

O pensamento aritmético de crianças de 4º ano ante dois problemas de adição e subtração: o que revelam seus registros?

The arithmetic thinking of 4th-grade children about two addition and subtraction word problems: what do their responses reveal?

El pensamiento aritmético de los niños de cuarto grado al enfrentarse a dos problemas de suma y resta: ¿qué revelan sus registros?

Le raisonnement arithmétique des élèves de CM1 confrontés à deux problèmes d'addition et de soustraction : que révèlent leurs calculs ?

João Paulo Machado Godoy¹
Universidade Federal de Goiás - UFG
Mestre em Educação

<https://orcid.org/0009-0008-9205-6074>

Riani de Souza Alvaro²
Universidade de São Paulo - USP
Graduanda em Matemática

<https://orcid.org/0009-0006-8867-5791>

Raquel Milani³
Universidade de São Paulo - USP
Doutora em Educação Matemática
<https://orcid.org/0000-0002-2015-7641>

Resumo

A presente pesquisa investiga as produções das crianças ante dois problemas de adição e subtração. Partindo da Educação Matemática Crítica (EMC), que compreende a aprendizagem matemática enquanto ação, ou seja, um comportamento marcado pela intencionalidade do sujeito, investigamos as respostas de 60 crianças do 4º ano escolar de uma escola pública de São Paulo, em uma atividade de avaliação diagnóstica. O objetivo foi compreender a pluralidade de caminhos por elas apresentados,

¹ joao_godoy@ufg.br

² riani.alvaro@usp.br

³ rmilani@usp.br

reveladores da sua ação matemática (muito mais que o mero aplicar correto e obediente de regras algorítmicas). Os dados mostram que houve algoritmos convencionais e caminhos alternativos, com preferência por estes, tendo sido possível analisá-los a partir dos registros deixados no papel, da natureza do pensamento aritmético revelado na resposta e da presença ou não de apoio não-numérico. Dentre a diversidade encontrada, destacamos os caminhos que se traduzem na utilização da contagem de 1 em 1 ou 10 em 10, na composição ou decomposição numérica decimal ou não decimal e na alteração de valores em jogo para facilitar as operações a serem realizadas. Tais caminhos são reveladores de uma forma flexível e criativa de trabalhar com as parcelas, minuendos e subtraendos em jogo, mobilizando conhecimentos sobre os números, o sistema de numeração e as propriedades e regularidades das operações. Diferentemente dos algoritmos convencionais, eles tornam patente a aprendizagem baseada na ação dos sujeitos, abrem cenários para investigação fulcrados na matemática pura e reafirmam, ao educador, a defesa da tarefa dialógica de ir até onde o outro está.

Palavras-chave: Educação matemática crítica, Aritmética, Anos iniciais do ensino fundamental, Algoritmo, Adição/subtração.

Abstract

This research investigates children's responses to two addition and subtraction problems. Based on Critical Mathematics Education (CME), which understands mathematics as action, a behavior marked by the subject's intentionality, we investigated the responses of 60 fourth-grade students from a public school in São Paulo, in a classroom test. The objective was to understand the plurality of responses they presented, revealing their mathematical action (much more than the mere correct and obedient application of algorithmic rules). The data show that both conventional algorithms and alternative approaches were used, with a preference for the latter. It was possible to analyze them based on the notations left on paper, the nature of the arithmetic thinking revealed in the

responses, and the presence or absence of non-numerical support. Among the diverse ways identified, we highlight those that involve counting by 1s or 10s, decimal or non-decimal numerical composition or decomposition, and altering the values involved to facilitate the operations to be performed. These non-algorithmic ways reveal a flexible, creative way of working with addends, minuends, and subtrahends, mobilizing knowledge of numbers, the number system, and the properties and regularities of operations. Unlike conventional algorithms, they make action-based learning evident, open up landscapes of investigation based on pure mathematics, and reaffirm, for the educator, the defense of the dialogical task of going to where the other is.

Keywords: Critical mathematics education; Arithmetic, Elementary School, Algorithm, Addition/subtraction.

Resumen

Esta investigación analiza las respuestas de niños y niñas ante dos problemas de suma y resta. Desde la perspectiva de la Educación Matemática Crítica (EMC), que entiende las matemáticas como acción, es decir, un comportamiento marcado por la intencionalidad del sujeto, se investigaron las respuestas de 60 estudiantes de cuarto grado de una escuela pública de São Paulo, en una actividad de evaluación diagnóstica. Se buscó comprender la pluralidad de enfoques presentados, revelando su acción matemática (que va mucho más allá de la mera aplicación correcta y obediente de reglas algorítmicas). Los datos muestran la presencia de algoritmos convencionales y de enfoques alternativos, con una preferencia por estos últimos. Fue posible analizarlos a partir de los registros escritos, de la naturaleza del pensamiento aritmético manifestado en la respuesta y de la presencia o ausencia de apoyo no numérico. Entre los diversos enfoques encontrados, destacamos aquellos que se traducen en el uso del conteo uno en uno o de diez en diez, la composición o descomposición numérica, decimal o no decimal, y la alteración de los valores involucrados para facilitar las operaciones. Estos enfoques no solo proporcionaron a los

niños una mayor tasa de éxito, sino que también revelaron una manera flexible y creativa de trabajar con sumandos, minuendos y sustraendos, movilizand o el conocimiento sobre los números, el sistema numérico y las propiedades y regularidades de las operaciones. A diferencia de los algoritmos convencionales, hacen evidente el aprendizaje basado en la acción, abren escenarios de investigación basados en la matemática pura y reafirman, para el educador, la defensa de la tarea dialógica de ir a donde está el otro.

Palabras clave: Educación matemática crítica, Aritmética, Escuela primaria, Algoritmo, Suma/resta

Résumé

Cette recherche examine les réponses d'enfants à deux problèmes d'addition et de soustraction. S'appuyant sur l'approche critique de l'éducation mathématique (ACE), qui conçoit les mathématiques comme une action, c'est-à-dire un comportement marqué par l'intentionnalité du sujet, nous avons étudié les réponses de 60 élèves de CM1 d'une école publique de São Paulo, lors d'une évaluation diagnostique. L'objectif était de comprendre la pluralité des approches présentées, révélant leur démarche mathématique (bien plus qu'une simple application correcte et obéissante de règles algorithmiques). Les données montrent l'existence d'algorithmes conventionnels et d'approches alternatives, avec une préférence pour ces dernières. L'analyse a été possible grâce aux notes écrites, à la nature du raisonnement arithmétique révélé par la réponse et à la présence ou l'absence de supports non numériques. Parmi la diversité observée, nous soulignons les approches qui se traduisent par l'utilisation du comptage de 1 en 1 ou de 10 en 10, par la composition ou la décomposition numérique décimale ou non décimale, et par la modification des valeurs impliquées pour faciliter les opérations. Ces approches ont non seulement permis aux enfants d'obtenir un meilleur taux de réussite, mais révèlent aussi une manière flexible et créative de manipuler les termes, les soustractions et les additions, en mobilisant les connaissances sur les

nombres, le système numérique, les propriétés et les régularités des opérations. Contrairement aux algorithmes conventionnels, ils rendent évident l'apprentissage par l'action, ouvrent des scénarios d'investigation basés sur les mathématiques pures et réaffirment, pour l'éducateur, la pertinence de la tâche dialogique consistant à aller là où se trouve l'autre.

Mots-clés : Enseignement des mathématiques critiques ; Arithmétique ; Enseignement primaire ; Algorithme ; Addition/soustraction.

O pensamento aritmético de crianças de 4º ano ante dois problemas de adição e subtração: o que revelam seus registros?

Introdução

Diversas pesquisas no campo da Educação Matemática valem-se de produções das crianças e adolescentes ante problemas matemáticos para deles extraírem, por exemplo, tipos de situações e graus de dificuldade das questões, estratégias das crianças, invariantes conceituais mobilizadas, esquemas de ação subjacentes, tipos de representações simbólicas escolhidas, erros cometidos e suas significações, dentre outros (por exemplo: Gitirana et al., 2014; Nunes et al., 2009; Moro & Soares, 2005; Zunino, 1995; Kamii, 1995, 2000). As marcas e registros deixados pelos estudantes no papel dizem muito sobre como lidam, interpretam e solucionam matematicamente os problemas que lhes são apresentados.

O professor, ao avaliar as respostas dos sujeitos, normalmente busca saber se estão certas ou erradas, com o objetivo de atribuir a nota ao estudante. Marcas confusas, tentativas mal apagadas no papel, números que, à primeira vista, não fazem sentido, são muitas vezes descartadas pelo educador (ou consideradas parcialmente corretas). Segue burocraticamente (Alrø; Skovsmose, 2021), sem analisá-las com mais profundidade, já que, muitas vezes, devido à alta demanda de atividades para corrigir e ao cumprimento de outras tarefas pedagógicas, ou mesmo partindo de compreensões pedagógicas não críticas, não reflete sobre o registro dos sujeitos em suas particularidades, buscando dar sentido aos seus movimentos, ainda que errantes. O resultado é, infelizmente, o descarte dos próprios sujeitos, a invalidação deles enquanto seres matemáticos no mundo (Freire, 1996).

Esta pesquisa propõe-se a investigar as produções das crianças ante dois problemas matemáticos, buscando compreender a pluralidade de caminhos por elas apresentados, reveladores da sua ação matemática, muito além do mero aplicar, correto e obediente, de regras algorítmicas na busca sintomática da resposta certa. Cremos que seus resultados podem contribuir para a difícil (porém imperativamente ética) tarefa de cada um

de nós, educadores matemáticos: ir até onde o outro está (Milani, 2017; Lins, 1999).

Fundamentação teórica

A presente pesquisa baseia-se na Educação Matemática Crítica (EMC), vertente à qual nos filiamos, que se preocupa com a maneira como a matemática influencia a sociedade e, portanto, não pretende tão somente refletir sobre formas mais eficientes de aprender conceitos matemáticos, mas também de como o ensino da matemática pode desenvolver a cidadania e empoderar indivíduos (Alrø; Skovsmose, 2021, p. 17). Filosoficamente, entendemos que há uma “forma matemática de estar no mundo” (Freire, 1996), o que nos configura como legítimos sujeitos produtores de matemática.

A EMC reflete sobre o paradigma do exercício, que insere o ensino de matemática numa perspectiva de aprendizagem baseada na repetição extenuante de modelos, e que acaba por despotencializar os sujeitos para que, por meio da matemática, interpretem e criem uma sociedade politicamente mais justa e igualitária. Um contraponto a essa forma de pensar o ensino de matemática seria a inserção de cenários para investigação em sala de aula, valorizando atos dialógicos e uma multiplicidade de caminhos para a resolução de problemas, permitindo a construção de descobertas genuínas por parte dos estudantes (Skovsmose, 2015).

Para tanto, a EMC entende a aprendizagem como ação, o que pressupõe que o sujeito aprendente participe ativamente do processo de aprendizagem, havendo uma mescla de desejo/intenção e de abertura/possibilidades. Diferentemente de outras formas possíveis de aprendizado, como os exercícios que os soldados fazem quando aprendem a marchar (que certamente resultam em certas aprendizagens), a aprendizagem como ação é marcada pela atitude livre e consciente dos sujeitos (Alrø; Skovsmose, 2021), e, por isso, a defesa da utilização de cenários investigativos em sala de aula:

Investigar e explorar são atos conscientes, eles não acontecem como atividades forçadas. Eles não se realizam enquanto os alunos efetivamente não fizerem as investigações e as explorações e, para isso, pressupõe-se que a intencionalidade dos alunos faça parte do processo investigativo (Skovsmose, 2015, p. 69).

A compreensão epistemológica freireana dialoga com a EMC na medida em que, para Freire, “nas condições da verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado [...]” (Freire, 2015, p. 28). Ao diferenciar a educação bancária da problematizadora, Freire afirma que o ato cognoscente é caracterizado por ser criativo, transformador, inquietante, inventivo, impaciente, permanente, praticado pelo sujeito e não depositado nele.

Um cenário para investigação pode ocorrer tanto em problemas baseados na realidade (contextos reais) quanto em semirrealidade (contextos artificiais), bem como em matemática pura (problemas descontextualizados). Neste artigo, interessa-nos, sobretudo, os cenários fulcrados na matemática pura, que são aqueles nos quais os processos de exploração e investigação se dão unicamente sobre as regularidades, propriedades, conexões, relações e generalizações dos números, operações, funções e demais “entes” matemáticos, permitindo-se ao sujeito a realização de descobertas matemáticas, que nada terão de novo, dentro do corpo de conhecimento da matemática, porém, serão genuínas para o sujeito que as produz (Skovsmose, 2015).

