Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores

RENATA ROSSINI*

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar a análise da produção de professores da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo, participantes de um projeto de formação continuada. Eles construíram e aplicaram uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem de *função* em uma classe de oitava série do Ensino Fundamental da mesma rede. Os procedimentos metodológicos foram os da pesquisa-ação, que permitiu uma interação entre pesquisador e professores, debates sobre conteúdos matemáticos, juntamente com reflexões de cunho pedagógico. O trabalho dos docentes foi examinado à luz da teoria antropológica do didático, que permite modelar o conceito de função em termos de organizações matemáticas e didáticas. A análise mostrou um progresso desde as primeiras cópias de materiais instrucionais, um enriquecimento do discurso do professor, o enfrentamento de dúvidas, uma preocupação com a redação de atividades. Alguns construtos foram retomados mais de uma vez, fortalecendo a organização matemática e a correspondente organização didática. No final, os professores institucionalizaram o conceito de função de uma maneira inovadora.

Palavras-chave: função; organização matemática; organização didática.

Abstract

The aim of this article is to present the analysis of the production of public school teachers in the state of São Paulo during their participation in a continuing education project. They constructed and applied a didactic sequence for the teaching and learning of function in an eighth grade class. The methodological procedures were action research, which allowed an interaction between researcher and teachers, discussions about mathematical contents, and pedagogical reflections. The teachers' production was examined in light of

* Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – PUC-SP. E-mail: renatars@uol.com.br

the Anthropological Theory of Didactics, which shapes the concept of function in terms of mathematical and didactic organizations. The analysis showed an evolution taking place since the first copies of instructional materials, an enrichment of the teacher's discourse, the confrontation of doubts, and the teachers' concern for adequately writing the activities. Some constructs were revisited more than once, strengthening the mathematical organization and the corresponding didactic organization. In the end, the teachers institutionalized the concept of function in an innovative way.
Keywords: *function; mathematical organization; didactic organization.*

Introdução

Este artigo, extraído da pesquisa de Rossini (2006), trata das dificuldades de um grupo de professores quanto ao conceito de *função*, da superação das mesmas ao longo de um processo de formação continuada. Seu objetivo foi investigar a (re)construção do conceito de função em um grupo de professores de Matemática da Rede Pública Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, ao desenvolverem coletivamente e aplicarem uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função em uma sala de oitava série dessa rede.

Os procedimentos metodológicos utilizados foram os da pesquisa-ação, tendo em vista, por um lado, que, em uma investigação colaborativa, há uma interação entre pesquisador e professores durante a formação continuada de professores de Matemática e, por outro, que tais procedimentos são, reconhecidamente, os que oferecem as mais adequadas condições para a produção de conhecimento sobre problemas vividos pelos docentes.

A teoria antropológica do didático, de Chevallard (1999), foi o marco teórico que permitiu modelar o conceito de função em termos de *organização matemática* e *organização didática*, associadas às concepções de função: interdependência de grandezas, máquina de entrada e saída, expressão analítica, padrão de regularidade de seqüências geométricas e correspondência entre conjuntos.

Esse referencial possibilitou analisar e acompanhar a evolução da produção docente em termos das organizações matemáticas e didáticas, que foram elaboradas em torno do objeto matemático *função*, desde as primeiras cópias até a aplicação da seqüência didática em sala de aula e a institucionalização do conceito em sala de aula.

A seguir, as *questões norteadoras*:

O que significou, para um grupo de professores de ensino fundamental e médio da rede pública do estado de São Paulo, elaborar coletivamente uma seqüência didática sobre função e aplicá-la em classe?

Quais organizações matemáticas são mobilizadas por professores durante a construção de uma seqüência de ensino sobre funções para uma oitava série do ensino fundamental? Como os professores (re)constroem seus saberes docentes sobre o conceito de função?

Neste artigo, é apresentado o objeto matemático *função*, as concepções que emergiram ao longo os últimos quatrocentos anos; o referencial teórico; os procedimentos metodológicos; breve relato da formação, a caracterização da escola pública e dos participantes da formação continuada, a coleta de dados. Enfocamos a análise da produção docente, detalhando a evolução das organizações matemáticas e didáticas. Encerramos com uma síntese da formação em termos de momentos didáticos.

O objeto matemático

O estudo da longa e tumultuada história sobre a formação da idéia de função, feito por Youschkevitch (1981), que acompanhou o tema desde a remota Antiguidade até a metade do século XIX, e por Monna (1972), que se debruçou sobre o período que cobre o final do século XIX até a conformação do objeto matemático pelo grupo Bourbaki, evidencia que a construção do conceito foi um longo processo, marcado por controvérsias e rupturas.

Diversas definições foram concebidas pelos matemáticos, desde o século XVII. No século XX, um grupo de jovens matemáticos franceses fundou, em 1935, a Associação Bourbaki, a fim de organizar toda a matemática conhecida até então, segundo o pensamento formal de Hilbert. Eles publicaram, em 1939, o primeiro livro da coleção *Théorie des ensembles* (*fascicule de résultats*), que contém todas as definições e todos os principais resultados. Segue a definição de função encontrada nesse livro:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação

> funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.
>
> Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (Bourbaki, 1939 apud Monna, 1972, p. 82)

Segundo Monna (1972, p. 82), essa definição remove todas as dúvidas sobre o que é uma verdadeira função.

As concepções

Da Antiguidade até a revolução estruturalista desencadeada pelo grupo Bourbaki, emergiram diferentes concepções de função, ou seja, maneiras diferentes de perceber o objeto matemático *função*, de utilizar ou enfatizar suas propriedades. Segundo Artigue (1989, p.14), a noção de concepção coloca em evidência a diversidade de pontos de vista possíveis sobre um mesmo objeto matemático e a sua adaptação para resolver determinados tipos de problemas. Algumas dessas concepções foram utilizadas simultaneamente em uma mesma definição; ou, então, em uma mesma época, diferentes concepções foram manipuladas pelos matemáticos. São elas: equação entre x e y; quantidades relacionadas; relação; quantidades geométricas que dependem de um ponto da curva; função de uma máquina; relação entre grandezas variáveis; expressão analítica; dependência arbitrária, correspondência: para cada valor de x (abscissa) um único valor de y (ordenada), não é necessária uma mesma lei para todo o intervalo, y não precisa ser definido por uma expressão matemática explícita em x; correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo determinada lei; subconjunto de um produto cartesiano, obedecendo duas condições; correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo duas condições.

Conhecer as concepções é fundamental em um trabalho sobre funções, pois elas são utilizadas nos livros didáticos e são trabalhadas em sala de aula, ao lado de uma definição formal, próxima daquela fornecida pelo grupo Bourbaki.

Referencial teórico

A pesquisa fundamentou-se na teoria antropológica do didático, desenvolvida por Yves Chevallard, na França, na década de 1990. Os pilares dessa teoria são as noções de *organização praxeológica matemática* (ou *organização matemática*) e de *organização didática*. A seguir, os pontos principais dessa teoria.

Organização matemática

A palavra *praxeologia* é formada por dois termos gregos, *práxis e logos,* que significam, respectivamente, prática e razão. Chevallard (1999) remete ao fato de que, no interior de uma instituição,[1] a prática está sempre acompanhada de um discurso mais ou menos desenvolvido, ou seja, de um *logos* que a justifica, que a acompanha e que lhe dá razão. São dois níveis diferentes, mas inseparáveis, que vão se construindo e definindo em um processo dialético; *práxis* e *logos* estão intimamente relacionados e a articulação entre eles permite dar forma à praxeologia matemática.

Na raiz da noção de *praxeologia,* encontram-se as noções de tarefas e de tipos de tarefas. Geralmente, uma tarefa (ou tipo de tarefa) se exprime por um verbo. Exemplos: calcular o valor de uma função em um ponto, construir um gráfico de uma função, completar uma tabela.

Segundo Bosch e Chevallard (1999), toda prática institucional consiste em um conjunto de tarefas; a realização de uma tarefa resulta colocar em ação uma técnica; as condições e exigências que permitem a produção e a utilização de tarefas e técnicas nas instituições implicam a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas, que se chama *tecnologia* da técnica. Toda tecnologia, por sua vez, precisa de uma justificativa, que se denomina *teoria* da técnica. O bloco [tarefa/técnica] é considerado o *saber-fazer*, ao passo que o bloco [tecnologia/teoria] é o *saber.*

Ao se debruçarem sobre a questão da natureza de um objeto matemático, Bosch e Chevallard (ibid.) afirmam que esse problema é respondido em termos de organizações praxeológicas. Dessa forma, a natureza do objeto matemático *função* se apresenta sob uma nova luz: não

1 Para Chevallard, uma instituição pode ser um órgão governamental, uma escola, uma classe, um curso, a família, a sociedade ou os programas de ensino.

se pergunta mais o que é uma função, mas quais são os tipos de tarefas e de técnicas que compõem as praxeologias institucionais em que intervém a noção de função, quais elementos tecnológicos descrevem ou justificam essas práticas, ao organizar um discurso sobre esse objeto.

Assim, em torno de cada concepção de função – relação entre grandezas, expressão analítica, máquina, padrão de regularidade e correspondência entre dois conjuntos – pode-se estruturar uma organização matemática, que será chamada de pontual, seguindo as denominações propostas por Chevallard (ibid., p. 229), ao classificar as organizações em pontuais, locais, regionais.

Organizações didáticas

Chevallard (ibid., p. 241) propõe as *praxeologias didáticas* ou *organizações didáticas,* que são as respostas às questões de *como* estudar um determinado tema, uma vez que as praxeologias são "artefatos" construídos em uma determinada época; as reconstruções das mesmas aparecem nos documentos oficiais, nos livros didáticos ou em uma sala de aula e são objetos da didática.

Na sala de aula, o problema do professor é ensinar, ou seja, fazer funcionar, em uma classe, uma determinada organização matemática. Para isso, ele precisa (re)construir uma organização didática que solucione a tarefa que ele vai propor aos alunos. Por exemplo, diante da tarefa construir o gráfico de uma função, o professor se depara com a questão de como propor o exercício para o aluno.

Momentos didáticos

Para colocar em funcionamento uma determinada organização matemática em uma sala de aula, Chevallard (2001, p.11) constata a existência de seis momentos de estudo a partir da constatação de que determinados tipos de situações estão presentes, mesmo que seja de uma maneira muito variada, tanto no plano qualitativo, como no quantitativo. Esses tipos de situação serão nomeados de *momentos de estudo* ou de *momentos didáticos*, porque, qualquer que seja o caminho trilhado, chega-se forçosamente a um momento no qual determinados procedimentos de estudo devem ser executados. Observamos que os momentos didáticos mencionados a seguir apresentam-se numa ordem arbitrária, pois não ocorrem, necessariamente, nessa seqüência.

