ATIVIDADES LÚDICAS COMO UM CAMINHO DIDÁTICO APROPRIADO PARA INTRODUZIR CONCEITOS ASSOCIADOS AO NÚMERO PRIMO

Ludic activities as a didactic suitable way to introduce concepts associated with the prime number

GABRIELA SANTOS BARBOSA[1]

SANDRA MARIA PINTO MAGINA[2]

Resumo

Este texto objetiva apresentar e discutir as estratégias empregadas por 22 estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da zona oeste da cidade do Rio de Janeiro, ao participar de uma intervenção de ensino baseada em atividades lúdicas *para a introdução do conceito associados aos números primos. Trata-se de um estudo analítico, desenvolvido a partir das ideias teóricas de Vergnaud. A análise permitiu reconhecer que as atividades propostos na intervenção, bem como as representações favorecidas, criaram condições para que os alunos se apropriassem de esquemas referentes os conceitos de múltiplo, divisor, compostos e, onde desejávamos chegar, números primos.*
Palavras-chave*:* atividades lúdicas*; números primos; teoria dos campos conceituais.*

Abstract

This paper aims to present and discuss the strategies employed by 22 6th grade students from a private school cited in the west zone of the Rio de Janeiro city, whio took part in an intervention teaching involving games, that aimed to introduce concepts related to prime number. It is an analytical study, developed under the Vergnaud's theoretical ideas. The analysis allowed to recognize that situations and games offered in the intervention, as well as representations, offered conditions for students to appropriated of those schema related to the concepts of multiple, divisor, composed numbers and, where we wanted to reach, prime numbers
Keywords*: ludic activities, prime numbers, theory of conceptual fields.*

Introdução

Os conceitos de múltiplo, fator, número primo e os critérios de divisibilidade integram a Teoria dos Números e esta, por sua vez, é abordada em estudos que privilegiam a Aritmética. Pesquisas em Educação Matemática (LINS e GIMENEZ, 1997; CAMPBEL, 2002; COELHO, MACHADO, MARANHÃO, 2003; BARBOSA, 2008, apenas para citar algumas) sinalizam a existência de problemas no ensino e na

[1] UERJ/FEBF – gabrielasb80@hotmail.com
[2] PUC-SP – sandra@pucsp.br

aprendizagem da Aritmética. Nessa direção, Lins e Gimenez (1997) afirmam que muitas possibilidades de abordagem dos conceitos relacionados à Aritmética são reduzidas ao ensino de algoritmos.

A importância do tema levou Campbell e Zazkis (2002) a organizar uma obra contendo 11 pesquisas que abordaram a Teoria dos Números. Interessa referir aqui os estudos de Campbell (2002), Brown Thomas e Tolias (2002) e Teppo (2002), porque todos tomaram a estrutura multiplicativa e a decomposição de números em fatores primos, ou seja, nosso objeto matemático.

No Brasil temos os estudos de Coelho, Machado e Maranhão (2003, 2005), de Resende (2007), e de Barbosa (2008), entre outros, voltados para a investigação do tema. Assim, Coelho et al (2003) fizeram uma análise de propostas curriculares nacionais, identificando descontinuidades entre o ensino da aritmética na educação básica e nos cursos superiores de formação de professors, salientando a necessidade do ensino da Teoria Elementar dos Números para esses últimos. Vale destacar que tal teoria abarca uma série de conceitos aritméticos, entre eles, o número primo.

Dois ano mais tarde Coelho et al (2005) investigam a compreensão do teorema fundamental da aritimética (TFA) por professores de Matemática em curso de formação continuada e em alunos de 8ª série do Ensino Fundamental de São Paulo e chegaram a conclusão que a compreensão dos alunos era muita restrita, voltada basicamente para o algoritmo, enquanto que a dos professors, embora algumas fossem próximas das dos alunos, outras eram mais amplas. As autoras reforçam a necessidade de uma abordagem que priorize a formação de conceitos e não simplesmente a memorização de algoritmos, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental.

Já Resende (2007), ao analisar as propostas curriculares das disciplinas de doze universidades brasileiras que tratavam da Teoria dos Números nos cursos de licenciatura em Matemática, concluiu que tais instuições não tinham preocupação com a formação do professor da escola básica, que o ensino se enquadrava na tendência formalista clássica, tais como a ênfase na abordagem axiomática, nas demonstrações, na divisibilidade e nas propriedades dos naturais. Ela propõe que este quadro seja revisto.

Por fim, Barbosa (2008), fundamentada nos estudos citados acima, realizou uma intervenção de ensino com alunos do 6º do Ensino Fundamental tendo em vista a construção dos principais conceitos associados ao TFA e concluiu que um conceito não pode ser compreendido isoladamente. Ela propõe que uma intervenção de ensino voltada para a construção do conceito de primo deve ser iniciada com discussões envolvendo os conceitos de multiplo, fator, critérios de divisibilidade, entre outros.

Assim, entendemos que a compreensão dos conceitos associados ao TFA requer que alunos e professor envolvam-se em um processo matemático de grande extensão, incluindo organizar informação, fazer generalizações a partir de padrões numéricos, fazer e testar conjecturas e formar abstrações. Nesse sentido, com base na teoria dos campos conceituais (TCC), elaboramos uma intervenção de ensino, procurando privilegiar tais processos por meio de atividades lúdicas. A seguir, passamos à descrição e análise qualitativa das três primeiras atividades da intervenção. É importante esclarecer que os principais aspectos da TCC, que utilizamos em nosso estudo, serão apresentados e discutidos nas próximas seções, tendo como referência o desenvolvimento das atividades..

1. O Estudo

A TCC (Vergnaud, 1990) afirma ser necessário oferecer situações diversificadas para que o aluno identifique os invariantes de um determinado conceito. Além disso, um conceito não pode ser compreendido isoladamente. Ele está inserido num campo conceitual e sua compreensão está associada à compreensão dos outros conceitos que compõem o campo. Nesse sentido, tendo em vista o TFA e suas aplicações, é necessário que o aluno seja capaz de identificar se um número é, ou não, múltiplo/fator de outro, reconhecer as propriedades destas relações, listar o conjunto dos múltiplos/fatores de um número, diferenciar números primos dos compostos, reconhecer propriedades dos números primos, decompor em fatores primos e operar com números decompostos.

Tendo tais pressupostos em mente, o objetivo deste estudo é apresentar e discutir os esquemas empregadas por 22 estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da zona oeste da cidade do Rio de Janeiro, ao participar de uma intervenção de ensino baseada em atividades lúdicas para a introdução do conceito associados aos números primos.

Para atender tal propósito, elaboramos uma intervenção de ensino composta por sete atividades lúdicas, das quais três terão seus resultados analisados neste artigo. Cada atividade foi realizada em três aulas de 50 minutos, que aconteciam numa mesma semana. Elas foram postas em prática numa turma com 22 alunos do 6º ano. As aulas foram vídeografadas com as falas dos participantes (alunos, professora e pesquisadora), de forma a assegurar que todos fossem observados e ouvidos. A análise, de cunho qualitativo, baseou-se na teoria Vergnaud (1990), em que foi feita a identificação de esquemas, de teoremas-em ato e de conceitos-em ato dos estudantes observados.

