógico no CVV pode ser intensificado com arrimo na tecnologia.

Fonte: Elaboração dos autores.

Como acentuamos na seção anterior, *a tecnologia fornece possibilidades auspiciosas no ensino do Cálculo* (ALVES, 2011), como assim o indica também outros autores (HENRIQUES, 2006), todavia, nos autores de livros consultados, registramos o recurso à tecnologia somente no caso de Stewart (2004). No outros dois, os autores não recorrem à tecnologia para suas abordagens de conteúdo, e entendemos que os gráficos e desenhos explorados por Guidorizzi (2008; 2010) poderiam ser aperfeiçoados, com vistas a priorizar a visualização.

Na tese de Alves (2011), os *softwares Geogebra* e *Maple* são explorados em situações didáticas de aplicação de uma metodologia de ensino. Nas situações estruturadas, os alunos deparam situações em que podem desenvolver uma percepção relacional entre os gráficos produzidos pelo *Geogebra* (no contexto do CUV), e aqueles produzidos pelo *Maple* (no contexto do CVV). Na figura 15, do ponto de vista geométrico, o aprendiz compreende as relações entre as funções $r(x)=\frac{sen(x^2)}{x^2}$ e $r(x,y)=\frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$. Na verdade, os aprendizes devem perceber que o gráfico em $\mathbb{R}^3$ é constituído a partir das *curvas parametrizadas* (que destacamos em azul).

A discriminação das propriedades figurais de uma representação gráfica pode constituir árdua tarefa, como assim acentuam os autores Henriques, Attie e Farias (2007, p. 72). Com o apoio computacional, todavia, temos a oportunidade de explorar várias propriedades na figura e, neste caso, o gráfico no espaço tridimensional.

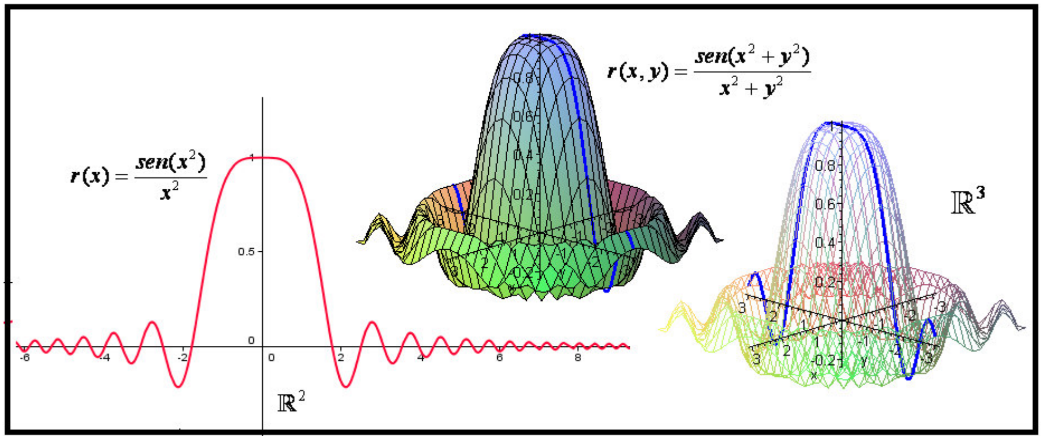

FIGURA 15. Identificação e reconhecimento visual das derivadas de 1ª e de 2ª ordem.
FONTE: Alves (2011).

Além disso, o estudo no *locus* acadêmico proporciona exigências inéditas aos estudantes recém egressos do contexto escolar. Com efeito, o *formalismo* se manifesta na medida em que *as propriedades dos conceitos são deduzidas a partir de teoremas* (GRAY et al, 1999, p. 117). Evidenciamos, assim, uma dose maior de formalismo nas obras de Guidorizzi (2010) e Leihold (1994, 1999), o que, no que concerne ao nosso contexto de pesquisa, seu uso em cursos de licenciatura requerem maior vigilância e cuidado do professor.

Por outro lado, a combinação da *intuição*, da *visualização* e do *formalismo*, como aconselham Gray et al (1999, p. 130), pode promover uma transição mais natural do CUV para o CVV. Assim, o livro de Stewart (2004a, 2004b) promove melhor transição.

Para concluir, vale comentar nossos resultados, com respeito aos *conceitos e propriedades analisadas*, que exibimos o quadro 2, destacando a noção de *comutatividade* das *derivadas mistas* e sua descrição em termos de *limites interados*.

Tal relação conceitual (*limite interado – derivada mista*), contudo, não foi verificada em nenhuma das obras analisadas. Aliás, a noção de *limite interado*, que possibilita a análise de condições apenas necessárias para a existência do limite, não é contemplada nestes livros.

A partir desta relação e outras possíveis de se obter, trazemos, na fig. 16, uma modificação da fig. 1, no intuito de explicitar não apenas a importante relação entre os conteúdos de CUV e de CVV, mas, de modo semelhante, evidenciar as próprias relações conceituais do que estudamos no CVV. Estas relações podem sugerir caminhos para futuras investigações sobre o ensino do Cálculo a Várias Variáveis.