- O primeiro momento de estudo é aquele do *primeiro encontro* (ou reencontro) *com a organização matemática* que está sendo colocada em jogo. Tal momento pode ocorrer de diversas maneiras e diversas vezes. Inscreve-se em uma problemática denominada "mimético-cultural". Esse primeiro encontro não determina todas as relações possíveis com o objeto em questão, mas tem um papel importante na aprendizagem, porque orientará o desenvolvimento posterior das relações com o objeto em questão.
- O segundo momento é aquele da *exploração de um tipo de tarefa* e da *elaboração de uma técnica* para ele. Essa elaboração é considerada por Chevallard (1999, p. 252) como o centro da atividade matemática, pois o estudo da resolução de um problema sobre um determinado tipo de tarefa sempre é acompanhado pela constituição de uma técnica, de maneira embrionária ou mais desenvolvida.
- O terceiro momento de estudo é aquele da *elaboração do entorno tecnológico e teórico* relativo à técnica. Desde o primeiro encontro com um tipo de tarefa, existe uma relação com um entorno tecnológico-teórico anteriormente elaborado ou com um embrião que deve ser desenvolvido.
- No quarto momento, verifica-se o *trabalho da técnica*, quando deve ocorrer um aprimoramento, para torná-la mais eficaz e mais confiável.
- O quinto momento é aquele da *institucionalização*, que tem o objetivo de determinar, de maneira precisa, o que é a organização matemática elaborada. Nesse momento, é necessário que se distingam os elementos que serão integrados de maneira definitiva nessa organização. Assim, a organização matemática em questão faz sua entrada na cultura de uma escola.
- O sexto e último momento é o de *avaliação*, que se articula com o da institucionalização. Na sala de aula, é quando se verifica aquilo que foi compreendido. Trata-se de avaliar, não uma pessoa, mas, sim, de interrogar a própria técnica e verificar, por exemplo, se ela é segura e maneável.

Neste artigo, encontram-se a descrição e a análise das (re)construções das organizações matemáticas, as indagações e respostas dos professores ao *como fazer funcionar* uma determinada organização matemática em torno do conceito de função em uma sala de aula de oitava serie. O trabalho docente pode ser acompanhado seguindo os momentos didáticos vivenciados pelos participantes da formação continuada.

Pode-se afirmar que a teoria antropológica do didático fornece instrumentos para analisar o *saber* ou *saber-fazer* do professor, porque ela permite responder questões como as que seguem:

- Quais são os tipos de tarefas que o professor propõe?
- Quais são as técnicas que ele conhece para resolver as tarefas?
- Quais são as suas justificativas tecnológicas?

Procedimentos metodológicos

A pesquisa de Rossini (2006) enquadrou-se nos moldes de uma ação-pesquisa, um tipo de pesquisa-ação, segundo Barbier (2004, p. 41), caracterizada da seguinte maneira: a participação dos professores no grupo foi voluntária; houve consenso e disposição do grupo em preparar e aplicar em uma sala de oitava série do ensino fundamental uma seqüência de atividades para introduzir o conceito de função; o pesquisador desempenhou um papel ativo no equacionamento dos problemas encontrados, discutindo nos grupos ou mais coletivamente as questões que foram surgindo sobre conteúdos matemáticos. Além disso, o pesquisador socializou as produções escritas dos professores e os acompanhou na sala de aula, observando a aplicação da seqüência de ensino; procurou-se estabelecer um clima de confiança e de respeito, valorizando os saberes docentes à medida que emergiam. Necessárias reformulações, ampliações e questionamentos sobre esses saberes, tanto matemáticos quanto pedagógicos, foram encaminhados e discutidos.

Caracterização da escola e dos professores

A escola pública onde ocorreu a aplicação do experimento-piloto e da seqüência de ensino pertence à Rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo e está localizada na região central de um dos municípios da Grande São Paulo.

Os nove professores[2] que mais participaram do projeto tinham, em 2004, de dois a oito anos de experiência no ensino fundamental e médio. Todos se graduaram em faculdades particulares, em licenciaturas com três anos de duração, na década de 1990, exceto dois professores, que fizeram uma licenciatura na década de 1970, exerceram funções no setor terciário e só começaram a lecionar a partir do ano 2000. Somente dois professores, em 2004, eram efetivos da rede pública estadual. Dos dez professores, três trabalhavam na escola referida acima; outros dois também eram colegas de trabalho. Oito deles tinham ministrado aulas sobre *função*.

A heterogeneidade dos participantes pode ser observada em diversos quesitos: idade, envolvimento e dedicação, tempo de magistério, tempo de participação em projetos de formação continuada, experiências profissionais fora do magistério. Outros cinco professores compareceram a duas ou três reuniões e não deixaram rastro.

Breve descrição da formação

A pesquisa começou em maio de 2004 e terminou em outubro do mesmo ano. Foram realizadas 18 reuniões semanais nas dependências da universidade. Realizaram-se ainda uma experiência-piloto e seis sessões nas dependências de uma escola estadual, localizada na região metropolitana da Grande São Paulo. O período de formação foi dividido em quatro fases, devido às diferentes dinâmicas de trabalho.

A primeira fase contou com a presença máxima de 12 participantes, ao longo de oito reuniões. Começou com um debate sobre a viabilidade de introduzir função em uma oitava série, a confecção de mapas conceituais. Após responderem dois questionários, os participantes expuseram suas opiniões sobre o tema-função, com base em levantamentos feitos em livros didáticos de oitava série. Formaram-se espontaneamente três grupos de trabalho, quando surgiram as primeiras produções escritas.

Na segunda fase, ocorreu a aplicação do experimento-piloto, com duas horas de duração, com a presença de dez alunos de uma das oitavas séries de uma escola pública estadual, antes das férias escolares. Nesse dia, os professores atuaram como observadores, sendo que um atuou como

2 Os nomes dos professores são fictícios: Margarida, Pérola, Marcos, César, Rosa, Flávio, Juliano, Túlio, Plínio. Também o são os nomes das estudantes: Nina e Bruna.

formador. Foram utilizadas duas reuniões para discutir coletivamente os fatos ocorridos durante a aplicação desse experimento-piloto.

Na terceira fase, os sete participantes remanescentes (cinco professores e duas estudantes) trabalharam colaborativamente na (re)construção da seqüência didática durante seis reuniões.

Na quarta fase, ocorreu a aplicação da seqüência na sala de aula, ao longo de seis aulas duplas na escola estadual. Nesse período, duas reuniões na universidade foram utilizadas para debater os fatos ocorridos em sala de aula.

Coleta de dados

Três observadores do projeto sempre estiveram presentes e fizeram suas anotações. Os diálogos foram gravados. Alguns momentos foram filmados, outros, fotografados.

Além disso, foram arrolados: questionários respondidos pelos professores, mapas conceituais criados pelos grupos, cópias das atividades propostas pelos professores, cópias dos protocolos dos alunos durante o experimento-piloto, observações feitas pelos professores-observadores durante a aplicação do piloto, cópias dos protocolos elaborados pelos alunos durante a aplicação da seqüência, mensagens enviadas pelos professores por *e-mail* e folhas de *flip-chart* elaboradas pelo professores formadores. Acrescentamos o nosso diário pessoal de observação.

Descrição e análise da produção docente

Nas primeiras reuniões, após consultarem alguns livros didáticos de oitava série, os docentes expõem suas opiniões. Pode-se notar que os presentes ainda não encontraram aquilo que seria o livro "ideal" ou uma seqüência conveniente, pois sempre há algo que lhes desagrada: tabelas, gráficos, diagramas de Venn, porcentagem. Suas considerações são subjetivas, tais como: "não gosto do livro porque começa com gráficos"; "gráfico assusta mesmo"; "o livro não seria bom, porque começa com diagramas, que embaralham o aluno, e traz tabelas"; "o livro não apresenta localização de pontos no plano cartesiano"; "o livro que eu consultei começa com exemplos de porcentagem e com aplicações, sem trabalhar com gráficos"; "porcentagem assusta"; "os livros deveriam ter mais explicações relacionadas com o dia-a-dia"; "consultei três livros e achei tudo muito tradicional"; "achei um livro interessante, pois não começa direto com o conceito de função, começa com exemplos". Em suma, para os professores, o diagrama embaralha, o gráfico assusta e a tabela não é bem-vinda.

Nos primeiros encontros, as discussões cobriram uma variedade de temas ligados ao conceito de função, mas ainda não se observa nenhuma iniciativa para uma produção escrita. A partir da quinta sessão, eles se organizam em três grupos (A, B e C) e aparecem os primeiros textos.

O grupo A é formado por quatro professores, que três com pouca experiência no magistério. O primeiro texto, produzido pelo professor Juliano, é um roteiro. Nele se encontra a primeira tarefa: pede-se que o aluno relacione as várias definições de função que são encontradas em dicionários. Essa proposta foi considerada válida pelo grupo e depois descartada.

O roteiro do professor Juliano prossegue, mas toma outro rumo, pois as próximas tarefas, que mencionamos a seguir, não se não se conectam entre si nem se relacionam com a primeira: estabelecer o conceito de função no cotidiano, por meio de exemplos; dar exercícios com tabelas, figuras geométricas onde se possa aplicar a função e sua lei; mostrar exemplo de entrada e saída de "máquinas"; localizar pontos no plano, definição e exemplos de função constante; função polinomial do 1º grau, análise de gráficos e função quadrática.

A partir da manipulação de livros didáticos, pouco a pouco, esse grupo avançou. Primeiro procurou reformular uma atividade de um livro de oitava série; a seguir, criou uma nova atividade, a partir de uma situação do dia-a-dia (restaurante por quilo); e, por último, um dos integrantes do grupo identificou uma situação funcional em um livro de outra série, em um capítulo sobre proporção, mapas e escalas. Assim, entre os itens do roteiro original, os professores foram fiéis somente ao que propunha o estabelecimento do conceito de função no cotidiano.

As organizações esboçadas giraram em torno de relação entre grandezas diretamente proporcionais, mas não houve uma explícita referência à função linear nem atenção ao coeficiente de proporcionalidade. As noções de variável, variação ou taxa de variação não foram mobilizadas nessas três atividades.

Os professores conseguiram explicitar algumas questões: como averiguar se os alunos sabem o que é uma tabela ou como explicar para um aluno o que é uma tabela. Entretanto, a única tabela que apareceu em uma atividade proposta pelo grupo A está totalmente preenchida. Há uma proposta sobre como obter a expressão algébrica y = 12x a partir de uma tabela: "*A gente tem um fato gerador que vai acontecer sempre. Se eu escrevesse de um jeito que aparece uma constante, fica mais fácil*" (Prof. Flávio, 4/6/2004.) A tabela é refeita para que apareça o número 12 em todas as linhas da segunda coluna (variável y).