2. As Atividades Lúdicas

As três atividades lúdicas foram: o jogo de restos, a construção de retângulos e a tábua de Pitágoras. Apresentaremos essas atividade já acompanhadas da análise dos dados dos estudantes obtidos ao interagir com cada uma delas.

2.1 Jogo de restos

Organização da classe : Os alunos trabalharam em dupla e, a cada cinco rodadas, uma partida era encerrada. A realização de quatro partidas foi suficiente para que se estabelecesse uma discussão informal entre nós e os alunos sobre os conceitos envolvidos no jogo.

Material utilizado: Um recipiente com feijões; um dado; um conjunto de pequenos: pratos; folhas de rascunho para cálculos; fichas, com cinco tabelas, para registro de cinco partidas (ver Figura 1)

Figura 1: Tabela de registro do jogo do resto

1ª partida				
Jogadas	Nºs de pratinhos	Nºs de grãos em cada prato	Restos	Nºs de total de grãos
1				
2				
3				
4				
5				

Desenvolvimento: Cada aluno pegava inicialmente um punhado de feijão, sem contá-los e, em seguida, jogava o dado. O número que aparecia na face superior do dado determinava o número de pratos que o aluno deveria pegar. Ele, então, repartia os feijões do punhado que pegou nos pratos, respeitando duas regras: (1) Todos os pratos devem ter o mesmo número de feijões, eles devem receber o maior número possível de feijões; (2) Ganhará a partida quem ficar com o maior resto, após esta repartição.

2.2 Análise da Atividade Lúdica: Jogo dos Restos

Até onde foi possível observar, a maioria dos 22 alunos se interessou pelo jogo de restos, não apresentando dificuldade em entender e aplicar corretamente suas regras.

Entretanto, nas primeiras rodadas, quando algum aluno tirava 1 no dado, isto é, deveria pegar apenas um prato, ele, ao invés de colocar todos os feijões nesse prato, colocava um único feijão, considerando que os outros grãos eram o resto. Transcrevemos abaixo uma parte de um debate de uma dupla mediada por nós, que ilustra um tipo de raciocínio prototípico da turma. Em todos os diálogos transcritos, utilizamos a letra "P" para as falas da pesquisadora, enquanto que as falas dos alunos, por questões éticas, foram representadas com a primeira letra de seus nomes.

P: MAS, POR QUE VOCÊS ESTÃO FAZENDO ASSIM?
L.A.: PORQUE NÃO TEM MAIS PRATINHOS PARA A GENTE FICAR DANDO OS FEIJÕES, ENTÃO, SÓ DOU UM PARA ESTE E PARO.
B.H.: É, NÃO DÁ PARA DISTRIBUIR. PARA DISTRIBUIR TEM QUE TER MAIS PRATOS.
P: QUANDO VOCÊ TEM UMA QUANTIDADE DE COISAS PARA DISTRIBUIR PARA UMA PESSOA, O QUE VOCÊ FAZ?
B.H. EU VOU DANDO UM PARA MIM E UM PARA ELA.
P: EU FALEI PARA REPARTIR ENTRE VOCÊ E A PESSOA?
B.H.: FOI, NÃO FOI?
P: VOU REPETIR. VOCÊ TEM UMA QUANTIDADE DE COISAS PARA DISTRIBUIR PARA UMA PESSOA, O QUE VOCÊ FAZ?
B.H.: AH! ENTÃO É TUDO PARA ELA.
P: AGORA PENSE NOS FEIJÕES E EM APENAS UM PRATINHO, O QUE VOCÊ DEVE FAZER?
B.H.: VOU COLOCAR TODOS NO PRATINHO.
P: VAI SOBRAR ALGUM?
B.H.: NÃO.

O debate sugere que esses dois alunos ainda apresentam dificuldades relacionadas a divisões com o divisor igual a um. Observando os demais alunos, identificamos outros oito alunos também tal dificuldade. O ato de distribuir objetos entre pessoas parece só fazer sentido para eles quando o número mínimo de pessoas envolvidas na distribuição é igual ou maior que 2. Assumimos a distinção entre as classes de situações sugeridas por Vergnaud (1990) e, desta forma, inferimos que as distribuições em que o divisor é um número inteiro maior ou igual a dois constituem uma classe de situações para as quais esses alunos dispõem em seu repertório competências necessárias a seu tratamento. As distribuições com divisor igual a 1 pertencem à classe de situações para as quais eles não dispõem de todas as competências necessárias, o que os obriga a um tempo de reflexão e exploração, de hesitações e de tentativas abortadas.

Identificamos, por meio de observação *in locu* e dos vídeos, que todas as   efetuavam as distribuições com divisor inteiro maior ou igual a 2 na seqüência de ações: colocar um feijão em cada pratinho, repetir esta ação enquanto fosse possível e, em seguida, contar quantos grãos foram colocados em um pratinho. Diante das distribuições com divisor 1, eles tentavam aplicar a mesma seqüência de ações, que se tornava sem sentido em razão da ausência de outros pratinhos. Isto os levava a interromper a distribuição depois de colocar apenas um grão no único prato. A respeito do emprego de ações e de esquemas de uma classe de situações em outra, Vergnaud afirma:

> A observação dos alunos em situação de resolução de problemas, a análise de suas hesitações e de seus erros, mostra que as condutas em situação aberta são igualmente estruturadas por esquemas. Estes provêm do vasto repertório dos esquemas disponíveis, que parecem ter um parentesco com a situação atualmente tratada. Simplesmente como o parentesco é parcial e eventualmente ilusório, os esquemas são apenas esboçados, e as tentativas frequentemente interrompidas antes de terem sido levadas a bom termo. (VERGNAUD, 1990, p. 168)

Antes de prosseguirmos com nossa análise, é importante esclarecer o significado de *esquema* para a TCC. Segundo Vergnaud (1990), esquema é a organização invariante do sujeito para lidar com determinada classe de situações. Esta organização, por sua vez, é constituída por uma gama de conhecimentos. Tais conhecimentos quando estão apenas implícitos na ação do sujeito, isto é, quando ele não é capaz de enunciá-lo formalmente, são chamados de *teoremas-em-ação* e *conceitos-em-ação*. Os teoremas-em-ação são relações matemáticas consideradas pelo aluno quando este escolhe uma operação, ou seqüência de operações, para resolver um problema. Os teoremas-em-ação não são teoremas no sentido convencional do termo, porque não se trata da apropriação explícita de um conhecimento. Eles estão subjacentes ao comportamento do aluno e são passíveis de ser verdadeiros ou falsos. Já os conceitos-em-ação são predicados, ou categorias de pensamento tida como pertinente, podendo ser relevante ou não para o trato da situação.

