

Para além da proporcionalidade linear: um *framework* epistemológico para o ensino de relações área-volume na educação matemática contemporânea

Beyond linear proportionality: an epistemological framework for teaching area-volume relationships in contemporary mathematics education

Más allá de la proporcionalidad lineal: un marco epistemológico para la enseñanza de relaciones área-volumen en la educación matemática contemporánea

Au-delà de la proportionnalité linéaire : un cadre épistémologique pour l'enseignement des relations aire-volume dans l'éducation mathématique contemporaine

Cleonis Viater Figueira¹

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Doutora em Matemática

<https://orcid.org/0000-0001-7175-0069>

Simone Raquel Casarin Machado²

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina
Mestre em Educação Científica e Tecnológica

<https://orcid.org/0009-0000-6468-4104>

Resumo

Este artigo propõe um *framework* epistemológico integrador para o ensino das relações entre área e volume na educação básica, abordando as dificuldades conceituais inerentes à transição do pensamento linear para o multidimensional. Fundamentada no pensamento proporcional complexo, na modelagem matemática e em abordagens contemporâneas da Educação Matemática, a proposta articula princípios teóricos com estratégias didáticas inovadoras. Analisa-se criticamente a “ilusão da proporcionalidade linear” que permeia o ensino tradicional de geometria e propõe-se em seu lugar uma abordagem baseada em fenômenos reais e modelagem

¹ cleonis@utfpr.edu.br

² simone.casarin@ifsc.edu.br

matemática. O *framework* apresentado oferece contribuições significativas para a formação docente e para o desenvolvimento de competências matemáticas complexas e situa-se no debate atual sobre a epistemologia do conhecimento matemático escolar.

Palavras-chave: Educação Matemática, Pensamento proporcional, Epistemologia da matemática, Modelagem matemática, Ensino de geometria.

Abstract

This article proposes an integrative epistemological framework for teaching area-volume relationships in basic education, addressing the conceptual difficulties inherent in the transition from linear to multidimensional thinking. Grounded in complex proportional thinking, mathematical modeling, and contemporary mathematics education approaches, the proposal articulates theoretical principles with innovative didactic strategies. We critically analyze the “linear proportionality illusion” that permeates traditional geometry teaching, proposing instead an approach based on real phenomena and mathematical modeling. The presented framework offers significant contributions to teacher education and the development of complex mathematical competencies, positioning itself within the current debate on the epistemology of school mathematical knowledge.

Keywords: Mathematics education, Proportional thinking, Epistemology of mathematics, Mathematical modeling, Geometry teaching.

Resumen

Este artículo propone un marco epistemológico integrador para la enseñanza de las relaciones entre área y volumen en la educación básica, abordando las dificultades conceptuales inherentes a la transición del pensamiento lineal al multidimensional. Fundamentada en el pensamiento proporcional complejo, la modelización matemática y los enfoques contemporáneos de la educación matemática, la propuesta articula

principios teóricos con estrategias didácticas innovadoras. Analizamos críticamente la “ilusión de la proporcionalidad lineal” que impregna la enseñanza tradicional de la geometría, proponiendo en su lugar un enfoque basado en fenómenos reales y modelización matemática. El marco presentado ofrece contribuciones significativas para la formación docente y para el desarrollo de competencias matemáticas complejas, situándose en el debate actual sobre la epistemología del conocimiento matemático escolar.

Palabras clave: Educación matemática, Pensamiento proporcional, Epistemología de las matemáticas, Modelización matemática, Enseñanza de la geometría.

Résumé

Cet article propose un cadre épistémologique intégrateur pour l'enseignement des relations entre l'aire et le volume dans l'éducation de base, abordant les difficultés conceptuelles inhérentes à la transition d'une pensée linéaire à une pensée multidimensionnelle. Fondée sur la pensée proportionnelle complexe, la modélisation mathématique et les approches contemporaines de l'éducation mathématique, la proposition articule des principes théoriques avec des stratégies didactiques innovantes. Nous analysons de manière critique « l'illusion de la proportionnalité linéaire » qui imprègne l'enseignement traditionnel de la géométrie, proposant à la place une approche basée sur des phénomènes réels et la modélisation mathématique. Le cadre présenté offre des contributions significatives à la formation des enseignants et au développement de compétences mathématiques complexes, se situant dans le débat actuel sur l'épistémologie des connaissances mathématiques scolaires.

Mots-clés : Éducation mathématique, Raisonnement proportionnel, Épistémologie des mathématiques, Modélisation Mathématique, Enseignement de la géométrie.

Para além da proporcionalidade linear: um *framework* epistemológico para o ensino de relações área-volume na Educação Matemática contemporânea

Introdução

A compreensão das relações área-volume representa um dos desafios epistemológicos mais persistentes na Educação Matemática. A tendência cognitiva de reduzir relações complexas a proporções simples (uma ilusão da proporcionalidade linear) constitui um obstáculo profundamente arraigado, conforme caracterizado por Brousseau (2002).

Um exemplo cotidiano e contraintuitivo que encapsula esse desafio é o conhecido Paradoxo do Pintor, conforme De Bock et al. (2002): ao se dobrarem as dimensões lineares de um sólido (como um cubo), sua área superficial aumenta por um fator quadrático (quatro vezes), enquanto seu volume aumenta por um fator cúbico (oito vezes). Isso significa que, para pintar a superfície externa de um cubo duas vezes maior, o pintor precisará de quatro vezes mais tinta; no entanto, esse mesmo cubo, se oco, terá uma capacidade interna oito vezes maior.

Esse paradoxo evidencia de forma cristalina a falácia de aplicar um raciocínio linear a fenômenos multidimensionais, com consequências documentadas no baixo desempenho em avaliações nacionais e internacionais (Organisation for Economic Co-Operation and Development [OECD], 2018).

Embora pesquisas recentes tenham avançado na compreensão desses desafios a partir de perspectivas neurocientíficas (Dehaene, 2020), culturais (González et al., 2005) e tecnológicas (Borba & Villarreal, 2005), persiste uma lacuna na articulação sistemática desses diferentes domínios do conhecimento.

Assim como compreender o volume exige transcender a bidimensionalidade da área, incorporando uma nova dimensão e integrando conceitos anteriores em uma estrutura mais complexa, o avanço teórico exige ultrapassar fronteiras disciplinares, articulando fundamentos isolados em sistemas coerentes e tridimensionais de compreensão.

A superação desse obstáculo histórico exige mais do que intervenções isoladas; demanda uma estrutura teórico-metodológica integradora que oriente a prática docente e o *design* de ambientes de aprendizagem.

É nesse contexto que este artigo propõe e desenvolve um Framework Epistemológico Integrador (FEI) para o ensino de relações área-volume na educação básica. Fundamentado em uma síntese crítica do pensamento proporcional complexo (Lobato & Ellis, 2010), da modelagem matemática (Bassanezi, 2002) e de abordagens contemporâneas, o *framework* articula três pilares inter-relacionados: (1) os fundamentos cognitivos do pensamento multidimensional; (2) as estratégias pedagógicas baseadas em modelagem e investigação; e (3) o papel mediador das tecnologias digitais na reconfiguração do aprendizado.

Os objetivos específicos deste trabalho são: analisar as bases epistemológicas e históricas da ilusão da proporcionalidade linear; apresentar os princípios e componentes do FEI; discutir o modo como a integração entre cognição, pedagogia e tecnologia pode superar obstáculos de aprendizagem históricos; e estabelecer implicações da proposta para a formação docente e a pesquisa em Educação Matemática.