Esse grupo se manteve no momento cultural-mimético e iniciou uma exploração de tarefas centrada na redação das mesmas. O diálogo abaixo mostra as dificuldades dos professores.

Juliano: "*Você fala tanta coisa boa. Você precisa formalizar*."

Flávio: "*Eu sei, mas é isso que eu não consigo: formalizar.*"

Flávio: "*Eu não entendo o conceito. Como vou entender o que o aluno entende?*"

Juliano: "*O que é um conceito? Qual é o significado de função?*"

Flávio: "*É uma dependência.*"

Juliano: "*De quê?*"

Hortência: "*Ele tem que entender que Maria vive em função de João.*"

Percebe-se que o discurso sobre funções limita-se ao uso da palavra função fora do contexto matemático. Além disso, não conseguem explicar o que é dependência ou o que é função, e acreditam que gráficos de funções são linhas contínuas, pois "*se não ligar os pontos não é função*" (Professora Hortência, 4/6/2004).

Por diversas razões, três dos quatro professores desse grupo desistem da formação ao término da primeira fase, que coincidiu com o início das férias escolares. Esse grupo deixou três atividades isoladas, sem um texto que explicitasse os objetivos de cada atividade, apesar de se terem detido na questão da escrita de objetivos e de pré-requisitos necessários para o ensino de função, com base em uma leitura feita em voz alta de um livro didático, na parte dedicada ao professor, na última reunião em que estiveram juntos.

A seguir, descrevemos o grupo B, que é formado por uma estudante de 1º ano de licenciatura e três professores experientes, que trabalham na mesma escola e têm um histórico de participação em formações continuadas. Eles apresentaram uma seqüência de ensino, com material copiado de quatro fontes. Um ponto positivo é que essa seleção levou a uma seqüência de ensino que contempla diversos tipos de tarefas:

manipular materiais concretos; conceituar função como relação entre grandezas; conceituar função como máquina de entrada e saída; conceituar função como padrão de regularidade; e conceituar função como padrão de seqüências geométricas. Contudo, os professores não se dão conta da falta de articulação entre essas atividades.

Excluindo a primeira atividade (*Dobrando papel*), os participantes não modificam a organização didática proposta pelos autores dos livros consultados, exceto pela inclusão de uma ou outra tarefa. A análise *a priori* mais detalhada é aquela da primeira atividade, a mais trabalhada pelos professores, que utiliza material concreto e trata da concepção de função como padrão de regularidade.

A organização matemática em torno do tipo de tarefas que consiste em conceituar função como relação entre grandezas aparece em quatro das sete atividades copiadas. A primeira dessas atividades é um exemplo resolvido – *Brincando no parque*. Uma das professoras tem a convicção de que basta apresentar um exercício resolvido aos alunos, que eles resolvem outros, parecidos. Essa concepção de ensino determinou a organização didática escolhida: um texto que se propõe a explicar o que é e para que serve a linguagem algébrica e uma série de instruções.

Após uma leitura, os professores procuram estabelecer objetivos para cada uma das sete atividades. Entretanto, isso não é uma fácil tarefa, pois ora a lista está incompleta, ora há objetivos que a atividade não contempla. Os objetivos estabelecidos pelos professores podem ser sintetizados da seguinte maneira: relacionar variáveis; perceber dependência; usar tabela; preencher tabela; determinar a lei; plotar pares ordenados; construir gráfico; expressar a lei na língua materna; aplicar função na geometria; explorar a idéia de função afim; e trabalhar a idéia de função.

Esse é o único grupo que tem claro que é preciso estabelecer objetivos; entendemos que esse grupo tenta ultrapassar o momento mimético-cultural, pois escrever objetivos, de próprio punho, pressupõe examinar a redação das tarefas copiadas.

A inquietação entre o que foi elaborado e a própria experiência apareceu nos diálogos entre as professoras Pérola e Margarida. A primeira mostrou-se preocupada com o fato de que a seqüência de atividades não trazia o conceito de relação. Afirmou estar acostumada com a situação-problema, a partir da qual trabalhava com relação e, depois, com função.

Margarida disse que, nas suas aulas, abordava relação antes de função e acreditava ser necessário focalizar os dois conceitos simultaneamente para que o aluno perceba a diferença. Lembrou que, no ensino médio, o aluno vai trabalhar com relação e função. Nesse momento, as duas professoras acreditaram que o conceito de relação deveria anteceder a primeira atividade – *Dobrando papel*.

Graças à troca de experiências e aos relatos de dificuldades pessoais, os professores concluíram não ser necessário introduzir relações e diagramas de flechas em uma oitava série, independentemente das sugestões encontradas nos PCNs (1998) de Matemática a respeito do assunto. Decidem como começar a seqüência de ensino: pela organização matemática em torno da concepção de função como padrão de regularidade.

No final dessa primeira fase, esse grupo escolhe cinco atividades, que incluem as quatro sobre relação entre grandezas, e toma a iniciativa de aplicar um experimento-piloto com dez alunos de uma das oitavas séries da escola onde trabalham.

Na segunda fase, após terem assumido o papel de observadores durante a aplicação do piloto e de terem refletido coletivamente sobre a produção discente, eles perceberam que deveriam modificar suas práticas. Na terceira fase, os dois professores remanescentes reformulam, descartam e criam novas atividades, trabalhando colaborativamente com os demais participantes dessa fase.

A seguir, vamos analisar as primeiras produções do grupo C, formado por três professores. O primeiro material trazido é um roteiro que enfatiza a localização de pontos, a Batalha Naval, o registro de dados, a criação de situações que estão sujeitas a mudanças. Esse roteiro propõe familiarizar o aluno com gráficos, a fim de facilitar a visualização da relação entre grandezas. Propõe também criar uma linguagem que traduza uma situação. Excluindo um debate sobre Batalha Naval, que levou à exclusão desse jogo, esse roteiro não é levado em consideração pelos outros integrantes do grupo. Nem o autor conseguiu ser fiel à sua própria proposta sobre gráficos, pois ele confessa suas dificuldades em elaborar tarefas sobre gráficos.

Dois professores trazem atividades selecionadas a partir de algum material impresso. Esse material trata da concepção de função como relação entre grandezas e da concepção de função como padrão de regularidade.

Após uma leitura, muitas atividades foram descartadas. A seguir, eles discutiram a viabilidade de fazer experiências em laboratório de Física, que envolvem grandezas diretamente proporcionais, mas as descartaram. Excluíram também: a construção de triângulos eqüiláteros utilizando o *software* Cabri-Géomètre II para relacionar o valor do perímetro com o valor do lado; o trabalho com tabelas na planilha Excel; atividades que utilizam o Teorema de Pitágoras; e atividades que demandam leitura e interpretação de gráficos.

O trabalho coletivo desse grupo foi marcado, inicialmente, por alguns momentos de tensão entre dois professores. Contornados os problemas, um clima de cooperação se estabeleceu e isso levou à pergunta: *como redigir uma tarefa?*

A resposta a essa pergunta trouxe diversos questionamentos de caráter tecnológico, pois eles perceberam que, para melhorar a redação da tarefa, é preciso saber o que é um gráfico (ou tabela), não só saber fazer um gráfico (ou tabela). Contudo, ainda não escrevem tarefas sobre leitura e interpretação de gráficos.

Assim, o grupo superou o momento mimético-cultural e conseguiu avançar para o segundo e terceiro momentos didáticos. Cabe registrar que apenas dois professores desse grupo continuaram na formação até o final.

Após esta apresentação dos três grupos, passaremos a discutir a organização matemática e didática elaborada pelos participantes em torno de cada concepção de função: interdependência entre grandezas; padrão de regularidade de padrões geométricos; e função como máquina de entrada e saída.

Os critérios de seleção das atividades para este artigo foram: a riqueza dos debates por elas suscitados, os quais conduziram à emergência e à superação de dificuldades conceituais; a consideração de terem implicado um processo de construção de uma organização didática; ou o fato de se constituírem numa proposta diferente daquela encontrada em livros didáticos.

Interdependência de grandezas

Começamos por destacar uma das iniciativas do grupo A. Um dos seus integrantes começa a leitura de um capítulo de um livro de 7ª série, que trata razões e proporções e apresenta mapas e escala. Chamou a atenção de um deles o seguinte enunciado: "A distância entre Guarapari (ES) e Contagem (MG) é de 355 km. Calcule a distância aproximada entre Contagem e Barra Mansa (RJ) e entre Barra Mansa e Guarapari." (Bongiovanni et alii, 7ª série, 1996, p. 54). Esse texto está acompanhado de um mapa que mostra os estados de Minas Gerais, Espírito Santo e Rio de Janeiro, um triângulo com vértices em três cidades e, ao lado do mapa, a escala. Um dos professores conseguiu perceber uma situação funcional e comenta: "$y = ax$ *O a é a escala*" (Professor Flávio, 25/4/2004). Ele dita o seguinte texto aos demais presentes:

> *Usando a régua, determine a distância, em centímetros, de Contagem a Guarapari, para obtermos a escala, ou seja, a conversão da medida ilustrada no mapa. Com essas medidas, podemos determinar as medidas reais entre as cidades? Podemos afirmar que a distância entre as cidades, a qual chamaremos de y, será igual ao valor encontrado com o uso da régua, multiplicado pelo valor da escala?* (Professor Flávio, 25/6/2004)

Consideramos um fato positivo essa tentativa de fazer conexão entre mapas, escala e função linear, pois ela não é usualmente encontrada nos livros didáticos de Matemática de oitava série. Entretanto, esse grupo não conseguiu avançar na proposta delineada: a proporcionalidade não foi explicitada; não apareceu a sugestão de completar uma tabela nem de como construir um gráfico; e a noção de variável não foi trabalhada.

Os professores conseguiram perceber que, se tomassem a informação contida no mapa – a distância entre as duas cidades (355 km) e o resultado da medição feita com a régua de um dos lados do triângulo (5 cm) –, o resultado da divisão seria a escala, e a expressão algébrica a ser obtida seria $y = 71x$, mas não conseguiram explicitar os passos para que um aluno pudesse chegar a esse resultado. Não aprofundaram o discurso tecnológico sobre escala, pois o texto produzido não faz referência à escala apresentada no texto.

Essa atividade não será mais retomada pelo grupo A. Ela será socializada, mas os participantes da formação, durante a terceira fase, a descartaram. Talvez porque o professor Flávio não estivesse mais presente.

