Modelos explicativos elaborados por adolescentes e adultos para o cálculo com frações: da percepção ao pensamento operatório

JOÃO ALBERTO DA SILVA*

Resumo

Nota-se que o cálculo com frações é um dos conteúdos escolares mais temidos, ainda que utilizado ao longo de toda a vida escolar e em outros domínios que não só o da Matemática, tais como a Física, a Química e a Biologia. Esta pesquisa investiga os modelos explicativos que são elaborados por adolescentes e adultos a propósito de problemas que envolvem frações. O estudo realizado evidenciou que apenas uma pequena parcela dos entrevistados é capaz de elaborar uma explicação completa para um problema que envolve cálculo com frações. Os demais apresentam explicações parciais ou incorretas, baseadas na percepção e na incompreensão da relação parte/todo.

Palavras-chave: frações; epistemologia genética; modelos explicativos.

Abstract

We note that calculation with fractions is one of the most feared school contents, although it is used throughout the school life and in areas other than Mathematics, like Physics, Chemistry and Biology. This research investigates the explanatory models that are prepared by adolescents and adults about problems involving fractions. The study showed that only a small part of the interviewees is capable of producing a complete explanation for a problem that involves calculation with fractions. The other explanations are partial or incorrect, based on perception and on the misunderstanding of the relationship part / whole.

Keywords: *fractions; Genetic Epistemology; explanatory models.*

Introdução

Nota-se que as frações são, em geral, um dos conteúdos considerados mais difíceis na matemática. Particularmente, alguns fatores contribuem para isso. O ensino de frações se dá por volta da quarta ou quinta série (no

* Universidade Federal de Pelotas. Doutorando em Educação – UFRGS. E-mail: joao.alberto@ufrgs.br

Ensino Fundamental de oito anos), período em que as crianças saem da unidocência e têm uma disciplina exclusiva de matemática. O professor passa a ter que ensinar um conteúdo muito específico, ao mesmo tempo em que lhe é exigido o cumprimento de prazos determinados. Igualmente, os métodos de memorização, repetição de um algoritmo e de "técnicas" de resolução, encontram um obstáculo em um dos conteúdos que exige um maior grau de abstração. Essa peculiaridade no estudo das frações, em relação à abstração e à compreensão, reveste-se de uma dimensão psicológica.

Quando o sujeito precisa pensar em um cálculo com, ou mesmo para quantificar, números fracionários, há uma questão singular, que é a relação parte/todo. Carraher e Schliemann (1992) já identificaram que a magnitude relativa de uma fração é um dos principais problemas para a aprendizagem. A fração pode ser a representação de uma parte de algo; não é suficiente ter conhecimento dos numerais que ela utiliza: é preciso considerar a relação que se estabelece. Como o que se manipula no cálculo e na quantificação é a representação da parte, a dimensão do todo ao qual a fração se refere restringe-se ao plano do pensamento. Por exemplo, quando o sujeito quantifica 1/3, é preciso relacionar que esse número representa um todo dividido em um determinado número de partes iguais (3), do qual se considera uma parte e há, ainda, outras duas. Essa compreensão somente é alcançada quando o sujeito constrói a relação entre o numerador e o denominador ou, em outras palavras, entre a parte e o todo.

Para a compreensão da relação parte/todo é preciso que se realize uma operação mental lógico-matemática que Piaget e Szeminska (1941) chamam de conservação, ou seja, antes de operar com a parte, é preciso conservar o todo. Tal operação mental exige um grau de abstração que necessita um pensamento mais organizado, não sendo capaz de alcançar a compreensão real do número fracionário através da memorização do procedimento do cálculo ou da simples ação física sobre materiais. De acordo com Piaget e Szeminska (ibid.), o número é sempre produto de uma operação mental, isto é, uma construção inferencial sobre uma quantidade.

E o que faz a escola na maioria das situações? Ocupa-se da incorporação da seqüência de procedimentos e, com isso, renega a compreensão mental e a atividade cognitiva do sujeito (Silva, 2005, 2007). O estudante memoriza a ordem de ações que deve executar e aplica na resolução do cálculo, mesmo não compreendendo o processo que se passa e os conceitos envolvidos durante o desenvolvimento do algoritmo. Desse aspecto pedagógico, de um ensino voltado à memorização e à aplicação de algoritmos, o conteúdo de frações apresenta-se como um dos “vilões” do fracasso escolar, já que exige uma ação do pensamento e um grau de abstração que não é muito presente nas salas de aula da educação básica. Assim, quando o estudante precisa operar para solucionar problemas ou utilizar o número fracionário para compreender conteúdos mais complexos, não obtém êxito ou enfrenta grande dificuldade, já que não houve a construção de operações lógico-matemáticas que versam sobre a relação parte/todo.

Lima (1986) aponta que muitas das crianças que chegam à idade de estudar frações não possuem operações de pensamento elementares para a compreensão desse conceito. O autor fundamentou-se no trabalho que Piaget (1921) realizou sobre a noção de parte para identificar sete condições essenciais às crianças que aprendem frações: a experiência de totalidade divisível, a igualdade das partes, a existência de um número determinado de partes, o esgotamento do todo, a fração como parte de um todo, a relação entre o número de partes e o número de divisões e a invariância, princípio de que a soma das partes é igual ao todo.

A partir da observação de alunos de cursos de licenciatura, da experiência em sala de aula, nas práticas de extensão realizadas, foi possível perceber que o mal-estar que acompanha os números fracionários estende-se para além do próprio estudo das frações, pois outros conteúdos que as envolvem são considerados mais difíceis. Dessa maneira, parece interessante pesquisar quais as operações de pensamento e os modelos explicativos que sujeitos adolescentes e adultos elaboram para a solução de problemas que envolvem frações. Como pensa um sujeito já escolarizado para realizar um cálculo com frações? Como a prática escolar pode ajudar a resolver problemas experimentais? Como o cálculo das operações com números fracionários, da maneira convencionalmente ensinada, favorece o pensamento? Como adultos acostumados a realizar cálculos com frações explicam a solução de desafios experimentais? Diante de tantas interrogações, torna-se por demais interesse investigar o pensamento em ação na resolução de problemas com frações. Particularmente, a pesquisa com adolescentes e adultos torna mais atrativo o estudo, pois se tem a hipótese que mesmo sujeitos que realizam cálculos há anos e têm um relativo domínio do algoritmo e das seqüências de procedimentos para resolução não compreendem efetivamente as relações parte/todo que estão em jogo nos problemas com números fracionários.

Abordagem metodológica

Esta pesquisa caracteriza-se por ser um estudo exploratório, experimental, descritivo e de cunho qualitativo. A orientação metodológica é inspirada nos procedimentos normalmente utilizados nas pesquisas em Epistemologia e Psicologia Genéticas. Em especial, o método clínico e suas variações ao longo da obra de Piaget (Vinh-Bang, 1966) é o referencial que se adota para a coleta e análise dos dados.