Este presente estudo configura-se como uma pesquisa teórica de natureza qualitativa, que tem por delineamento: procedimentos de revisão crítica e integrativa da literatura, análise conceitual e síntese teórica (Bakker, 2020), visando propor o FEI. A construção do FEI partiu de uma articulação interdisciplinar entre ciências cognitivas, teorias pedagógicas críticas e estudos sobre tecnologia educacional.

O artigo organiza-se da seguinte forma: após esta introdução, examina-se o pensamento proporcional para desconstruir a ilusão linear. Em seguida, analisa-se o papel das tecnologias digitais na reconfiguração do ensino dessas relações. A seção central detalha a proposta do FEI, culminando em uma discussão sobre suas implicações para a Educação Matemática contemporânea.

Por meio dessa abordagem, busca-se oferecer um caminho coerente para fomentar um pensamento matemático multidimensional, crítico e essencial para os desafios do século XXI.

No contexto educacional do século XXI, marcado por rápidas transformações, o desenvolvimento das Habilidades de Pensamento de Ordem Superior (HOTS, do inglês Higher Order Thinking Skills) tem se consolidado como um dos pilares centrais da formação contemporânea (Li et al., 2024). Essas competências, que envolvem o pensamento crítico, o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de resolver problemas, são indispensáveis para o sucesso em uma sociedade cada vez mais orientada pelo conhecimento. À medida que os paradigmas educacionais globais evoluem da simples memorização mecânica para a aprendizagem investigativa e reflexiva, dados da avaliação nacional do Brasil indicam um desafio significativo: apenas 3,7% dos estudantes do Ensino Médio conseguem aplicar conceitos matemáticos em situações novas, demonstrando proficiência real no uso prático do conhecimento adquirido, segundo o Anuário Brasileiro da Educação Básica 2025³.

O pensamento proporcional: desconstruindo a ilusão linear no ensino de relações área-volume

A compreensão contemporânea do pensamento proporcional no ensino de relações área-volume evoluiu para além da mera aplicação algorítmica, revelando-se um domínio de complexidade multifacetada (Melo Vieira & Santos, 2019). Pesquisas na interface entre Educação Matemática, ciências cognitivas e tecnologia educacional demandam uma revisão epistemológica profunda dos pressupostos que fundamentam as abordagens pedagógicas tradicionais (Lobato & Ellis, 2010).

As bases neurocognitivas dessa dificuldade são um ponto de partida crucial. Estudos em neurociência cognitiva indicam que o cérebro humano está biologicamente predisposto a processar relações lineares com maior eficiência do que relações quadráticas ou cúbicas (Dehaene, 2020).

³ O anuário encontra-se disponível em <https://anuario.todospelaeducacao.org.br/2025/>.

Essa predisposição explica a persistência da chamada “ilusão da proporcionalidade linear”, que não se trata de uma simples falha conceitual, mas de uma característica intrínseca ao nosso aparato cognitivo, exigindo, portanto, estratégias pedagógicas específicas para sua superação.

Nesse contexto, a Teoria da Carga Cognitiva (Sweller, 2020) oferece um *framework* valioso para compreender os desafios instrucionais. A compreensão de relações multidimensionais impõe uma carga cognitiva extrínseca significativa, que pode ser gerenciada por meio do *design* instrucional cuidadoso e da integração estratégica de ferramentas de visualização. Complementarmente, a abordagem da cognição incorporada (Abrahamson et al., 2023) revoluciona nossa compreensão ao demonstrar que conceitos matemáticos complexos se constroem pela interação corporal com o ambiente. A compreensão de relações área-volume emerge, assim, da coordenação entre gestos, percepções e ações em ambientes ricos e tecnologicamente aumentados.

A superação desses obstáculos é potencializada pela integração de tecnologias digitais. Ambientes de geometria dinâmica (Hoyles & Noss, 2009; Sinclair & Moss, 2012) permitem aos estudantes vivenciar concretamente os efeitos de transformações de escala, desenvolvendo intuições mais refinadas sobre a natureza não linear dessas relações.

Destarte, o uso crescente de aplicativos de geometria dinâmica em 3D, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, tem demonstrado não apenas seu potencial para facilitar a aprendizagem da geometria espacial, mas também a existência de diversos fatores que influenciam a efetividade dessa abordagem.

Para além da visualização, a inteligência artificial (IA) educacional (Holmes et al., 2019) introduz a possibilidade de personalização, com sistemas de tutoria capazes de detectar padrões de erro baseados no pensamento linear excessivo e oferecer *feedback* personalizado.

Paralelamente, as dimensões social e crítica do aprendizado são enfatizadas pela Educação Matemática Crítica (Gutstein, 2006), que defende a contextualização do estudo de relações área-volume em questões

de justiça social e ambiental, como análise de densidade populacional e impacto ambiental.

Essa perspectiva dialoga com a abordagem dos fundos de conhecimento (González et al., 2005; Oughton, 2016), que ressalta a importância de conectar o conhecimento formal aos saberes matemáticos presentes nas práticas cotidianas e comunitárias dos estudantes.

No âmbito da prática docente, as pesquisas sobre percepção docente (Sherin et al., 2021) destacam a importância de desenvolver a capacidade dos professores de identificar as dificuldades específicas dos estudantes com relações não lineares e responder a elas. Essa *expertise* permite intervenções mais precisas e pedagogicamente adequadas. A teoria dos objetos de fronteira (Akkerman & Bakker, 2020) auxilia nesse processo, ao explicar que objetos como modelos físicos, representações gráficas e notações simbólicas, que facilitam o trânsito entre diferentes sistemas de representação, são cruciais para a construção de compreensões robustas.

Por fim, a metodologia de pesquisa baseada em *design* (Bakker, 2020) consolida essas perspectivas ao fornecer um caminho para o desenvolvimento de intervenções educacionais. Seus ciclos iterativos de planejamento, implementação e análise permitem criar abordagens que respondem efetivamente às dificuldades de aprendizagem identificadas em contextos reais (Kripka & Ribeiro, 2025).

Em síntese, as perspectivas teóricas contemporâneas convergem para a necessidade de uma abordagem multifacetada e integradora. A superação da ilusão da proporcionalidade linear demanda não apenas intervenções pontuais, mas também uma reestruturação ampla do ensino de relações matemáticas complexas, considerando de forma articulada as dimensões cognitivas, corporais, sociais, tecnológicas e didáticas.

Desafios históricos, avanços neurocientíficos e perspectivas tecnológicas

O pensamento proporcional consolida-se como um dos domínios mais complexos e epistemologicamente desafiadores da Educação Matemática

contemporânea. Suas raízes remontam aos problemas clássicos da matemática grega, em que o célebre “problema de Delos”, a duplicação do cubo com régua e compasso, já testemunhava as profundas dificuldades humanas com relações não lineares (Netz, 2003).

Esse desafio histórico, insolúvel por séculos nos paradigmas euclidianos, revela que a chamada “ilusão da proporcionalidade linear” não é uma deficiência moderna, mas uma característica intrínseca ao desenvolvimento do pensamento matemático ao longo da história.

Na contemporaneidade, pesquisas internacionais corroboram a persistência desses obstáculos. Estudos indicam que o pensamento proporcional se desenvolve por meio de níveis hierárquicos de sofisticação cognitiva, sendo as relações quadráticas e cúbicas as mais complexas e contraintuitivas (Lobato & Ellis, 2010).