No caso do sorteio do jogo dos restos, os esquemas de que a totalidade dos alunos dispunha era suficiente para a classe de situações em que a divisão corresponde à repartição de objetos entre indivíduos. Como a divisão por um não supõe repartição, o parentesco entre esta classe de situações e a primeira é apenas parcial e os esquemas que dão conta do tratamento de uma não são suficientes para o tratamento da outra.

A partir de um determinado momento, oito duplas começaram a trocar acusações de trapaças no jogo. Indagados sobre os tipos de trapaça que estavam acontecendo, eles listaram os seguintes: a) Pegar alguns feijões que haviam sobrado no copo para aumentar os restos; b) Distribuir de forma desigual os feijões nos pratos; c) Mexer no dado, depois de lançado, para dar um número “melhor”; c) Alterar os dados da rodada na ficha de controle; c) Efetuar propositalmente de forma errada a soma dos restos de cada rodada da partida.

Desta lista, interessaram-nos, especialmente, as ações de mexer no dado – 10 alunos explicitaram considerar um número “melhor” que outro no dado – e alterar os dados na ficha de controle. Com relação ao número “melhor”, a transcrição de uma conversa nossa com duas duplas esclarece:

P: Que história é essa? Um número pode ser melhor que outro?
Todos: Claro. Sim.
G.S.: O um é muito ruim. Nunca sobra nada.
L.G.: Quando é um, temos que dar tudo para o prato.
P: Há outros que vocês acham ruins?
B.H.: Pior que o um não tem, mas também tem outros meio ruinzinhos.
P: Pode dizer algum?
B.H.: O dois.
P: Qual é o problema do dois?
B.H.: São muitos números que não sobra feijão quando temos que distribuir com dois pratinhos. Se a gente ainda pudesse escolher os feijões depois do dado...
P: Com quais números não sobrou feijão quando vocês tiveram que distribuir entre dois pratos? Se pudessem, como vocês escolheriam a quantidade de feijão?
J.C.: 12, 18, 24, 22 e mais um monte.
B.H.: Os pares, os pares. É só assim: se deu dois no dado, pego um número ímpar de feijões.
P: Por quê?
B.H.: Porque aí, pelo menos, um feijãozinho ia sobrar.

As falas obtidas ora transcritas revelam que esses alunos já começavam a perceber relações entre o número que saía no dado, o número de feijões que pegavam e o número de feijões que restava após a distribuição. Embora não tenham usado termos como *múltiplo*, *fator* ou qualquer outro relacionado ao campo composto pelos conceitos associados ao TFA, os quatro alunos mostraram saber que, se o número de feijões que pegaram para distribuir fosse múltiplo de dois, não lhes restariam feijões na distribuição desta quantidade em dois pratinhos. Em diálogo com outras cinco duplas, encontramos percepções semelhantes dos alunos. Mas já seriam eles capazes de generalizar esta ideia? Obtendo, no dado, números maiores que dois, conseguiriam estabelecer raciocínios análogos?

Possíveis respostas a estas perguntas serão discutidas mais adiante, mas não podemos negar que os conhecimentos de que a divisão de números pares por 2 é sempre exata e que o resto da divisão de números ímpares por 2 é sempre 1 estavam, pelo menos de maneira implícita, na ação dos alunos. A respeito disso Vergnaud (1990) explica que *"um esquema assenta sempre numa conceitualização implícita"* e, como já mencionamos anteriormente, tem como parte constitutiva o *conceito-em-ação* e o *teorema-em-ação*.

No caso da situação apresentada acima, os conhecimentos acerca da divisão de números pares e ímpares por 2 são teoremas-em-ação referentes a TFA, em que 14 dos 22 alunos utilizavam-nos, mas não conseguiam expressá-los formalmente nem justificá-los. Quanto aos conceitos de número par, número ímpar, do sistema de numeração, bem como das quatro operações, são os conceitos-em-ação relevantes para a situação.

Com relação às alterações na ficha de controle, elas ocorriam da seguinte maneira: o aluno esperava que seu adversário se distraísse, apagava os valores dos restos lançados nas rodadas anteriores e escrevia valores maiores. A discussão sobre as possibilidades de se evitar ações desse tipo permitiu que os alunos identificados no trecho de protocolo que segue, dessem mais um passo no processo de formação dos conceitos em questão:

GA: AQUI. ELE APAGOU E AUMENTOU OS RESTOS DELE.
H.: NÃO FIZ NADA DISSO...
Risos.
P: ESTOU VENDO. MAS VOCÊ NÃO TEM COMO CONTROLAR ISSO?
TODOS: PRESTANDO ATENÇÃO. MUITA ATENÇÃO EM CADA COISA QUE FIZER.
P: MAS COMO PODEMOS PERCEBER AGORA SE JÁ SOFREMOS ALGUMAS TRAPAÇAS? VAMOS VER ESTA SITUAÇÃO DA GA. E DO H. ELE TIROU 5 NO DADO, COLOCOU 11 FEIJÕES EM CADA PRATINHO E SOBRARAM 6 FEIJÕES. ISTO É POSSÍVEL?
B.H.: NÃO.
G.S.: POR QUE NÃO?
B.H.: PORQUE ELE AINDA PODE COLOCAR UM EM CADA PRATO E VAI FICAR COM UM NA MÃO.
P: VOCÊS CONCORDAM?
TODOS: SIM, SIM.
P: ENTÃO, VAMOS ANALISAR AS FICHAS DE CONTROLE PARA DETECTARMOS OS PROBLEMAS.

Por meio desta discussão e da revisão das fichas, esses alunos concluíram que o maior resto possível tem sempre uma unidade a menos que o número de pratos. Podemos dizer que nos esquemas que os alunos mobilizavam havia, mais uma vez, conhecimentos matemáticos implícitos, como sugere a TCC (VERGNAUD, 1990). Destacamos a comparação de números naturais e o algoritmo da divisão.

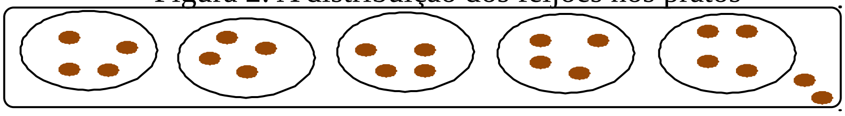
No caso do algoritmo da divisão, os alunos não foram capazes de enunciá-lo nem mesmo demonstrá-lo, tratando-se, portanto, de um teorema-em-ação. Como conceito-em-ação, podemos citar a idéia de número e as relações de comparação "maior que" e "menor que", usadas pelos alunos na análise das fichas.