O método clínico ou método de exploração crítica é um procedimento de coleta e análise de dados que fornece ao pesquisador uma possibilidade de compreensão do pensamento e dos comportamentos dos sujeitos. Ele é flexível para dar conta das inúmeras possibilidades que podem surgir ao longo de uma experiência ou entrevista, ao mesmo tempo em que exige uma organização muito rápida das hipóteses e do pensamento do pesquisador para que seja aplicado da maneira mais adequada.

De acordo com Piaget (1926, p. 270):

> O exame clínico faz parte da experiência no sentido de que o clínico se coloca problemas, formula hipóteses, altera as condições que entram em jogo e, finalmente, controla cada uma de suas hipóteses em contato com as reações provocadas pela conversa. Mas o exame clínico também faz parte da observação direta, no sentido de que o bom clínico não apenas dirige como se deixa dirigir e dá importância a todo encadeamento mental, em vez de se deixar levar por “erros sistemáticos”, como ocorre freqüentemente no caso do puro experimentador.

Não obstante, os processos de pensamento não são visíveis exclusivamente pela observação pura do comportamento, pois o sujeito pode estar em alta atividade mental sem produzir uma ação exterior. Como dizem Inhelder, Bovet e Sinclair (1974, p. 36): “ser ativo cognitivamente não se reduz [...] a uma manipulação qualquer; pode haver atividade mental sem manipulação, assim como passividade com manipulação”. A expectativa é de descobrir os processos mentais elaborados pelos participantes da pesquisa na solução de problemas que envolvem frações.

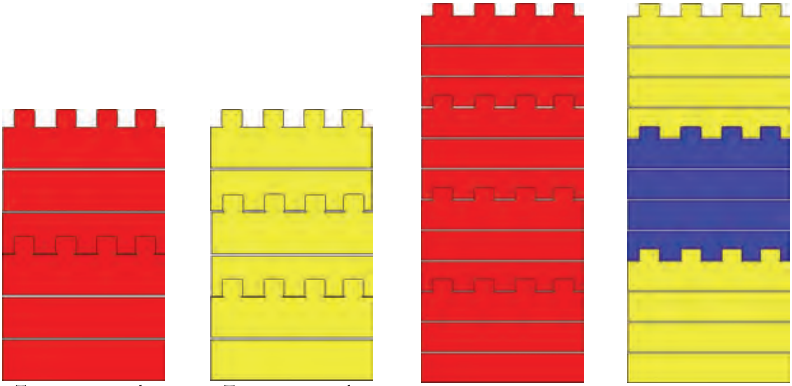
A técnica de coleta de dados utilizada é a da entrevista clínica. De acordo com Piaget (1926, p. 7), no método de exploração crítica, o essencial é não induzir o pensamento, mas "fazer falar livremente e em descobrir tendências espontâneas, em vez de as canalizar e as conter. Consiste em situar qualquer sintoma dentro de um contexto mental, em vez de fazer abstração do contexto". As exigências para com o entrevistador são inúmeras, a reformulação das hipóteses é constante e a sagacidade tem de ser imediata. Os obstáculos incluíram o medo de se perder alguma informação importante que estivesse surgindo no decorrer da entrevista ou, principalmente, de se falar demais e conduzir o pensamento do entrevistado.

A partir da observação da manipulação do material e da descrição verbal que os participantes realizavam sobre suas ações, foram se adequando as perguntas do protocolo anteriormente elaborado. A entrevista clínica pode ser enquadrada nos moldes de uma entrevista aberta semi-estruturada (Lüdke e André, 2003), o que lhe atribui características como ter um protocolo anteriormente elaborado com questões abertas, mas que podem ser reorganizadas em função das respostas dos entrevistados.

Descrição da técnica utilizada

Inicialmente, pede-se ao sujeito que resolva o cálculo 1/2 + 1/3, em uma folha de papel à parte, de maneira que vá comentando como está procedendo e pensando no desenrolar da solução. Em seguida, utilizam-se blocos de encaixe que formam duas torres: uma de blocos amarelos com peças agrupadas duas a duas e uma de peças vermelhas cujas peças estão agrupadas três a três, sendo que não podem ser separadas, pois estão firmemente coladas. Procede-se a entrevista perguntando se é possível construir duas torres de mesma altura utilizando, em uma os blocos amarelos e noutra os blocos vermelhos. Pede-se que monte as duas torres. Em seguida, por meio da entrevista, explora-se o pensamento do sujeito em busca da explicação que elabora. Pergunta-se: que relação tem o número seis com os conjuntos; se seria possível fazer torres mais altas, se fosse, quantas peças seriam necessárias; que fração da torre representa um conjunto dos blocos amarelos e um dos blocos vermelhos.

Numa segunda etapa, utilizam-se duas torres de doze peças, uma com blocos agrupados de três em três e outra com blocos de quatro em quatro. Pergunta-se: que fração representa um conjunto de cada torre; com quantas peças as torres ficaram do mesmo tamanho e como se chegou a tal resultado; por que as torres não ficariam iguais com dez peças; se seria possível fazer a soma de um pedaço de uma torre com um pedaço da outra torre, se sim, que se descreva o cálculo.



Torre composta de 2 blocos de 3 partes

Torre composta de 3 blocos de 2 partes

Torre composta de 4 blocos de 3 partes

Torre composta de 3 blocos de 4 partes

Figura 1 – Ilustração do material utilizado

A terceira etapa somente tem significado se o sujeito conseguiu desenvolver as anteriores. Retomam-se os primeiros blocos usados e mostram-se cartões, os quais são previamente confeccionados e indicam as etapas de solução pelo algoritmo normalmente ensinado. Pede-se para que mostre os procedimentos de resolução dos cálculos nos blocos.

Participaram da pesquisa vinte sujeitos que atenderam às seguintes características: ter completado com sucesso a série escolar na qual são ensinadas as frações, terem mais de doze anos, disponibilidade para participar do estudo e assinar o consentimento informado. Os sujeitos foram escolhidos em função de se apresentarem, muito provavelmente, no que Piaget (1950, 1955) denomina estádio das operações formais. Nesse estádio do desenvolvimento, o sujeito é capaz de construir hipóteses, realizar inferências e se valer do pensamento hipotético-dedutivo. As idades dos entrevistados variaram de 12 a 41 anos.

Análise de dados

Os dados encontrados foram organizados e classificados de acordo com as condutas observadas. O critério para classificação dos sujeitos e a criação das categorias é o do modelo explicativo adotado. No arcabouço dos trabalhos piagetianos, a explicação difere enormemente do “saber-fazer”. É possível que se realize uma determinada tarefa com sucesso, sem compreender os motivos e as relações causais envolvidos (Piaget, 1974a, 1974b). Contudo, para a compreensão, é essencial a construção de uma explicação e esta pode, em geral, ser inserida naquilo que, em Psicologia Genética, se convencionou chamar de modelo explicativo. O modelo explicativo é o sistema lógico-matemático de explicações que o sujeito elabora a propósito das relações causais dos problemas que quer compreender.