Essa complexidade reflete-se nos resultados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa, na sigla em inglês para Programme for International Student Assessment) 2022, nos quais apenas 12% dos estudantes brasileiros demonstraram domínio adequado de problemas envolvendo relações área-volume (OECD, 2023), sinalizando a premência de abordagens pedagógicas mais eficazes.

Em partes, isso ocorre porque um número alarmante de estudantes considera que as relações entre comprimento e área, ou comprimento e volume em figuras geométricas semelhantes, são lineares, em vez de quadráticas ou cúbicas; e esses estudantes aplicam o fator de escala linear para determinar a área ou o volume de uma figura ampliada ou reduzida.

As dimensões culturais do pensamento proporcional manifestam-se de forma particularmente rica ao se considerarem os saberes matemáticos presentes em comunidades tradicionais brasileiras. Práticas como a construção de canoas, o manejo agroflorestal, a tecelagem ou a cerâmica mobilizam intuitivamente relações não lineares complexas, frequentemente ignoradas ou subvalorizadas no currículo formal.

Nesse sentido, o contraste entre o uso inadequado do modelo linear por estudantes e a sofisticação proporcional presente nas práticas culturais

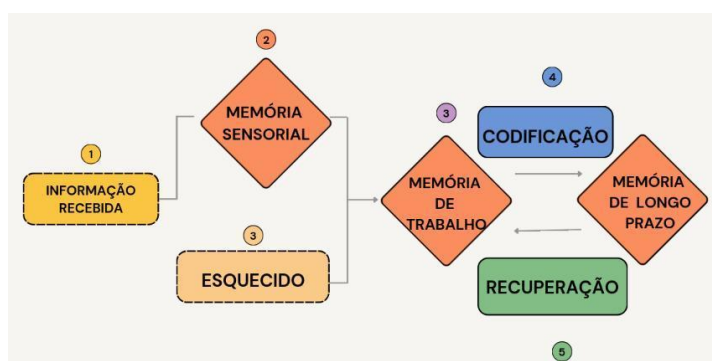
tradicionais evidencia que as dificuldades escolares não decorrem de um déficit cognitivo universal, mas de um desalinhamento entre os modos culturais de produzir matemática e a forma como o conhecimento proporcional é legitimado na educação formal.

Pesquisas etnomatemáticas desenvolvidas com grupos quilombolas revelam que práticas artesanais incorporam e fundamentam compreensões sofisticadas sobre relações geométricas e proporcionais, transmitidas geracionalmente, mas que raramente são reconhecidas nos ambientes escolares formais (Correia & Santos, 2021). Essa perspectiva alinha-se à abordagem dos fundos de conhecimento (González et al., 2005), que defende a mobilização dos saberes originados nas práticas cotidianas das comunidades como recursos pedagógicos valiosos para uma aprendizagem significativa e socialmente relevante.

Paralelamente, a neurociência cognitiva tem elucidado as bases biológicas subjacentes a essas dificuldades. Evidências demonstram que o cérebro humano processa relações lineares com significativamente mais eficiência do que relações não lineares, o que explica a persistência da tendência à linearização mesmo em indivíduos com formação matemática avançada (Dehaene, 2020). A Figura 1 mostra um esquema representativo da memória humana.

Figura 1

Memória humana: um sistema proposto e seus processos de controle



Nota. Adaptado de Atkinson e Shiffrin (1968).

Estudos de neuroimagem funcional corroboram essas observações, revelando padrões distintos de ativação cortical para diferentes tipos de relações proporcionais. Tais descobertas possuem implicações educacionais profundas, indicando que a superação de tendências lineares inadequadas requer intervenções pedagógicas especificamente desenhadas para confrontar intuições profundamente arraigadas (Stavy & Tirosh, 2000).

Nesse contexto, as tecnologias digitais emergem como ferramentas transformadoras. Ambientes de geometria dinâmica facilitam a percepção de invariantes e covariâncias dimensionais, promovendo compreensões mais robustas das relações área-volume (Andrade et al., 2023; Silva & Pazuch, 2024). A manipulação direta de representações dinâmicas parece facilitar a construção de intuições mais precisas sobre relações não lineares. Avanços em realidade aumentada e virtual oferecem possibilidades ainda mais promissoras, criando arcabouços para experiências de aprendizagem imersivas que conectam percepções sensoriais com abstrações matemáticas (Baccaglini-Frank et al., 2024).

Na prática docente, tais compreensões demandam transformações pedagógicas profundas. Argumenta-se que professores que compreendem a natureza epistemológica dos conceitos que ensinam desenvolvem práticas instrucionalmente mais eficazes para promover a compreensão conceitual (Artigue et al., 2024; Ponte & Chapman, 2022). Abordagens fundamentadas em pesquisa baseada em *design* (Cobb et al., 2021) oferecem *frameworks* valiosos para o desenvolvimento de intervenções educacionais, enfatizando ciclos iterativos de planejamento, implementação e refinamento baseados em dados empíricos de contextos reais de aprendizagem.

Perspectivas futuras de pesquisa necessitam articular contribuições de múltiplas disciplinas. Defende-se que a compreensão do desenvolvimento do pensamento proporcional beneficiar-se-ia significativamente de investigações que integrem perspectivas da Educação Matemática, ciências cognitivas e estudos de *design* educacional (Abrahamson et al., 2023). Estudos longitudinais que acompanhem o

desenvolvimento do raciocínio proporcional ao longo da educação básica poderiam identificar pontos críticos e informar o *design* de intervenções pedagogicamente adequadas.

A integração contínua de tecnologias emergentes mantém-se como uma fronteira dinâmica para pesquisa e prática. Conforme observado, tais tecnologias não apenas ampliam as possibilidades de representação, mas também reconfiguram as próprias formas de pensar e aprender matemática (Borba, 2012).

Essa reconfiguração mostra-se particularmente relevante para o pensamento proporcional complexo, em que representações dinâmicas e interativas podem facilitar compreensões que transcendem as limitações das abordagens tradicionais.

A superação dos desafios epistemológicos do pensamento proporcional requer, portanto, uma abordagem multifacetada que articule contribuições históricas, culturais, neurocientíficas e tecnológicas.

É, também, necessária a aplicação de conceitos ou conteúdos a diferentes contextos, pois, quando os estudantes conseguem compreender bem um determinado conceito, eles conseguem aplicá-los em muitas outras situações, desenvolvendo habilidades matemáticas a partir das experiências reais e significativas. Essa ampliação de contextos de aplicação abre caminho para uma compreensão mais integrada do conhecimento, em que os conceitos deixam de ser tratados de forma isolada.

Somente por meio dessa integração interdisciplinar será possível desenvolver as compreensões conceituais robustas necessárias para navegar pelos complexos desafios matemáticos do século XXI, nos quais relações não lineares se revelam centrais para a compreensão de fenômenos complexos em ciência, tecnologia e sociedade.

Tecnologias digitais e a reconfiguração do ensino de relações área-volume

As tecnologias digitais vêm reconfigurando radicalmente as possibilidades para o ensino e a aprendizagem das relações área-volume,

sinalizando uma transformação paradigmática na Educação Matemática contemporânea. Ambientes de geometria dinâmica (tais como: GeoGebra 3D, Cabri-géomètre e Cinderella) permitem explorações matemáticas que transcendem as limitações das representações estáticas tradicionais.

A manipulação direta de objetos tridimensionais nesses ambientes facilita a percepção de invariantes geométricos e covariâncias dimensionais, promovendo compreensões conceitualmente mais robustas das relações não lineares entre medidas lineares, área e volume (Drijvers & Sinclair, 2024). Essa capacidade de visualização dinâmica é crucial para superar a “ilusão da proporcionalidade linear” que afeta persistentemente a compreensão dessas relações complexas.