Uma outra hipótese é que os docentes têm dificuldades em relacionar proporção e função linear. Quando colocamos em pauta a demonstração de que o gráfico de uma função linear é uma reta, a fala do professor César é reveladora:

> *A gente usa {os triângulos}, mas não reflete sobre eles. {...} Trabalhei a proporcionalidade, mas quando entrou na função não falou mais nada e nem eu fiz a ligação. {...} Fica uma lacuna lá no meio e você não liga nem a pau.* (Professor César, 17/9/2004)

Essas palavras expõem a fragmentação de conteúdos, mas também a dificuldade de relacionar proporção e função linear. O fato corrobora uma das conclusões de Comin (2000, p. 76), segundo a qual, para professores franceses, proporcionalidade e função linear são independentes.

A seguir, analisaremos a construção da atividade *Almoçando no restaurante*.

O primeiro esboço surgiu durante a primeira fase e foi elaborado por dois integrantes do grupo A. Eles escreveram, no cabeçalho, a informação: "o restaurante cobra R$ 1,30 pelo consumo de 100g de comida" e construíram uma tabela, já preenchida, que mostra o valor cobrado em função da quantidade de comida consumida pelo cliente. Os valores do consumo de comida variam de 100 em 100 gramas.

A seguir, propuseram um texto que informava o consumo de quatro pessoas: "Algumas pessoas foram ao restaurante e consumiram as seguintes quantidades de alimentos, mais uma lata de refrigerante de R$ 1,20 cada. A pessoa A consumiu 250g, B consumiu 320g, C consumiu 410g e D consumiu 520g" (Grupo A, 18/6/2004).

Escreveram as seguintes tarefas:

> 1) Qual o valor pago por cada pessoa? 2) Olhando a tabela, qual a lei de formação da função? O que é lei? 3) Qual é a função que relaciona o peso (p) ao valor a ser pago (V)? 4) Notamos que precisamos atualizar a tabela ou apenas faríamos o uso da lei se o consumo fosse de 250g, 210g e 180g? 5) Se uma pessoa consome, em média, 400g por dia, de segunda a sexta-feira, em 4 semanas, quantos por cento, em relação a um salário mínimo (R$ 260,00), ela gastaria? (Grupo A, 18/6/2004)

Consideramos um avanço a construção de uma organização matemática em torno desse tipo de tarefa: afinal, trata-se de conceituar função como relação entre grandezas, com a criação de enunciado e de tarefas, a partir de um dado real da sociedade brasileira, já que restaurantes por quilo estão disseminados em muitas das nossas cidades.

A atividade utiliza valores praticados pelo mercado, pois R$ 13,00 por quilo de comida é um dos preços encontrados na cidade de São Paulo, no ano de 2004; também mostra a prática comum de informar o preço de cem gramas de comida. Outro ponto interessante é a preocupação com o social, que se evidencia pela associação entre nome do restaurante (Fome Zero) e valor do salário mínimo então vigente. Assim, o enunciado se coaduna com as sugestões encontradas nos PCNs de Matemática de 1998.

Entretanto, a tabela não está pronta, pois não há referência a tarefas sobre construção de gráficos, não se evoca a proporcionalidade exibida na tabela e a noção de variável não é trabalhada. Além disso, o enunciado do item 2 revela o ponto de vista de que basta olhar a tabela para fazer a passagem de uma tabela numérica para a fórmula. Não está claro se a expressão algébrica pedida é $V = 13p$ (p em kg) ou $V = 0{,}013p$ (p em gramas), pois há diversas informações no enunciado: o restaurante é por quilo, cobra R$ 1,30 pelo consumo de 100 g de comida e, na tabela, a informação sobre quantidade de comida é dada em gramas.

Outro ponto: os professores não se questionaram sobre pertinência do enunciado do segundo e terceiro itens, pois não se deram conta de que ainda não tinham introduzido a noção de função. Para completar, os professores não fizeram um levantamento das possíveis dificuldades dos alunos para resolver as tarefas pedidas.

Essa primeira versão foi distribuída aos integrantes dos outros dois grupos. Um dos seus proponentes, o professor Juliano, fez uma reformulação dessa atividade e, na terceira fase, essa segunda versão começou a ser discutida coletivamente, na sua presença, pois chamou a atenção dos demais participantes.

Os conceitos de *massa* e *peso* entraram os debates iniciais, uma vez que as balanças etiquetam como peso aquilo que a Física considera massa. Isso levou a considerações sobre a importância da linguagem científica na sala de aula.

Uma terceira versão é elaborada pelo professor Juliano. Enfim, após debates que envolveram a questão da construção de um gráfico de uma função por translação a partir de um gráfico de uma função linear (uma novidade para alguns dos presentes) e a compreensão da expressão "função afim", os professores chegaram à versão final, que foi incluída na seqüência de ensino.

Nessa última versão, há esclarecimentos sobre a utilização das palavras *massa* e *peso*, um esquema que apresenta os três visores de uma balança, com os respectivos rótulos: *peso*, *preço por quilograma*, *valor a ser pago*. A organização matemática gira em torno do seguinte tipo de tarefa: *conceituar função como interdependência de duas grandezas*. Esse tipo arrola as seguintes tarefas: completar os espaços em branco (visores); explicar que o valor a ser pago depende da quantidade de comida; escrever uma fórmula que relaciona o preço a pagar com a quantidade de comida (sem e com o preço de um refrigerante); construir o gráfico de duas funções definidas por $V = 13x$ e $V = 13x + 1{,}5$ e utilizando o mesmo sistema de eixos; verificar se o segundo gráfico poderia ter sido construído de uma maneira mais rápida, traçando uma semi-reta paralela à primeira e 1,5 unidade acima; verificar se é possível unir os pontos; construir o gráfico de três funções definidas por $V = 13x$, $V = 12x$ e $V = 14x$, utilizando o mesmo sistema de eixos; e verificar a quantidade de comida que pode ser consumida com uma determinada quantia de dinheiro.

A organização didática foi bastante discutida pelos professores, que abordaram: a redação de um texto, esclarecendo a diferença entre massa e peso; a redação das tarefas; a apresentação dos eixos coordenados; o desenho dos retângulos (visores da balança); o pedido para o aluno usar lápis de cor; a inclusão de explicações com o objetivo de fazer o aluno escrever com suas próprias palavras uma introdução ao discurso tecnológico sobre dependência e translação; e a comparação da inclinação de gráficos construídos em um mesmo sistema de eixos. Todavia, não houve uma preocupação com o tempo que os estudantes precisariam para resolver essa atividade, com tantas tarefas.

A seguir, passaremos a analisar uma das atividades propostas pelo grupo C, que trata do cálculo da área da região delimitada por quadrados, a partir da medida do lado. Essa proposta provocou debates sobre a noção de área e sobre a construção de gráficos.

A professora Rosa dizia ser importante colocar a construção de gráficos desde a primeira atividade. Isso provocou um desabafo de seu colega, que tanto tinha insistido em começar o estudo de funções pela Batalha Naval:

> *Como é difícil falar de gráfico, eu tenho dificuldade porque não consigo falar para o aluno. É tão óbvio para mim, por que eu não consigo falar para o outro? Isso me dá uma angústia! Antigamente não, mas depois que eu vim para o projeto {...}*. (Professor César, 25/6/2004)

O *como pedir* a construção de um gráfico levantou a questão de como apresentar um texto para o aluno, quais seriam as iniciativas que um professor poderia tomar diante da classe, além de suscitar a formulação de hipóteses sobre as reações dos alunos. Foi a primeira vez que se estabeleceu um diálogo sobre uma organização didática.

No rastro dessa discussão, surgiu a questão do porquê de a variável independente ser representada no eixo horizontal. A professora Rosa informou que encontrara um livro onde estava escrito ser importante lembrar que x é na horizontal, mas que nele não havia uma explicação para tal afirmação. A declaração de "que está cansada de olhar os livros e não encontrar aquilo que precisa" é um indício de que essa professora começa a ter uma postura investigativa. César acredita que os alunos não saberão discriminar a variável independente da variável dependente:

> *Quando for dizer quem é horizontal e quem é vertical. E tem que falar quem é dependente ou independente. Dá problema porque eles acham que aumentar o lado aumenta a área, mas para aumentar a área precisa aumentar o lado.* (Professor César, 25/6/2004)

Surgem então várias questões sobre gráficos e números reais:

> Qual a origem das palavras abscissa e ordenada? Será que os alunos vão construir um gráfico de barras a partir de uma malha quadriculada? O professor deve mostrar gráficos que aparecem em jornais? Distribuir folha de papel quadriculado? Distribuir folhas de papel com pontos? Deixar o aluno traçar os eixos? Quais letras utilizar para nomear os eixos? Como explicar par ordenado (lado, área)? O que fazer para que o aluno elabore uma escala correta? O que fazer se o aluno não conseguir construir o gráfico?

> Perguntar ao aluno (ou não) se é possível marcar um ponto entre aqueles que ele marcou? Pedir ao aluno (ou não) explicações sobre a "forma" do gráfico? O que fazer se o aluno disser que o gráfico é uma reta? (Grupo C, 25/6/2004)

E a respeito de variáveis:

> Como dizer qual é a variável dependente e qual a variável independente? Escrever no texto (ou não) qual variável é representada no eixo horizontal? (Grupo C, 25/6/2004)

Sobre números reais, domínio e imagem de uma função:

> Falar (ou não) sobre números reais? Introduzir (ou não) domínio e imagem? Perguntar (ou não) os valores possíveis de *r* (área do quadrado) e *s* (lado do quadrado)? (Grupo C, 25/6/2004)

Ao longo da discussão, o grupo apresentou várias sugestões para levar o aluno a localizar um ponto no plano cartesiano:

> Trace uma reta vertical e outra reta horizontal que se interceptam; dê nomes aos eixos: r e s; registre as informações da tabela em um único ponto; coloque os pares; coloque as duas informações em um ponto, cada lado com sua área; associe o lado com a área; a cada figura, tem-se um par de informações (lado, área); a cada par de informações correspondentes determina-se um ponto. (Grupo C, 25/6/2004)

Sobre tabelas, surgiram diversas propostas: organize os dados de lado e área; organize os registros de lado e área encontrados em relação à medida da área e do lado no espaço abaixo; registre os resultados encontrados; organize os resultados encontrados; construa uma tabela com esses dados; registre na tabela abaixo; registre os resultados que você encontrou; registre os resultados que você obteve; registre os resultados que você observou. Mas, diante de tal profusão, os professores ficaram indecisos quanto à melhor redação.

Enfim, os professores falavam abertamente sobre suas dificuldades em como pedir a construção de um gráfico, em como pedir uma tabela, em como pedir uma expressão algébrica. Um marco importante, percebido pelos próprios professores, foi que eles estavam escrevendo juntos.