As crianças colaboradoras da pesquisa foram alunas dos dois primeiros autores (o primeiro era o professor regente e a segunda, estagiária da turma). Desde o início do ano letivo, estavam vivendo uma proposta pedagógica que envolvia o ensino do campo aditivo, com ênfase em uma diversidade de caminhos para a resolução de problemas, sem a exigência de saber e aplicar o algoritmo convencional. Trouxemos para cá a análise e a discussão de suas respostas a dois problemas matemáticos, que, a nosso ver, estão marcadas por uma pluralidade só possível em razão da prática referida.

Para nos auxiliar na interpretação dos dados, trazemos também as contribuições de alguns autores que se dedicam ao estudo do ensino de aritmética básica, sobretudo a partir da valorização de caminhos alternativos ao algoritmo convencional para a resolução de questões.

Maria do Carmo Domite, por exemplo, defende a exploração do cálculo mental na escola, argumentando que ele permite valorizar o conhecimento espontâneo adquirido fora da escola, bem como contribui para uma melhor compreensão das propriedades dos números e das regras do sistema de numeração, dando ao sujeito maior autonomia e desenvolvendo seu pensamento intuitivo (Domite Mendonça; Lellis, 1989; Conceição, 2021).

Constance Kamii e suas parceiras descobriram que o algoritmo convencional exige da criança uma compreensão do sistema numérico que ela ainda não domina, induzindo a uma falsa aprendizagem aritmética na medida em que algumas regras algorítmicas, como o “vai um” na adição ou o “pede emprestado” na subtração, são decoradas pelos estudantes, mas não fazem sentido para eles. Por isso, identificam inúmeras vantagens nos caminhos construídos pelas próprias crianças, valorizando-os no contexto escolar (entre outros, Kamii & Housman, 2002).

Delia Lerner e parceiras, na mesma toada, afirmam que os algoritmos convencionais fazem a criança perder de vista o número que se está operando, por exigirem que se some ou se subtraia em coluna, o que não ocorre quando ela coloca em prática caminhos de decomposição numérica para a resolução dos problemas. Além disso, os algoritmos por decomposição permitem que a criança realize as operações da esquerda para a direita e também tenha um melhor controle do resultado (Lerner, Sadovsky & Wolman, 1996; Zunino, 1995).

Terezinha Nunes e parceiros, ao investigarem a aritmética praticada por crianças e adultos dentro e fora da escola, perceberam que havia inúmeros problemas de matemática que eram resolvidos por elas de forma satisfatória em contextos como a compra e venda em feiras livres, porém, quando em contexto escolar, não obtinham os resultados corretos para os

mesmos problemas. Identificaram, assim, uma distância entre a matemática escolar e a matemática da vida cotidiana, sugerindo a criação de pontes entre o conhecimento formal e o prático, do qual a criança já dispõe (Nunes, Carraher & Schliemann, 2011).

Sandra Magina, Tânia Campos, Verônica Gitirana, Alina Spinillo, entre outras, têm contribuído sobremaneira para os estudos e pesquisas sobre o ensino de matemática dos Anos Iniciais, notadamente a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Seus trabalhos ajudam a refletir sobre o ensino de matemática, aproximando-se do que as crianças pensam e das estruturas mentais que mobilizam (Magina, Campos, Nunes & Gitirana, 2008; Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2009; entre outros).

Regina Damn (2003), ao se debruçar sobre como as crianças pensavam problemas aditivos, verificou que era necessário que o aluno não somente selecionasse os dados pertinentes, como também organizasse os dados e a operação, o que exigia dele uma representação apropriada; descobriu que as dificuldades na resolução destes problemas se devia sobretudo à compreensão do enunciado, nas relações de ordem temporal, nos verbos portadores de informação numérica, constatando que uma representação apropriada deve marcar as diferentes etapas da situação descrita no enunciado (antes, depois, primeiro, segundo, etc.) e os dados operatórios em função da situação (os números e o seu aumento/diminuição).

Todos esses estudos, embora fulcrados em paradigmas diversos, como é o caso da pedagogia popular freireana (no caso de Domite), em perspectivas psicogenéticas clássicas como a piagetiana (no caso de Kamii) ou mistas, englobando também as contribuições didáticas brousseauianas (no caso de Lerner) ou culturais (o paradigmático “Na vida dez, na escola zero”), e, ainda, autoras que se valem das contribuições da Teoria dos Campos Conceituais (Magina e outros) ou da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Damm), convergem ao colocar o sujeito e o seu pensamento aritmético genuíno em centralidade, em detrimento de

possíveis regras mecânicas que tenha ou não memorizado para resolver determinado problema.

O nosso estudo parte das contribuições desses e de outros autores, confirmando seus achados em diversos momentos, ampliando as discussões concernentes ao tratamento de problemas aditivos ao estabelecer, conforme apresentaremos nas discussões, três aspectos a serem considerados na análise de problemas matemáticos: 1) a quantidade de registro deixado no papel; 2) a estratégia aritmética mobilizada; 3) o apoio não numérico. Em relação ao segundo, identificamos tipos de estratégia para a resolução dos problemas de adição e subtração quando os algoritmos convencionais não estão em jogo, quais sejam: a) as que se filiam na contagem de um em um e de dez em dez; b) as que se valem da composição e decomposição decimal e não decimal para operar os termos; c) e as que modificam os valores em jogo para facilitar as operações. Essa compreensão sugere que, para conhecer e avaliar a criança que pensa matematicamente sobre um problema aditivo, talvez seja importante que o educador considere esses processos. Teoricamente, pretendemos inovar, ainda, ao trazer as contribuições da EMC para a análise de respostas ante problemas matemáticos baseadas em caminhos alternativos aos algoritmos convencionais de somar e subtrair, porque 1) tornam patentes a aprendizagem baseada na ação dos sujeitos, 2) possibilitam a criação de cenários para investigação fulcrados na matemática pura e a consequente possibilidade de descobertas genuínas e 3) reafirmam a defesa da tarefa dialógica de “ir até aonde o outro está”.

Metodologia

Trata-se de uma pesquisa predominantemente qualitativa, na qual investigamos as respostas de 60 crianças⁴ de duas turmas de 4º ano escolar de uma escola pública localizada no bairro Butantã, na cidade de São Paulo,

⁴ As famílias assinam, no ato da matrícula, uma autorização geral para este tipo de ação, dada a natureza *sui generis* no espaço investigado, no qual convergem ensino, pesquisa e extensão na Educação Básica. Ainda assim, foram colhidos Termos de Consentimento Livre e Esclarecido específicos para esta pesquisa.

a duas questões matemáticas apresentadas pelo professor da turma, respondidas em agosto de 2024, sem ajuda de adultos. A primeira questão analisada (problema 1) perguntava: "Breno tem uma coleção com 46 carros em miniatura. Em seu aniversário, ele ganhou mais 7 carrinhos. Quantos carrinhos faltam para Breno ter 101 carrinhos na sua coleção? A segunda questão analisada (problema 2) perguntava o seguinte: Para medir os 160 cm de comprimento da mesa da professora, Amanda utilizou uma régua de 30 cm e um pedaço de barbante de 55 cm. Ao enfileirar os dois instrumentos, quantos centímetros do comprimento da mesa vão faltar para medir?

Nossa pesquisa apresenta as seguintes perguntas norteadoras: quais caminhos matemáticos as crianças revelam em suas respostas? O que eles dizem de sua ação matemática? As respostas foram analisadas por nós, uma a uma, extraíndo-se elementos de natureza quantitativa (quantidade de crianças que pensaram nas mesmas estratégias, número de acertos e erros, etc.) e principalmente qualitativa, compreendendo a natureza das estratégias mobilizadas para a resolução dos problemas e de que forma poderiam elas serem agrupadas/categorizadas⁵.

De acordo com Lüdke e André (1986), na análise documental, o pesquisador, a partir dos documentos reunidos, passa a analisá-los, buscando o conteúdo simbólico das mensagens. Isso é feito a partir de unidades de análise, que podem ser palavras, sentenças, parágrafos ou textos como um todo, que vão sendo destacados pelo pesquisador, em alguns casos, até quantitativamente (número de vezes em que aparecem). Computadas as unidades e organizados os dados, o pesquisador, num processo de leituras e releituras, passa a detectar temas e temáticas mais

⁵ A análise qualitativa predomina no estudo; porém, quantitativamente, computamos a quantidade de crianças que optaram por este ou aquele caminho matemático e a quantidade de erros e acertos em cada um desses caminhos, o que fortalece as análises qualitativas, na medida em que corrobora com suas afirmativas (por exemplo, no campo aditivo, a via da complementação é qualitativamente menos complexa que a da subtração; essa análise qualitativa é corroborada quantitativamente, pelo maior número de erros ocasionados pela primeira, comparativamente à segunda). Ressaltamos, no entanto, que os dados quantitativos não foram submetidos a testes estatísticos e, por isso, os achados deste estudo não estão baseados exclusivamente neles.

frequentes, culminando na construção de categorias de análise que refletirão os propósitos da pesquisa. No nosso caso, os documentos analisados (respostas das questões) foram minuciosamente analisados um a um, não só a partir dos registros deixados, mas nos possíveis implícitos aos registros; tal processo foi, ainda, realizado por dois pesquisadores distintos (dois primeiros autores), em momentos diferentes, de forma que, ao se encontrarem, os mesmos puderam contrapor as categorias desenhadas, reelaborando-as em conjunto, e, ao final, ainda foi discutida com um terceiro pesquisador (terceiro autor). Para Lüdke e André,

[...] a construção de categorias não é tarefa fácil. Elas brotam, num primeiro momento, do arcabouço teórico em que se apoia a pesquisa. Esse conjunto inicial de categorias, no entanto, vai ser modificado ao longo do estudo, num processo dinâmico de confronto constante entre teoria e empiria, o que origina novas concepções e, consequentemente, novos focos de interesse (Lüdke; André, 1986, p. 42).

O processo de reelaboração culminou em categorias que levaram em conta a quantidade de registros deixados no papel, a natureza do pensamento aritmético e a presença de apoio não numérico. O processo teve idas e vindas; em alguns casos, uma determinada categoria foi dividida em duas (como é o caso, por exemplo, do caminho da decomposição, dividido em decomposição decimal, não decimal, com apoio em material dourado); em outros casos, reformulamos algumas categorias, em função de sua similaridade com outras já definidas (assim foi, por exemplo, o caminho da composição numérica nos casos de subtração via complementação, que guardam correlação com a estratégia de decomposição nas situações de somar analisadas). Na análise da natureza do pensamento aritmético, nossos referenciais teóricos foram importantes para ajudar-nos na categorização, mas cremos que nossos resultados inovam na medida em que não encontramos na literatura o detalhamento pormenorizado que aqui apresentamos.

Para fins didáticos, dividimos a apresentação da análise em dois grupos: primeiro, analisaremos e discutiremos as respostas da primeira

parte de cada uma das duas questões (situações de adição) e, em seguida, as da segunda parte (situações de subtração). Excluímos do universo investigado, para fins de categorização de caminhos, as respostas inconclusivas, em branco ou com erros interpretativos⁶ (de 14 a 18% do total).

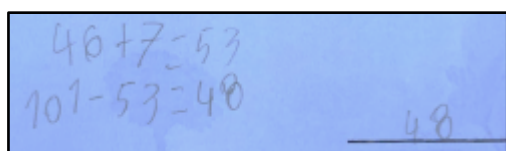
Adicionando 46 e 7

A primeira situação, “**Breno tem uma coleção com 46 carros em miniatura. Em seu aniversário, ele ganhou mais 7 carrinhos. [...]**”, se trata de uma situação prototípica de transformação positiva (Magina et al., 2008), no caso, o valor de 46 carrinhos (estado inicial) mais 7 carrinhos (valor da transformação), quanto dá (estado final desconhecido)? A resposta se dá pela aplicação do esquema de juntar (Nunes et al., 2009): $46 + 7 = 53$.