No contexto brasileiro, pesquisas corroboram esses achados. Bairral e Barreira (2017) observaram que a exploração ativa de sólidos geométricos em ambiente digital permitiu aos estudantes identificar padrões e regularidades que frequentemente passam despercebidos em abordagens expositivas tradicionais. A capacidade de variar parâmetros em tempo real e observar imediatamente os efeitos sobre área e volume contribui significativamente para o desenvolvimento de intuições matemáticas mais precisas e para a superação de concepções alternativas baseadas em raciocínios lineares inadequados.

Para além da geometria dinâmica, as fronteiras da realidade aumentada e virtual apresentam possibilidades ainda mais inovadoras. Ambientes imersivos permitem experiências de aprendizagem que conectam percepções sensoriais com abstrações matemáticas, facilitando substancialmente a compreensão de relações espaciais elaboradas (Mijač et al., 2024).

Paralelamente, a IA educacional introduz uma dimensão adicional de transformação por meio da personalização do processo de aprendizagem. Sistemas de tutoria inteligente demonstram capacidade de detectar padrões de erro e oferecer *feedback* contextualizado que confronta concepções alternativas de maneira individualizada (Leung et al., 2024).

Esses sistemas podem ajudar as pessoas a aprender melhor e a atingir seus objetivos de aprendizagem, pois fornecem ferramentas inteligentes capazes de apoiar diferentes estilos e necessidades educacionais (Santos et al., 2024).

Ao mesmo tempo, tais tecnologias abrem caminho para a criação de novos modos de ensino e aprendizagem, bem como para a inovação nos métodos de avaliação e de gestão educacional. Para que esse potencial se concretize, os educadores precisam transformar ativamente sua maneira de pensar, explorando novas formas de articulação entre IA e práticas pedagógicas, de modo a promover uma integração profunda entre tecnologia e ensino e impulsionar o desenvolvimento inovador da educação.

Pesquisas recentes em aprendizagem de máquina aplicada à Educação Matemática, incluindo estudos multicêntricos com participação brasileira, indicam que sistemas baseados em IA podem identificar com alta precisão estudantes que tendem a aplicar raciocínios lineares inadequados a problemas de volume, de forma a possibilitar intervenções precoces e direcionadas.

Contudo, a efetiva integração dessas tecnologias demanda transformações profundas na formação docente e no desenvolvimento curricular. Borba & Villarreal (2005) argumentam que as tecnologias digitais não apenas ampliam as possibilidades de representação, mas também reconfiguram fundamentalmente as próprias formas de pensar e aprender matemática. Essa reconfiguração exige que os professores desenvolvam não só competências técnicas, mas principalmente compreensões epistemológicas sobre o modo como as tecnologias medeiam a construção do conhecimento matemático.

Programas de formação continuada que integram tecnologias digitais têm demonstrado resultados promissores no contexto nacional, capacitando professores tanto no uso instrumental dessas ferramentas quanto no desenvolvimento de compreensões mais profundas sobre os desafios epistemológicos do pensamento proporcional.

Nesse processo, torna-se fundamental promover espaços em que docentes e formadores possam construir em conjunto o conhecimento tecnológico, enfatizando a necessidade de experimentação lúdica com os recursos e de análise crítica sobre suas potencialidades pedagógicas.

Além disso, a United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization – Unesco – (2023) tem destacado a importância de avaliar cuidadosamente as ferramentas de IA antes de sua implementação, uma vez que tais avaliações são decisivas para assegurar que esses sistemas não comprometam a integridade dos processos avaliativos nem levem preocupações éticas relacionadas à transparência, ao viés ou à proteção de dados.

Dessa forma, a integração entre formação continuada, exploração prática e avaliação criteriosa das tecnologias digitais contribui para uma adoção mais responsável, reflexiva e alinhada às necessidades reais da educação básica. Essa base sólida de implementação é crucial para enfrentar os próximos desafios e oportunidades que se anunciam no horizonte educacional.

Perspectivando o futuro, o ensino de relações área-volume à luz das tecnologias digitais apresenta oportunidades extraordinárias acompanhadas de desafios significativos. A integração de *big data*, *learning analytics*, *intelligent tutoring systems* e *learning design* oferece possibilidades inéditas para compreender trajetórias de aprendizagem e otimizar intervenções educacionais.

No entanto, como alerta Selwyn (2013), é crucial que o desenvolvimento tecnológico seja guiado por considerações pedagógicas e éticas, e não meramente por imperativos técnicos. Os desafios de equidade no acesso às tecnologias demandam atenção especial no contexto brasileiro, em que disparidades regionais e socioeconômicas podem limitar o potencial democratizador dessas inovações.

Pesquisas em Educação Matemática Crítica têm destacado a importância de garantir que as inovações tecnológicas não exacerbem desigualdades educacionais existentes, defendendo que a democratização

do acesso deve ser acompanhada de esforços sistemáticos para capacitar educadores e estudantes no uso crítico e criativo dessas ferramentas.

O potencial transformador das tecnologias digitais para o ensino de relações área-volume reside, portanto, não apenas em suas capacidades técnicas, mas também na maneira como medeiam novas formas de engajamento com ideias matemáticas fundamentais.

Quando adequadamente integradas a abordagens pedagógicas informadas por pesquisas robustas e orientadas por compromissos com a equidade educacional, essas tecnologias podem contribuir decisivamente para a superação de obstáculos epistemológicos históricos e para o desenvolvimento de compreensões matemáticas mais profundas e significativas.

O FEI: princípios e componentes

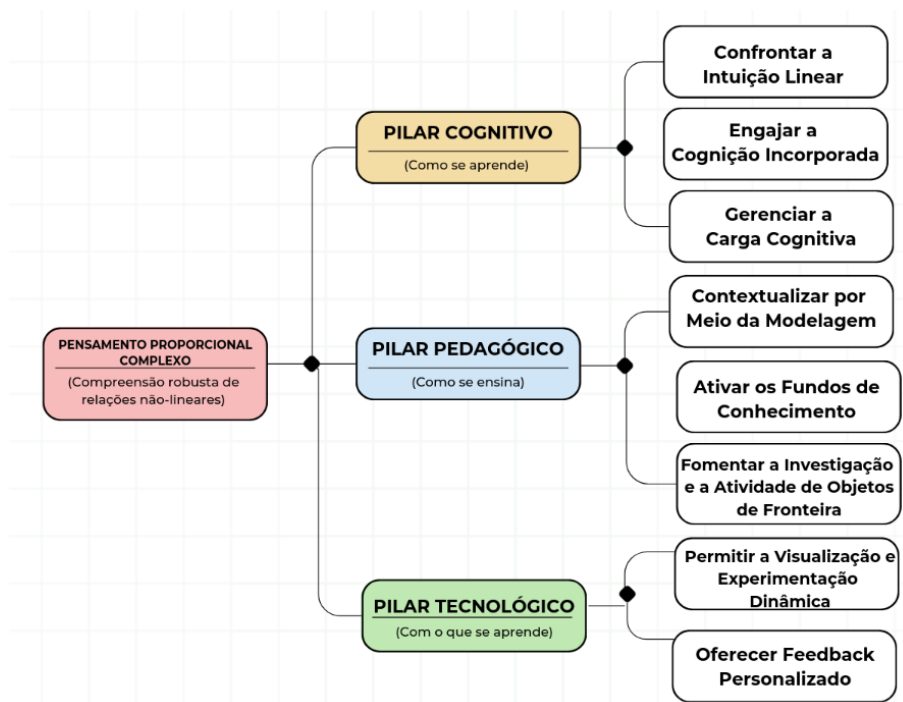
A análise crítica desenvolvida nas seções anteriores evidencia que a superação da ilusão da proporcionalidade linear demanda uma abordagem sistêmica e articulada que transcende intervenções pontuais. Em resposta a essa necessidade, propõe-se um FEI para o ensino de relações área-volume.