Em síntese, os professores desse grupo não estão mais copiando ou fazendo uma leitura acrítica de atividades, sem preocupação com o aluno. Gráficos e tabelas se tornaram o centro das atenções, e entrou em cena a noção de variável, ao lado da necessidade de explicar como construir um gráfico. O ato de criação é a grande novidade para esses professores, pois "*Nunca fizemos isso!*" (Professor César, 4/6/2004).

Como vimos, desde o início da formação, foram registradas expressões empregadas pelos integrantes desse grupo que denotavam suas dificuldades em trabalhar didaticamente com gráficos e tabelas: "gráfico assusta, os alunos travam na hora de construir o gráfico de uma função polinomial do 2º grau; como é difícil falar de gráficos, isso me dá uma angústia; não consegui fazer alguma coisa que fizesse construir o gráfico". Sobre os alunos, os professores diziam: "eles não registram direito na tabela; eles podem até perguntar o que é tabela; se ele conseguir entender o exercício, a tabela sai; quando trabalha com material concreto, ele consegue enxergar melhor uma tabela; como ele vai construir a tabela sem conhecer a lei?"

Agora esses docentes têm outras preocupações: *Como redigir uma tarefa?*

A resposta a essa pergunta trouxe diversos questionamentos de caráter tecnológico, pois eles perceberam que, para melhorar a redação da tarefa, é preciso saber o que é um gráfico (ou tabela), não só saber fazer um gráfico (ou tabela). Contudo, ainda não há tarefas sobre leitura e interpretação de gráficos.

Na atividade sobre lados e áreas de quadrados, logo após a tarefa de organizar os dados, ou seja, preencher a tabela, que utiliza números inteiros para medida do lado (em metros) do quadrado: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, o professor César propõe um texto. É interessante notar que, nele, aparecem as expressões *variação de lado* e *relação*, e uma justificativa para a utilização de expressão algébrica, que seria resumo de uma tabela, com caráter generalizador:

> *Você observou que os itens anteriores mostram que há variações de valores de lado em relação à área, ou seja, alterar a medida dos lados significa alterar a medida das áreas. Percebe-se que nem sempre é possível registrar todas as medidas imagináveis na tabela, seria humanamente impossível*

> *fazê-lo. Pensando na relação que existe entre a medida do lado e da área, pode-se utilizar uma maneira capaz de "reunir" todas as informações que se imagina, com o auxílio de uma linguagem algébrica*. (Professor César, 25/6/2004)

Houve um avanço, pois o professor César conseguiu escrever um texto sobre variação e generalização no qual sugere olhar expressão algébrica como a redução ostensiva[3] de uma tabela.

Apesar de a atividade sobre áreas de regiões delimitadas por quadrados não ter sido incluída na seqüência de ensino, ela propiciou importantes reflexões sobre os conceitos de função e de área. Está claro que, à medida que os docentes construíam a organização didática, eles reconstruíam a organização matemática envolvida.

Na terceira fase, a dupla Rosa e César propõe uma atividade, *Esvaziando reservatório*, uma reformulação de uma antiga proposta apresentada por César na primeira fase. Na primeira versão, o volume de água de uma caixa d'água aumentava em função do tempo em que um dispositivo permitia a entrada de água. Essa versão foi elaborada a partir do seguinte texto: "Uma caixa d'água, com capacidade para 1.000 litros, contém 150 litros de água. A cada minuto, o dispositivo automático (bóia) que auxilia no enchimento da mesma despeja 10 litros de água" (Professor César 18/06/2004). Esse texto era acompanhado de um gráfico incompleto, sobreposto ao desenho de um paralelepípedo, e apresentava uma única tarefa: determinar a expressão que relaciona o tempo e o volume.

A segunda versão foi apresentada na terceira fase, quando se nota a utilização das expressões *variável independente* e *variável dependente:*

> *O desenho a seguir mostra um reservatório que contém água (litros) e se esvazia sempre na mesma proporção à medida que as horas (tempo) passam e a partir do momento que um registro é aberto quando atinge sua capacidade máxima, que é de 1.000 litros. O tempo que o registro ficará aberto é variável e é independente do nível em que está a água. O nível de*

3 Segundo Bosch e Chevallard (1999), os *objetos ostensivos* são aqueles que têm uma certa materialidade, como as palavras e os grafismos. Os *objetos não-ostensivos* são todos os "objetos", como as idéias, as intuições e os conceitos, que existem institucionalmente, mas que não podem ser vistos, percebidos ou mostrados por si mesmos.

> *água por sua vez também é variável, só que é dependente do tempo em que o registro ficará aberto*. (Professores César e Rosa, 26/8/2004)

O texto apresenta as seguintes tarefas: observe a tabela a seguir e marque no gráfico desenhado, em uma das faces do reservatório, os valores que se correspondem (litros e tempo); preencha também os valores em branco da tabela.

A terceira versão, denominada *Esvaziando reservatório*, propiciou momentos para debates sobre os conceitos de *taxa de variação*, *domínio de uma função* e *função definida por duas sentenças*.

O enunciado dessa versão foi o seguinte: "Um reservatório de água com capacidade de 1.000 litros está cheio. O registro é aberto para esvaziá-lo e um cronômetro é acionado no instante em que se inicia o escoamento, como ilustram as figuras abaixo".

Abaixo do texto, há desenhos que mostram o esvaziamento de um reservatório e os visores de um cronômetro, como se pode verificar na Figura 1.

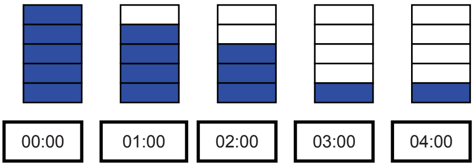


Figura 1 – Reservatório e cronômetro

Fonte: Material disponibilizado pelos professores César e Rosa

Os autores propõem as seguintes tarefas:

a) Observando as ilustrações acima, preencha a tabela (Tabela 1).

Tabela 1 – Esvaziando o reservatório

Tempo	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
Volume	1000		800		600			200	

b) Represente no gráfico o que você observou na tabela (o espaço reservado para o gráfico apresenta uma malha quadriculada com os eixos, com indicações das variáveis volume e tempo). c) Para valores acima de

5 horas, quais seriam seus pares correspondentes em litros? d) Os pontos estão alinhados? e) É possível unir os pontos do gráfico? Justifique.

Os professores incluíram a palavra "constante" no enunciado, após a palavra "escoamento", pois o professor Juliano acreditava que os alunos teriam que aprender o que é *vazão*. Acrescentam a pergunta: "Qual é a vazão?"

O professor César deu a seguinte explicação sobre o terceiro item: "*o aluno precisa entender o momento em que o gráfico acaba*", pois, "*para valores acima de cinco horas, a caixa fica vazia*". A partir dessa explicação, estabeleceu-se uma discussão sobre o domínio da função. Os professores ficaram intrigados quando questionados sobre as duas possibilidades que poderiam ocorrer: desligar o cronômetro no instante em que a caixa d'água não contiver mais o líquido ou deixá-lo ligado após o completo esvaziamento do reservatório. Decidiram então incluir a pergunta: "Se o cronômetro continuar funcionando, qual a quantidade de água no reservatório no instante $t = 7$? Represente no gráfico essa situação". Em seguida, apareceu a sugestão, que foi aceita, de mais uma pergunta: "Verifique se o seu gráfico está representando a situação de o cronômetro continuar funcionando após o esvaziamento do reservatório".

Um dos professores sugeriu que o aluno deveria fazer outro gráfico para valores de $t > 5$, pois lhe parecia haver ali uma outra função.

Foi necessário retomar a questão de uma função definida por várias sentenças, assunto já debatido na primeira fase, quando emergiram questionamentos sobre a palavra *lei* (lei de formação) durante uma discussão sobre como obter uma expressão algébrica a partir de uma tabela. Para os professores, *lei* estava atrelada a uma única expressão algébrica, conforme se pode observar nas afirmações: "*Se é uma lei, não quebra nunca*" (Plínio, 28/05/2004); "*Eu sempre penso na lei como uma coisa só. Tem função para tudo isso?*" (Professor César, 28/5/2004). Contudo, ainda persistia a crença de que uma função só pode ser expressão como uma única expressão algébrica. Foi necessário analisar a função definida por duas sentenças, que fornece o volume (em litros) em função do tempo (em horas):

$$v(t) = \begin{cases} 1000 - 200t & \text{para } 0 \le t \le 5 \\ 0 & \text{para } t > 5 \end{cases}$$

Enfim, o professor César concluiu que a redefinição do domínio tornou a atividade mais interessante.

Apesar das divergências sobre colocar ou não uma questão sobre dependência, após algumas deliberações, os professores incluíram a seguinte pergunta: "O volume de água observado no reservatório depende do tempo transcorrido? Explique".

Da frágil e incompleta organização didática inicialmente apresentada pelo professor César, na primeira fase dessa formação até a quarta e última versão da atividade sobre reservatório de água, surgiu uma reformulação do enunciado com uma melhor apresentação visual, com o acréscimo de cinco desenhos que representam a face frontal do reservatório, graduada, indicando o nível de água em cada instante; acrescente-se que, abaixo de cada desenho, está representado o visor de um cronômetro. Além disso, há uma ampliação do número de tarefas pedidas: observar ilustrações; preencher tabela; determinar a vazão; construir um gráfico; determinar o volume em determinado instante, após o esvaziamento do reservatório; localizar o ponto de coordenadas (7,0); e verificar se o gráfico está representando a situação de o cronômetro continuar funcionando após o esvaziamento do reservatório. Há a inclusão de duas explicações, uma sobre a necessidade de unir os pontos e outra sobre o porquê de o volume de água depender do tempo transcorrido.

A atividade foi incluída na seqüência de ensino e os professores se preocuparam com algumas possíveis respostas dos alunos, sobre o que fazer durante o fechamento desse item, caso as respostas dadas não fossem satisfatórias.

Essa atividade propiciou também a retomada do conceito de taxa de variação, já discutido em outras oportunidades durante a formação.

Diante do gráfico construído na lousa, que representa o volume d'água de um reservatório em função do tempo, um dos professores visualizou a vazão apontando para o ângulo agudo α, como se pode ver na Figura 2.

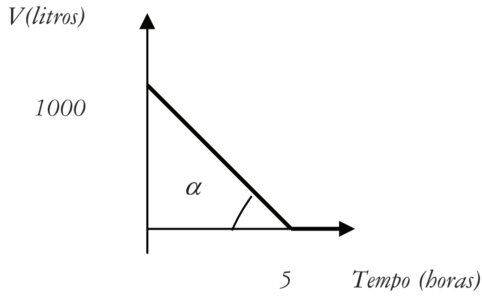


Figura 2 – Gráfico do volume em função do tempo elaborado por um professor

Fonte: Reprodução da lousa

Mais uma vez, foi necessário retomar conceitos de taxa de variação, de coeficiente angular, diante da confusão entre taxa de variação e ângulo; esclarecer a correta utilização dos termos: taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta.