Vale ressaltar que os esquemas relacionados a comparação "maior que" e "menor que" estiveram presentes em outros momentos desta e de outras atividades da intervenção de ensino. As sucessivas retomadas dos esquemas contribuíram para que todos os alunos de nosso estudo avançassem na direção de torná-los conhecimentos explícitos, o que também vai ao encontro da TCC (VERGNAUD, 1990). Motivados pelo preenchimento da ficha de controle da partida, que reserva uma coluna para o total de grãos empregados em cada rodada, a contagem dos alunos ocorreu por meio da utilização de três esquemas diferentes, a sabe:

a) <u>Contagem, um a um, dos feijões</u>
O aluno simplesmente apontava cada feijão e ia falando a sequência dos números naturais. Este esquema foi usado por 10 dos alunos pesquisados. No exemplo desenhado

abaixo, o aluno falou a sequência dos números naturais de um até 22.

Figura 2: A distribuição dos feijões nos pratos



b) contagem dos múltiplos

Este esquema foi usado por oito alunos quando a quantidade de grãos por prato era em número menor ou igual a nove e caracterizou-se por três ações: (a) apontar para os pratinhos enquanto, simultaneamente, (b) falava a sequência dos múltiplos positivos da quantidade de grãos por prato para, em seguida, (c) somar o resto, ou seja, somar a quantidade de feijões que havia sobrado após colocar o maior número possível de feijões em cada prato. Nesta situação, um aluno agiu da seguinte maneira: apontou para o primeiro prato e falou "quatro", apontou para o segundo e falou "oito", para o terceiro e falou "12", para o quarto e falou "16". Por fim, apontou para o quinto prato e falou "20". Depois somou 20 com os dois grãos de feijões que sobraram e concluiu que, antes de lançar o dado, ele tinha em mãos 22 grãos.

c) Realização dos cálculos no rascunho

Observamos quatro casos em que o aluno recorria a este esquema quando o número de feijões por prato era muito grande. Ela consistiu em, numa folha de rascunho, multiplicar o número de feijões por prato pelo número total de pratos e, depois, somar com o resto.

Na descrição dos esquemas de ação usados para contar os grãos de feijões, notamos que esses esquemas são distintos e se assentavam sobre conhecimentos matemáticos implícitos variados. Vergnaud (1990), analisando esquemas semelhantes ao primeiro que descrevemos, identificou dois conceitos-em-ação indispensáveis ao funcionamento do esquema: as de bijeção e a de cardinal. Ele reconhece uma organização invariante, essencial ao funcionamento do esquema de contar quantidades discretas:

> (...) coordenação dos movimentos dos olhos e dos gestos dos dedos e da mão relativamente à posição do objeto, enunciado coordenado da sequência numérica, cardinalização do conjunto numerado por sublinhado tônico ou pela repetição da última palavra-número pronunciada. (VERGNAUD, 1990, p. 147)

Semelhante ao primeiro esquema de ação que acabamos de comentar, o segundo (contagem dos múltiplos) também apresenta esquemas de ação essenciais ao seu funcionamento: a coordenação dos movimentos dos olhos e dos gestos dos dedos e da mão relativamente à posição do objeto; o enunciado coordenado da sequência dos múltiplos do número de feijão colocado em cada prato; a adição do número de feijões que restaram, após a distribuição com o último múltiplo pronunciado e, por fim, a cardinalização do conjunto numerado por sublinhado tônico ou pela repetição da última palavra-número pronunciada.

É importante, ainda, mencionarmos que ao serem convidados para ir ao quadro de giz para expressar, por escrito, os cálculos que efetuavam, 9 alunos alunos apresentavam a resposta certa, mas escreviam falsas igualdades matemáticas. Por exemplo, para uma situação em que foram usados 3 pratos, colocados 7 feijões em cada um e obtidos 2 feijões como resto, um aluno escreveu *“3 x 7 = 21 + 2 = 23”*, em vez de *3 x 7 + 2 = 23”*. Inferimos que a produção das falsas igualdades deve-se à redução do significado do símbolo “=” à palavra “é”. Ao usar o símbolo “=”, o aluno exemplificado não lhe atribuía todos os significados e, consequentemente, todas as propriedades que a igualdade entre expressões matemáticas possui. Embora fugisse de nosso objetivo naquele momento, procuramos discutir estas falsas igualdades com esses alunos a fim de corrigi-las. Segundo Vergnaud (1990, p. 145):

> as representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) podem ser usadas para indicar e representar as invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Nas atividades posteriores, a escrita adequada destas igualdades constituiu uma importante ferramenta para a construção dos conceitos em questão.

Prosseguindo com a apresentação do processo de reflexão feito pelos alunos investigados ao longo do jogo dos restos, verificamos que a ênfase nos casos em que o resto era zero, minimizava, ou praticamente impossibilitava, a produção de falsas igualdades matemáticas. Além disso, surpreendentemente, os termos múltiplo e divisor surgiram de modo espontâneo nas falas de todos os alunos, o que demonstrava que eles ja traziam, de anos escolares anteriores, o domínio de certos conceitos associados ao TFA, como mostra o extrato da conversa entre a pesquisadora e alguns alunos, descrito a seguir:

P: Observando a igualdade 5 x 7 = 35, o que podemos afirmar sobre a divisão de 35 por 7?
La: Dá 5 e não sobra nada.
P: Como você sabe disso?
Le: Porque 5 vezes 7 dá 35.
La: Ou então porque o 35 é múltiplo de 7.
P: Que palavra é essa? O que ela significa?
La: Que o 35 está na tabuada do 7. Mas não tem só ela. Tem uma outra: divisor.

P: E, PARA VOCÊ, QUANDOÉ QUE UM NÚMERO É DIVISOR DE OUTRO?
LE: É QUANDO O NÚMERO DIVIDE OUTRO, NÉ?
NA: ASSIM, OLHA, O 35 DIVIDIDO POR 7 DÁ 5 SEM SOBRAS, ENTÃO O 7 É DIVISOR DO 35.

Quando perguntados por que empregavam estes termos, esses quatro alunos, e todos os outros com quem tivemos um diálogo similar ao apresentado acima, responderam que já haviam estudado anteriormente *"múltiplo e divisor até m.m.c. e m.d.c"*. Mas, embora isto fosse verdade, percebemos que boa parte deles apresentava ideias equivocadas relativas a esses conceitos. Dentre elas, destacamos aquelas que também foram identificadas entre os sujeitos das pesquisas organizadas por Campbell e Zazkis (2002): a) A extensão dos procedimentos ao domínio dos racionais; b) o emprego equivocado dos termos (empregavam o termo múltiplo, quando deveriam empregar o termo fator e vice-versa; e c) a identificação dos conceitos de múltiplo e divisor com, respectivamente, as operações de multiplicação e divisão.

A própria aluna que colocou os termos em debate, confundia-os com frequência. Assim, analisando outra igualdade matemática, também obtida a partir da situação do jogo, discorreu o seguinte diálogo entre a pesquisadora e esta aluna:

LA: SEIS VEZES OITO DÁ QUARENTA E OITO. POR ISSO O QUARENTA E OITO É MÚLTIPLO.
P: MAS O QUARENTA E OITO É MÚLTIPLO DE QUE NÚMERO?
LA: O QUARENTA E OITO É MÚLTIPLO PORQUE É UMA MULTIPLICAÇÃO. SE FOSSE UMA DIVISÃO SERIA DIVISOR.