Analisando os caminhos escolhidos, é possível notar que 72,9% das crianças optaram por caminhos alternativos ao algoritmo convencional. Dentre estes caminhos, a maioria das crianças simplesmente escreveu a expressão numérica na horizontal, com o valor da resposta ($46 + 7 = 53$), ou mesmo registrou o 53 no papel diretamente, como parte do seu raciocínio. Chamamos o primeiro caminho de **cálculo mental com registro de expressão única** e o segundo de **cálculo mental sem registro**.

Figura 1

Exemplo de cálculo mental com registro de expressão única para a resolução da 1ª situação (Dados da Pesquisa, 2024)

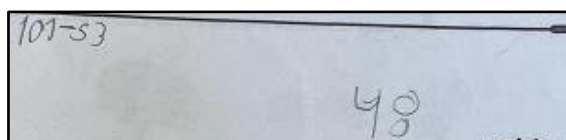


Handwritten mathematical work on a blue background. It shows two equations: $46 + 7 = 53$ and $101 - 53 = 48$. The number 48 is also written separately on a line to the right.

⁶ As respostas em branco ou inconclusivas tornaram a nossa tarefa de análise impossível, pela quantidade muito pequena ou ausência de marcas no papel que possibilitassem, para nós, qualquer interpretação alusiva à ação matemática da criança investigada. Excluímos, ainda, algumas com erros interpretativos, quando estes erros não seguiam uma linha lógica que podíamos compreender (a criança, por exemplo, empregava números ou operações descontextualizadas).

Figura 2

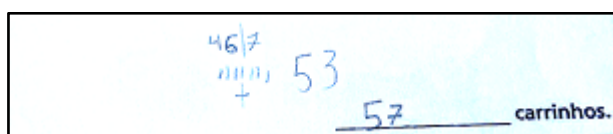
Exemplo de cálculo mental sem registro para a 1ª situação (o valor 53 simplesmente foi colocado no papel, compondo a conta da segunda situação) (Dados da Pesquisa, 2024)



Uma das crianças, G.L., fez um interessante registro de contagem de um em um utilizando pauzinhos, o que sugere que resolveu a soma realizando contagem de um em um do 46 ao 53; ou seja, $46 + 7 = 46 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 53$. Chamaremos esse caminho de **contagem de um em um com apoio em risquinhos**:

Figura 3

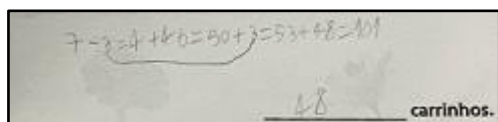
Registro da criança G.L. (Dados da Pesquisa, 2024)



Outra criança, T.A., para facilitar a soma, optou por retirar 3 de 7 antes de somá-lo ao 46 e acrescentar 3 em seguida (indicando, com um arco explicativo, de onde o 3 somado “estava vindo”). Isso é muito interessante, porque revela que a criança domina feixes de relações numéricas (Kamii & Housman, 2002), entendendo que o 7 com o qual estava trabalhando poderia virar $4 + 3$ para facilitar as operações, já que fazer $46 + 4$ e depois $+ 3$ é mais fácil do que $46 + 7$ direto. Em heurísticas de decomposição, trata-se, conforme Nunes, de uma decomposição não decimal (em que o número é quebrado em outros números menores, não necessariamente em dezenas e unidades) que busca ser utilizada para trabalhar com os redondos e evitar a sobrecarga mental (Nunes, Carraher & Schliemann, 2011). Chamaremos esse caminho o da **decomposição não decimal**:

Figura 4

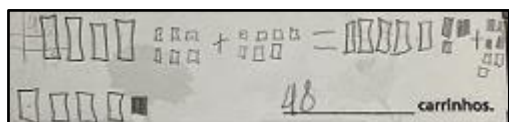
Registro da criança T.A. (Dados da Pesquisa, 2024)



Duas crianças, que chamaremos de N.S. e E.A., registraram $46 + 7$ a partir de desenhos do material dourado (4 barras e 6 cubinhos dispostos horizontalmente, sinal de + na sequência, 7 cubinhos em seguida, sinal de = e o valor 53 em material dourado). O material dourado facilitou o raciocínio de decomposição em dezenas e unidades, permitindo a N.S., concretamente, transformar 46 em $10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, e, ao somar com 7 ($1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$), a criança (que já conhecia o seu manejo) pode unir cubinhos, formando uma dezena e continuando a contagem, ou seja, fez $10 + 10 + 10 + 10 + (6 + 4) + 3$. Chamaremos esse caminho de **decomposição por material dourado**:

Figura 5

Registro da criança N.S. (Dados da Pesquisa, 2024)

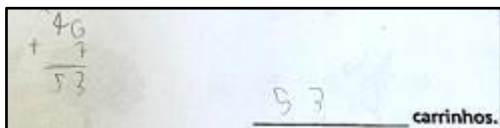


Dessa forma, houve uma multiplicidade de caminhos não algorítmicos para a resolução da situação-protótipo de transformação positiva. A utilização do cálculo mental pela maioria das crianças provavelmente deve-se a algum destes fatores: 1) a criança percebeu que os números eram pequenos e fez opção pelo caminho alternativo em razão da facilidade de se operá-los mentalmente e/ou 2) havia duas situações em jogo, a segunda mais difícil que a primeira, portanto, “não haveria problema” em fazer a primeira de cabeça, já que haveria algum registro explicativo quando da resolução da segunda situação.

De outro lado, em 27,1% das respostas, **o algoritmo convencional da adição** apareceu para a resolução de $46 + 7$. Dentre elas, a maioria realizou o algoritmo no formato tradicional. Uma criança optou por colocar, ainda, o quadro valor de lugar (QVL).

Figura 6

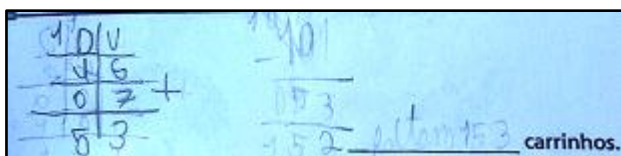
Criança utilizando algoritmo convencional (Dados da Pesquisa, 2024)



A photograph of a child's handwritten work on a grid. The problem is 46 plus 7 equals 53. The child has written '46' over '7' with a plus sign, and '53' below a horizontal line. The word 'carrinhos.' is written at the bottom right.

Figura 7

Criança opta pelo algoritmo dentro do QVL (Dados da Pesquisa, 2024)



A photograph of a child's handwritten work on a grid. The problem is 46 plus 7 equals 53. The child has written '46' over '7' with a plus sign, and '53' below a horizontal line. The word 'carrinhos.' is written at the bottom right.

Por que será que, mesmo para uma conta com números pequenos, ainda temos que 27,1% das crianças de 4º ano escolar entendem ser necessário o registro do algoritmo convencional? Pensamos em duas explicações: 1) é possível que ainda não compreendam que o registro de caminhos alternativos é algo legítimo para uma resolução de um problema no papel (legitimidade para o professor), neste caso, mesmo que ela saiba operar de forma mais ágil pelo cálculo mental; 2) outra hipótese é a de que o uso do algoritmo pode lhes trazer mais segurança em ter a resposta correta (legitimidade para si mesmo), mesmo em operações relativamente simples, ou seja, não confia no seu cálculo mental para a sua resolução. O registro do algoritmo no QVL parece-nos um sintoma do paradigma do exercício (Skovsmose, 2015), fruto da enxurrada de exercícios de resolução de adições no algoritmo convencional a que as crianças foram submetidas ao longo da escolarização.

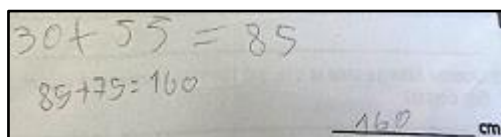
Adicionando 30 e 55

A situação aditiva do problema 2 era: **"Para medir os 160 cm de comprimento da mesa da professora, Amanda utilizou uma régua de 30 cm e um pedaço de barbante de 55 cm. Ao enfileirar os dois instrumentos [...]"**. Trata-se de uma situação prototípica de composição (Magina et al., 2008), na qual a mesa já está sendo medida pela régua de

30 cm e pelo barbante de 55 cm, e se quer descobrir quanto da mesa já foi medido: resolve-se pelo esquema de juntar (Nunes et al., 2009) $30 + 55$. Ao analisar as estratégias escolhidas, nota-se que 73,7% das respostas optaram por caminhos alternativos ao algoritmo. Assim como no Problema 1, a maioria das crianças resolveu a primeira situação por **cálculo mental sem registro** e por **cálculo mental com registro de expressão única**. Veja-se alguns exemplos:

Figura 8

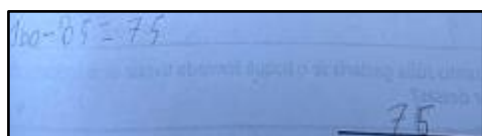
Exemplo de cálculo mental com registro de expressão única (Dados da Pesquisa, 2024)



Handwritten calculation on a piece of paper showing the sum $30 + 55 = 85$ and the subsequent sum $85 + 75 = 160$. The final result 160 is written at the bottom right.

Figura 9

Exemplo de cálculo mental sem registro para a primeira situação (nota-se que o valor 85 foi escrito na resolução da 2ª situação, sem o registro de como o valor foi calculado) (Dados da Pesquisa, 2024)

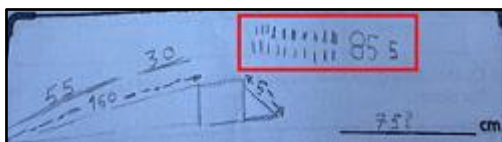


Handwritten calculation on a piece of paper showing the subtraction $160 - 85 = 75$. The final result 75 is written at the bottom right.

Além disso, a criança G.L. novamente resolveu essa situação pela **contagem de um em um, com apoio em risquinhos**. Em sua resolução, notam-se duas fileiras com 10 risquinhos cada, desenhadas no canto superior direito. Aparentemente, a criança partiu do 55 e, para somar 30, somou 3 vezes o 10, contando de 1 em 1. Assim, na primeira fileira de 10, chegou em 65 ($55 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$), na segunda fileira, chegou em 75 ($65 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$) e, provavelmente, percebeu que se somasse mais 10, deveria dar 85, então não viu necessidade em desenhar mais 10 risquinhos:

Figura 10

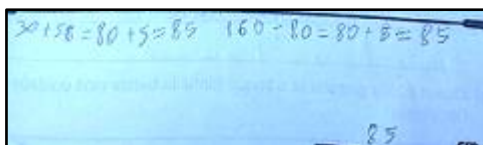
Resposta da criança G.L. (Dados da Pesquisa, 2024)



Houve ainda a criança D.A., que escolheu resolver a primeira situação por meio da **decomposição decimal**. A criança decompôs o 55 em 50 + 5, optando por primeiro somar as dezenas, ou seja, 30 (régua) + 50 = 80 e, em seguida, juntar as unidades sobressalentes: 80 + 5 = 85. Diferente da decomposição não-decimal, presente no Problema 1, na decomposição decimal a criança necessariamente decompõe o número com base nas ordens, ou seja, separando unidades, dezenas e centenas (Nunes, Carraher & Schliemann, 2011). Porém, da mesma forma que a decomposição não decimal, trata-se de um caminho que permite operar os números aproveitando-se de regularidades numéricas conhecidas, como a soma de números redondos:

Figura 11

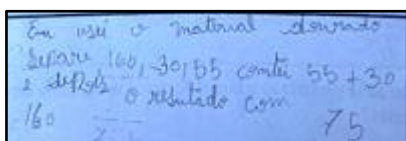
Resposta da criança D.A. (Dados da Pesquisa, 2024)



A criança S.M. resolveu o problema a partir da **decomposição por material dourado com registro na língua portuguesa** (não foi a mesma que no problema anterior optou pelo material dourado). Como explicado pela criança, ela separou os valores 30 e 55 no material dourado e, em seguida, os juntou. Nota-se o cuidado da criança em explicitar ao educador, em língua portuguesa, como foi que pensou:

Figura 12

Resposta da criança S.M. (Dados da Pesquisa, 2024)

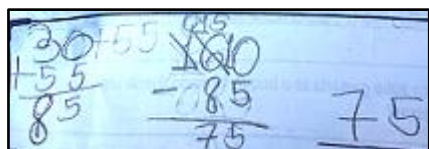


Percebe-se, pois, que, assim como no Problema 1, há uma multiplicidade de caminhos não algorítmicos para a resolução da primeira

situação. Percebe-se novamente a preferência pelo cálculo mental, que, a nosso ver, se deve aos mesmos fatores ali aventados. Por outro lado, 26,3% das crianças optaram pela utilização do **algoritmo convencional da adição** para a resolução de $30 + 55$, como no exemplo abaixo:

Figura 13

Resposta da criança L.N. (Dados da Pesquisa, 2024)



$$\begin{array}{r} 30 + 55 \\ \hline 85 \\ \hline 75 \end{array}$$

A opção pelo algoritmo para a realização de $30 + 55$ deve-se, acreditamos, às hipóteses expostas anteriormente para a situação aditiva da primeira questão. Ressaltamos que, em razão de serem dois algarismos para cada uma das parcelas ($30 + 55$), poder-se-ia pensar que muitas crianças fizessem a escolha mais “segura” de colocar no algoritmo, o que não aconteceu (na verdade, a porcentagem de crianças que optou pelo algoritmo aqui é ligeiramente menor do que a do problema 1).