Em outro momento, César afirmou que nunca olhara para o coeficiente como taxa de variação: "*Eu nunca tinha visto o coeficiente desse jeito.*" Margarida sentenciou: "*Essa taxa de variação. Já vimos, mas não ficou. Nós não usamos no dia-a-dia e não aplicamos na nossa aula*" (Professora Margarida, 22/10/2004).

A proposta de deixar o cronômetro ligado após o esvaziamento do reservatório provocou um acirrado debate entre alunos e professores na sala de aula, sobre o zero e o nada, durante o fechamento dessa atividade. Diante do gráfico do volume de água no reservatório em função do tempo, construído pela professora formadora na lousa, durante o fechamento da atividade, um dos alunos questionou sua construção, para os valores da variável *tempo* maiores que cinco horas, quando o reservatório já estava vazio. Para ele, zero é nada, então não podia admitir aquela linha horizontal, mesmo com o cronômetro ligado. O ponto nevrálgico é a questão do zero, um obstáculo epistemológico: "A associação de zero com 'nada' desloca esse obstáculo epistemológico para um aspecto psicológico e é causa de numerosos erros" (Almouloud, 2000, p. 125).

Todos se envolveram na polêmica, até o encerramento da sessão. O assunto foi retomado na avaliação dos fatos ocorridos na sala de aula, durante a aplicação dessa atividade. As discussões sobre o número zero, o nada, o conjunto vazio, reavivaram as lembranças de um dos professores quando estudante: "Quando comecei a estudar conjunto, eu não entendia por que o vazio não era zero", e também mostraram as dúvidas atuais: "Qual é a diferença entre o zero e o nada aí?" A polêmica gerada pelo número zero nos levou a falar sobre a noção de obstáculo epistemológico.

Em resumo, a criação dessa atividade mobilizou diversos conceitos: dependência, vazão, funções definidas por duas sentenças, o número zero, dentre outros, ampliando o discurso tecnológico dos professores.

A seguir, passaremos a examinar a organização matemática em torno da concepção de função como *padrão de regularidade*.

Função como padrão de regularidade

Agrupamos todas as propostas recebidas, copiadas de livros didáticos, na primeira fase, em torno do tipo de tarefa *conceituar função como padrão de regularidade*. Socializamos os textos e foram discutidas, na terceira fase, duas atividades: *Brincando com palitos* e *Dobrando papel*. A primeira foi selecionada para discussão porque foi apresentada por dois dos três grupos da primeira fase, e a segunda, por ter sido aplicada no experimento-piloto e escolhida posteriormente para ser a primeira da seqüência de ensino.

Brincando com palitos foi escolhida "por ser bonitinha", "porque está em todos os livros". Há uma frisa formada por palitos, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Seqüência formada por palitinhos

A seguir, são pedidas as tarefas: observe a seqüência de retângulos formados por palitos; com os palitos que você recebeu, continue a seqüência; em seguida, preencha a tabela abaixo. A tabela apresenta, na primeira linha, o número de quadrados, de um até nove; na segunda linha, o número de palitos que devem ser calculados.

O texto prossegue: "Como você poderia calcular o número de palitos necessários para formar uma "frisa" formada por 12 quadrados? Mostre os seus cálculos. Como você poderia calcular o número de palitos necessários para formar uma "frisa" formada por 100 quadrados? Mostre os seus cálculos. Se você tivesse 241 palitos, quantos quadrados conseguiria formar? Sobraria algum palito? Mostre os seus cálculos. Chamando de p a quantidade de palitos e de q a quantidade de quadrados, escreva a expressão algébrica que relaciona o número de quadrados q com a quantidade de palitos p. Com os registros da tabela, construa o gráfico que mostra o número de palitos em função do número de quadrados. Os pontos estão alinhados? É possível unir os pontos do gráfico? Justifique sua resposta."

A exaustiva veiculação de mensagens do tipo *o material concreto é um bom aliado nas aulas de matemática* fez com que os professores se deixassem levar por essa idéia na escolha da atividade para o estudo de seqüências geométricas, sem refletir sobre o processo de generalização. Assim, a atividade com palitinhos passou de "bonitinha", na primeira fase, para "muito perigosa", nessa terceira fase, depois de uma discussão sobre as diversas possibilidades de visualização, de falas e escritas, até a obtenção da fórmula que relaciona o número de palitos ao número de quadrados.

Essa atividade foi selecionada para ser a sexta da seqüência de ensino. Para surpresa dos professores que atuaram como observadores durante a aplicação de *Brincando com palitos*, os alunos não utilizaram o material concreto que lhes foi fornecido e a resolveram com facilidade.

Outra atividade, *Dobrando papel*, escolhida na primeira fase pelo grupo B, apresenta o seguinte enunciado: "Vamos dobrar a folha de papel e contar em quantas partes ela fica dividida". Os objetivos estabelecidos pelos professores para essa atividade foram: relacionar as variáveis, perceber a dependência e expressar na língua materna a "lei da função".

Do enunciado original para o texto apresentado pelos professores decorre: i) a criação de uma tabela, já preenchida, que fornece o número de partes em função do número de dobras (uma, duas e três dobras); ii) a criação das tarefas: a) Se pudermos continuar, com 5 dobras, quantas seriam as partes? E com 8 dobras? b) E quando o número de partes for 1.024, quantas dobras foram feitas? c) Qual é a sua conclusão? d) A professora Vera disse que, dobrando quatro vezes o papel conseguem-se oito partes. Ela está correta?" (Grupo B, 18/6/2004).

Na análise *a priori* feita pelos professores, para cada item, há uma preocupação com as maneiras de resolver as tarefas, isto é, com a técnica: "A princípio, o aluno completaria a tabela com a quarta e a quinta dobra e encontraria o resultado. Com oito dobras, daria muito trabalho e tentaria fazer sem a tabela. Alguns alunos irão fazer mentalmente" (Grupo B, 18/6/2004).

Sobre as possíveis respostas que poderiam surgir em relação à pergunta: "Qual é a sua conclusão?", eles afirmaram que "Provavelmente, o aluno dirá que o número de partes depende do número de dobras. A cada dobra, a parte duplica. Dobrar uma vez tem duas partes, dobrar duas vezes tem quatro partes, pensa na potência" (Grupo B, 18/06/2004). A pertinência dessa questão em uma primeira atividade será reavaliada pelos professores somente após a aplicação do experimento piloto.

Durante a confecção dessa atividade, a professora Margarida considerou que não seria necessário colocar uma questão sobre dependência, que isso seria "bobinho", uma vez que os alunos perceberiam essa noção. Depois da aplicação dessa atividade no experimento-piloto e posterior avaliação das respostas dos alunos, essa professora ainda insistia que dependência é uma noção espontânea.

Após debates, os professores perceberam que deveriam ter colocado uma questão que envolvesse explicitamente a dependência. Dentre as sugestões, optaram pela pergunta: "O número de partes depende do número de dobras?" Um dos presentes manifestou-se a favor da inclusão de uma tarefa que pedisse a discriminação de cada variável utilizada na atividade que estava sendo discutida: "*A gente quer que o aluno saiba as diferenças. Nós estamos falando de duas variáveis distintas. A gente precisa diferenciar as duas*". Porém, Marcos se opôs, pois acreditava que se corria o risco de "*fazer confusão difícil de tirar*". E Rosa concordou com a opinião de Marcos: "*Acho que não é o momento de falar de independência*".

No final do debate, a identificação das variáveis dependente e independente é excluída da atividade *Dobrando papel*. Mas essa exclusão gerou um outro problema: os professores se perguntaram como iriam explicar para o aluno que a variável independente é representada no eixo horizontal e a dependente, no eixo vertical.

A estudante Bruna deu pistas do problema que deveria ser enfrentado: "*Eu fiz o gráfico, mas fiquei na dúvida. Pode colocar a dobra no eixo deitado ou de pé? Tanto faz? Eu sei que eles estão ligados*". Depois dos devidos esclarecimentos, Bruna desabafou: "*Eu fiz muito gráfico na faculdade, mas não sabia que a dependente era no lugar do y e a independente no lugar do x*" (Estudante Bruna, 27/8/2004).

Marcos deu o seu depoimento sobre a construção do gráfico da função que relaciona o espaço percorrido por um móvel em função do tempo: "*Nunca soube por que em s = 80t, o t vai para x e s para y*". Ele revelou sua angústia nos momentos em que precisava construir um gráfico por desconhecer o fato de que a variável independente é representada no eixo das abscissas e a dependente, no eixo das ordenadas: "*Eu nunca sabia o que ia no x e no y. Me dava uma angústia!*" (Professor Marcos, 27/08/2004.)

Rosa lembrou dos gráficos produzidos por seus alunos: "*Eu acho que fiz muita besteira. Variável dependente, variável independente, está me dando um nó. Já aceitei muitas vezes a troca dos eixos*" (Professora Rosa, 27/08/2004). Na opinião de Margarida: "*Na verdade eles (os alunos) acabam aprendendo por intuição*".

Essas falas desnudam o fato de que, independentemente da faculdade cursada, da maior ou menor experiência na sala de aula com o tema *função*, os professores se sentiam inseguros para tratar das noções de variável independente e de variável dependente. Lembramos que Margarida e Marcos ministraram aulas sobre o tema começando pela relação entre dois conjuntos e utilizaram diagramas de flechas. A falta de clareza a respeito dessas noções afeta o seu saber, em termos chevallardianos, sobre funções e gráficos. Na primeira fase, vimos como alguns professores tiveram dificuldades para escrever uma tarefa que envolvesse a construção de um gráfico.

Foi necessário retomar, durante a discussão da atividade *Dobrando papel*, o conceito de função exponencial. Assim, apresentamos a função definida por $y = 2^x$ e sua inversa, a função logaritmo, definida por $y = \log_2 x$, para esclarecer qual é a variável independente em cada caso.

Os professores decidiram que *Dobrando papel* seria a primeira da seqüência. Incluíram nessa atividade uma segunda tabela e as tarefas: "É possível escrever o número de partes como potências de base 2? Em caso afirmativo, preencha novamente a tabela". Acrescentaram mais dois itens: "c) Existe uma limitação física para continuar dobrando o papel, mas você pode fazer isto mentalmente. Se você pensar em 8 dobras, quantas partes são obtidas? d) Se o número de partes for 512, quantas dobras devem ser feitas?"