De acordo com Parrat-Dayan:

> A constatação de uma lei refere-se a uma simples dependência funcional entre observáveis e a inferência de uma relação causal entre acontecimentos pressupõe uma explicação. Podemos dizer que uma lei expressa uma regularidade, enquanto a causalidade pressupõe um modelo explicativo. (1999, p. 28)

No caso das situações que envolvem frações, foram encontrados cinco modelos explicativos, os quais são utilizados para agrupar e analisar os dados encontrados. As explicações variam desde um desconhecimento total da situação ao estabelecimento de relações que utilizam operações mentais de comparação, transformação e proporção.

Primeiro Modelo Explicativo: incompreensão da situação

Nessa categoria foram encontrados 2 sujeitos (com 12 e 26 anos), os quais não conseguem resolver um cálculo com dois números fracionários e mostram não compreender as relações parte/todo durante a atividade experimental. Tampouco vêem relação entre o cálculo e a atividade. Esses sujeitos assemelham-se àquelas crianças que sabem dizer a seqüência de números como um enunciado dos nomes, mas não têm qualquer idéia de sua quantificação. Quando o sujeito diz “um meio” ou “um terço”, o faz porque sabe o nome dos números, mas não tem qualquer idéia da quantidade que equivalem esses algarismos.

Um caso é suficiente para ilustrar essa situação:[1]

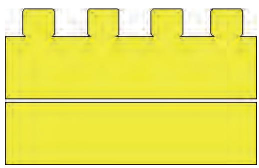
Primeira parte: Podes resolver este cálculo aqui? *Sim,* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$. Tu achas que é possível montar uma torre utilizando somente essas peças vermelhas que seja igual a outra torre utilizando somente peças amarelas? *Acho que não***.** Tu podes tentar montar essas duas torres? *Sim... ah, deu certo.* Quantos conjuntos tu utilizaste de peças amarelas e quantos de peças vermelhas? *3 amarelas e 2 vermelhas* E se contássemos as peças separadas? *Seis.* Por que tu achas que as torres tornaram-se iguais quando tu utilizaste dois conjuntos de três e três conjuntos de dois? *Porque é seis que tem nas duas.* Tu sabes me dizer que relação tem o seis com os conjuntos de duas peças e os conjuntos de três peças? *Não sei... deu igual porque tu pegaste seis de cada, se tu tivesses pego quatro também daria* (!). Se nós quiséssemos fazer novamente duas torres iguais, só que mais altas, seria possível? *Não tem mais peças.* E se tivéssemos, que número de peças eu precisaria para fazer isso? *Mais 8, dividindo elas 4 e 4. Não sei, a mesma coisa num e noutro, daí continuava igual.* Agora, vamos pegar essa torre dos amarelos (conjuntos com duas peças). Se eu retirar um desses conjuntos da torre, qual fração representa esse pedaço da torre? *É 3.* E agora, vamos ver como fica na torre vermelha. Se eu retirar um desses conjuntos da torre, que fração da torre representa esse pedaço? *Fica 3/3.* Como é que tu sabes? *Porque ficaram 3 na parte que tirou e três na outra parte*

Segunda parte: Tu podes me dizer nessa primeira torre (conjuntos de 4) que fração da torre vale um cada pedaço? *Um.* E nessa outra torre (conjuntos de 3), que fração representa cada pedaço da torre? *Um também.* Como é que tu sabes que é um? *A fração é sempre um porque tu estás pegando sempre um pedaço.* Com quantas peças as torres ficaram com o mesmo tamanho? *12.* Por que doze? *Porque tem doze em cada um.* Como é que tu sabes? *Porque eu contei.* Tu saberias me dizer porque as torres ficam iguais com doze peças e não com dez, por exemplo? *Porque tu pegaste mais que dez.* Daria para fazer com dez? *Tem de pegar menos.* Podes fazer? (Tenta, mas não consegue). E se eu tivesse que somar esse pedaço desta torre (1/3) com um pedaço daquela torre (1/4), como eu poderia fazer? Tu consegues montar um cálculo aqui no papel para me mostrar isso? *4+3 =7.* Não se segue o protocolo de entrevista pela falta de compreensão do sujeito.

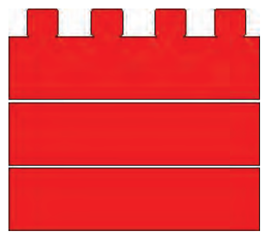
1 26 anos, Ensino Médio completo.

Segundo Modelo Explicativo: domínio do pensamento intuitivo

Trata-se de sujeitos que não conseguem agir de maneira operatória sobre o problema. No estudo empreendido, foram encontrados seis casos, com idades de 12, 13, 15, 20, 20 e 25 anos, que se valem desse modelo explicativo. Agem baseados na percepção e sustentados em um pensamento intuitivo que ainda não coordena e conserva operações de pensamento. Esses sujeitos julgam um bloco formado por três partes, correspondente à metade de uma das torres trabalhadas, equivalente a 1/3 da torre e, igualmente, um bloco composto de duas partes representa 1/2 da torre, embora corresponda a 1/3.



Conjunto formado de 2 peças
que corresponde a ⅓ de uma torre de 6 peças.



Conjunto formado de 3 peças
que corresponde a ½ de torre uma torre de 6 peças.

Figura 2 – Blocos particionados utilizados no experimento

Um dos sujeitos[2] que elabora esse modelo explicativo procede da seguinte maneira:

> Primeira Parte: Podes resolver este cálculo aqui? *Sim,* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{5}=\frac{5}{6}$. Tu achas que é possível montar uma torre utilizando somente essas peças vermelhas que seja igual a outra torre utilizando somente peças amarelas? *Sim.* Tu podes tentar montar essas duas torres? *Sim.* Quantos conjuntos tu utilizaste de peças amarelas e quantos de peças vermelhas? *3 amarelas e 2 vermelhas.* E se contássemos as peças separadas? *Seis de uma e seis de outra.* Por que tu achas que as torres tornaram-se iguais quando tu utilizaste dois conjuntos de três e três conjuntos de dois? *Seis peças é o que forma uma torre, se tu tivesses só um desses vermelhos de três não seria uma torre, aí quando tu colocas mais um fica uma torre e já dá seis.* Tu sabes me

2 Com 20 anos e estudante de nível superior.

dizer que relação tem o seis com os conjuntos de duas peças e os conjuntos de três peças? *É o que tu tens de ter para ter uma torre.* Se nós quiséssemos fazer novamente duas torres iguais, só que mais altas, seria possível? *Sim.* Que número de peças eu precisaria para fazer isso? *Pelo menos o dobro. Tu tens muito pouquinhas.* Agora, vamos pegar essa torre dos amarelos (conjuntos com duas peças que equivalem a 1/3). Se eu retirar um desses conjuntos da torre, qual fração representa esse pedaço da torre? *½.* E agora, vamos ver como fica na torre vermelha. Se eu retirar um desses conjuntos da torre, que fração da torre representa esse pedaço?1/3 Como é que tu sabes? *Porque tem um pedaço dividido em três partes.*