Os erros nas situações aditivas

Analisemos agora os erros das situações aditivas. Nos caminhos alternativos escolhidos, ocorreram dois erros na situação aditiva do problema 1 e dois na do problema 2. Estes erros representam 5,8% e 7,6% do total de crianças que optaram pelos caminhos alternativos em cada grupo. Em relação aos erros das crianças que usaram o algoritmo convencional, houve um erro na situação aditiva do problema 1, e dois erros na situação aditiva do problema 2. Estes erros representam 7,6% e 20% do total de crianças que optaram pelo algoritmo em cada grupo. Neste sentido, não houve grande diferença na porcentagem de erros e acertos por um ou outro no problema 1; já no problema 2, as crianças foram mais bem-sucedidas usando caminhos alternativos.

Nos caminhos alternativos, os erros ocorridos foram de soma em uma unidade ou dezena a mais ou a menos, ou seja, ao invés de resultar em 53 para $46 + 7$, as crianças chegaram em 52 e 54 ao fazerem o cálculo mental

(situação aditiva do problema 1), e, ao somar $30 + 55$ (situação aditiva do problema 2), chegaram nas respostas 75 e 95 ao invés de 85:

Figura 14.

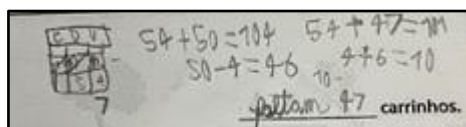
Resposta da criança R.Z. (Dados da Pesquisa, 2024)



Handwritten calculation: $70 - 52 = 48$. Below it, 48 is written and followed by "carrinhos."

Figura 15

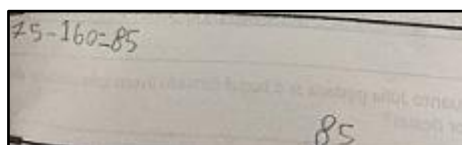
Resposta da criança J.V. (Dados da Pesquisa, 2024)



Handwritten calculation: $54 + 50 = 104$, $54 + 47 = 101$, $50 - 4 = 46$, $47 + 6 = 10$. Below it, 47 is written and followed by "carrinhos."

Figura 16

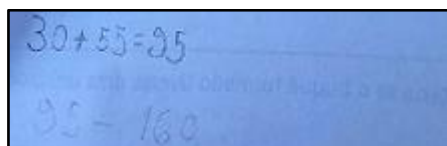
Resposta da criança K.M. (Dados da Pesquisa, 2024)



Handwritten calculation: $75 - 100 = 85$. Below it, 85 is written.

Figura 17

Resposta da criança V.C. (Dados da Pesquisa, 2024)



Handwritten calculation: $30 + 55 = 85$. Below it, $85 - 100$ is written.

Por que será que essas crianças erraram? Temos algumas hipóteses. Em primeiro lugar, observa-se que fizeram por **cálculo mental sem registro** (com exceção da última, em que há o registro da expressão). Na situação do problema 1, a soma é de dois números cujo resultado que estão entre "nós" das dezenas, o que às vezes não permite uma ideia intuitiva da resposta, já que a virada no nó exige um raciocínio do Sistema de Numeração Decimal mais complexo que os números dentro do intervalo do nó (Lerner, Sadovsky & Wolman, 1996): ao contar de um em um, 47, 48, 49, pensar qual é o próximo (no caso, 50), e em seguida voltar a caminhar de um em um, 51, 52, 53, pode ser algo mais exigente para a criança, que, eventualmente, erra por um pela sobrecarga mental no processo. Para

Nunes, Carraher e Schliemann (2011), a sobrecarga ocorre no processamento mental dos dados pela necessidade de operar simultaneamente sobre as diversas casas decimais (aqui, no caso, dezenas e unidades), que a estratégia da decomposição evita, por exemplo. A sobrecarga aumenta quando algumas crianças resistem ao uso de dedos ou de outro suporte simbólico para a contagem, fazendo tudo de cabeça (muitas vezes, as crianças evitam o uso dos dedos, seja pela necessidade de ser mais rápido, seja pela vergonha de serem observadas por algum colega ao levantá-los). Outra hipótese de erro é não ter contado a partir do sucessor durante o processo de contagem. Sabemos que Breno tem 46, então, ao somar mais 7, é necessário contar de um em um a partir de 47; ou seja, teríamos 47 (1), 48 (2), 49 (3), 50 (4), 51 (5), 52 (6) e 53 (7). Caso a criança não tenha essa ideia consolidada, pode ocorrer de a soma ser feita considerando o 46 como primeiro termo, o que geraria 46 (1), 47 (2), 48 (3), 49 (4), 50 (5), 51 (6) e 52 (7). Na situação do problema 2, análise semelhante pode ser feita: a contagem de 10 em 10 é particularmente exigente a partir do 50, pela confusão estabelecida entre as expressões orais e escritas dos números seguintes (sobretudo 60 e 70), o que algumas vezes gera confusão entre as crianças; além disso, no caso da criança K.M., ao adicionar 3 “dezes” (30), pode ter iniciado a contagem a partir do próprio 55, ou seja, ao invés de iniciar do 55 e fazer 65 (10), 75 (20), 85 (30), pensou em 55 (10), 65 (20), 75 (30).

No uso dos algoritmos convencionais, na situação do problema 1, a criança P.R. errou descobrindo um resultado que parece ser o número 13 ou 123; na situação do problema 2, as crianças atingiram os valores 65 e 95:

Figura 18

Resposta da criança P.R. (Dados da Pesquisa, 2024)

The image shows a piece of paper with handwritten text in blue ink. On the left, there is a subtraction problem: $46 - 7 = 13$. To the right of this, there is a note in Portuguese: "ele já tem + 12 carrinhos." The word "carrinhos" is underlined.

Figura 19

Resposta da criança H.F. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation on lined paper. The numbers 30, 55, 05, 65, and 5 are visible, along with a final result of 95.

Figura 20

Resposta da criança K.S. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation on lined paper. The numbers 63, 150, 95, 695, and 145 are visible, along with a final result of 145.

Como poderia, $46 + 7$, dar 13 ou 123? A criança parece se confundir com as regras algorítmicas, mas talvez tenha percebido o absurdo, pois apagou alguns números; não avançou a partir daí, pois não resolveu a segunda situação do problema. Nos outros dois casos, os erros obedecem ao equívoco de contagem de 1 em 1, explicáveis pelos mesmos motivos dos erros no cálculo mental.

Subtraindo 53 de 101

No primeiro problema, pergunta-se: “Quantos **carrinhos faltam para que Breno tenha 101 carrinhos na sua coleção?**” Para resolver, a criança precisa compreender que, tendo 53 carrinhos (valor já descoberto após o cálculo da primeira situação), para que Breno consiga ter 101 carrinhos, é preciso calcular o quanto falta para chegar a 101 carrinhos. Trata-se de uma situação de transformação positiva, agora não prototípica, na qual se tem o valor inicial e o final e se pede uma transformação (Magina et al., 2008), pois Breno agora tem 53 carrinhos (valor inicial) e pergunta-se, para ter 101 carrinhos (valor final), quantos carrinhos precisará ganhar (valor da transformação)? As transformações não prototípicas são mais exigentes do ponto de vista cognitivo que as prototípicas, uma vez que exigem, por parte da criança, a construção de uma relação operatória entre os esquemas de juntar e separar, ou seja, compreender a relação oposta entre ambos (Nunes et al., 2009). Isso se explicita pelo uso da palavra “ganhar”, ou seja, uma situação de ganho, que, no entanto, enseja uma

subtração: $101 - 53$. Trata-se, portanto, de um problema de subtração contraintuitivo. Por isso, a resposta, muitas vezes, se dará pela aplicação da estratégia de complementação, em vez da subtração (no caso, $53 + ? = 101$), ou seja, vão adicionando aos 53 carrinhos vários outros carrinhos até chegar a 101 carrinhos, mantendo, portanto, a aplicação do esquema de juntar, e não o de separar (preservando a ideia aditiva, que é mais intuitiva nesse caso).

Verificou-se, de fato, que 43,9% das crianças optaram pela complementação e 56,1% pela subtração. Por se tratar de uma turma de quarto ano, a maioria já percebe esta relação inversa, embora seja notável que muitas (quase metade) preferiram fazer pela complementação. Interessante também observar que, das que optaram pelo raciocínio da complementação, 83,3% acertaram, das que fizeram pela subtração, apenas 65,2% acertaram, o que indica maior complexidade/dificuldade do raciocínio subtrativo.

Analizamos também se as crianças optaram pelo algoritmo convencional ou buscaram vias alternativas para resolver a situação: verificamos que 65,9% adotaram caminhos alternativos e 34,1% optaram pelo algoritmo convencional. Tais porcentagens são parecidas com as da primeira situação, o que indica uma persistência da preferência pelos caminhos alternativos ao algoritmo. Vejamos, agora, em detalhe, essas estratégias, buscando a construção de categorias que nos ajudem a interpretar qualitativamente os resultados encontrados, da mesma forma que o fizemos para as situações envolvendo somas.

Em relação às crianças que optaram pela complementação, algumas simplesmente escrevem a expressão $53 + 48 = 101$, sem deixar muito claro como calcularam mentalmente esse valor. Fizeram, portanto, por **cálculo mental com expressão única**. Por exemplo:

Figura 21

Criança fez mentalmente a complementação 48, inserindo-a na expressão (Dados da Pesquisa, 2024)

$$53 + 48 = 101$$

faltam 48 carrinhos.

Temos também duas crianças que foram somando de 10 em 10 e depois acrescentaram unidades, até chegar ao 101. A criança A.C. registra os “dezes”; já a criança M.P. registra os resultados parciais (63, 73, 83 e 93). Veja-se que, ao chegar ao 93, antecipa mentalmente que, caso adicione outro dez, ultrapassará o valor final; então reflete e adiciona apenas 8. Chamaremos esse tipo de estratégia de complementação pela **contagem/adição de 10 em 10**, para fazermos um paralelo com a contagem de 1 em 1 (com apoio em risquinhos) que vislumbramos nas situações aditivas:

Figura 22

Resposta da criança A.C. (Dados da Pesquisa, 2024)

$$46 + 7 = 53 + 10 + 10 + 10 + 5$$

45 carrinhos.

Figura 23

Resposta da criança M.P. (Dados da Pesquisa, 2024)

$$46 + 7 = 53$$

$$53 + 101$$

$$63 - 73 - 83 - 93 + 8 = 48$$

48 carrinhos.

Três crianças também utilizaram a estratégia da complementação por somas parciais, porém, sem ir de 10 em 10, preferindo caminhos mais rápidos. A criança A.O. adiciona 8 primeiro, chegando ao 61, depois, adiciona 40 para chegar direto ao 101, e então junta tudo o que adicionou para descobrir a resposta. Já a criança D.F. também soma em duas partes, porém primeiro adiciona 47 a 53 para chegar a 100, depois adiciona 1 e, ao final, junta as partes por um arco, identificando o resultado como 48. Chamaremos essas estratégias de complementação pela **composição numérica**, inspirados, aqui, na definição dada por Nunes, Carraher e

Schliemann (2011) ao analisarem a heurística infantil de composição (*chunking*), que consiste em ir agrupando porções até obter o total. Fazemos, assim, um paralelo com a decomposição numérica definida anteriormente. Domite também identifica esta estratégia em seus escritos, afirmando que é útil, sobretudo em situações de descobrir-se “quanto falta”, e que consiste em ir dando “pequenos pulos” até alcançar o total (Mendonça & Lellis, 1989). Tanto a composição como a decomposição buscam “bons” números, aproveitando-se de regularidades numéricas conhecidas, como ir operando com os números redondos, ao invés de operar de uma vez só:

Figura 24

Resposta da criança A.O. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation: $53 + 8 = 61 + 40 = 101$. Below the calculation, the number 48 is written and labeled "carrinhos."