Para incidir sobre estas idéias equivocadas, optamos pela exploração oral e escrita das igualdades matemáticas que os alunos, em geral, produziam e pela análise da situação do jogo que foi tabelada. Tais explorações não foram ações coordenadas e independentes. Ao contrário, foi um processo cheio de idas e vindas, que começou pela análise da situação, passou à análise da igualdade, mas, em muitos momentos retornou à situação. O mau emprego dos termos, na verdade, esteve presente, também, nas atividades que se seguem.

2.3 Construção de Retângulos

Organização da classe: Para aplicação desta atividade lúdica foram mantidas as duplas da atividade anterior.
Material didático:Uma centena de quadrados de papel idênticos; folhas para cálculos; papel quadriculado; e fichas de registro como a descrita na Figura 3:

Figura 3: Extrato da ficha preenchida pelos alunos na atividade de construção de retângulos

N^{os} de unidades quadradas	Desenho dos retângulos construídos	Produtos

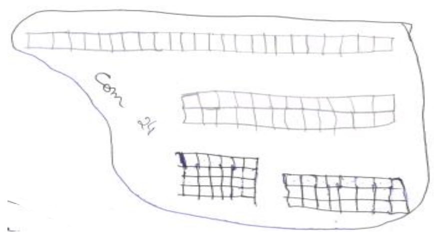
<u>Desenvolvimento</u>: O professor ditava um número e, a partir daí, as duplas deveriam apreender a quantidade de unidades quadradas referentes a esse número, construir todos os retângulos possíveis com elas e registrá-los no papel quadriculado. A dupla vencedora era aquela que conseguia construir o maior número de retângulos no menor intervalo de tempo.

2.4 Análise da Atividade Lúdica da Construção dos Retângulos

Na segunda atividade todos os alunos construíram retângulos utilizando números diferentes de unidades quadradas. As dimensões dos retângulos correspondiam aos fatores da quantidade (ou número) de unidades quadradas que os alunos dispunham. A cada número que solicitávamos, estabelecia-se entre eles uma competição: Que dupla conseguiria fazer o maior número de retângulos no menor tempo?

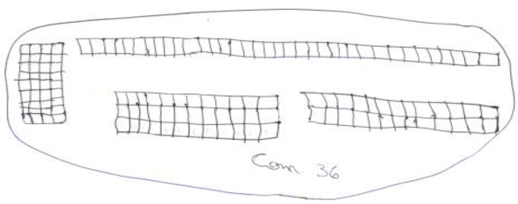
Os alunos todos construíam os retângulos e faziam suas representações no papel quadriculado. A figura 4 a seguir mostra um exemplo dessa representação:

Figura 4: Representação do retângulo no papel quadriculado



Comumente eles passaram a construir os retângulos cada vez mais rapidamente e reclamavam quando demorávamos a propor um novo número de unidades quadradas do qual deveriam dispor para construir um novo retângulo. Com isso, eles produziam mais erros, sendo o principal deles o não esgotamento de todos os retângulos que poderiam ser construídos a partir daquela unidade quadrada (ver Figura 5):

Figura 5: Representação dos retângulos com erro



Como pode ser observado, na figura anterior, a dupla se esqueceu de construir o retângulo 2 x 18. e uma questão, então, intrigou-nos: Os erros que cometiam eram decorrentes apenas da pressa ou havia outras causas?

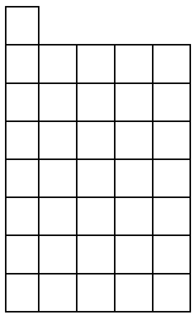
Para tentarmos responder esta questão, observamos os registros de todos os alunos e montamos um quadro que fornece uma síntese dos principais “esquecimentos”:

Figura 6: Síntese dos principais “esquecimentos”

Número de unidades	Retângulos possíveis	Retângulos esquecidos
18	1x18, 2x9, 3x6	Nenhum
24	1x24, 2x12, 3x8, 4x6	2x12
28	1x28, 2x14, 4x7	2x14
36	1x36, 2x18, 3x12, 4x9, 6x6	2x18 e 3x12

Analisando detalhadamente esses registros, notamos que quando eles começaram a construir os retângulos, utilizavam muito as unidades quadradas. Construíam uma fileira com algumas delas e, em seguida, tentavam completar outras fileiras idênticas. Ao perceber que alguma fileira ficaria incompleta, eles parecem concluir que deveriam começar novamente, alterando a quantidade de unidades quadradas da primeira fileira. Por exemplo, para construir um retângulo com 36 unidades quadradas, uma dupla fez uma fileira com cinco delas e, em seguida, fez mais seis fileiras do mesmo tipo. Mas, ao observar que sobrou uma unidade, desistiu e reiniciou o procedimento, alterando o número de unidades quadradas da primeira fileira. A figura a seguir dá uma ideia de como foi esse procedimento:

Figura 7: Procedimento inicial para construção dos retângulos



Ao longo dessa atividade, percebemos que o esquema inicial foi sendo deixado de lado por todas as duplas. De fato, os registros dos alunos mostraram que a medida que a atividade ia se desenrolando, eles não manipulavam mais as unidades quadradas, passando a desenhar imediatamente os retângulos no papel quadriculado. Aqueles que, por vezes, ainda as manipulavam já partiam para a construção correta, não levantando hipóteses sobre essas unidades quadradas. Concluímos que, por meio da manipulação dos quadrados, os alunos, em geral, criaram uma representação mental da situação, o que, segundo Vergnaud (1990), corresponde a mais um passo no sentido da conceitualização. Para esse autor, na medida em que o indivíduo apropria-se da situação, ele cria representações mentais para ela e vice-versa. Para compreendermos que representações mentais eram essas, indagamos coletivamente aos alunos sobre o que eles pensavam no momento em que construíam os retângulos. O extrato de diálogo entre a pesquisadora e três alunos, apresentado a seguir, esclarece alguns das ideias desses alunos:

G: QUE CONTA DE VEZES VOCÊ FAZIA?
G. L.: ASSIM, 36 EU FIZ 6 X 6.
G. S.: MULTIPLICAVA PRA CHEGAR NO RESULTADO.
P.: E VOCÊ, B. H., COMO FAZIA?
B.H.: EU DIVIDIA. NÃO É A MESMA COISA?
P: MAS DIVIDIA O QUÊ?
B.H.: EU PENSAVA: 36 DIVIDIDO POR 9 DÁ 4. AÍ POSSO FAZER O RETÂNGULO 4 POR 9.

Com base nas informações que os alunos nos davam sobre o que eles haviam pensado, distribuímos os esquemas que eles mobilizavam para lidar com a situação de construir retângulos em duas categorias.