Segunda parte: Tu podes me dizer nessa primeira torre (conjuntos de 4 que equivalem a 1/4) que fração da torre vale cada pedaço? *1/4.* E nessa outra torre (conjuntos de 3 que representam 1/4)? 1/3. Com quantas peças as torres ficaram com o mesmo tamanho? *12.* Por que doze? *Porque é a mesma coisa de peças, mas não de conjuntos.* Como é que tu sabes? *Porque está colado, não tem como fazer doze e doze com peças diferentes.* Tu saberias me dizer por que as torres ficam iguais com doze peças e não com dez, por exemplo? *Porque é com o doze que dá certo, com dez não pode dar.* E se eu tivesse que somar esse pedaço desta torre (1/3) com um pedaço daquela torre (1/4), como eu poderia fazer? Tu consegues montar um cálculo aqui no papel para me mostrar isso? *Deixa eu ver... É fácil (pega um conjunto de 3 peças e coloca sobre um de 4) Dá 3/4 porque tu tens o 3 em cima e o 4 embaixo.*

Terceira Etapa: Tu achas que alguns desses cálculos que tu fizeste antes têm alguma coisa a ver com essas duas torres (as anteriores)? *Acho que tem.* Tu me explicaste que primeiro fizeste da seguinte maneira (apresenta-se um cartão): *É o m.m.c.* Agora nas torres tu podes me mostrar o que corresponde ao número seis? *São as seis peças.* Depois tu me mostraste que a segunda coisa era fazer isso. (Exibi-se um segundo cartão). Podes me mostrar como isso funciona nas torres? Onde estão o três e o dois? *O 2 está nos conjuntos amarelos e o 3 está nos conjuntos vermelhos.* E o 1? *É o conjunto.* E agora nesta outra situação (exibe-se o cartão)? O que é o dois? E o três? *São 5 peças e 6 conjuntos. O 2 é o amarelo, tem duas peças, daí duas peças dão 3 conjuntos de amarelos. O 3 é o vermelho, que tem 4 peças, daí divide dá dois conjuntos. Soma um com o outro dá o 2+3=5.* (O correto seria o exato contrário).

Esses problemas de percepção podem ser compreendidos e interpretados tendo por base a estrutura de classificação, típica dos agrupamentos do período operatório-concreto (Piaget, 1955). Para compreender a parte de um todo, antes de tudo, é preciso conservar esse todo. Caso não haja conservação do todo, a parte passa a ser considerada como a referência e os elementos que a compõe são considerados como a parte. Em outras palavras, não há o estabelecimento de uma relação operatória parte/todo e o que se torna acessível à percepção é a própria parte, à qual o sujeito atribui uma totalidade, procurando frações nas subpartes daquele elemento. Na lógica das classes, tendo uma classe geral C (torre) que representa a totalidade, tem-se como as frações do todo as classes B_1 (um conjunto correspondente a 1/2) e B_2 (sendo o outro conjunto correspondente a 1/2). Por sua vez, as classes B_1 e B_2 possuem elementos que as compõem (peças que compõem os conjuntos) que chamaremos de subclasses A_1, A_2 e A_3. Quando se pergunta ao sujeito qual fração da torre representa um conjunto B e ele responde 1/3, é possível inferir que há um equívoco na sua estrutura de classificação. A pergunta pode ser entendida em linguagem lógica: qual a fração da classe geral C que corresponde a subclasse B? Se o sujeito não conserva a totalidade ou não estabelece uma relação operatória parte/todo entre B e C, passa a considerar a classe B_1, por exemplo, como a totalidade, devido a uma relação perceptiva deformada. Dessa maneira, as partes que compõe o todo (agora B_1) passam a ser as subclasses A_1, A_2 e A_3. Quando o pesquisador pergunta qual a fração que corresponde à parte, o sujeito entende que a fração que pode visualizar é a subclasse A, ou seja, uma terça parte da totalidade B. Isso equivale a dizer que o sujeito não concebe ainda que a classe C é formada por $B_1 + B_2$ e nem que B_1 é resultado de $C - B_2$. Não é que o sujeito não compreenda que uma fração é uma parte do todo, mas, quando opera com esta parte, ele o faz sem conservar o todo e por isso não a relativiza, atribuindo-lhe uma dimensão nova, não mais de uma parte, mas de um "novo" todo. Em suma, não se estabelece uma relação operatória entre as partes e o todo e por isso deixa-se levar pela percepção em seu julgamento do que é parte e do que é todo. Eis aí um caso de má estruturação hierárquica de classes por uma não conservação do todo em função de um pensamento que não opera de maneira organizada e não atinge níveis de reversibilidade adequados para a solução do problema.

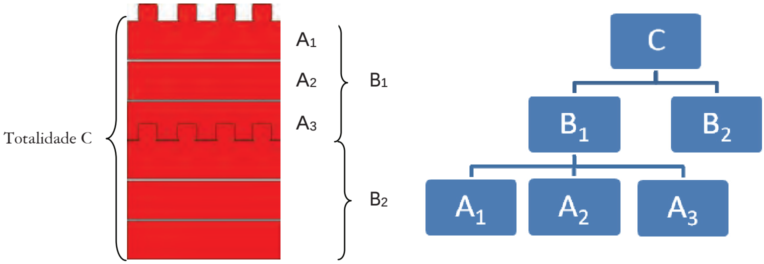


Figura 3 – Lógica das classes

Essa hipótese, de que o sujeito realiza uma confusão da parte e do todo por uma ausência de conservação, é corroborada por um dado que é obtido através de uma pequena variação ao longo da entrevista. A primeira pergunta sobre a fração que representa um conjunto ocorre nas torres de seis peças. Todavia, antes de se perguntar, o conjunto é retirado da torre e colocado ao lado, diante do sujeito. Uma segunda pergunta, de igual conteúdo, é feita a respeito dos conjuntos das torres de doze peças, mas sem a retirada da parte. Da amostra total, seis sujeitos apresentam esse modelo explicativo e, desses seis, três erram a primeira pergunta e acertam a segunda. Quando questionados como identificam a fração que dizem representar a parte, na primeira pergunta, respondem que o todo é a própria parte, na segunda pergunta, atribuem a totalidade à torre. Parece estar aí um caso de *boa forma*, como diriam os gestaltistas. A segunda torre, não sendo desmontada, impõe a totalidade ao sujeito, o que não acontece na primeira, já que é preciso, mentalmente, fazer voltar a parte retirada para recompor o todo. Acrescido a isso, no segundo conjunto de torres, uma delas tem uma das partes diferentes, o que auxilia ainda mais a percepção. Encontraram-se casos em que o sujeito identificava todas as frações de maneira incorreta, com exceção daquela que tinha um dos conjuntos de cor diferenciada. Um pensamento intuitivo não se vale da reversibilidade de pensamento para realizar operações que corrijam a percepção; contudo, na segunda etapa, a reversibilidade operatória para recompor o todo não é tão abstrata e a percepção se presta para identificar a totalidade.