Figura 25

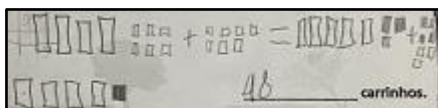
Resposta da criança D.F. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation: $53 + 7 = 60$, $60 + 40 = 100$, and $100 + 1 = 101$. Below the calculation, the number 48 is written and labeled "carrinhos."

A criança N.S., a seguir, também pensa por composição numérica, porém, a partir do material dourado. Após resolver a primeira situação (já explicada anteriormente), adicionou 7 ao resultado 53, dando 60 (registra no material dourado a adição $53 + 7$, porém não o resultado); depois adicionou mais 4 barras de 10 (dando 100, mas não registra o 100, apenas as barras adicionadas) e um cubinho (chegando no 101, porém sem registrar o resultado, apenas o cubinho). Dessa forma, raciocina por complementação, tendo feito, por material dourado, $53 + 7 = 60 + 40 + 1 = 101$ e depois, de cabeça, $7 + 40 + 1 = 48$. Estamos nomeando esta estratégia como complementação pela **composição no material dourado**:

Figura 26

Resposta da criança N.S. (Dados da Pesquisa, 2024)



Temos, ainda, outra estratégia possível na complementação, que é partir não dos valores em jogo, mas de outros cujo resultado já se sabe mais facilmente e ir “corrigindo-os”, até que estes possam representar as quantias em jogo. Foi o caso de 5 crianças. A criança E.M., por exemplo, ao pensar no $53 + ? = 101$, parte do $50 + 50 = 100$ para trabalhar. Registra $50 + 49 = 99$ e parte daí para testar valores mentalmente, até chegar no $53 + 48 = 101$ que ela deixou registrado no papel (pode ter pensado: se $50 + 50$ é 100, quando diminuo 1 de uma das parcelas, o resultado é 99; quando diminuo mais um, o resultado é 98; porém, quando ao mesmo tempo aumento um na primeira parcela, volto para o 99... e foi alterando os valores até chegar no $53 + 48 = 101$). A criança J.V. é mais explícita no que pensou: começa utilizando a estratégia da subtração pelo algoritmo, porém parece não ser bem-sucedida nessa utilização, pois o resultado é 7. Insatisfeita, a criança tenta o raciocínio da complementação, partindo do 54 (não do 53 porque, ao resolver a primeira situação, fez de cabeça, porém, errando por 1). Resolveu somar 50 ao 54, verifica que dá 104, ou seja, passou o valor; depois tira 4 de 50 para que o resultado dê 100, verifica que $50 - 4$ é 46 então soma $54 + 46$ que dá 100 (faz $4 + 6$ separado embaixo, dá 10, então deve ter usado isso para calcular mentalmente $50 + 40$ que dá 90 + 10 que dá 100), porém não coloca o 100, pois sabe que precisa dar 101, então, apaga o 6 e escreve 7 por cima, e coloca o resultado 101. Trata-se, a nosso ver, de um tipo de estratégia de composição numérica, porém, na qual a criança faz a complementação com os valores alterados por ela mesma, para facilitar a operação; por isso, chamaremos esse tipo de estratégia de estratégia de complementação pela **alteração de valores em jogo**:

Figura 27

Resposta da criança E.M. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten work of child J.V. showing calculations: $46+7=53$, $53+48=101$, $50+50=100$, $50+48=98$, and 48 carrinhos.

Figura 28

Resposta da criança J.V. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten work of child B.A. showing calculations: $54+50=104$, $54+47=101$, $50-4=46$, $4+6=10$, and 47 carrinhos.

Quando se analisam as respostas das crianças que optaram pelo caminho da subtração, é possível fazer uma categorização semelhante: primeiro, observa-se que a grande maioria simplesmente coloca a subtração $101 - 53 = 48$, sem deixar claro como pensaram, como é o caso da criança B.A., portanto, **cálculo mental com apoio apenas na expressão**.

Figura 29

Resposta da criança B.A. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten work of child B.A. showing the calculation $101-53$ and the result 48 carrinhos.

Outras crianças utilizam estratégias diferentes, como é o caso das crianças D.A. e N.M., que adotaram a estratégia de **alteração de valores** em jogo. A criança D.A. pensou: se fosse $100 - 50$, seria 50; porém, o subtraendo é 53 e não 50 (3 a mais), então tem que tirar mais 3, ficando 47; porém, o minuendo é maior (101 é maior em 1), então é preciso acrescentar 1. Convém realçar a expressão “se fosse” utilizada pela criança, que indica ao leitor a mobilidade mental com que pensa aritmeticamente. A criança N.M., por sua vez, registra a expressão $101 - 53 = 48$, deixando no papel como chegou lá: fez primeiro $100 - 50 = 50$. Com o resultado, faz duas coisas: primeiro, adiciona-se 1 ao resultado (pois o valor original do minuendo era 101 e não 100), registrando-se $50 + 1 = 51$; depois, tira-se o 3 (pois o valor original do subtraendo era 53 e não 50), registrando-se 51

- 3 = 48. Muito notável a capacidade dessas crianças de guardar as partes retiradas, e usar a operação correta ao devolvê-las ao resultado:

Figura 30

Resposta da criança D.A. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation by child D.A. showing the steps: $46 + 7 = 53$, then $100 - 50 = 50$, $50 - 3 = 47$, and $47 + 1 = 48$. The final answer is 48 carrinhos.

Figura 31

Resposta da criança N.M. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation by child N.M. showing the steps: $46 + 7 = 53$, $50 + 1 = 51$, $101 - 53 = 48$, and $51 - 3 = 48$. The final answer is 48 carrinhos.

Por fim, analisemos as crianças que usaram o algoritmo convencional. Verificamos que elas simplesmente registraram no papel a conta armada: $101 - 53$ e, em seguida, aplicaram as regras algorítmicas subsequentes. Destacamos, no entanto, o caso de duas crianças, S.L. e L.R., que, embora tenham feito uso do algoritmo, também valeram-se de caminhos alternativos. A criança S.L. acrescentou 47 ao 53 no algoritmo convencional, pois assim conseguia chegar ao 100. Até registrou na resposta “Falta 47 carro”, porém, ao lembrar-se de que precisava chegar no 101, rasura o 7 e coloca um 8 no lugar, sem, no entanto, corrigir a resposta final. No caso da criança L.R., os registros mal apagados pela borracha revelam que houve algumas tentativas de número no algoritmo até se chegar ao 48:

Figura 32

Resposta da criança S.L. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation by child S.L. showing the steps: $46 + 7 = 53$, then $100 - 53 = 47$. The final answer is 47 carrinhos.

Figura 33.

Resposta da criança L.R. (Dados da Pesquisa, 2024)



Handwritten mathematical work showing two addition problems. The first problem is $76 + 07 = 83$. The second problem is $53 + 48 = 101$. Below the second problem, the number 48 is written again, and the word "centinhos" is written at the bottom right.

Subtraindo 85 de 160

A análise da segunda situação da segunda questão identificou categorias semelhantes. Perguntava-se: **Ao enfileirar os dois instrumentos, quantos centímetros do comprimento da mesa vão faltar para medir?** Trata-se de um problema de comparação não prototípico, em que é exigida a comparação entre o tamanho dos instrumentos, no caso, 85 cm (resultado da soma anterior), e o tamanho da mesa da professora, que é de 160 cm, sendo o valor desconhecido aquele da relação entre ambos: conhece-se o referido, o referente, e pede-se a relação (Magina et al., 2008). Os problemas de comparação dizem respeito àqueles que comparam duas quantidades, uma chamada referente e a outra referido, a partir de uma relação (+r ou -r), sendo considerados, dentro das situações do campo aditivo, mais difíceis do que as transformações e composições, uma vez que, ao invés de valerem-se dos esquemas de separar ou juntar, é necessário o esquema de correspondência um a um para lidar com estas situações. Para Nunes et al. (2009), essa dificuldade existe porque as ideias de adição e subtração aparecem, nos esquemas anteriores, como mudanças nas quantidades; porém, nos problemas comparativos, não há mudanças nas quantidades, e os alunos encontram maior dificuldade em raciocinar de imediato sobre as relações quantitativas envolvidas no problema. Para resolvê-la, é necessário que a criança compreenda que 85 cm da mesa (valor descoberto anteriormente) já foram medidos e, portanto, para descobrir quanto falta medir, é preciso que a criança subtraia o total (160) do valor já medido (85), resultando em $160 - 85$. Porém, assim como na segunda situação do problema 1, é viável a resolução dessa situação pela perspectiva de complementação, ou seja, a partir dos 85 cm já medidos, a criança completa o valor até chegar aos 160 cm.

Nessa situação, 36,1% optaram pela complementação e 63,9% pela subtração. Os acertos somam 69,2% dos que fizeram por complementação e 52,2% dos que fizeram por subtração. Desse modo, como ocorre no problema 1, nota-se que há uma maior taxa de erro entre as crianças que optaram pela subtração.

Realizando agora a análise quantitativa das crianças que optaram por utilizar o algoritmo convencional ou de caminhos alternativos, constata-se que 70,7% optaram pelos caminhos alternativos e 29,3% pelo algoritmo convencional. Nota-se que, em comparação com a primeira situação do problema 2, persiste o interesse pelos caminhos alternativos (fenômeno idêntico ao observado no problema 1). Apresentemos, agora, qualitativamente, os caminhos encontrados.

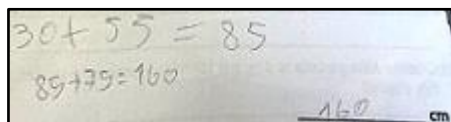
Inicialmente, começaremos com duas crianças cujos raciocínios não é possível identificar se optaram pela complementação ou pela subtração. A criança G.L., cuja primeira parte do raciocínio já comentamos (Figura 10), escolheu o **cálculo mental com apoio no desenho**. Criou uma representação gráfica para melhor visualização da situação. É interessante e curiosa a representação gráfica da criança: uma “rampa” cujas medidas correspondem aos valores em jogo. Acreditamos que isso ocorreu devido a outra questão discutida previamente em sala de aula, na qual havia uma rampa de 30 cm. A criança provavelmente evocou esta imagem para, no caso em tela, esquematizar a relação parte-todo e realizar o esquema de correspondência. Ainda que não usual (e não totalmente preciso), o desenho facilitou a sua compreensão do problema, visto que acertou a resposta, o que nos lembra a importância das representações bidimensionais, como as apresentadas por Regina Damm (2003), para o tratamento de problemas aditivos. Já a criança S.M., cuja primeira parte do raciocínio já comentamos (Figura 12), utilizou o método de **decomposição por material dourado (escrito em língua portuguesa)**, raciocínio já explorado na situação anterior.

Agora, analisemos as crianças que explicitamente optaram pela complementação.

A criança J.I. foi uma das crianças que utilizou a estratégia de **cálculo mental com registro de expressão única**:

Figura 34

Acerto na utilização de caminho alternativo (complementação): Criança J.I. (Dados da Pesquisa, 2024)

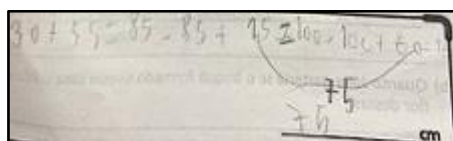


Handwritten work of child J.I. showing the calculation $30 + 55 = 85$ and $85 + 75 = 160$, with a bracket under 160.

A criança D.F. foi uma das crianças que escolheu a estratégia de **composição numérica decimal**. Ela começou somando 15 ao 85 para dar 100 e, como do 100 faltam 60 para completar 160, então a resposta é $15 + 60 = 75$ (que ela indicou com um arco).

Figura 35

Resposta da criança D.F. (Dados da Pesquisa, 2024)

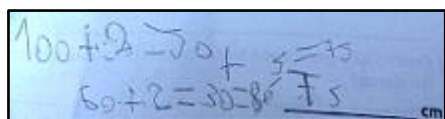


Handwritten work of child D.F. showing the calculation $30 + 55 = 85$, $85 + 15 = 100$, and $100 + 60 = 160$, with a bracket under 160 and the final answer 75.