O FEI é concebido não como uma sequência rígida de atividades, mas como um ecossistema dinâmico de princípios interconectados, fundamentado na premissa de que a compreensão profunda emerge da sinergia entre a cognição, a pedagogia e a tecnologia.

O FEI organiza-se em três pilares fundamentais: cognitivo, pedagógico e tecnológico, que, atuando de forma coordenada, visam promover uma compreensão robusta e multidimensional (ver Figura 2).

Figura 2

Framework Epistemológico Integrador (FEI)



Cada pilar contribui com uma dimensão essencial para essa compreensão, conforme explicitado na Figura 2 e descrito nos próximos parágrafos.

O pilar cognitivo, base do processamento mental, fornece os fundamentos sobre o modo como a mente aprende essas relações complexas. Ele reconhece e enfrenta diretamente os obstáculos inatos ao pensamento humano, como a tendência à linearização (Dehaene, 2020) e as limitações da memória de trabalho (Sweller, 2020). Atua como o alicerce. Sem uma estratégia que conscientemente confronte a intuição linear, gerencie a carga cognitiva e engaje o corpo no aprendizado (cognição incorporada), qualquer abordagem pedagógica ou tecnológica pode falhar em reestruturar as concepções profundamente arraigadas dos estudantes.

O pilar pedagógico, ponte para a significação e a crítica, traduz os fundamentos cognitivos em ações de ensino intencionais. É responsável por contextualizar o conhecimento, tornando-o significativo por meio da modelagem de problemas reais, da valorização dos saberes comunitários (fundos de conhecimento) e do estímulo à investigação. Atua como o motor

de significado. É esse pilar que responde à pergunta “por que aprender isto?”, conectando as relações área-volume a questões de justiça social, ambiental e tecnológica (Gutstein, 2006). Ele garante que o desenvolvimento do pensamento complexo não seja um fim em si mesmo, mas uma ferramenta para a leitura crítica do mundo.

O pilar tecnológico posiciona-se como um mediador essencial da aprendizagem. Por meio de tecnologias digitais, como ambientes de geometria dinâmica e sistemas de tutoria inteligente, ele materializa abstrações, viabilizando a visualização e experimentação de relações que não podem ser integralmente compreendidas com recursos estáticos. Atua como catalisador e facilitador. Ele opera os princípios dos outros dois pilares: materializa os conflitos cognitivos (suportando o pilar cognitivo) e viabiliza as investigações e modelagens em contextos complexos (operacionalizando o pilar pedagógico).

O pilar cognitivo: fundamentos da aprendizagem multidimensional

Este pilar fundamenta-se nas descobertas das ciências cognitivas sobre o modo como a mente humana processa, compreende e internaliza relações matemáticas complexas e não lineares. Seu objetivo é fornecer a base científica para o *design* de experiências de aprendizagem que sejam compatíveis com a arquitetura do cérebro, facilitando a superação de obstáculos inatos.

O pilar cognitivo está composto por três princípios: princípio 1 - confrontar a intuição linear; princípio 2 - engajar a cognição incorporada; e princípio 3 - gerenciar a carga cognitiva.

O princípio 1, confrontar a intuição linear, reconhece a predisposição neurocognitiva do cérebro para simplificar relações complexas, tratando-as como lineares (Dehaene, 2020). A estratégia pedagógica decorrente é a criação intencional de conflitos cognitivos produtivos, situações em que a previsão linear do estudante é desafiada por evidências empíricas ou visuais que comprovam a natureza quadrática ou cúbica da relação.

Como exemplo, tem-se o contexto da seguinte situação: após os estudantes preverem, de forma linear, que o volume de um cubo dobrará se sua aresta dobrar, propõe-se a construção do cubo com material concreto (como cubos de encaixe) para que constatem empiricamente que o volume octuplica. A dissonância entre a previsão e a evidência concreta cria uma situação didática fértil (Brousseau, 2002).

Ou ainda, em um problema sobre o aumento da área de um círculo, os estudantes podem prever que dobrar o raio dobra a área. A utilização de um ambiente de geometria dinâmica para visualizar a área crescendo por um fator de quatro fornece um *feedback* visual imediato que confronta a intuição linear inadequada.

O princípio 2, engajar a cognição incorporada, aproveita a conexão profunda entre corpo e mente, posicionando a interação sensório-motora como um recurso fundamental para a abstração (Abrahamson et al., 2023). Atividades que envolvem gestos, manipulação de objetos e ações no espaço físico são projetadas para construir uma base corpórea que facilita a compreensão de conceitos matemáticos abstratos.

Para compreender a relação entre a altura de um cilindro e seu volume, os estudantes podem usar recipientes cilíndricos transparentes com a mesma base e alturas diferentes. Ao encher esses recipientes com água ou areia, a relação linear direta entre altura e volume torna-se uma experiência física e visual, contrastando com a relação cúbica envolvida na variação do raio.

Ou, também, o gesto de “desenrolar” a superfície lateral de um cilindro para formar um retângulo é uma ação corporal que ajuda a compreender a fórmula da área lateral (comprimento da circunferência x altura), conectando uma representação tridimensional com sua planificação bidimensional.

O princípio 3, gerenciar a carga cognitiva, considera as limitações da memória de trabalho no processamento de informações multidimensionais (Sweller, 2020). Este princípio orienta a segmentação instrucional, apresentando inicialmente problemas que variam um único parâmetro para,

gradativamente, introduzir a variação simultânea de múltiplas dimensões, evitando assim a sobrecarga e facilitando a construção sólida do conhecimento.

Ilustrativamente, no estudo de prismas, introduzem-se problemas que variam apenas a altura, mantendo a área da base constante. Uma vez consolidada a compreensão dessa relação linear, introduz-se a variação da área da base, mantendo a altura constante. Finalmente, problemas que envolvem a variação simultânea de ambos os parâmetros são apresentados.

Problemas tais como utilizar representações gráficas que isolem variáveis. Um gráfico que mostre o volume de diferentes cilindros em função do raio (com altura constante) evidencia a curva cúbica, enquanto um gráfico de volume em função da altura (com raio constante) evidencia uma reta, ajudando o estudante a discriminar a natureza de cada relação.

O pilar pedagógico: estratégias para a mediação do conhecimento

Este pilar traduz os fundamentos cognitivos em ações didáticas intencionais, criando ambientes de aprendizagem que são, simultaneamente, investigativos, significativos e socialmente relevantes. Ele é responsável por operacionalizar a teoria na prática educativa.

O pilar pedagógico está composto pelos princípios: princípio 4 - contextualizar por meio da modelagem e de questões críticas; princípio 5 - ativar os fundos de conhecimento; e princípio 6 - fomentar a investigação e a atividade de objetos de fronteira.

O princípio 4, contextualizar por meio da modelagem e de questões críticas, vincula o conteúdo matemático formal a fenômenos do mundo real e a questões socialmente relevantes, como justiça ambiental e sustentabilidade. Essa abordagem, alinhada à Educação Matemática Crítica, confere significado ao conhecimento e desenvolve a capacidade de os estudantes usarem a matemática para ler e interpretar criticamente a sua realidade (Gutstein, 2006; Skovsmose, 1994).