Segue-se o exemplo de um desses sujeitos[3]:

> Primeira Parte: [...] Agora, vamos pegar essa torre dos amarelos (conjuntos com duas peças que equivalem a 1/3). Se eu retirar um desses conjuntos da torre, qual fração representa esse pedaço da torre? *1/2* - E agora, vamos ver como fica na torre vermelha. Se eu retirar um desses conjuntos da torre, que fração da torre representa esse pedaço? 1/3. Como é que tu sabes? *Porque em uma tu tens o conjunto divido em duas peças e no outro tu tens o conjunto dividido em três peças.* (Toma a parte como uma totalidade).
> Segunda parte: Tu podes me dizer nessa primeira torre (conjuntos de 4) que fração da torre vale um cada pedaço? 1/3. E nessa outra torre (conjuntos de 3)? *1/4.* Como é que tu sabes? *Mesma coisa que no outro: aqui tu tens a torre dividida em três partes e aqui a torre dividida em quatro partes.* (Estabelece de maneira adequada a relação parte/todo).

Nesses casos de pensamento intuitivo há uma confusão na abstração dos dados para elaboração do modelo explicativo. Segundo Piaget (1977), pode-se classificar a abstração em duas categorias: empírica e reflexionante. A primeira é responsável por retirar os dados das características materiais das ações ou diretamente dos objetos, isto é, a abstração empírica retira seus dados dos observáveis.

Os observáveis são

> [...] aquilo que a experiência permite constatar por uma leitura imediata dos fatos por si mesmos evidentes [..] é preciso, pois, defini-los por meio daquilo que o sujeito crê constatar e não simplesmente daquilo que é constatável. (Piaget, 1975, p. 46)

No caso desse modelo explicativo, a abstração empírica predomina e é dela que o sujeito retira os dados para seus julgamentos. Contudo, a abstração empírica apóia-se sobre os objetos através de simples constatações, tais como a cor, o tamanho, a forma ou de aspectos materiais da própria ação. A abstração empírica fornece os conteúdos da realidade ao sujeito. De acordo com Inhelder, Bovet e Sinclair "os observáveis não são assimiláveis senão na medida em que o sujeito é capaz de inseri-los

---

3 15 anos, cursando a primeira série do Ensino Médio.

nos esquemas já elaborados" (1974, p. 65). Assim, tem-se a abstração reflexionante, que retira seus dados das coordenações do sujeito e ocupa-se da elaboração de novas formas. A abstração reflexionante é a responsável pela construção do quadro assimilador, conseqüentemente, das formas que são capazes de significar os observáveis. Pode-se dizer que a possibilidade de se realizar abstrações empíricas se deve a abstrações reflexionantes anteriores já que "os observáveis só se tornam pertinentes na medida em que podem ser integrados em mecanismos indiferenciados" (ibid., p. 242). Nos casos dos sujeitos que elaboram esse modelo explicativo, a abstração empírica se impõe à abstração reflexionante e as coordenações das ações ainda não fornecem dados tão pertinentes quantos os observáveis perceptivos, devido ao quadro de assimilação restrito do sujeito.

Terceiro Modelo Explicativo: processos alternativos de pensamento

Aqui estão sujeitos que não realizam o cálculo através do algoritmo ensinado pela escola, mas que, ao enfrentarem os problemas da atividade experimental, desenvolvem processos alternativos de pensamento. Foram encontrados dois sujeitos (20 e 41 anos) que apresentam características correspondentes a esse modelo explicativo. É o caso de não compreender que metade da torre corresponde a 1/2 do todo, mas que se trata de 50% do material. Igualmente, 1/3 é tratado como 33%. O sujeito opera mentalmente em termos de porcentagem e consegue êxito na atividade experimental. Todavia, quando é perguntado se há relação entre o cálculo de frações e a atividade, é capaz de esboçar algumas relações simples, mas retorna ao modelo explicativo do percentual e não consegue demonstrar qualquer cálculo no material. Encontram-se nesse quadro, também, os sujeitos que expressam a quantia correspondente a 1/2 como "tem-se a metade do todo" e 1/3 como "menos da metade", mas mesmo assim ainda não conseguem elaborar um número fracionário para representar o que dizem.

Quando o sujeito retira dos objetos propriedades que ele mesmo introduziu, enriquecendo-os, pode-se chamar a abstração reflexionante de pseudo-empírica. Ela ocorre quando se enxergam nos observáveis coisas que não estão disponíveis simplesmente pela percepção. A criança olha para uma colher e dela faz um avião para brincar, ou seja, atribui ao objeto uma propriedade que não se encontrava nele. Tem-se aí uma modalidade particular de abstração reflexionante. Igualmente, nesse modelo, encontram-se sujeitos que elaboram explicações através de propriedades que introduzem nos objetos em função de suas experiências anteriores. Pode-se dizer que há um predomínio da abstração pseudo-empírica. É o caso que se pode observar neste extrato de protocolo:[4]

> Primeira Parte: [...] Agora, vamos pegar essa torre dos amarelos (conjuntos com duas peças). Se eu retirar um desses conjuntos da torre, qual fração representa esse pedaço da torre? *Ficam vinte minutos.* Vinte minutos? Como assim? *É que eu estou pensando como um relógio, olha o que tu tens aí, tu tens três pedaços de vinte minutos.* E agora, como fica na torre vermelha? Se eu retirar um desses conjuntos da torre, que fração da torre representa esse pedaço? *Metade do círculo*. Tu podes me explicar porque tu falas em círculo? *É como eu te disse antes, se eu pensar essas partes em um círculo, essa vermelha dá meio círculo.* Antes nós fizemos uns cálculos com frações, tu podes escrever uma fração como aquela para representar este pedaço da torre? *Assim eu não sei, mas é metade, com certeza é metade.*

Esse caso se reveste de um caráter muito singular, pois o sujeito faz alusão a formas circulares quando, na verdade, se trabalha com paralelepípedos. Os dados que utiliza para realizar seu julgamento provém de qualidades que ele introduz nos objetos, ou seja, de abstrações pseudo-empíricas. Há já aí uma superação do pensamento intuitivo, mas ainda não há uma adaptação organizada ao real, o que se estende no que se optou por chamar de processos alternativos de pensamento para elaboração da explicação. Essas elaborações é que vão se desdobrar em uma organização maior do pensamento e propiciar uma abstração, posterior, das coordenações. É o caso do próximo modelo explicativo.