Após a redação deste último item, surgiu uma dúvida em relação ao verbo que deveria ser utilizado: *justificar*, *explicar* ou *comentar*. A opção preferencial, porém, foi pelo verbo *explicar* e, assim, os participantes decidiram pela seguinte redação: "Explique sua maneira de obter o resultado". Fizeram uma análise *a priori* das possíveis respostas que os alunos poderiam dar, lembrando das observações feitas durante a aplicação do experimento-piloto.

Indagados sobre a escolha do tipo de papel que seria fornecido ao aluno para a construção do gráfico, os professores sugeriram: usar papel quadriculado e com eixos, informando número de dobras e número de partes; colocar um papel que não possibilitasse escrever um número no "quadradinho"; deixar só os eixos e as marcações "risquinhos"; empregar papel branco feito pelo *software* Cabri-Géomètre II com eixos e traços, sem números. Diante de tantas possibilidades, primeiro eles ficaram indecisos; depois acharam que poderiam aproveitar a oportunidade para testar duas opções de papel e ver o que aconteceria na sala de aula. Como se nota, isso mostra a emergência de uma atitude investigativa. A seguir, fizeram um elenco dos possíveis erros que poderiam ser cometidos ao construir o gráfico.

Os participantes discorreram sobre os objetivos da atividade *Dobrando papel*: introduzir a dependência de duas ações possíveis de serem medidas; ver a relação que existe entre o número de partes e o número de dobras; levar o aluno a perceber o número de partes como potência de base dois; fazer uma ligação com o conhecimento anterior; colocar dados em uma tabela; construir gráfico e escolher escala.

Se compararmos as discussões ocorridas no grupo B, na primeira fase, com essa última, envolvendo todos os participantes, podemos perceber avanços na formulação e escrita dos objetivos dessa atividade, agora mais coerentes com as tarefas propostas. Constata-se um aprofundamento das análises *a priori* devido à experiência adquirida na observação do experimento-piloto, bem como uma ampliação da organização matemática, com a inclusão de tarefas e uma organização didática mais detalhada.

Em síntese, a construção da organização matemática em torno da concepção de função como padrão de regularidade permitiu um discurso sobre generalização, dependência, variáveis, construção de gráficos e função inversa, potência de base dois. A elaboração da organização didática fez aflorarem as dúvidas sobre dependência e variáveis, e as discussões ajudaram a compreensão dessas noções.

Dobrando papel foi uma das atividades que propiciou debates sobre dependência e correspondência e que incluiu a utilização e compreensão dos ostensivos *f* e f(x), que foram da rejeição à inclusão desses ostensivos em uma das últimas atividades da seqüência (função como máquina).

Margarida afirmou que não conseguia perceber dependência, e sim *correspondência* em $P = 2^n$ (n é o número de dobras e p é o número de partes). Mas, utilizando $f(n) = 2^n$, essa professora afirmou perceber dependência e correspondência, simultaneamente. César supôs que suas dúvidas decorressem da sua formação, "*porque a gente tira p e põe, parece mágica*", e desabafou, declarando que isso "*mata a gente*". Marcos não se conformava com a falta de orientação, em sua época de estudante, sobre a utilização do símbolo *f*.

A professora Rosa admitiu que "*sentia antipatia pelo efe, uma frescurinha*". Como professora de Física, ela tinha mais contato com funções cuja variável independente é o tempo. Assim, sustentou que s(t) (espaço percorrido em função do tempo) ou *f*(t) (*t* é a variável tempo) tinha mais significado que *f*(x) (mesmo que se considerasse t = x).

As afirmações dessa professora colocam em evidência que uma simples substituição de ostensivos pode alterar a visão que se tem de uma situação: *t* é identificada como variável por se entender que o tempo flui, mas x parece não ter os mesmos atributos.

As dificuldades encontradas para dar significado ao ostensivo *f*, a "mágica" na troca dos ostensivos, a antipatia em relação a ele, tudo isso vai ao encontro das considerações feitas por Bosch e Chevallard:

> Uma praxeologia não é uma entidade estática, mas uma realidade dinâmica que cria e sustenta a ação e nós mostramos que a simples troca de um ostensivo pelo outro, sem uma modificação aparente da praxeologia inicial à qual estava inicialmente integrado, pode perturbar completamente a evolução da atividade, em todos os níveis (técnico, tecnologia, teoria e tarefas) até mesmo nos tipos de tarefas. (1999, p. 114)

Paulatinamente, os professores se sentem mais confiantes em tratar das variáveis dependente e independente e sobre a representação da variável independente no eixo das abscissas durante a (re)formulação da seqüência para o ensino e aprendizagem de função. Eles se fazem as seguintes perguntas: Como dizer ao aluno qual é a variável independente e qual é a variável dependente? Pedir (ou não) a identificação das variáveis? Colocar (ou não) questão sobre dependência? Escrever no texto (ou não) qual variável é representada no eixo horizontal? Que tipo de papel fornecer ao aluno para que ele construa um gráfico? Pedir (ou não) justificativas ou explicações?

Na redação final, das sete atividades propostas aos alunos, cinco pedem a construção de um gráfico, uma atividade pede a construção de gráficos de três funções utilizando um mesmo sistema de eixos e na última há tarefas sobre leitura e interpretação de um gráfico que fornece a temperatura de um forno em função do tempo. Além disso, há diversas questões sobre dependência e variáveis, como se pode observar na relação apresentada a seguir.

- *Dobrando papel*: O número de partes depende do número de dobras?
- *Brincando no parque*: O gasto total depende da quantidade de brinquedos utilizados? Complete, utilizando uma das duas palavras indicadas abaixo do traço:
- O número de brinquedos chama-se variável....

  dependente/independente
- O gasto total chama-se variável......

  dependente/independente.
- *Almoçando no restaurante*: O valor a ser pago depende da quantidade de comida? Explique com suas palavras.
- *Esvaziando reservatório*: O volume de água no reservatório depende do tempo transcorrido? Explique.
- *Função como máquina*: Neste caso, qual é a variável dependente?
- *A padaria*: A temperatura depende do tempo em que o forno está acesso?

Em resumo, os debates sobre dependência surtiram efeito não só para a escrita de tarefas, mas, também, na fala da professora formadora, ao fazer o fechamento das duas primeiras atividades, *Dobrando papel* e *Brincando no parque*, na sala de aula: "*Sempre no eixo das abscissas vai a variável independente; no eixo das ordenadas, vai variável dependente*" (Professora Margarida, 5/10/2004).

A seguir, passaremos a investigar a organização matemática elaborada em torno da concepção de função como máquina de entrada e saída, cuja discussão levou os docentes a uma melhor compreensão de função como máquina de entrada e saída.

Função como máquina

Uma atividade que trata da concepção de função como máquina de entrada e saída foi trazida pelo grupo B, na primeira fase. Ela não foi escolhida para ser aplicada no experimento-piloto, porém chamou a atenção dos participantes da formação na terceira fase. A primeira versão de *Função como máquina* é uma cópia fiel de uma atividade encontrada em um livro didático, exceto pelo desenho da máquina (Figura 4). O enunciado descreve o que faz uma máquina criada por uma menina:

> Rosângela bolou uma máquina interessante. Ela está programada para "multiplicar o número de entrada por dois e, a seguir, subtrair o resultado de uma unidade". Por exemplo, se entrar o número 8, sairá o número 15; se entrar o 20, sairá o 39. Note que os números de saída são obtidos em função dos números de entrada, isto é, os números que saem dependem dos números que entram.

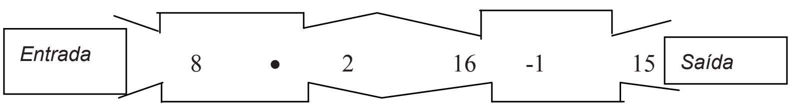


Figura 4 – O desenho da máquina de Rosângela
Fonte: Integrantes do Grupo B

A seguir, há uma tabela (Tabela 2) com números de entrada e saída da máquina:

Tabela 2 – Números de entrada e saída

N.entrada	-4/3	-1	-0,5	0	1/2	1,0	1,8	2,0	3	3,3	6
N.saída			-2	-1							

O texto apresenta as seguintes tarefas: a) Complete a tabela com os números que faltam. b) Se x representa a variável *número de entrada* e y a variável *número de saída*, qual a fórmula ou lei da função que fornece y em função de x? c) Neste caso, qual é a variável dependente? d) Se o número de entrada for 10, qual será o número de saída? e) Se o número de saída for 29, qual será o número de entrada? f) O número de saída varia de forma diretamente proporcional ao número de entrada? g) Em uma folha de papel quadriculado, construa um gráfico com os dados da tabela.

Na retomada, consideramos importante o fato de o professor Juliano ter percebido que aquilo que acontece dentro da máquina da Rosângela constitui uma função. Ele considerou que o aluno poderia ter o primeiro contato com a notação *f* nessa atividade e obteve a anuência de Margarida: "*Tem que mostrar para o aluno que essa máquina é a nossa função. E a gente tem que mostrar para o aluno que a máquina é função*" (Professora Margarida, 24/9/2004.)

O professor César apresentou suas dúvidas a respeito de como os alunos poderiam perceber a função como máquina e travou um debate com o professor Juliano.

César: "*Função é a máquina, mas não dá a impressão de que efe é o número de entrada? Como eles vão acreditar que a máquina é a função?*"

Juliano: *"Qual é a função da máquina?"*

César: "*É mudar o número.*"

César sugeriu que se escrevesse "*máquina, máquina,... uma hora o aluno cansa e põe m*". Assim, ele passou do retórico ao sincopado, conseguindo perceber função como máquina. Consideramos a escrita retórica aquela que não utiliza símbolos; a escrita sincopada já utiliza algum tipo de abreviação.

Os professores terminaram a discussão concordando que a atividade *Função como máquina* era uma oportunidade para introduzir a notação *f*, mas não sabiam como redigir um texto explicativo.

Em resumo, essa atividade ofereceu um ambiente propício para a aceitação e uso do ostensivo f(x). Lembrando que um signo precisa de um significado e de um significante, f(x) é um significante do objeto matemático função. Para designar esse funcionamento do objeto ostensivo como signo, Bosch e Chevallard (1999, p. 109) revelam a força semiótica dos objetos ostensivos. Os mesmos autores propõem a noção de instrumentalidade de um ostensivo da seguinte forma:

> O ostensivo tem um potencial instrumental, mas é somente no seu engajamento em um conjunto de técnicas institucionalmente

> determinadas, para executar determinadas tarefas, que faz dele um instrumento concretamente definido. Essa instrumentalidade será tanto maior na medida em que essas técnicas se mostrem robustas e confiáveis para a realização das tarefas concernentes. (1999, p. 107)

Pudemos perceber, ao longo da formação, que a semioticidade desse ostensivo emerge pouco a pouco, a partir das discussões sobre dependência, correspondência e máquina que modifica o número de entrada, acompanhada de uma retomada da instrumentalidade do mesmo.