A criança C.Z. foi uma das crianças que utilizou a estratégia de **alteração de valores em jogo**. A criança sabia que precisava fazer $85 + ? = 160$ e começa a refletir sobre o 160 enquanto 100 e 60, registrando, a partir daí, suas metades: $100 : 2 = 50$ e $60 : 2 = 30$ (ainda não havia sido ensinada a escrita regular da divisão em sala de aula e, por isso, a criança faz à sua maneira: para indicá-la, utiliza o sinal de + com uma bolinha em cada ponta!). Somou ambos, deu 80, então ele já sabia que a mesa da professora eram dois 80. Talvez ele tenha buscado a metade porque já sabia que a régua + barbante dava 85 e supôs que para medir a mesa da professora ia precisar mais ou menos do dobro disso, ou seja, de mais 85. Quando viu que a professora media 2×80 , e sabendo que já tinha 85, ou seja, 5 a mais, sabia que a outra metade deveria ter 5 a menos, e, por isso, registra $80 - 5 = 75$.

Figura 36.

Criança C.Z. utilizando a estratégia da alteração de valores (Dados da Pesquisa, 2024)



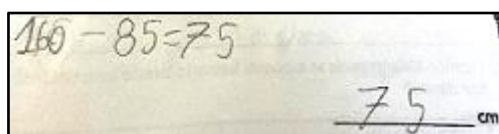
Handwritten mathematical work showing two equations: $100 + 2 = 102$ and $50 + 3 = 53$, with a final result of 75.

Analisaremos agora as estratégias utilizadas pelas crianças que escolheram resolver por subtração.

A criança J.L. foi uma das que utilizou a estratégia de **cálculo mental com registro de expressão única**, representada pela expressão $160 - 85 = 75$.

Figura 37

Acerto na utilização de caminho alternativo (subtração): Criança J.L. (Dados da Pesquisa, 2024)

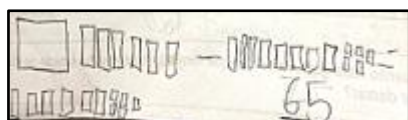


Handwritten mathematical work showing the expression $160 - 85 = 75$.

A criança N.S. resolveu a situação pela **decomposição por material dourado**; dessa maneira, podemos perceber o registro do minuendo enquanto uma placa e seis barras: $100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$, e o subtraendo enquanto oito barras e cinco cubinhos: $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5$. Ao efetuar a operação, no entanto, a criança chegou a uma resposta uma dezena menor que a resposta correta, talvez pela necessidade de se fazer a troca, e a criança, por não possuir o material dourado concreto na sua mesa, teve de fazê-la de cabeça:

Figura 38

Criança N.S. faz por decomposição por material dourado (Dados da Pesquisa, 2024)

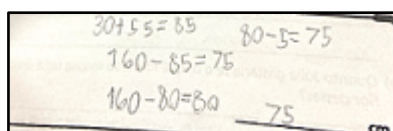


Handwritten mathematical work showing a subtraction problem using base ten blocks, with the result 65.

A criança N.M. foi uma das que utilizaram a **decomposição decimal**. Assim, separou 85 em 80 e 5, primeiro subtraindo 80 de 160 e, em seguida, os 5 restantes.

Figura 39

Criança N.M. decompondo 85 em 80 e 5 (Dados da Pesquisa, 2024)



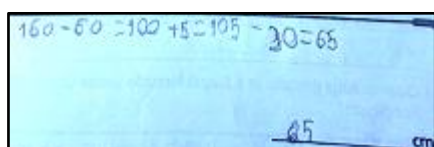
Handwritten work of child N.M. showing the decomposition of 85 into 80 and 5, and the subsequent subtraction from 160:

$$\begin{array}{l} 30 + 55 = 85 \quad 80 - 5 = 75 \\ 160 - 85 = 75 \\ 160 - 80 = 80 \quad 75 \end{array}$$

A criança D.P. utilizou a estratégia de **alteração de valores**. Primeiro subtraiu o 55 (barbante) e, em seguida, o 30 (régua) de 160. Na primeira, porém, preferiu tirar 60 e corrigir, acrescentando 5 ao resultado. Na segunda conta, $105 - 30$, errou, chegando ao resultado uma dezena menor que a resposta correta, provavelmente pela dificuldade em andar de 10 em 10 de cabeça (neste caso, para trás ainda!) e refletir que número é quando se passa pelo nó:

Figura 40

Erro na utilização de caminho alternativo: Criança D.P. (Dados da Pesquisa, 2024)



Handwritten work of child D.P. showing an alternative subtraction strategy with corrections:

$$\begin{array}{l} 160 - 60 = 100 + 5 = 105 - 30 = 75 \\ 75 \end{array}$$

Agora, analisemos as crianças que utilizaram o algoritmo convencional. A maioria delas simplesmente armou a conta $160 - 85$ e a resolveu aplicando as regras algorítmicas. No entanto, assim como no problema 1, duas crianças utilizaram o algoritmo pelo viés da complementação. A criança L.R., embora com registro apagado, apresenta uma conta armada de adição. O caso da criança S.L. é ainda mais curioso, pois utilizou a estratégia de **alteração de valores** para chegar ao resultado, usando a estrutura algorítmica para investigar o valor necessário para completar 160 a partir de 85. Dessa forma, a partir do 85 obtido na 1ª situação, verificou se faltaria exatamente o mesmo tanto e percebeu que

$85 + 85 = 170$, que, por sua vez, é 10 a mais que 160, mas como um dos números é realmente 85, é necessário tirar 10 do outro 85, chegando na resposta $85 + 75 = 160$:

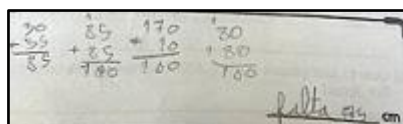
Figura 41

Algoritmo utilizado na complementação: criança L.R (registro apagado pela criança) (Dados da Pesquisa, 2024)



Figura 42

Algoritmo utilizado na complementação: criança S.L. (Dados da Pesquisa, 2024)



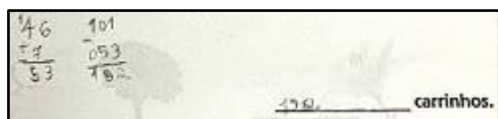
Os erros nas situações subtrativas

Na primeira situação subtrativa ($101 - 53$), entre as crianças que optaram por caminhos alternativos, 11,5% erraram a questão e 88,5% acertaram. Das que utilizaram o algoritmo, 58,8% erraram e 41,2% acertaram a questão. Ou seja, a utilização do algoritmo convencional mostrou-se uma estratégia mal-sucedida para a maioria das crianças que optaram por ele, diferentemente de caminhos alternativos ao algoritmo.

As crianças que erraram pelo algoritmo aplicaram equivocadamente as regras algorítmicas, como, por exemplo, valeram-se da propriedade comutativa para operar os números na coluna, não conseguiram saber o que fazer com o 0 na coluna, realizaram trocas de forma equivocada (sem, por exemplo, retirar 1 na coluna em que se está "pedindo emprestado), dentre outros erros. Por exemplo:

Figura 43

Exemplo de erro na utilização do algoritmo, aplicando a propriedade comutativa: criança K.S. (Dados da Pesquisa, 2024)



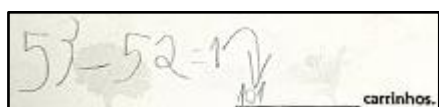
Handwritten calculation showing the addition of 46 and 7 to get 53, followed by the addition of 53 and 101 to get 154. The word "carrinhos." is written below the final result.

Passemos para os erros cometidos pelas crianças que optaram por caminhos alternativos. A criança G.L. obteve o resultado 57 (já apresentamos o seu caminho na figura 3). Neste caso, não houve a anotação do raciocínio para a segunda situação do problema, porém, o aluno resolveu a primeira parte corretamente, sabendo que Breno tem 53 carrinhos, e chegou à resposta final 57, em vez de 48. Note que $53 + 57 = 110$, o que nos leva à hipótese de que o aluno pode ter confundido 101 com 110 na hora de realizar o completamento.

Uma criança chegou ao resultado 52. O aluno chegou ao resultado esperado na primeira parte do problema: $46 + 7 = 53$; porém, na segunda parte, chegou à resposta $53 + 52$, equivocadamente pensando que essa soma dá 101. Acreditamos que o aluno possa ter pensado da seguinte maneira: adicionando 50 ao 50 do 53, temos $50 + 50 = 100$; mas, em seguida, pensou que, como seria necessário atingir o número 101, e se tivermos os números 53 e 52, então $3 - 2 = 1$, logo, $53 + 52 = 101$. Ou seja, o aluno cometeu um equívoco ao ajustar o 50 durante o completamento, a partir de uma estratégia de composição numérica feita mentalmente:

Figura 44

Resposta da criança R.M. (Dados da Pesquisa, 2024)



Handwritten calculation showing the subtraction of 52 from 53 to get 1. The word "carrinhos." is written below the final result.

Outra criança, D.M., obteve o resultado 47. É impossível saber como essa criança chegou ao resultado 47, mas supomos que, tendo errado apenas por 1, tratar-se-ia de erro de contagem (impossível saber, no entanto, se esse erro ocorreu na primeira ou na segunda situação):

Figura 45

Resposta da criança D.M. (Dados da Pesquisa, 2024)



A criança D.P. chegou ao resultado 46. Também é impossível saber como chegou ao resultado 46. O registro de $53 + 2 (1) = 55$ é particularmente interessante, pois revela, acreditamos, um “início” de complementação: parece que a criança, partindo do 53, adicionou 2 para chegar num número mais fácil para realizar as contas seguintes, no caso, o 55. Porém, a ausência de mais registros revela que a criança fez tudo na cabeça, tendo errado por 2 na resposta (que era 48), possivelmente por erro de contagem.

Figura 46

Resposta da criança D.P. (Dados da Pesquisa, 2024)



É interessante perceber que em todos estes casos, as crianças optaram pelo **cálculo mental sem apoio**.

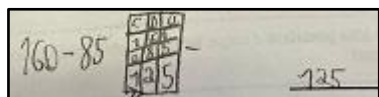
Na segunda situação subtrativa ($160 - 85$), entre as crianças que optaram por caminhos alternativos, 61,5% acertaram, enquanto 38,5% erraram; já entre as que resolveram pelo algoritmo convencional, 75,0% acertaram e 25,0% erraram. É interessante perceber que apesar da semelhança entre os dois problemas em discussão, enquanto na segunda situação do problema 1 os caminhos alternativos mostraram-se uma estratégia de maior sucesso, na situação que estamos analisando agora (segunda do problema 2), o algoritmo mostrou-se de maior eficiência.

Nos casos das crianças que erraram ao utilizar o algoritmo convencional, é possível perceber que, nos três casos, o erro ocorreu devido ao domínio limitado dos processos do algoritmo, pois houve aplicação equivocada da comutatividade e/ou erro na dificuldade de operar

corretamente duas trocas (na dezena e na centena, conforme os números exigiam), resultando em 125, 85 e 145.

Figura 47

Exemplo de erro na utilização de algoritmo: Criança A.C. (Dados da Pesquisa, 2024)

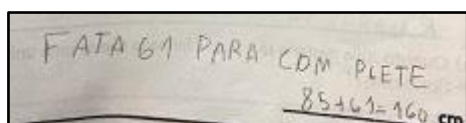


Handwritten work showing the subtraction $160 - 85$ using a grid. The grid is a 2x2 table with the following values: top-left 100, top-right 60, bottom-left 80, bottom-right 5. The result 135 is written to the right of the grid.

Analisemos os erros das crianças que escolheram utilizar caminhos alternativos. A criança J.P. errou a 2ª situação ao resolver o problema utilizando **cálculo mental com registro de expressão única**. Nota-se que ela chegou à resposta correta na primeira situação e, aparentemente, resolveu a 2ª situação por meio da complementação, ou seja, quanto falta para chegar a 160 cm a partir de 85 cm. Pode ser que a criança tenha tentado completar contando de 10 em 10 e de 1 em 1 e se tenha perdido em algum momento, alcançando a resposta 61, ou que, em vez de 75, tenha tentado colocar o algoritmo na cabeça, o que justificaria, de alguma forma, o 1 do 61, que, somado ao 5 do 85, resultaria equivocadamente no 6 do 160.