Na primeira categoria, o esquema de mais da metade dos alunos consistia em estimar mentalmente pares de números cujo produto era o número de unidades quadradas de que dispunham. Por exemplo, dispondo de 36 unidades, os alunos estimavam pares de números cujo produto era 36. Então, encontravam 4 e 9, 6 e 6, etc.

Este tipo de ação nos permitiu inferir sobre uma possível causa para os retângulos mais esquecidos. Na busca pelos pares de números, 14 alunos utilizavam seus conhecimentos sobre as tabuadas que haviam estudado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental – tabuadas de 2 a 10. Voltando ao caso do 36, como as tabuadas do 2 e do 3 só era estudado até 10, eles não incluíam os produtos de 2 X 18 e 3 X 12. Confirmamos, mais uma vez, o que Vergnaud (1990) enfatiza sobre os componentes de um esquema: os conhecimentos implícitos nos esquemas, são compostos pelos chamados teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, já discutidos quando da análise da atividade do jogo dos restos.

Já na segunda categoria, utilizado pelos oito alunos restantes, o esquema era o de dividir mentalmente, ou no rascunho, o número de unidades quadradas pela sequência de números naturais diferentes de zero. Fortalecendo o que inferimos acima sobre os retângulos mais esquecidos, quando as quatro duplas lançavam mão de tal esquema de ação elas praticamente não se esqueciam de nenhum retângulo. Ao final, quando esse esquema de ação era assumido pela dupla, os retângulos mais esquecidos passaram a ser os primeiros a surgir. Nossa curiosidade se voltou, então, às seguintes questões: A partir de que momento esses alunos paravam de efetuar as divisões? Que critérios usavam para interromper as ações?

Em conversas coletivas om os alunos em diversos momentos da atividade, percebemos que suas ações eram coordenadas por algumas propriedades das relações de divisibilidade. Eles sabiam, por exemplo, que dado um número natural *x*, os números diferentes de x/2 e de *x*, compreendidos entre eles, não podiam ser fatores de *x*. Sabiam, também, que o quociente da divisão de *x* por qualquer desses números era igual a 1 e que o resto era diferente de zero. Embora não tenham usado termos como *múltiplo, fator* ou *divisor* e, talvez, nem fossem capazes de expressar formalmente tais propriedades, elas estão subjacentes às suas ações, constituindo-se em teoremas-em-ação. A divisão, a noção de intervalo numérico, os conceitos de múltiplo e fator foram os conceitos-em-ação que compuseram esses teoremas-em-ação.

Dessa forma, embora os objetivos principais da atividade fossem a manipulação e representação geométrica dos conceitos, a partir de certo momento mais da metade dos alunos realizavam cálculos, transitando da representação geométrica para a aritmética e vice versa. Nesse sentido, Vergnaud (1990) acrescenta que o domínio progressivo das representações associadas ao conceito favorece a conceitualização.

A exploração destas representações permitiu, ainda, que 14 alunos diferenciassem números primos de números compostos e reconhecessem algumas de suas propriedades. Em suas falas, fundamentadas na análise da situação, os alunos expressavam propriedades tais como *o único número par que é primo é o 2*, ou, ainda,e *nem todo número ímpar é primo*. Essas propriedades são as que os alunos comumente se equivocam no processo de construção do conceito de número primo. Elas são afirmações que os alunos ainda não conseguiam expressar formalmente e que dependiam fortemente da situação para fazê-las. São, ainda, dois teoremas-em-ação. Como conceitos-em-ação que os constituem, podemos citar o conceito de número par, de número ímpar e de número primo. É importante mencionarmos que não demos ênfase à nomenclatura específica p*rimos* e *compostos*. Falávamos apenas em *números que formavam apenas um retângulo* e *números que formavam mais de um retângulo*. Entretanto o uso destes termos surgiu na fala dos seis alunos que já haviam sido confrontados com conceitos relacionados à divisibilidade em anos anteriores. Percebemos, assim, no decorrer dessa atividade a incorporação de mais uma representação: a linguagem oral.

2.5 Tábua de Pitágoras

Organização da classe: Os alunos trocaram ideias, mas trabalharam individualmente.

Material usado: lápis de cor; folha de papel, com o desenho da tábua (ver Figura 8).

Figura 8: Modelo da tábua de Pitágoras tal qual foi utilizada pelo aluno

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Desenvolvimento: A atividade foi desenvolvida em duas etapas. A primeira consistiu em preencher e pintar partes da tábua e a segunda consistiu em refletir sobre o que foi pintado. Solicitamos aos alunos que preenchessem a linha e a coluna do número 2 com o produto dos números e, em seguida, que as pintassem de azul (ver Figura 9). Solicitações desse tipo foram, posteriormente, feitas para outros números.

Figura 9: Exemplo de preenchimento da tábua de Pitágoras para o número 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2								
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3		6								
4		8								
5		10								
6		12								
7		14								
8		16								
9		18								
10		20								

Assim, o mesmo trabalho foi feito com as tábuas do 5 e do 8, cujos termos foram coloridos, respectivamente, de amarelo e vermelho. Finalmente, pedimos que os alunos completassem as demais tábuas. Já na segunda etapa, após preenchermos, com o auxílio da turma, uma grande tábua, que foi afixada à parede da sala, a pesquisadora colocou oralmente várias questões sobre os números da tábua, tais como:

- Por que são aqueles números que estão na tábua de 2?
- Como poderemos obter um número da tábua de 2, conhecendo seu antecessor? E se conhecêssemos apenas seu sucessor?
- Os números que estão na tábua de 2 são pares ou ímpares? Se prolongássemos a tábua, apareceria algum número ímpar? Por quê?
- Há números que também pertencem à tábua de 5?
- Se prolongássemos as tábuas, que outros números também pertenceriam simultaneamente às tabuas de 2 e de 5?
- Quais os números da tábua de 4 que já foram escritos na tábua de 2?
- Quais os números da tábua de 2 que foram escritos na tábua de 4? E quais não foram escritos?

2.6 Análise da Atividade da Tábua de Pitágoras

A partir da análise minunciosa dos registros de todos os alunos participantes deste estudo, verificamos que na terceira e última atividade todos os alunos avançaram ainda mais na construção dos conceitos associados ao TFA. Ela permitiu aos alunos não só identificar fatores de um número, mas também reconhecer certas propriedades das relações de divisibilidade. Além disso, retomamos as reflexões sobre as igualdades matemáticas e criamos condições para que os alunos explicitassem a relação multiplicação/divisão. Para cada multiplicação, inferiam duas divisões.