Quarto Modelo Explicativo: erro do cálculo e compreensões parciais

Em geral, os estudantes que dominam o algoritmo escolar e têm certo poder de abstração encontram-se nessa categoria. Foram identificados seis sujeitos (idades: 12, 13, 27, 30, 30 e 32) que conseguem resolver o exercício escolar sem qualquer dificuldade, compreendem o

4 41 anos, Ensino Médio completo.

problema utilizando o conceito de frações, mas não conseguem ver a relação entre os procedimentos adotados na resolução do cálculo e aqueles utilizados na compreensão do problema. O modelo explicativo ainda é incompleto, principalmente porque ou não entendem onde está o 6 (mínimo múltiplo comum) na atividade experimental ou não identificam onde há a divisão do mínimo múltiplo comum pelo denominador e este resultado multiplicado pelo numerador. Em resumo, os sujeitos não compreendem essa operação:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

Figura 4 – Adição de frações

Observe-se um dos casos:[5]

Primeira e Segunda Etapa: Resolve o cálculo através do algoritmo. É capaz de identificar as frações das torres na segunda etapa e montar um cálculo, mas o resolve através do algoritmo.
Terceira Etapa: - Tu achas que alguns desses cálculos que tu fizeste antes têm alguma coisa a ver com essas duas torres (as anteriores) ? *Sem dúvida.* Tu me explicaste que primeiro fizeste da seguinte maneira (apresenta-se um cartão): *Sim, tinha de achar o mínimo múltiplo comum.* Agora nas torres, tu podes me mostrar o que corresponde ao número seis? *Não sei muito bem* (manipula as peças). *Porque tu tens duas amarelas e três vermelhas para ter 1/2 e 1/3. Não sei onde tem o seis.* Depois tu me mostraste que a segunda coisa era fazer isso. (Exibe-se um segundo cartão). Podes me mostrar como isso funciona nas torres? Onde estão o três e o dois? *Acho que esse dois* (o denominador da fração ½) *corresponde a essas duas peças amarelas e esse outro 3 aos das vermelhas.* E o 1? *Eu acho que é um de cada conjunto que tu tens.* E agora nesta outra situação (exibe-se o cartão)? O que é o dois? E o três? *Ah não... eu acho que as duas e as três peças são aqui e não como eu te disse antes, mas não tenho certeza.* Se esse 2 e esse 3 são das peças, onde estão o outro 2 e o outro 3? (Pensa e manipula os objetos. Faz tentativas.). *Pior que eu não sei!* (Espanto por não saber). E esse 5 aqui, tu sabes o que é? *É*

5 30 anos, curso superior completo.

somando as peças de um com a de outro: as 3 daqui com as duas de lá. E o seis? *Pois é. Esse 6 é que está brabo* (Pensa e manipula). *Vou desistir, não sei mesmo!*

Pode-se ver, no caso acima, que o sujeito realiza o cálculo através do algoritmo, tem habilidade para identificar as frações, mas é incapaz de descrever o processo de adição. Ora, cai em um pensamento guiado pela percepção, mas, após, se dá conta do equívoco, embora não seja capaz de elaborar uma explicação.

No desenrolar das operações e das regulações ativas, os mecanismos de controle e avaliação das condutas parecem basear-se na dimensão estrutural do pensamento, que define o poder de alcance das operações, bem como nos dados imediatos que o sujeito extrai da experiência na qual age. Devido a esse quadro, ganha novamente destaque a idéia da abstração reflexionante.

Normalmente, há uma falta de simetria entre a abstração reflexionante e a empírica, uma dominando a outra, mas sem um caráter exclusivo. Nos primórdios da inteligência, as abstrações empírica e reflexionante pouco se diferenciam ante o caráter primitivo das estruturas. Estando a abstração empírica mais ocupada em extrair dados da materialidade do objeto, ela apresenta maior atividade nos estádios iniciais do pensamento. Entretanto, à medida que a inteligência se organiza, a abstração reflexionante vai, cada vez mais, coordenando o quadro assimilador que sustenta a abstração empírica, crescendo em importância e atividade. No pensamento operatório, a abstração reflexionante domina a abstração empírica e comanda os rumos do pensamento. No que diz respeito aos mecanismos de controle e avaliação do sujeito, vê-se que no início eles estão mais ligados às ações externas e àquilo que podem retirar dos observáveis, mas, na evolução do pensamento, esses mesmos mecanismos passam a ser dirigidos pela reflexão e pelas operações.

No caso desse modelo explicativo, já se apresenta um predomínio da abstração reflexionante sobre a empírica, mas ainda sob a forma de regulações em sistemas de pensamento que não são muito móveis e plenamente operatórios. Quando as regulações não são capazes de responder às necessidades do sujeito ante os objetos, o equilíbrio cognitivo encontra-se ameaçado.

Inhelder, Bovet e Sinclair esclarecem:

> Os sistemas operatórios constituem um caso particular das regulações psicológicas ou mesmo orgânicas mais gerais; eles representam um caso-limite ou ideal porque conseguem, pela instauração da reversibilidade, compensações ou anulações perfeitas das perturbações. Com efeito, a ação direta pode ser anulada mentalmente pela ação inversa correspondente; mesmo uma modificação física pode ser compensada mentalmente por uma transformação recíproca. (1974, pp. 19-20)

Os conflitos que ocorrem nesse modelo explicativo e as perturbações que dele surgem abrem a porta para uma necessidade de mobilidade maior do pensamento. O modelo explicativo apresenta-se incompleto e o sujeito já dá sinais de que não aceita essa incompletude, embora não saiba, ainda, superá-la. Esse desequilíbrio cognitivo anuncia a gênese de um novo modelo explicativo, o qual procura pelas explicações e compreensão das relações em jogo.

Quinto Modelo Explicativo: construção da explicação

São em menor número os sujeitos que aqui se enquadram, pois trata-se do modelo explicativo completo: foram encontrados quatro participantes (17, 19, 25 e 32 anos) que apresentam as características de compreensão da relação parte/todo, da formalização da fração e dos procedimentos de cálculo. O sujeito tem êxito na resolução do cálculo e, mesmo empregando o algoritmo, já é capaz de comentar o cálculo que está realizando. Na atividade experimental demonstra desenvoltura e compreensão dos problemas propostos – formula hipóteses e apresenta explicações para o que se passa. Na comparação entre o cálculo e o problema, demonstra-se surpreso com a pergunta e afirma não ver qualquer diferença, pois as duas situações “são a mesma coisa”. É capaz de identificar o procedimento realizado para a solução do cálculo no material concreto.

Uma situação é suficiente para ilustrar esse modelo explicativo:[6]

Primeira Parte: Podes resolver este cálculo aqui? *Sim,* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{5}=\frac{5}{6}$. Tu achas que é possível montar uma torre utilizando somente essas peças vermelhas que seja igual a outra torre utilizando somente peças amarelas? *Sim***.** Tu podes tentar montar essas duas torres? *Sim.* Quantos conjuntos tu utilizaste de peças amarelas e quantos de peças vermelhas? *3 amarelas e 2 vermelhas.* E se contássemos as peças separadas? *Seis.* Por que tu achas que as torres se tornaram iguais quando tu utilizaste dois conjuntos de três e três conjuntos de dois? *É o número que serve tanto para os conjuntos de dois quanto para os de três.* Tu sabes me dizer que relação tem o seis com os conjuntos de duas peças e os conjuntos de três peças? *É o que dá certo, é como eu disse, é o que é igual para o 2 e o 3.* Se nós quiséssemos fazer novamente duas torres iguais, só que mais altas, seria possível? *Sim.* Que número de peças eu precisaria para fazer isso? *Sempre múltiplos de seis.* Agora, vamos pegar essa torre dos amarelos (conjuntos com duas peças). Se eu retirar um desses conjuntos da torre, qual fração representa esse pedaço da torre? *1/3.* E agora, vamos ver como fica na torre vermelha. Se eu retirar um desses conjuntos da torre, que fração da torre representa esse pedaço? 1/3. Como é que tu sabes? *É fácil, olha para a torre e vejo quantas partes tu dividiste, daí descubra a divisão de partes da torre e a fração.*

Segunda parte: Tu podes me dizer nessa primeira torre (conjuntos de 4) que fração da torre vale cada pedaço? 1/3. – E nessa outra torre (conjuntos de 3)? *1/4.* – Com quantas peças as torres ficaram com o mesmo tamanho? *12.* Por que doze? *É a mesma coisa que o seis na torre anterior. Só que aqui é 3 e 4, então a igualdade se alcança só no doze e não no seis.* Tu saberias me dizer por que as torres ficam iguais com doze peças e não com dez, por exemplo? *Dez não é um número comum ao 3, até é ao 2, mas ao 3 não, daí não tens como montar um torre de 10 peças com os conjuntos de 3.* E se eu tivesse que somar esse pedaço desta torre (1/3) com um pedaço daquela torre (1/4), como eu poderia fazer? Tu consegues montar um cálculo aqui no papel para me mostrar isso? *Eu acho que é só 1/3 + 1/4.* (Monta o cálculo de maneira adequada).