A título de exemplo, pode-se investigar a relação área-volume no contexto da eficiência energética de residências. Por que uma casa que apresenta um formato mais esférico (menor área superficial em relação ao volume) que outra com o mesmo volume tem menor custo de aquecimento? Essa questão conecta a matemática a problemas de sustentabilidade.

Ou, ainda, pode-se analisar criticamente a relação custo-benefício na escolha de embalagens de produtos. Uma lata cilíndrica “mais fina e alta” *versus* “mais baixa e larga” para o mesmo volume implica em diferentes quantidades de material (área superficial) e, portanto, diferentes impactos ambientais e custos. Os estudantes são desafiados a modelar matematicamente o problema para tomar uma decisão informada.

Uma confusão comum entre representação e modelagem do conhecimento e do raciocínio consiste em acreditar que explicações são inerentes a um determinado formalismo de representação e que sua relevância depende exclusivamente da capacidade expressiva desse formalismo.

No entanto, um formalismo limitado jamais permitirá explicar fenômenos que excedem sua expressividade. Por exemplo, um sistema descrito apenas por equações diferenciais lineares nunca conseguirá representar e, portanto, explicar o comportamento não linear e auto-oscilante de certos sistemas dinâmicos.

Da mesma forma, em Educação Matemática, se o professor utiliza apenas um formalismo baseado em proporcionalidade linear, esse formalismo não permitirá explicar fenômenos cuja estrutura é não proporcional, como o crescimento de área (que cresce com o quadrado da dimensão) ou de volume (que cresce com o cubo).

Assim, tentar explicar por que “dobrar o lado de um quadrado não dobra a área”, usando apenas raciocínio proporcional, levará inevitavelmente a uma explicação incompleta ou equivocada. Portanto, a escolha do formalismo, seja ele linear, geométrico, algébrico ou funcional, é decisiva para a construção de explicações compreensíveis e adequadas às tarefas e aos estilos de aprendizagem.

O princípio 5, ativar os fundos de conhecimento, estabelece pontes entre o conhecimento escolar e os saberes matemáticos já presentes nas práticas cotidianas, culturais e comunitárias dos estudantes. Conecta o conhecimento formal aos saberes matemáticos presentes nas comunidades dos estudantes (González et al., 2005), promovendo uma Educação Matemática culturalmente relevante e significativa. Ao valorizar e incorporar esses saberes, a aprendizagem torna-se culturalmente relevante, parte de uma herança coletiva e significativamente ancorada na experiência vivida.

Cita-se, como exemplo, em uma comunidade com tradição em cerâmica, explorar as relações de volume e área superficial na modelagem de potes de barro. O artesão experiente sabe, intuitivamente, que um pote mais largo e baixo aquece mais rapidamente no forno (maior área de contato) do que um pote alto e estreito de mesma capacidade. A aula pode partir desse conhecimento prático para formalizar as relações matemáticas subjacentes.

De forma semelhante, em comunidades agrícolas, o cálculo do volume de silos ou de caixas d'água cilíndricas é uma prática comum. A atividade pedagógica pode partir desses saberes para investigar, por exemplo, quantas caixas d'água de um determinado tamanho são equivalentes a um silo de maior capacidade, explorando a escala cúbica.

O princípio 6, fomentar a investigação e a atividade de objetos de fronteira, cria espaços de aprendizagem baseados na investigação, em que os estudantes são desafiados a testar hipóteses, explorar padrões e generalizar relações (Akkerman & Bakker, 2020). Para isso, promove o trânsito entre diferentes registros de representação (físico, gráfico, simbólico, digital) por meio de objetos de fronteira ou artefatos, como modelos físicos e *softwares*, que facilitam a comunicação e a construção de significado entre diferentes perspectivas.

Como exemplo, podem-se fornecer um “*kit* de investigação” com modelos físicos (cubos de montar), planilhas digitais (para registrar medidas e gerar gráficos) e *software* de geometria dinâmica. O estudante

é desafiado a prever, testar e generalizar a relação entre a aresta e o volume do cubo, usando esses diferentes objetos para construir uma compreensão multimodal.

E, também, um mesmo problema de otimização de embalagens pode ser abordado por meio de maquetes físicas (objeto de fronteira tangível), simulações no GeoGebra (objeto de fronteira digital) e equações algébricas (objeto de fronteira simbólico). A tradução entre esses registros é onde a compreensão conceitual se consolida.

O pilar tecnológico: mediação para a compreensão profunda

Este pilar posiciona a tecnologia digital não como um fim em si mesma, mas como uma ferramenta mediadora essencial para operacionalizar os princípios cognitivos e pedagógicos (Borba & Villarreal, 2005).

O pilar tecnológico está composto pelos princípios: princípio 7 - permitir a visualização e experimentação dinâmica; e princípio 8 - oferecer *feedback* personalizado.

O princípio 7, permitir a visualização e experimentação dinâmica, utiliza ambientes digitais, como *softwares* de geometria dinâmica, para tornar visíveis e manipuláveis as covariâncias dimensionais (Bairral & Barreira, 2017). Esses ambientes permitem que os estudantes variem parâmetros em tempo real e observem imediatamente os efeitos sobre área e volume, transformando relações estáticas em experiências interativas que desafiam a intuição e revelam padrões.

Uma possibilidade é quando um aluno pode manipular um cursor de deslize (*slider*) para alterar o raio da base de um cilindro e observar em tempo real o modo como a altura se ajusta automaticamente para manter o volume constante. Essa manipulação direta torna a relação de dependência inversa entre as variáveis (para volume constante) imediatamente tangível.

E, ainda, em um ambiente de realidade aumentada, os estudantes podem “esticar” um cubo virtual com as mãos, observando o modo como o

indicador de volume cresce de forma não linear (cúbica) em relação ao crescimento linear da aresta. Essa experiência imersiva cria uma ligação poderosa entre a ação corporal e a abstração matemática.

O princípio 8, oferecer *feedback* personalizado, aproveita o potencial de sistemas de tutoria inteligente e ambientes de aprendizagem adaptativa para identificar padrões de erro específicos, como a aplicação de raciocínio linear a situações não lineares.

O princípio consiste em utilizar esses dados para fornecer *feedback* contextualizado e intervenções personalizadas que confrontam diretamente as concepções alternativas de cada estudante, guiando-o na reestruturação do seu pensamento. Aproveita o potencial da IA Educacional (Holmes et al., 2019) para identificar e intervir em concepções alternativas específicas, em tempo real.

Ilustra-se com um sistema de tutoria inteligente que pode detectar quando um educando, sistematicamente, multiplica por dois o volume de uma esfera ao dobrar seu raio. O sistema pode, então, apresentar automaticamente uma animação que decompõe a esfera em pirâmides infinitesimais, ilustrando visualmente a natureza cúbica da relação.

Outro contexto é: em uma plataforma adaptativa, se um estudante comete um erro típico de linearização ao calcular o volume de uma pirâmide, o sistema pode oferecer um problema de *scaffolding* (suporte pedagógico ou suporte de aprendizagem), como o de preencher uma pirâmide com água e verter seu conteúdo três vezes em um prisma de mesma base e altura, para que ele descubra a relação $V_{\text{pirâmide}} = (1/3) V_{\text{prisma}}$.