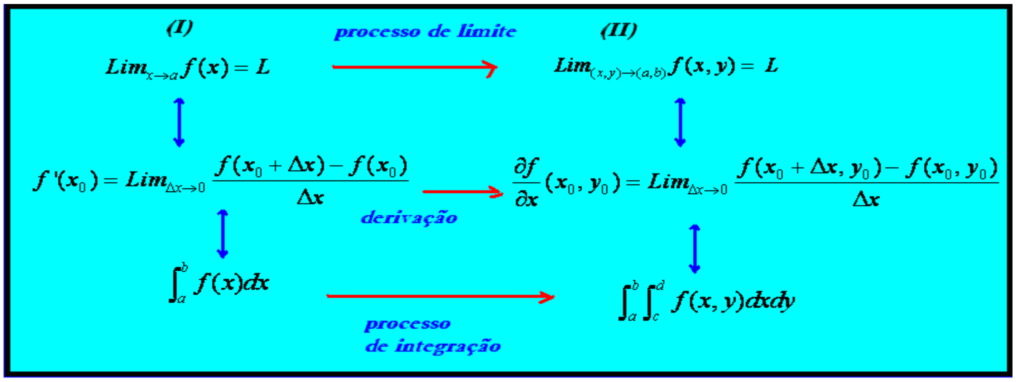

FIGURA 16. Identificação e reconhecimento visual das derivadas de 1ª e de 2ª ordem.
FONTE: Alves (2011).

Referências

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. Uma sequência de Ensino para a aquisição do conceito de derivada parcial, direcional e teoremas correlatos no Cálculo em Várias Variáveis, In: *Conexões, Ciência e Tecnologia*, v. 1, n. 1, 2007, p. 29-34. Disponível em: http://revistaconexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/issue/archive. Acesso em: 10 set. 2011.

ALVES, Francisco. R. V. (2011). *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011, p. 398p.

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais. In: *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, 2011, p. 1-12. Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem. Acesso em: 10 de agosto de 2011. Acesso em: 16 set. 2011.

BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1979.

BRASIL.Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura Parecer CNE/CES 1.302/2001*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/. Acesso em: 10 de agosto de 2011.

CORNU, Bernard. Limits. In: TALL, David. Advanced Mathematical Thiking. New York: Klumer Academic Publishers, 2002, p. 153-165.

CRUZ, Ines de Carmen. P. *Analisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos* (tesis de doctoral). Laguna: Universidad de la Laguna, 2000, 271p.

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar a matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: Proem. v. 1, 2011.

EDWARDS, Charles. H. *The historical development of the Calculus*. New York: Springer, 1979.

GRAY, Eddy; PINTO, Márcia, F.; PITTA, Demetra; TALL, David. Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advances mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics*, 38, 1999, p. 111-133.

GUIDORIZZI, Hamilton. L. *Um curso de Cálculo*, v. 1, 5ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

GUIDORIZZI, Hamilton. L. *Um curso de Cálculo*, v. 2, 5ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2010.

HAIRER, E. & WANNER, G.. *Analysis by its History*. New York: Springer, 2008.

HENRIQUES, Afonso. *L´enseignement et l´apprentissage de l´integrale multiple*. (thése de doctorat). Grenoble: Université Joseph Fourier. 2006, 550p.

HENRIQUES, Afonso; ATTIE, João, P.; FARIAS, L. S. Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com o auxílio do *software* Maple. Educação Matemática Pesquisa, v.9, n. 1, 2007, p. 51-81.

IMAFUKO, Roberto. S. *Sobre a passagem do estudo de função de uma variável para o caso de duas variáveis* (dissertação de mestrado). São Paulo: Universidade Pontifícia Católica de São Paulo, 2008, 186p.

LIMA, Elon. Lages. *Curso de Análise*. v.2, 11º edição, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2009.

LIMA, Elon. Lages. *Curso de Análise*. v.1, 12º edição, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2010.

LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v. 1, 3ª edição, 1994.

LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v. 2, 3ª edição, 1999.

MARTINEZ-PLANELL, Rafael; TRIGUEROS. Maria. Student´s ideas on functions of two variables: domain, range and representations. In: *Proceedings of* 31*st* *annual meeting of Psychology of Mathematics Education*. Atlanta, GA: Georgia State University. 2009, p. 73-80.

MARTINEZ-PLANELL, Rafael & TRIGUEROS, Maria. Geometrical representations in the learning of two-variable functions. In: *Educational Studies in Mathematics*, 73, 2010, p. 3-19.

OTTE, Michael. *Metaphor and Contingency*. In: RADFORD. Luis.; SCHUBRING. Gert e SEEGER. Falk. (eds). *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture*, p. 63-85, 2008.

REVUZ, André. La notion de continuité dans l´enseignement du second degré. In: *Educational Mathematics Studies*. 4, 1972, p. 281-298.

STEWART, James. *Cálculo*. v.1, 4ª edição, São Paulo: Thomson, 2004a.

STEWART, James. *Cálculo*. v.2, 4ª edição, São Paulo: Thomson, 2004b.