Terceira Etapa: Tu achas que alguns desses cálculos que tu fizeste antes têm alguma coisa a ver com essas duas torres (as anteriores) ?

6 17 anos, cursando terceiro ano do Ensino Médio.

> *Claro* - Tu me explicaste que primeiro fizeste da seguinte maneira (apresenta-se um cartão): *Sim*. Agora nas torres tu podes me mostrar o que corresponde ao número seis? *Seis é o número de peças iguais para dois e três. Ah agora entendi o que tu queres saber: tu queres que eu diga que é o m.m.c.!* Depois tu me mostraste que a segunda coisa era fazer isso. (Exibe-se um segundo cartão). Podes me mostrar como isso funciona nas torres? Onde está o três e o dois? *O 3 é as 3 partes do amarelo, quando eu pego as 6 peças amarelas e divido nos 3 conjuntos tem o 3. No vermelho estão as duas partes que é o 2 aqui debaixo.* E o 1? *É a torre.* E agora nesta outra situação (exibe-se o cartão)? O que é o dois? E o três? *Esse 3 e esse 2 aqui de cima é o número de peças. Se eu pegar as 6 peças amarelas, dividir em 3 conjuntos e pegar um dá o 2, mesma coisa no vermelho, daí dá o 3.* Mas outro amigo teu que eu entrevistei disse que esse 2 aqui debaixo da fração era das duas peças amarelas. Tu achas que ele está certo? *Ah não, ele deve ter se confundido, 2 são as partes, não as peças.*

Neste exemplo o sujeito parece muito bem coordenar suas ações e delas retira os dados para seu julgamento, possui uma mobilidade grande do pensamento e dele desprende as razões que explicam os problemas. Tem-se aí um modelo explicativo que se vale da abstração reflexionante para organizar e guiar seu pensamento e, até mesmo, formalizar os procedimentos com a comparação exata entre os cálculos e os materiais do experimento. Nos casos em que as coordenações oriundas da abstração reflexionante se tornam conscientes para o sujeito, ela se desdobra no que Piaget (1977) chamou de abstração refletida. A abstração refletida envolve a tomada de consciência das ações e coordenações de ações ou apropriação dos mecanismos íntimos da compreensão.

Com esse movimento, nota-se que há um engrandecimento das formas (estruturas mentais), que passam, cada vez mais, a organizar os conteúdos. Se nos primórdios da inteligência era a abstração empírica que predominava, ao fornecer os dados e explorar o mundo, à medida que ocorre o desenvolvimento e a construção de novas formas, é a abstração reflexionante que toma as rédeas do processo e vai conduzindo cada vez mais a apropriação dos conhecimentos. Isso se deve ao fato de que a abstração reflexionante vai ampliando o quadro assimilador do sujeito e qualificando a abstração empírica, de forma que é a reflexão a criadora das formas que dirigem o jogo das abstrações, em detrimento da abstração empírica, que apenas garante os conteúdos e testa as hipóteses.

Segundo Piaget:

> [...] se o desenvolvimento da abstração reflexionante é o de uma depuração progressiva em direção da conquista das formas, ao contrário, o da abstração empírica assinala uma subordinação crescente ao primeiro destes dois tipos, devido à inserção gradual dos conteúdos nas formas, pois que quanto mais estas se enriquecem, melhor servem à apreensão daqueles, isto é, à apreensão de observáveis até então não-assimiláveis, mesmo a título de simples constatações. (1977, p. 289)

No que tange os mecanismos de controle do sujeito durante um experimento, vê-se que ele possui duas fontes que fornecem os dados para a constituição da sua conduta: uma é a ação propriamente dita e a outra é a conceituação que o sujeito possui sobre o objeto. Percebe-se que as operações se dirigem das ações às conceituações ou dos conteúdos às formas.

No que tange a relação entre a ação e a conceituação, os dados indicam que, nos estádios iniciais da inteligência, ocorre um constante atraso desta em relação àquela, o que evidencia a independência da primeira (Piaget, 1974a). No entanto, à medida que transcorre o desenvolvimento, pode-se perceber uma influência da conceituação sobre a ação. Em determinados casos, a ação vale-se de certos mecanismos transitivos de forma rápida e sistemática, fornecidos pela conceituação, a fim de aumentar sua *performance* (terceiro e quarto modelos explicativos). Além disso, essa transitividade não é conquistada de qualquer forma, mas devido às próprias ações. Ela permite que a ação se valha de um maior poder de antecipação e de regulações mais ativas, pois, à medida que há uma maior presença de regulações, ocorre um incremento nas ações, baseadas em escolhas cada vez mais intencionais, como é o caso do quarto modelo comparado ao terceiro. O caso utilizado para ilustrar o quarto modelo mostra como o sujeito se deixa levar pela percepção, inicialmente, para estabelecer a relação entre o cálculo e o material, mas, após, diante do conflito colocado pelo experimento, é capaz de exercer regulações intencionais que o levam a corrigir seus juízos anteriores, ainda que não construa um modelo explicativo elaborado. Vêem-se aí os mecanismos de controle e avaliação do sujeito tomando uma postura cada vez mais ativa ao longo do desenvolvimento.

Diante do exposto, o que Piaget infere e se encontra igualmente no terreno dos modelos explicativos elaborados, é que a conceituação fornece à ação um aumento de sua capacidade de antecipação e previsão, assim como uma regulagem imediata e ativa a fim de conseguir um êxito de maneira mais eficaz. No entanto, em determinado momento, há uma inversão dessa situação, a conceituação ultrapassa a ação e deixa de fornecer apenas uma possibilidade de antecipação e correção ativa, passando a fornecer uma antecipação de conjunto à ação, elaborando hipóteses e deduções que são fonte de inúmeros dados para a ação do sujeito. É o que se percebe já de maneira muito rudimentar no terceiro modelo explicativo e com toda a sua força no último.