Figura 48

Erro no cálculo mental: Criança J.P. (Dados da Pesquisa, 2024)

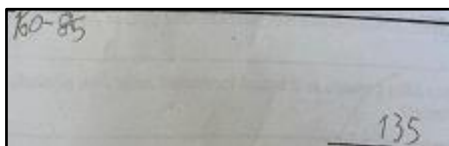


Handwritten work showing the expression $160 - 85$ and the result 135. The text "FATA 61 PARA COM PLETE" is written above the expression.

A criança B.A. registrou a expressão $160 - 85$, representando corretamente o esperado na 2ª situação, porém indicou a resposta 135 cm. Devido a falta de registros escritos nessa estratégia, é impossível verificarmos como o erro ocorreu, porém por causa de erros semelhantes durante a resolução da subtração por meio algorítmico, pensamos na hipótese de a criança ter efetuado o algoritmo na cabeça e aplicado erroneamente a comutativa, ou seja, $0 - 5 = 5$, $6 - 8 = 3$ (erro de conta) e $1 - (\text{nada}) = 1$, logo $160 - 85 = 135$.

Figura 49

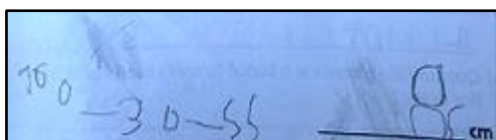
Erro na utilização de caminho alternativo: Criança B.A. (Dados da Pesquisa, 2024)



As crianças D.M., A.V. e P.R., cujas resoluções estão presentes nas figuras abaixo, não separaram o problema em duas situações, resolvendo direto a 2ª situação a partir da perspectiva de subtração, e, talvez por isso, tenham errado o resultado:

Figura 50

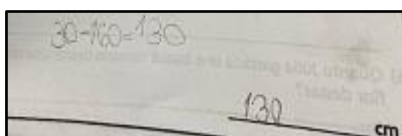
Erro na utilização de caminho alternativo: Criança D.M. (Dados da Pesquisa, 2024)



Duas crianças erraram por incompletude da solução. Aparentemente, as crianças pensaram em fazer primeiro $160 - 30$ (régua), para em seguida, a partir do resultado encontrado, subtraírem 55 (barbante), porém não fizeram a segunda etapa do raciocínio, atingindo uma resposta incompleta.

Figura 51

Erro na utilização de caminho alternativo (Dados da Pesquisa, 2024)



Destacamos, ainda, os erros das crianças que escolheram utilizar o método de **composição/decomposição numérica**. A criança E.M. obteve o resultado correto na primeira situação. Para a segunda situação, a criança preferiu resolver na perspectiva de complementação: de 85 para chegar no 100 faltam 15 ($85 + 15 = 100$); entende-se que, em seguida, a criança sabe que do 100 para chegar em 160 faltam 60, porém em vez de somar $15 + 60$ para obter o valor necessário para a complementação, a criança

fez $60 - 15 = 45$, confundindo-se no raciocínio exigido para o caminho escolhido.

Figura 52

Erro na utilização de caminho alternativo: Criança E.M. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation on a blue background. At the top, $15 - 160$ is written. Below it, $30 + 55 = 85$ and $85 + 15 = 100$ are written. At the bottom, the result 145 is written.

Já a criança D.A. primeiro juntou $30 + 55 = 85$ e, em seguida, decompôs o 85 em $80 + 5$, primeiro operando $160 - 80 = 80$. No entanto, em seguida, em vez de subtrair o resultado o 5 restante, ela somou, chegando então em $80 + 5 = 85$.

Figura 53

Erro na utilização de caminho alternativo: Criança D.A. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation on a blue background. At the top, $30 + 55 = 80 + 5 = 85$ and $160 - 80 = 80 + 5 = 85$ are written. At the bottom, the result 85 is written.

Por fim, destacamos o erro da criança A.O., que utilizou o caminho **alteração de valores** a partir da percepção que $160 = 80 + 80$. Pensamos que a ideia da criança seria a seguinte: sabendo que já foram medidos 85 cm da mesa, como $85 = 80 + 5$, então é necessário tirar 5 do outro 80 para manter a igualdade, e portanto $80 + 80 = 160 \Rightarrow (80 + 5) + (80 - 5) = 160 \Rightarrow 85 + 75 = 160$. Porém, aparentemente em vez de manter a igualdade, a criança apenas somou 5 ao resultado (160), que provavelmente surgiu da necessidade de se adicionar o 5 que tinha sido por ela tirado do 85 ao fazer $80 + 80 = 160$.

Figura 54

Erro na utilização de caminho alternativo: Criança A.O. (Dados da Pesquisa, 2024)

Handwritten calculation on a blue background. At the top, $80 + 80 = 160 + 5 = 165$ is written. At the bottom, the result 85 is written.

Discussões

De acordo com a análise das estratégias adotadas pelos alunos em relação aos problemas do campo aditivo, podemos concluir que há uma diversidade de caminhos para sua resolução, estratégias que vão muito além do algoritmo convencional (embora ele também tenha sido escolhido por algumas crianças). A ênfase dada desde o início do ano nessa turma em um ensino pautado não pelos algoritmos convencionais, mas pelo incentivo a uma multiplicidade de caminhos, certamente foi decisiva para que essa pluralidade se revelasse nas respostas.

Em termos quantitativos, a maioria dos nossos sujeitos preferiu os caminhos alternativos aos algoritmos convencionais para lidar com as duas situações aditivas e as duas subtrativas (72,9%, 73,7%, 65,9% e 70,7%, respectivamente, preferiram caminhos alternativos). A taxa de acerto tende a ser maior para aqueles que optam pelos caminhos alternativos, já que, em todas as quatro situações, o índice de erros não superou o de acertos, tendo sido baixo nas três primeiras e um pouco mais alto na última (5,8%, 7,6%, 11,5% e 38,5%, respectivamente). No caso das que optaram pelos algoritmos, podemos afirmar que a taxa de acerto é menor, já que a porcentagem de erros é maior em todas as situações, com exceção da quarta (7,6%, 20%, 58,8% e 25%), ressaltando a terceira situação, que obteve um índice de erros superior ao de acertos. Verificou-se, ainda, que, nas duas situações subtrativas, a maioria optou pelo caminho da subtração em vez do da complementação (56,1% e 63,9% contra 43,9% e 36,1%, respectivamente), sendo maior a taxa de acerto dos que optaram pela complementação (65,2% e 52,2% contra 83,3% e 69,2%), o que indica a maior complexidade/dificuldade de lidar com o raciocínio subtrativo.

Qualitativamente, foi possível categorizar as estratégias não algorítmicas a partir 1) da pouca ou grande quantidade de registros deixados no papel, 2) da natureza do pensamento aritmético revelado na resposta e 3) da presença ou não de apoio não numérico. Em relação à quantidade de registros, classificamos aquelas com poucos registros como **cálculo mental sem registro** (quando só há a resposta) ou **cálculo**

mental com apoio em expressão (quando há apenas a expressão e a resposta). Algumas crianças deixam algumas marcas além destas, porém, que ainda sim não revelam de todo o pensamento. Quando há registro passível de revelar os caminhos do pensamento, foi possível observar caminhos que se traduzem na a) **utilização da contagem de 1 em 1 ou 10 em 10**; b) **composição ou decomposição numérica decimal ou não decimal** e c) **alteração de valores em jogo** para facilitar as operações a serem realizadas. Por fim, foi possível observar respostas nas quais estes caminhos foram apoiados não **só por números em seu registro convencional**, mas também por **registros não convencionais (setas, arcos, números isolados, etc.)**, pelo **material dourado**, por **desenhos** ou mesmo **pela língua portuguesa**.

A maioria das crianças optou pelo cálculo mental. Se, por um lado, trata-se de uma estratégia dotada de velocidade, é, também, uma estratégia passível de uma maior quantidade de erros, pela sobrecarga mental exigida do sujeito, conforme verificamos nas respostas equivocadas. Erros por 1 ou 2 a mais ou a menos, ou por 10 ou 20 a mais ou a menos, foram os mais comuns neste particular. Destacamos que o cálculo mental, puro ou com apoio em expressão, cria um problema para o pesquisador: é impossível conhecer aquilo que o sujeito, de fato, pensou, aritmeticamente, para chegar à resposta. Pode ter andado de 1 em 1; pode ter feito decomposição; pode, mesmo, ter colocado o algoritmo na cabeça. Uma pesquisa que busque compreender qualitativamente esse caminho precisa, necessariamente, incluir outros instrumentos de produção de dados, como, por exemplo, entrevista com os sujeitos, o que não foi possível realizar neste caso.

Sobre as três estratégias encontradas: 1) andar de 1 em 1 ou de 10 em 10, 2) estratégias de composição e decomposição decimal e não-decimal e 3) a estratégia de alteração de valores, trata-se, acreditamos, de estratégias progressivamente mais complexas na forma de lidar com os números, operações, suas regularidades e propriedades. A primeira estratégia nos parece a menos complexa e a mais demorada, pois está

ligada à ideia primitiva de contagem. Obviamente, contar de 10 em 10 é mais difícil que contar de 1 em 1; porém, trata-se de um desdobramento dessa contagem primitiva, já que a ideia original permanece: a de tirar do subtraendo, ou acrescentar à primeira parcela, repetidamente, os valores +1, -1, +10 ou -10, até esgotar-se o valor do minuendo ou da outra parcela. Sobre isso, temos na literatura a sinalização de como as crianças pequenas gostam do caminho de contar de um em um, mesmo após terem aprendido o algoritmo escolar (Kamii & Joseph, 2004); além disso, a contagem de 10 em 10 passa a ser um recurso em aulas nas quais há a liberdade para as crianças pensarem e discutirem, recurso que vem como um desdobramento da contagem de 1 em 1 (como investigado por Lerner, Sadovsky & Wolman, 1996).

A estratégia da decomposição/composição decimal ou não decimal é, a nosso ver, um pouco mais avançada, pois exige da criança uma interpretação numérica mais complexa dos números em jogo, já que há uma intencionalidade na referida composição/decomposição só possível para quem domina certos aspectos do sistema de numeração e certas regularidades/propriedades numéricas. A criança T.A., por exemplo (Figura 4), ao somar $46 + 7$, *sabia* que no 7 tinha um 4 (e um 3) e também *sabia* que somar $46 + 4$ era mais fácil, porque chegaria no número redondo, e, por isso, fez $46 + 4 = 50 \Rightarrow 50 + 3 = 53$. A seguir, quando viu que precisava chegar ao 101, fez $53 + 47 = 100$, pois *sabia* que ambos somados daria um redondo (100) e *sabia* que seria mais fácil somar a partir dele, fazendo a seguir $100 + 1 = 101$. Ela, portanto, se “libertou” do eterno caminhar de 1 em 1 ou de 10 em 10: caminha 4 seguidos, caminha 3 seguidos, depois caminha 47 direto e depois caminha 1. Trata-se, portanto, de uma estratégia que exige que a criança enxergue os números em jogo e os “quebre” em números menores, sem necessariamente “esfarelá-los” em uns e dez. Para isso, antecipa certas operações, valendo-se de certas regularidades e do domínio de certos fatos fundamentais. Por ser uma estratégia mais exigente que a anterior, é natural que ocorram alguns erros por parte das crianças, como foi o caso das crianças E.M. e D.A. (Figuras

55 e 56). Para Nunes, a decomposição é um processo em que os sujeitos buscam meios de “arredondar os números porque os números redondos não apenas são relacionados ao conhecimento memorizado com maior facilidade [...], mas também porque eles ajudam a evitar a sobrecarga que ocorreria no processamento mental dos dados [...]” (Nunes, Carraher & Schliemann, 2011, p. 80).

Por fim, a estratégia de alteração de valores parece, aos nossos olhos, a mais avançada, uma vez que a criança, aqui, diferentemente das anteriores, se desprende dos valores em jogo, modificando-os ao seu bel-prazer. A criança D.A. faz $100 - 50$, o que não era o caso (era $101 - 53$), porém, *se fosse* $100 - 50$, ela sabe que daria 50. Como não era tirar 50, era tirar 53, a criança tirou 3 do resultado ($50 - 3 = 47$), e como o valor total era 101 e não 100, ela somou 1 ao resultado ($47 + 1 = 48$). Percebe-se que o raciocínio de composição/decomposição continua aí presente, porém, a criança já não se prende, obedientemente, aos números em jogo, como nas estratégias anteriores. A expressão “se fosse”, colocada em língua portuguesa pela própria criança D.A. no papel, é significativa por confirmar o rompimento das amarras dos números em tela!