Síntese operacional: o *framework* em ação

A força do FEI reside na interação entre seus pilares, que não atuam de forma isolada (Almeida & Kowalek, 2024). A Figura 3 ilustra de modo dinâmico e integrado o modo como o FEI pode ser operacionalizado em sala de aula, tomando como exemplo um projeto de otimização de embalagens. Esse caso demonstra a maneira como os três pilares do *framework*

(cognitivo, pedagógico e tecnológico) atuam de forma sinérgica e não linear, promovendo uma aprendizagem profunda e contextualizada.

Inicialmente, o pilar pedagógico é ativado pelo princípio 4 (contextualização por meio da modelagem e questões críticas), ao situar o problema no contexto real da sustentabilidade e dos custos de produção. Os estudantes são desafiados a comparar latas cilíndricas “altas e finas” com “baixas e largas”, considerando volume fixo e implicações materiais e ambientais.

Ao utilizarem planilhas e *softwares* de geometria dinâmica para testar diferentes dimensões, os aprendizes engajam o pilar tecnológico, sob o princípio 7 (visualização e experimentação dinâmica), permitindo manipular variáveis e observar em tempo real as relações área-volume.

Concomitantemente, surge o conflito cognitivo entre a intuição linear inicial (“uma embalagem maior deve custar proporcionalmente mais”) e os dados gerados pela modelagem. Esse momento crucial ativa o pilar cognitivo por meio do princípio 1 (confrontar a intuição linear), criando uma dissonância produtiva que impulsiona a reestruturação conceitual.

A discussão sobre impacto ambiental reforça novamente o pilar pedagógico, enquanto a transição entre representações físicas, planilhas e modelagem no GeoGebra caracteriza uma atividade de objetos de fronteira (princípio 6), facilitando a tradução entre registros e a construção de uma compreensão multimodal. A Figura 3 mostra o FEI Projeto de Otimização de Embalagens.

Figura 3

FEI Projeto de Otimização de Embalagens



Dessa forma, evidencia-se sua natureza interativa e recursiva: os pilares não se sucedem de forma linear, mas se retroalimentam, criando um ciclo contínuo de investigação, reflexão e crítica. Esse projeto, como exemplo didático, concretiza o deslocamento do ensino baseado em memorização de fórmulas para uma aprendizagem multidimensional, capacitando os estudantes a aplicarem pensamento proporcional complexo em problemas reais e socialmente relevantes.

Considerações finais: contribuições e horizontes

Esta pesquisa partiu de um desafio epistemológico historicamente consolidado, a “ilusão da proporcionalidade linear”, e culminou na proposição de um FEI para o ensino de relações área-volume.

A principal contribuição deste artigo reside não na descoberta de um novo obstáculo de aprendizagem, mas na sistematização de um caminho teórico-metodológico para sua superação. O FEI oferece uma estrutura coerente que articula, de forma inovadora, domínios tradicionalmente

fragmentados: as bases neurocognitivas da aprendizagem, as estratégias pedagógicas críticas e investigativas e o papel mediador das tecnologias digitais.

O *framework* demonstra que a superação do pensamento linear inadequado é mais do que uma aquisição conceitual; é uma reorganização epistemológica do olhar do estudante sobre o mundo quantitativo.

Ao integrar a confrontação de intuições com a contextualização socialmente relevante e a mediação tecnológica inteligente, a proposta transcende o âmbito específico das relações área-volume.

Tem-se um protótipo teórico para o ensino de outros conceitos matemáticos complexos e contraintuitivos, nos quais a multidimensionalidade e a não linearidade são centrais.

O FEI, em sua forma atual, é uma proposta robustamente fundamentada, mas que carece de validação empírica sistemática. Essa limitação abre um leque promissor de investigações futuras nas áreas de Estudos de Implementação e Formação Docente, em diferentes contextos culturais; e na exploração de novas estratégias tecnológicas, a saber:

1. Estudos de implementação (*Design research*): pesquisas baseadas em *design* são o próximo passo natural. Ciclos de elaboração, implementação e análise de sequências de ensino baseadas no FEI em salas de aula reais permitiriam refiná-la, identificando seus pontos de sucesso e suas dificuldades operacionais e gerando princípios de *design* específicos para o contexto da educação básica.
2. Investigações sobre a formação docente: é crucial investigar o modo como os professores se apropriam desse *framework*. Que conhecimentos (conteúdo, pedagogia, tecnologia) e que crenças epistemológicas são necessários para que um docente consiga operacionalizar o FEI? Estudos que envolvam a formação inicial e continuada de professores, utilizando o *framework* como ferramenta de planejamento e análise, são campo de pesquisa.
3. Pesquisas em diferentes contextos culturais: a proposta dos fundos de conhecimento, integrada ao FEI, demanda investigações locais e

específicas. Como o *framework* pode ser adaptado e enriquecido a partir dos saberes matemáticos de comunidades ribeirinhas, indígenas, urbanas ou rurais? Pesquisas de cunho etnográfico e participativo podem responder a essa questão, tornando a proposta ainda mais inclusiva e relevante.

4. Avaliação de impacto de longo prazo: estudos longitudinais que acompanhem estudantes submetidos a intervenções baseadas no FEI poderiam avaliar a permanência e a transferibilidade do pensamento proporcional complexo para outros domínios da matemática e das ciências, investigando se a superação da ilusão linear em um contexto específico se generaliza para outros.
5. Exploração de novas fronteiras tecnológicas: o rápido avanço da inteligência artificial generativa e dos metaversos educacionais apresenta novas questões. Como essas tecnologias podem ser aproveitadas (ou capitalizadas) para criar ambientes de modelagem e conflito cognitivo ainda mais imersivos e personalizados, alinhados aos princípios do FEI?

Embora o FEI ofereça um caminho teórico robusto, sua implementação em larga escala enfrenta desafios como a desigualdade de acesso a tecnologias digitais, a formação inicial e continuada de professores e as restrições de tempo e recursos nas escolas públicas brasileiras. Futuras pesquisas devem considerar esses fatores para adaptar o *framework* a contextos reais.

Em síntese, este artigo não oferece uma solução definitiva, mas propõe possibilidades de pesquisa acadêmica. O FEI convida a comunidade de Educação Matemática a um esforço coletivo de investigação, desenvolvimento e crítica. O desafio de formar cidadãos capazes de pensar de forma multidimensional e crítica em um mundo complexo é monumental. Por meio de propostas teóricas ousadas e sua subsequente submissão ao crivo da prática, dá-se um passo decisivo para enfrentá-lo.

Referências

- Abrahamson, D., Tancredi, S., Chen, R. S. Y., Flood, V. J., & Dutton, E. (2023). Embodied design: A framework for teaching and learning mathematics. In B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (pp. 1-34). https://link.springer.com/rwe/10.1007/978-3-030-95060-6_8-1
- Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2020). Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research*, 81(2), 132-169. <https://doi.org/10.3102/0034654311404435>
- Almeida, L. M. W. de, & Kowalek, R. M. (2024). O processo de validação em atividades de modelagem matemática: em busca de um framework. *Educação Matemática Pesquisa*, 26(1), 313-338. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i1p313-338>
- Andrade, E. A. de O., Silva, I. P. da, & Pina, M. O. M. (2023). Digital Technologies in Mathematics Education. *Journal of Interdisciplinary Debates*, 4(1), 97-122. <https://doi.org/10.51249/jid.v4i01.1255>
- Artigue, M., Almouloud, S. A., Santos, M. A. dos, & Pereira, S. F. M. (2024). Epistemologia e didática. *Educação Matemática Pesquisa*, 26(4), 353-388. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i4p353-388>
- Atkinson, R. C., & Shiffrin, R. M. (1968). Human memory: A proposed system and its control processes. In K. W. Spence & J. T. Spence, *The psychology of learning and motivation: II* (pp. 89-195). Academic Press. [https://doi.org/10.1016/S0079-7421\(08\)60422-3](https://doi.org/10.1016/S0079-7421(08)60422-3)
- Baccaglioni-Frank, A., Carotenuto, G., Funghi, S., Lisarelli, G., & Miragliotta, E. (2024). Digital artifacts in Mathematics Education: How can we study the learning processes they promote? *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*. <https://doi.org/10.1007/s40574-024-00439-2>
- Bairral, M. A., & Barreira, J. C. F. (2017). Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 6(2), 46-64. <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35378>
- Bakker, A. (2020). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. Routledge. https://www.researchgate.net/publication/323144745_Design_Research_in_Education_A_Practical_Guide_for_Early_Career_Researcher_S
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. Contexto. https://www.researchgate.net/publication/256007243_Ensino_-_aprendizagem_com_Modelagem_matematica