O preenchimento e a reflexão com base nas tábuas parece ter contribuído para que os alunos, em geral, concluíssem que a sequência dos múltiplos consecutivos de um número é uma progressão aritmética cuja razão é este número. Pedíamos-lhes que falassem em voz alta os termos consecutivos que compõem cada tábua, o que impediu a construção da equivocada ideia de que a sequência dos múltiplos de um número é finita. "Cantando os números", como costumavam chamar este momento, quase todos os alunos percebiam a lei de formação da sequência e, na maioria das vezes, ultrapassavam os limites da tabela. Outra evidência de que haviam identificado uma progressão aritmética na sequência dos números que compõem cada tábua, pode ser percebida em um dos esquemas de ação usadas para preencher a tábua. Eles demonstraram saber que, conhecendo o termo anterior, basta adicionar a ele a razão para obtermos o termo seguinte. Ou, para obtermos o termo anterior, basta subtrairmos a razão do termo seguinte.

Nenhum aluno enunciou formalmente este conhecimento, mas ele, assim como tantos outros, estava presente nas ações dos estudantes, o que nos permite considerá-lo um teorema-em-ação. As noções de sequência, de seqüência dos números naturais, de múltiplo, de fator e as quatro operações são os conceito-em-ação que compõem o esquema de ação usado por esses alunos.

Ao ter demonstrado reconhecer, por meio de suas ações – contar de três em três na coluna, e também na linha, do três, de quatro em quatro na coluna e linha do quatro e assim por diante – que a sequência dos múltiplos de um número é uma progressão aritmética, como descrevemos anteriormente, 14 alunos julgavam que a recíproca também era verdadeira, isto é, achavam que qualquer sequência de três em três, por exemplo, seria múltiplo de três. Assim, sequência como "1, 4, 7, 10...", que é uma progressão aritmética, também seria uma situação de múltiplos. Ou seja, acreditavam que toda progressão aritmética formada por números naturais corresponderia a uma sequência de múltiplos. Tratava-se de um teorema-em-ação falso cujos conceitos-em-ação eram os mesmos da recíproca dele. Para que eles desfizessem desse falso teorema-em-ação, foram precisos muitos contraexemplos, todos trabalhados coletivamente, estimulando a comunicação dos alunos.

Outro esquema de ação empregada por 10 alunos para o preenchimento da tábua fundamentava-se em operações com os números correspondentes a cada linha e coluna. Por exemplo, sabiam que, para preencher a célula do cruzamento da coluna do três com a linha do 2, deveriam efetuar 2 x 3. As igualdades matemáticas que representam tais operações serviram como ponto de partida para a reflexão sobre a obtenção de outras igualdades. Observada, por exemplo, a igualdade 2 x 3 = 6, os alunos escreviam ou falavam 6 : 3 = 2 e 6 : 2 = 3. Ou ainda, observando a igualdade 6 : 2 = 3, escrevessem 2 x 3 = 6 e 6 : 3 = 2.
Ainda durante o preenchimento da tábua, um aluno explicita em voz alta para todo o grupo o esquema que estava usando ao comentar que era necessário "percorrer um caminho" (linha e coluna) para localizar a célula. Apontando para a célula preenchida com o número 6, perguntamos:

P: POR QUE VOCÊ COLOCOU O 6 AQUI?
R: OLHA LÁ, SE SUBIR, CAI NO 3, SE ANDAR PRO LADO, CAI NO 2.
P: TEM OUTRA CASA ONDE VOCÊ TAMBÉM PODE COLOCAR 6?
R: TEM. É SÓ DESCER DO 2 ATÉ O NÍVEL DO 3.
P: COMO VOCÊ FAZ PARA SABER QUE NÚMERO DEVE COLOCAR NA CASA VAZIA?
R: EU FAÇO O CAMINHO, VOCÊ NÃO ENTENDEU?

Desta maneira, esses e os demais alunos que participaram da atividade também concluíram que este caminho fornece os números que compõem o primeiro membro da igualdade matemática que escreviam na célula. Pudemos inferir que, paralelamente à representação aritmética e à representação em tabela, os alunos construíram uma representação geométrica das igualdades matemáticas, o que, segundo Vergnaud (1990), pode ter-lhes favorecido a conceitualização da multiplicação, da divisão e da reversibilidade entre as duas. Procuramos explorar "idas" e "vindas" no caminho, estabelecemos relações entre os caminhos e os cálculos aritméticos que faziam, ou seja, procuramos, seguindo o princípio da TCC que destaca a importância de os alunos transitarem entre as diferentes representações para a situação que vivenciam e para os conceitos envolvidos nela.

Também observando as tábuas preenchidas, identificamos que 12 alunos passaram à obtenção do conjunto de fatores de alguns números. O esquema que eles adotaram pode ser sintetizado nos seguintes passos: 1º) localizar na tábua todas as células em que o número cujos fatores se deseja obter aparece; 2º) percorrer o "caminho" de cada célula, isto é, identificar os números de sua linha e de sua coluna. Estes números são alguns dos fatores do número; e 3º) acrescentar aos fatores identificados acima o 1 e o número.

Verificamos, porém, que, com estes passos, a possibilidade de obtenção de todos os fatores do número em questão é bastante reduzida. Isto porque nem todos os produtos encontram-se nos dados da tabela 10 por 10. Por exemplo, seguindo os passos que descrevemos para obter os fatores de 30, esses 12 alunos encontravam 1, 3, 5, 6, 10 e 30. Não incluíam o 2 e o 15, porque o produto 2 x 15 não consta nos dados da tabela 10 por 10. Era preciso que ficassem atentos às necessidades de ampliar a tabela. As questões que se levantavam eram: quais critérios deviam adotar para reconhecer a necessidade de expandir a tabela? Como decidir até que tamanho era necessário expandi-la? Nas palavras de um aluno: *Como dá pra saber que tem, mas não está aqui?*

Assim, concluímos que esta atividade pode ter efetivamente contribuído para que os alunos admitissem que a um número natural qualquer está associado um conjunto que contém todos os seus fatores, porém ela não lhes assegurava a obtenção de todos os elementos desse conjunto. Foi preciso refletir coletivamente com todo o grupo sobre isto, pois caso contrário eles fundamentariam suas ações em um esquema insuficiente que, por sua vez, apresenta em sua constituição conceitos-em-ação relevantes, como as noções de linha, coluna, produto cartesiano e reversibilidade entre multiplicação e divisão. Tal conclusão permitiu aprofundar a discussão sobre critérios de divisibilidade.

A observação das regularidades no preenchimento da tábua criou condições para que todos os alunos enunciassem critérios de divisibilidade por 2, 5 e10. Embora não enunciassem com o rigor dos teoremas matemáticos, os conhecimentos que demonstravam dos critérios não se fundamentavam apenas nesta situação. Pelos argumentos de 16 dos 22 alunos, percebemos a tentativa de identificar na situação que estava sendo discutida princípios que utilizam em outras situações. Por exemplo, associavam os números usados para preencher a tábua do 5 aos números que pronunciam na leitura das horas em um relógio (1 = 5 (minutos), 2 = 10, 3 = 15 e assim por diante). Entendemos que tal comportamento indica que esses alunos tinham se apropriado de um esquema de ação eficiente para dar conta da situação.