Inspiramo-nos em Lerner e companheiras ao desenhar estes possíveis avanços qualitativos, uma vez que afirmam, *litteris*:

É necessário colocar em marcha todos os recursos possíveis para conseguir que as crianças que contam (ou somam) de um em um aproximem o seu procedimento ao das que somam de dez em dez e que estes progridam até estratégias mais econômicas do tipo “se... então”. A busca de regularidades vinculadas às operações torna possível estes progressos... e algo mais. (Lerner, Sadovsky & Wolman, 1996, p. 149)

Em relação aos erros, os caminhos de decomposição/composição e de alteração de valores, por serem estratégias mais exigentes, não por acaso, algumas crianças apresentaram erros em sua aplicação, especialmente na confusão no momento de “corrigir” os valores alterados ou de somar ao invés de subtrair (ou o contrário). Isto revela, cremos, que o processo de apropriação destas estratégias não é um caminho de

ascensão uniforme: a criança que altera valores (por exemplo), embora esteja matematicamente segura de que isto é possível, pode executá-lo com erros. No entanto, julgamos que é somente tentando e querendo se arriscar que ela abre possibilidades para um trabalho educativo que a permita identificar seus equívocos e avançar.

Sobre os erros identificados na utilização dos algoritmos convencionais, mostraram-se de acordo com aqueles evidenciados na literatura (por exemplo: Batista, 1995; Zatti, Agranionih & Enricone, 2010): aplicação equivocada da propriedade comutativa na subtração, falta de domínio na regra de “pedir emprestado”, esquecendo de diminuir o valor da casa decimal que emprestou ou confundindo-se ao realizar a segunda operação de “empréstimo”, dentre outros.

Comparando os erros em cada uma das estratégias (caminhos alternativos e algoritmos), podemos interpretar os erros pela utilização de caminhos alternativos como erros que decorrem sobretudo da complexidade dos conceitos numéricos evocados no seu processamento, ou seja, a criança, ao apresentar um raciocínio alternativo, se confunde na lógica e se perde na linearidade do raciocínio, ou se perde durante o cálculo mental, já que precisa, a depender da estratégia, dominar números, fatos fundamentais, contagem, propriedades das operações, regularidades numéricas, funcionamento do sistema de numeração, etc. Isto, é claro, dependerá do caminho alternativo escolhido, mas parece haver maior chance de erros com caminhos que demandam menos registro e/ou mobilizam mais conceitos numéricos (como o cálculo mental sem registro e a estratégia de alteração de valores). Na escolha dos algoritmos, por sua vez, entendemos os erros como erros nas regras procedimentais, ou seja, a criança, por não dominar o passo-a-passo da operação algorítmica, erra a resposta. O grande problema é que, neste caso, mesmo a criança que acerta pode não estar avançando no pensamento aritmético, já que o seu mérito está unicamente em acertar as regras algorítmicas (se não puder usar o algoritmo, talvez queira contar de um em um!).

Destacamos que, em dois casos, os algoritmos foram utilizados para resolver a situação por meio de estratégias típicas de caminhos alternativos (respostas das crianças S.L. e L.R.). Isso evidencia a possibilidade de utilizar o algoritmo como instrumento de apoio ao avanço em outras estratégias aritméticas, permitindo a flexibilização do pensamento. Porém, enxergar o algoritmo dessa maneira não é tão comum (no nosso estudo, obtivemos apenas estes dois exemplos).

Por fim, cabe-nos trazer à tona, novamente, a compreensão de aprendizagem enquanto ação. Parece-nos que a pluralidade revelada nas respostas diz de uma ação dos sujeitos que, de forma intencional e inventiva, dispuseram-se à busca pela solução dos problemas apresentados, revelando, nas respostas, as nuances de seus próprios raciocínios, de suas próprias tentativas de dar sentido aos problemas. Ainda que, em alguns casos, as crianças tenham errado a resposta, o movimento de cada sujeito era revelador de suas próprias conceitualizações acerca do sistema de numeração decimal, de suas propriedades e regularidades; este quadro poderia ser completamente diferente, caso a sala de aula em questão valorizasse a aplicação mecânica de regras dos algoritmos convencionais (teríamos uma coleção de respostas idênticas: “contas armadas” em cada uma delas). É importante ressaltar que se tratava de problemas fulcrados no paradigma do exercício; porém, a liberdade experimentada pelos sujeitos para a sua resolução, a partir da variedade de caminhos categorizados, indica, pensamos, indícios de cenários para investigação fulcrados na matemática pura, que podem ser problematizados e incentivados em uma sala de aula que se pretenda crítica.

Conclusão

Em geral, as crianças colaboradoras da pesquisa mostraram maior preferência por caminhos alternativos, em vez de algoritmos convencionais, em todas as situações analisadas. Essa preferência, porém, revela-se ainda maior nas situações aditivas, em comparação às subtrativas. O grande número de caminhos alternativos ao algoritmo revela que a turma se

apropriou de formas autorais de resolução de problemas, arriscando-se, pensando por si, de forma criativa e flexível.

Nosso texto chega ao final propondo uma mudança de paradigma no ensino de aritmética: é preciso *ir até onde o outro está*, no que diz respeito a como esse sujeito pensa as adições e subtrações em situações-problema. Isto deve significar saber menos se a criança sabe pedir emprestado no algoritmo da subtração e mais se a criança usa a estratégia da subtração em situações de comparação, ou sabe só a estratégia da complementação, por exemplo; supõe preocuparmo-nos menos em saber se o sujeito põe unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, centena embaixo de centena no algoritmo da adição e mais em qual estratégia o sujeito *efetivamente usa* pra somar: se ele precisa contar de um em um ou já sabe contar de 10 em 10, ou mesmo já sabe decompor ou alterar os números em jogo!

Consideramos, assim, os caminhos alternativos aos algoritmos convencionais uma oportunidade de desenvolvimento de raciocínio lógico e de construção do conhecimento matemático que nos parece ir ao encontro da EMC. Eles respeitam mais os processos de aprendizagem dos sujeitos envolvidos, abrem-se ao diálogo em sala de aula e possibilitam novas construções por meio da exploração dos números, do sistema de numeração e das operações em sua riqueza de relações, propriedades e regularidades. Não está imune a erros, porém, até mesmo os erros, nessa proposta, são interessantes, por revelarem o tatear do sujeito ante essas características, permitindo ao educador mediação, no sentido de promover o seu avanço no domínio dos conceitos a elas subjacentes. Enquanto isso, o algoritmo convencional, por sua própria natureza hermética, dificulta esse desenvolvimento, pois é dado *a priori* e obriga o sujeito ao cumprimento de suas regras, dificultando tais aprendizagens. Os erros cometidos pelas crianças sinalizam ao adulto a falha na aplicação de uma regra, demandando, em geral, sua correção de forma absoluta e burocrática (Alrø & Skovsmose, 2021).

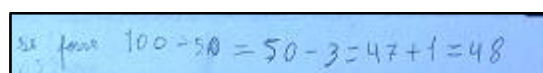
Não estamos aqui condenando a utilização e o trabalho com o “vai

um” e o “pede emprestado” nas somas e subtrações escolares, nem negamos a possibilidade de problematizá-lo em sala de aula, fazendo dele uma fonte de aprendizagens. No entanto, ante a riqueza revelada pelas crianças nos diversos caminhos por elas encontrados para a resolução de problemas de somar e subtrair, seria didaticamente um erro, acreditamos, apresentar e reforçar prematuramente estes algoritmos, já que, como explicam Nunes, Carraher e Schliemann (2011), eles não preservam o valor relativo e obrigam a uma decomposição não intuitiva.

Ir até onde o outro está, insistimos, não é saber em que ponto das regras algorítmicas o sujeito parou, para poder ajudá-lo a avançar. É saber, efetivamente, como esse sujeito *lida com os números em jogo*, num determinado problema matemático (não necessariamente escolar!), como faria para resolvê-lo caso não tivesse papel e lápis, por exemplo, ou caso não fosse uma conta a ser mostrada ao professor. É a partir daí que fazemos o convite para que ele possa avançar, aprendendo a explorar os números como se fossem seus aliados, seus amigos de jornada, disponíveis, manipuláveis, convidativos! É possível, assim, criar cenários para investigação fulcrados nos diversos caminhos não-algorítmicos, caminhos que não foram impostos como verdades, mas, sim, criados num contexto de liberdade, autonomia e legitimação dos significados produzidos pelas crianças. Os cenários para investigação são terrenos repletos de diversidade de raciocínios, de legitimação de escolhas e de expressão de preferências. A autoria das crianças mostra que elas podem assumir responsabilidade pela aprendizagem. Notações como a de D.A. para a conta $101 - 53$ nos inspiram, pela liberdade com que manipula os números em jogo e pela segurança no registro do seu pensamento, e, por isso, encerramos este trabalho com ele:

Figura 55

Trecho do raciocínio da criança D.A. (mostrada na Figura 30) (Dados da Pesquisa, 2024)



A photograph of a piece of paper with a blue background, showing a handwritten mathematical calculation in blue ink. The calculation is written in a cursive, child-like script. It starts with 'se para' on the left, followed by the equation $100 - 50 = 50 - 3 = 47 + 1 = 48$.

Referências

- Alrø, H., & Skovsmose, O. (2021). *Diálogo e aprendizagem em educação matemática* (3ª ed.). Autêntica.
- Batista, C. G. (1995). Fracasso escolar: Análise de erros em operações matemáticas. *Zetetiké*, 3(4), 61–72.
- Conceição, A. R. C. (2021). *O cálculo mental para ensinar: Uma análise de produções de Maria do Carmo Santos Domite (1980–1995)* (Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Paulo).
- Damm, R. (2003). Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In S. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica* (cap. 2). Papirus.
- Freire, P. (1996). Entrevista concedida a U. D'Ambrosio e M. do C. Domite. YouTube. https://youtu.be/1OTbuid4_G0
- Gitirana, V., Campos, T., Magina, S. M. P., & Spinillo, A. G. (2014). *Repensando multiplicação e divisão: Contribuições da teoria dos campos conceituais*. PROEM.
- Kamii, C., & Housman, L. (2002). *Crianças pequenas reinventam a aritmética: Implicações da teoria de Piaget* (2ª ed.). Artmed.
- Kamii, C., & Joseph, L. (2004). *Young children continue to reinvent arithmetic (2nd grade): Implications of Piaget's theory* (2nd ed.). Teachers College, Columbia University.
- Lerner, D., Sadovsky, P., & Wolman, S. (1996). O sistema de numeração: Um problema didático. In C. Parra & I. Saiz (Orgs.), *Didática da matemática: Reflexões psicopedagógicas* (pp. 73–155). Artmed.
- Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática. In M. A. V. Bicudo (Org.), *Pesquisa em educação matemática: Concepções & perspectivas* (pp. 75–94). Ed. UNESP.
- Magina, S. M. P., Campos, T., Nunes, T., & Gitirana, V. (2008). *Repensando adição e subtração: Contribuições da teoria dos campos conceituais* (3ª ed.). PROEM.
- Mendonça, M. do C. D., & Lellis, M. (1989). Cálculo mental. *Revista de Ensino de Ciências*, (22), 50–57.
- Milani, R. (2017). "Sim, eu ouvi o que eles disseram": O diálogo como movimento de ir até onde o outro está. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 35–52.
- Moro, M. L. F., & Soares, M. T. C. (Orgs.). (2005). *Desenho, palavras e números: As marcas da matemática na escola*. Editora da UFPR.
- Nunes, T., Campos, T. M. M., Magina, S. M. P., & Bryant, P. (2009). *Educação matemática: Números e operações numéricas* (2ª ed.). Cortez.

- Nunes, T., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2011). *Na vida dez, na escola zero* (16ª ed.). Cortez.
- Skovsmose, O. (2015). *Um convite à educação matemática crítica*. Papirus.
- Skovsmose, O. (2023). *Critical mathematics education*. Springer.
- Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade: Problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Editora UFPR.
- Zatti, F., Agranionih, N. T., & Enricone, J. R. B. (2010). Aprendizagem matemática: Desvendando dificuldades de cálculo dos alunos. *Perspectiva*, 34(128), 115–132.
- Zunino, D. L. (1995). *A matemática na escola: Aqui e agora* (2ª ed.). Artmed.