Função como máquina foi reformulada com o acréscimo de novas tarefas: "Na máquina da Rosângela, para cada número real u que entra, sai o número real f(u). [...] Encarando a situação dessa maneira e pensando na máquina da Rosângela, que está programada para multiplicar o número de entrada por dois e, a seguir, subtrair o resultado de uma unidade, complete:

$$f(2) = \quad f(8) = \quad f(20) = \quad f(-1) = \quad f(1{,}8) = \quad f(\sqrt{3})$$

Além disso, há tarefas sobre: identificar a variável dependente, determinar o número de saída, dado o número de entrada; determinar o número de entrada, dado o número de saída; determinar a expressão algébrica que fornece o número de saída (s) em função do número de entrada (u); construir o gráfico colocando a variável independente no eixo horizontal.

Os professores incluíram o desenho de uma máquina, onde o número de entrada é denotado por u e o número de saída é denotado por f(u), e escreveram um texto: "Na máquina da Rosângela, para cada número real **u** que entra, sai o número real. Os números de entrada são elementos de um conjunto denominado *domínio da função*. Os números de saída são elementos de um conjunto denominado *imagem da função*".

A iniciativa de introduzir as noções de domínio e de imagem é o resultado de um debate sobre essas duas noções, juntamente com as noções de função sobrejetora, função injetora, onde se procurou dissipar idéias errôneas. Uma delas: domínio igual ao conjunto imagem. Um dos professores afirmou: "*Agora estou aliviado e satisfeito*" (Professor César, 03/09/2004).

Após a aplicação de *Função como máquina*, os professores avaliam os protocolos dos alunos e avaliam as dificuldades dessa atividade. Citamos a afirmação de César, que mostra uma mudança de postura: "*A função como máquina está mais clara. Interessante que eu e a Rosa não conversávamos sobre nossas dificuldades sobre falar e escrever sobre função {...} função como máquina foi forte*" (Professor César, 22/10/2004).

Um marco importante foi o momento da institucionalização do conceito de função. A sexta e última sessão na sala de aula foi dedicada à revisão proposta pela professora Margarida. Para essa retomada, ela e o professor Marcos planejaram e prepararam folhas de *flip-chart*, com o intuito de introduzir função como máquina desde a primeira atividade da seqüência.

Vamos nos deter na primeira atividade: *Dobrando papel.* Na primeira folha, há uma tabela com as colunas: *número de dobras* e *número de partes*: uma máquina, nomeada de P, com entrada e saída; duas expressões algébricas e as respectivas técnicas de cálculo para o valor da função. A segunda folha traz o gráfico do número de partes em função do número de dobras.

Durante suas explicações, a professora utilizou os termos: potência de base dois; tabela; regularidade; a função; a função de dobrar; máquina; variável dependente; variável independente; eixo das abscissas; eixo das ordenadas; pontos não alinhados; não há meia dobra. Isso mostra a ampliação de seu discurso.

As outras folhas *flip-chart* seguem o mesmo esquema, e, dessa forma, temos um material instrucional diferente daquele encontrado nos livros didáticos de oitava série, porque, para cada atividade, há tabela(s), gráfico(s), expressões algébricas e desenho(s) de máquina(s) com entrada e saída. Esse material amplia o alcance das atividades propostas na seqüência de ensino.

Um outro ponto é que a concepção de função como máquina está presente em uma atividade que trata de função como padrão de regularidade e em outras, que tratam de função como interdependência de grandezas.

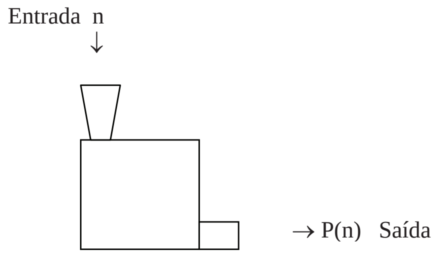
Assim, dessa forma inovadora, é institucionalizado o conceito de *função* em uma classe de oitava série do ensino público paulista.

A transcrição da primeira folha de *flip-chart* apresentada aos alunos

Atividade 1: Dobrando papel

Tabela: Número de partes em função do número de dobras

N.dobras (n)	N. Partes (P)
0	1
1	2
2	4
3	8
5	32
8	256
10	1024



Expressão algébrica que mostra o número de partes em função do número de dobras:

$1 = 2^0$	$P(0) = 2^0 = 1$
$2 = 2^1$	$P(1) = 2^1 = 2$
$4 = 2^2$	$P(2) = 2^2 = 4$
$8 = 2^3$	$P(3) = 2^3 = 8$
$32 = 2^5$	$P(5) = 2^5 = 32$
$256 = 2^8$	$P(8) = 2^8 = 256$
$1024 = 2^{10}$	$P(10) = 2^{10} = 1024$

Fonte: Rossini (2006, Anexo C, p. 377).

Uma síntese da formação em termos de momentos didáticos

A organização matemática em torno do tipo de tarefa *conceituar função como interdependência de grandezas* apareceu nos três grupos. Não poderia ser de outra forma, pois é a organização matemática mais comum nos livros didáticos, nos capítulos dedicados ao tema função.

As discussões coletivas e em grupo evidenciaram a lenta aproximação com o objeto matemático *função*.

O primeiro momento didático foi *cultural*, porque eles manipularam livros didáticos editados em São Paulo, em circulação em 2004. Os comentários gerais feitos nas primeiras reuniões mostraram que os docentes tinham relações superficiais com o objeto função. O passo seguinte foi apresentar cópias de materiais, um momento *mimético*. Somente a partir de práticas coletivas de leitura, que consideramos da maior importância, os professores começaram a estreitar relações com as organizações matemáticas em torno do conceito de função. Passaram então ao segundo momento didático: *exploração das tarefas.*

O grupo C descartou atividades e começou a verbalizar suas dificuldades sobre o objeto matemático *função* e a estudar como começar, o que pedir e como pedir. Um ponto que chamou a atenção é que a escrita coletiva e as discussões se tornaram "uma luz no fim do túnel" para os integrantes do grupo C. Esse grupo se conscientizou da importância desse trabalho coletivo e avançou em direção ao terceiro momento: constituição do *bloco tecnológico/teórico*, ainda na sua forma embrionária. No entanto, essa explícita conscientização da importância da escrita coletiva não ocorreu com o grupo A, cujos integrantes buscavam, individualmente, uma atividade e só depois conversavam com os colegas; evoluíram a partir da cópia e reformulação de uma atividade para a criação de duas novas. O grupo B fixou sua atenção na cópia, escreveu objetivos para cada uma das atividades e esboçou uma análise *a priori* de algumas delas. Consideramos que esses dois grupos não conseguiram avançar para o terceiro momento, de uma maneira consistente.

Observamos que, ao longo do trabalho com os participantes aqui relatado, registrou-se a necessidade de incluir um submomento do momento *mimético-cultural* adaptado à formação de professores, que passa pela valorização das práticas sociais de leitura em uma formação continuada de professores e pela emergência da escrita colaborativa.

Na terceira fase, houve um retorno aos segundo e terceiro momentos didáticos. Na quarta fase, após a aplicação da seqüência de ensino, ocorreu o momento de institucionalização das organizações matemáticas mobilizadas.

No final da aplicação da seqüência de ensino, a professora/ formadora, ao preparar e apresentar uma institucionalização para os alunos, juntamente com outro professor que trabalha na mesma escola e que foi participante da formação, procurou fazer uma articulação dessas organizações didáticas. Dessa forma, emerge o conceito de função como fruto de uma articulação das organizações didáticas construídas em torno dos tipos de tarefas que constam na seqüência de ensino: conceituar *função* como padrão de regularidade de seqüências geométricas, como interdependência de grandezas, como máquina de entrada e saída, sob a égide de função como máquina.

Ressaltamos que esse momento didático não se constituiu apenas de uma retomada ou revisão das atividades trabalhadas pelos alunos, mas também de uma nova leitura, um *saber*, em termos chevallardianos. A articulação, que jazia escondida, emerge, como resultado de todo um processo de formação.

Considerações finais

A análise da produção docente, à luz da teoria antropológica do didático, estruturada em organizações matemáticas e organizações didáticas em torno das diferentes concepções de função, teve o mérito de expor os pontos nevrálgicos das dificuldades docentes, as superações em termos de tarefas, técnicas e discursos de cunho tecnológico.

Este artigo evidencia que construção de uma organização didática não se faz sem uma discussão sobre conteúdos matemáticos. Assim, a evolução da organização didática está atrelada à ampliação e ao fortalecimento da correspondente organização matemática, ao longo de um trabalho colaborativo.

Apresentamos não só a história de atividades, mas também o processo de criação de organizações matemáticas e didáticas ligadas às concepções de função: padrão de regularidade, relação entre grandezas, máquina de entrada e saída.

O árduo trabalho dos professores com o escrever e reescrever enunciados e tarefas, a superação de angústias e dúvidas, leva-nos a uma reflexão, como formadores de professores, sobre o ensino/aprendizagem de função na formação inicial. É necessário explorar as concepções de função, construir essa articulação entre as organizações matemáticas que giram em torno de cada concepção – enfim, mostrar uma outra maneira de ensinar função.

Referências

ALMOULOUD, S. A. (2000). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. São Paulo, PUC.

ARTIGUE, M. (1989). Epistemologie et Didactique.Université Paris VII, *Cahier de Didirem*, n. 3.

BARBIER, R. A (2004). *Pesquisa-ação*. Trad. de Lucie Didio. Brasília, Liber Livro (Série Pesquisa em Educação, v. 3).

BONGIOVANNI et alii (1996). *Matemática e vida 7ª série*. São Paulo, Ática.

BOSCH, M. e CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'ativité mathématique aux ostensifs. Objet d'etude et problematique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 19, n. 1, pp.77-124.

BRASIL - Ministério da Educação (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*.. Disponível em http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 05 jan. 2005.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analise des pratiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, pp. 221-265.

______ (2001). Organizer l'Etude. Strutures & Fonctions. In: 11a Ecole d' Eté de Didactique des Mathematiques. Curso... Grenoble, CD-ROM.

COMIN, E. (2000). Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. Tese de Doutorado. Bordeaux, Université Bordeaux.

MONNA, A. F. (1972). The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Arch. For Hist. of Exact Sciences*, v. 9, pp. 57-84.

ROSSINI, R. (2006). Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias. Tese de Doutorado, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. São Paulo, PUC.

YOUSCHKEVITCH, A. P. (1981). "Le concept de fonction jusqu´au milieu du XIX^e siècle". In: *Fragments d´historie des Mathématiques*. Brochure A.P.M.E.P., n. 41, pp. 7-67.

Recebido em abr./2007; aprovado em jun./2007.