Podemos entender, baseadas em Vergnaud (1990), que o processo de generalização ocorre na medida em que o indivíduo caminha na direção do reconhecer procedimentos similares em situações distintas. Cabe destacar apenas que a generalização de um conceito ou de uma propriedade de um conceito não ocorre isoladamente. Conceitos que pertencem ao mesmo campo conceitual influenciam-se mutuamente no processo de generalização. Assim, a discussão dos critérios de divisibilidade levou os 16 alunos a explicitamente enunciar outras propriedades dos números naturais. Na discussão dos critérios, por exemplo, 10 alunos construíram argumentos como *"a soma de números pares é sempre um número par"*, ou, ainda, *"a soma de um número par com um número ímpar é sempre um número ímpar".*

Mas o fato que mais chamou nossa atenção, foi a tentativa de 12 alunos de formular critérios de divisibilidade por outros números diferentes de 2 e de 5. Eles tentavam aplicar o esquema de observar apenas o algarismo das unidades do número para decidir sobre sua divisibilidade. A fim de criarmos condições para que revissem este esquema, propusemos-lhes alguns contraexemplos. No entanto, os contraexemplos não foram suficientes para que eles deduzissem o critério de divisibilidade por 3 e, em outra atividade, como veremos, este falso teorema-em-ação foi enunciado novamente.

A tábua de Pitágoras revelou-se um meio útil para que todos os alunos percebessem que um número pode ser múltiplo de muitos outros, mas a observação das cores os conduzia a desconsiderar vários múltiplos comuns dos números em questão. Por exemplo, 18 alunos identificaram como múltiplo de 2 e de 5 aquele número que ficou pintado de verde, mistura do azul, empregado na pintura da tábua do 2, com o amarelo, empregado na pintura da tábua do 5. Desse modo, consideraram apenas o 10 e desprezaram outros como 20, 30, 40 etc. Ao retomarmos as reflexões, procuramos dar ênfase aos critérios de divisibilidade por 2 e por 5. Observando novamente a tabela, todos concluíram nas suas fichas de atividades que, além do 10, havia números que são múltiplos de 2 e de 5 que não estavam pintados de verde. Chamaram este fato de *Perigo da Tabela*. Indagados sobre o porquê deste nome, eles responderam com frases do tipo: *"Porque a gente fica pensando que só o 10 que serve porque ele está verde, mas tem muito mais. A última linha toda!"* Mais uma vez, notamos que a mesma atividade que pode favorecer a construção de certos conceitos também pode oferecer obstáculos a sua generalização.

Quando da reflexão coletiva sobre múltiplos comuns de 2 e de 8. Distinguimos três esquemas diferentes adotadas pelos alunos para identificar os números que são múltiplos comuns a 2 e a 8: 1ª) Simplesmente observar a tábua do 2 e a tábua do 8, buscando os números que constam nas duas tábuas; 2ª) Testar a divisibilidade por 2 e por 8 de todos os números da tabela; 3ª) Verificar entre os múltiplos de 8 aqueles que são pares.

Os três esquemas, entretanto, conduziram a resultados diferentes. Enquanto os alunos que executaram o primeiro encontraram apenas o 8 e o 16, aqueles que executaram o segundo e o terceiro concluíram que todos os números da tábua do 8 são múltiplos de 2. Estendendo e aplicando os mesmos raciocínios na obtenção de múltiplos comuns a outros pares de números que satisfazem à mesma condição do par 2 e 8 (um é múltiplo do outro), 20 alunos iniciaram o processo de generalização da propriedade que assegura que, dados dois números inteiros a e b, se a é múltiplo de b, todo múltiplo de a será múltiplo de b, mas nem todo múltiplo de b será múltiplo de a.

Considerações finais

Neste artigo buscamos compreender as contribuições das atividades lúdicas para a compreensão de conceitos aritméticos como múltiplo, divisor e número primo. Para tanto colocamos em prática três delas e as analisamos à luz da TCC os esquemas empregados pelos alunos enquanto as realizavam. Observamos em todas as etapas que as atividades lúdicas parecem ter criado condições para que os alunos desenvolvessem e utilizassem diversas representações para lidar com os conceitos, além, é claro, de serem em si situações em que eles podiam construir os conceitos de forma significativa.

Outro aspecto observado se refere ao uso do material concreto que, no caso das atividades descritas, correspondem aos recursos mobilizados (dado, feijões, pratos, unidades quadradas, fichas etc.). Parece que isso contribuiu para que os alunos fossem identificando os diferentes padrões e estabelecendo outros tantos, o que nos levou a destacar a importância de tal material para o processo de aprendizagem desses alunos.

Uma vez que as atividades foram realizadas em grupo, observamos que foi proveitosa a troca de informações entre os alunos, especialmente nas atividades envolvendo o material suporte, o que pode ter contribuído para o aprendizado individual. A articulação entre as várias formas de representação foi feita de tal modo que parece ter permitido aos alunos iam adquirindo confiança para expressar seus esquemas, tornando a aprendizagem mais eficiente.

Na ação dos alunos, identificamos uma série de parte de teoremas e conceitos matemáticos implícitos, que Vergnaud nomeia teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. Lembramos que os teoremas-em ação fazem parte dos invariantes operatórios e esses são elementos constitutivos do Esquema. Procuramos organizá-los e constatamos, mais uma vez, que os fenômenos relacionados à construção de conceitos, não se dão de forma linear. Não se trata de estabelecer relações estritas de causa e efeito. Muitos fatores conjugam-se e interagem durante a construção de conceitos, proporcionando avanços e retrocessos. As mesmas atividades que favorecem a compreensão de certos aspectos conceituais podem conduzir a generalizações equivocadas.

Referências

BARBOSA, G. S. (2008). *O Teorema Fundamental da Aritmética: jogos e problemas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental*. Tese (doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

BROWN, A.; THOMAS, K.; TOLIAS, S. (2002). Conceptions of divisibility: success and understanding. In: CAMPBELL, S.; Zazkiz, R. (Orgs.). *Learning and Teaching Number Theory*. Westport: Ablex Publishing, 41-82.

CAMPBELL, S. (2002). Coming to terms with division: Preservice teachers' understanding. In: CAMPBELL, S.; Zazkiz, R. (Orgs.). *Learning and Teaching Number Theory*. Westport: Ablex Publishing, 1-14.

COELHO, S.; MACHADO, S.; MARANHÃO, C. (2003). *Projeto: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática?* .Santos: SIPEM.

__________, (2005). *Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental?* Porto: CIBEM V.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. (1997). Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus.

RESENDE, M. R. (2007). *Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professores de matemática na licenciatura.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

TEPPO, A. R.; (2002). Integrating content in classroom Mathematics. In: CAMPBELL, S.; Zazkiz, R. (Orgs.). *Learning and Teaching Number Theory*. Westport: Ablex Publishing, 117 130.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 10, n. 23, pp. 133-170