- Borba, M. C. (2012). Humans-with-media and mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 44, 801–814.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-012-0436-8>
- Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. Springer.
<https://link.springer.com/book/10.1007/b105001>
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
<https://link.springer.com/book/10.1007/0-306-47211-2>
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2021). Conducting design research to investigate and support mathematics students' and teachers' learning. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 234–256). National Council of Teachers of Mathematics. [https://www.nctm.org/Store/Products/Compendium-for-Research-in-Mathematics-Education-eChapter-9-Conducting-Design-Studies-to-Investigate-and-Support-Mathematics-Students--and-Teachers--Learning-\(Download\)/](https://www.nctm.org/Store/Products/Compendium-for-Research-in-Mathematics-Education-eChapter-9-Conducting-Design-Studies-to-Investigate-and-Support-Mathematics-Students--and-Teachers--Learning-(Download)/)
- Correia, N. D. da S., & Santos, V. de O. (2021). A cultura afro-brasileira em trabalhos de Etnomatemática: uma revisão sistemática de pesquisas acadêmicas nacionais. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(1), 655682. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p655-682>
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311–334.
<https://doi.org/10.1023/A:1021205413749>
- Dehaene, S. (2020). *How we learn: Why brains learn better than any machine... for now*. Viking.
<https://www.learningandthebrain.com/blog/how-we-learn-why-brains-learn-better-than-any-machine-for-now-by-stanislas-dehaene/>
- Drijvers, P., & Sinclair, N. (2024). The role of digital technologies in mathematics education: purposes and perspectives. *ZDM Mathematics Education*, 56, 239–248.
<https://doi.org/10.1007/s11858-023-01535-x>
- González, N., Moll, L. C., & Amanti, C. (2005). *Funds of knowledge: Theorizing practices in households, communities, and classrooms*. Routledge. <https://www.routledge.com/Funds-of-Knowledge-Theorizing-Practices-in-Households-Communities-and-Classrooms/Gonzalez-Moll-Amanti/p/book/9780805849189>
- Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. Routledge.
https://www.researchgate.net/publication/317953691_Reading_and

[writing the world with mathematics toward a pedagogy for social justice](#)

- Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019). *Artificial intelligence in education: Promises and implications for teaching and learning*. Center for Curriculum Redesign.
https://www.researchgate.net/publication/332180327_Artificial_Intelligence_in_Education_Promise_and_Implications_for_Teaching_and_Learning
- Hoyles, C., & Noss, R. (2009). The technological mediation of mathematics and its learning. *Human Development*, 52(2), 119-147.
<https://doi.org/10.1159/000202730>
- Kripka, R. M. L., & Ribeiro, A. J. (2025). Os professores e as pesquisas da própria prática: uma revisão sistemática de literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, 27(1), 186-216.
<https://doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i1p186-216>
- Leung, A., Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A., & Miragliotta, E. (2024). Enhancing Geometric Skills with Digital Technology: The Case of Dynamic Geometry. In B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (pp. 409-437). https://doi.org/10.1007/978-3-031-45667-1_15
- Li, D., Fan, X., & Meng, L. (2024). Development and validation of a higher-order thinking skills (HOTS) scale for major students in the interior design discipline for blended learning. *Scientific Reports*, 14, 15756. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-70908-3>
- Lobato, J., & Ellis, A. B. (2010). Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8. In National Council of Teachers of Mathematics, *The International Handbook of Mathematics Education* (pp. 345-367). Springer.
https://www.researchgate.net/publication/317953682_Developing_essential_understanding_of_ratios_proportions_and_proportional_reasoning_for_teaching_mathematics_in_grades_6-8
- Melo Vieira, M. S., & Santos, M. C. dos. (2019). Proporcionalidade: um olhar a partir da TAD. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(5).
<https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p514-528>
- Mijač, T., Jadrić, M., & Ćukušić, M. (2024). Measuring the success of information systems in higher education - a systematic review. *Education and Information Technologies*, 29, 18323-18360.
<https://doi.org/10.1007/s10639-024-12564-8>
- Netz, R. (2003). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge University Press.
<https://classics.stanford.edu/publications/shaping-deduction-greek-mathematics>

- Organisation for Economic Co-Operation and Development – OECD. (2018). *PISA 2018 results: What students know and can do*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>
- Organisation for Economic Co-Operation and Development – OECD. (2023). *PISA 2023 results: The state of learning and equity in education*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Oughton, H. (2016). Funds of knowledge - a conceptual critique. *Studies in the Education of Adults*, 42(1), 63–78. <https://doi.org/10.1080/02660830.2010.11661589>
- Ponte, J. P. da, & Chapman, O. (2022). Mathematics teacher knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(2), 145–167. https://www.researchgate.net/profile/Joao-Ponte-2/publication/260987281_Mathematics_teachers'_knowledge_and_practices/links/0deec532ec2c1ac105000000/Mathematics-Teachers-Knowledge-and-Practices.pdf
- Santos, S. M. A. V., Medeiros, J. M., & Meroto, M. B. das N. (Orgs.). (2024). Práticas pedagógicas inclusivas e tecnologias: o caminho para o processo de aprendizagem. *Contemporânea*. <https://revistacontemporanea.com/e-books/praticas-pedagogicas-inclusivas-e-tecnologias-o-caminho-para-o-processo-de-aprendizagem/>
- Selwyn, N. (2013). Digital technology and the contemporary university: on some research issues. *Distances et Médiations des Savoirs*, 4. <https://doi.org/10.4000/dms.369>
- Sherin, M., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (2011). *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes*. Taylor & Francis. https://www.researchgate.net/publication/268171862_Mathematics_teacher_noticing_Seeing_through_teachers'_eyes
- Silva, M. R. da, & Pazuch, V. (2024). Tecnologias digitais no ensino de geometria: uma revisão sistemática da literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, 26(2), 31–55. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i2p031-055>
- Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environments. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6(2), 123–145. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0883035511001285?via%3Dihub>
- Skovsmose, O. (1994). Towards a philosophy of critical mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 35–57. <https://doi.org/10.1007/BF01284527>
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics*. Teachers College Press.

https://www.researchgate.net/publication/31735228_How_Students_Mis-Understand_Science_and_Mathematics_Intuitive_Rules

Sweller, J. (2020). Cognitive load theory and educational technology. *Educational Technology Research and Development*, 68(1), 1–16.
<https://doi.org/10.1007/s11423-019-09701-3>

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization – Unesco. (2023). *Guidance for generative AI in education and research*. Unesco Publishing.
<https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000386693>