Dessa relação entre conceituação e ação pode-se ver que enquanto a ação no plano material trabalha com dados individualizados, um a um, no plano das operações esses dados são trabalhados em conjuntos múltiplos e simultâneos, com possibilidade de expandir incrivelmente seus poderes de velocidade e dedução. No pensamento intuitivo, o sujeito julga cada parte como uma totalidade e por isso conclui de maneira equivocada que 1/2 é 1/3. Assim, pode-se inferir que a conceituação é uma das mais importantes fontes para a antecipação das condutas do sujeito, constituindo-se como um mecanismo de avaliação e controle primordial nas tomadas de decisão, como ocorre no caso do quinto modelo explicativo.

Considerações finais

Ora, por que encontramos tantos adolescentes e adultos escolarizados que resolvem cálculos com frações há bastante tempo e mesmo assim não conseguem resolver o problema que se apresentou? Por que fracassam em estabelecer uma relação entre o cálculo que efetuam e o problema que resolvem? Igualmente, por que sujeitos com uma estrutura formal têm comportamentos e processos de pensamento que são típicos de estruturas pré-operatórias, como a não conservação e a impossibilidade de construir uma estrutura de classes? A resposta a essas questões parece ser a mesma: as experiências anteriores que envolvem os números fracionários. Para a construção de uma relação operatória entre partes e um todo é imprescindível a presença de um pensamento lógico-matemático mais ou menos organizado. Esse pensamento se constitui à medida que os sujeitos passam por experiências lógico-matemáticas que requisitam essa atuação do pensamento. Caso o sujeito seja limitado a experiências físicas com os objetos, não há necessidade de uma estruturação mais organizada do pensamento para compreensão das situações que se apresentam. Parece bastante claro, no que tange os números fracionários, que as experiências proporcionadas pela escola estão ligadas a experiências físicas relacionadas aos sentidos, tais como ver, ouvir e tocar, mas que não se estendem em direção à ação do pensamento.

Enquanto que nos modelos explicativos iniciais os sujeitos atuam pela intuição perceptiva, que é imediata e momentânea e, por isso, estática, nos modelos finais o que predomina é um mecanismo operatório, o que implica reversibilidade das operações. Percebe-se assim, na construção dos modelos explicativos, a inversão já apontada por Piaget (1977), do domínio da abstração empírica sobre a abstração reflexionante.

Para a solução das situações que a escola apresenta é preciso que se saiba uma seqüência de procedimentos automatizados na qual os sujeitos manipulam algarismos em um cálculo sem uma compreensão das operações que realizam. Para efetuar tais seqüências de procedimentos o que se apresenta como pré-requisito é a memória e a escola parece saber disso, pois o ensino se volta à repetição como instrumento da memorização. Assim, é possível realizar um cálculo com base em um algoritmo sem daí derivar um modelo explicativo das operações efetuadas. O sujeito memoriza uma lei, no sentido de uma regularidade de ações, através da qual pode resolver os problemas. Contudo, essa aplicação da lei não exige a presença de um pensamento em ação e não propicia uma real experiência operatória, o que se desdobra na ausência da necessidade de construção de um modelo explicativo, que permanece inexistente ou parcialmente elaborado durante toda a vida adulta. Em resumo, o fato de o adolescente e o adulto não atuarem de maneira operatória em um problema é o fato de não terem experiências lógico-matemáticas em relação ao assunto abordado. Mesmo que o conjunto das estruturas seja formal, no caso das frações, a estrutura se apresenta restrita a níveis mais modestos em função da falta de necessidade de uma organização mais adequada dos esquemas operatórios na construção de um modelo explicativo.

Atribuir um significado a um objeto é relacionar um esquema de assimilação a este. No caso analisado, para que as partes da torre sejam significadas como frações do todo é preciso que haja um esquema de assimilação que atribua significado aos objetos. Na ausência de tal esquema, não é possível uma significação. O que então representam os sujeitos que não elaboram um significado para uma relação parte/todo? Por que nossos sujeitos não sabem que um pedaço de uma torre é uma fração da mesma torre? De acordo com Piaget e Inhelder "toda significação provém, de fato, da atribuição de um esquema a um objeto ou a um evento qualquer, mas todo esquema resulta, por outro lado, de uma construção, a qual consiste naturalmente em ações" (1979, p. 177, tradução nossa). Ora, assim sendo, os sujeitos não identificam as partes da torre porque não possuem esquemas que signifiquem essas como frações do todo. Um esquema se constrói a partir da organização de uma ação, se não há ação, não há estrutura, o que implica ausência de significados. Conclui-se, a partir disso, que o ensino escolar de frações está voltado para processos de memorização, os quais, indiretamente, excluem a ação do pensamento e a construção de estruturas para a atribuição de significados. Essa restrição resulta em sujeitos que não conseguem elaborar modelos explicativos suficientemente organizados para compreender um problema que envolve conteúdos escolares. Os cálculos realizados com base nas aprendizagens escolares não são capazes de oferecer uma possibilidade de solução aos problemas experimentais e tal fato surge da ausência de elaboração de uma relação entre o conteúdo e o problema devido à inexistência de estruturas mentais que permitam essa operação.

Referências

CARRAHER, D. W. e SCHLIEMANN, A. D. (1992). A compreensão de frações como magnitude relativa. *Psicologia: teoria e pesquisa.* Brasília, v. 8 (jan./abr.), n. 1, pp. 67-78.

INHELDER, B.; BOVET, M. e SINCLAIR, H. [1974][7] (1977). *Aprendizagem e estruturas do conhecimento.* São Paulo, Saraiva.

LIMA, J. M. de F. (1986). "Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade". In: CARRAHER, T. et alii. *Aprender Pensando.* Petrópolis, RJ, Vozes.

LÜDKE, M. e ANDRÉ, M. (2003). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo, EPU.

7 A data entre colchetes indica o ano de publicação da obra.

PARRAT-DAYAN, S. (1999). "A teoria de Piaget sobre a causalidade". In: MORENO, M. et alii. *Conhecimento e mudança.* São Paulo, Moderna.

PIAGET, J. (1921). Essai sur quelques aspectes du development de la notion de partie chez l'enfant. *Journal de Psychologie normale e pathologique*, XVIII, n. 6, pp. 429-480.

______[1926] (s.d.). *A representação do mundo na criança.* Rio de Janeiro, Record.

______[1950] (2001). *Epistemologia Genética.* São Paulo, Martins Fontes.

______[1955] (1976). *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo, Pioneira.

______[1974a] (1975). *A tomada de consciência.* São Paulo, Edusp.

______[1974b] (1977). *Fazer e compreender.* São Paulo, Melhoramentos.

______[1975] (1976). A *equilibração das estruturas cognitivas*: *problema central do desenvolvimento*. Rio de Janeiro, Zahar.

______[1977] (1990). *Abstração reflexionante.* Porto Alegre, ArtMed.

______e INHELDER, B. (1979). Procédures et strucutres. *Archives de psychologie*. Genebra, v. 47, n. 18, pp. 165-175.

______e SZEMINSKA, A. [1941] (1983). *A gênese do número na criança.* Rio de Janeiro, Zahar.

SILVA, J. A. da (2005). *Escola, complexidade e construção do conhecimento*. Dissertação de Mestrado. Porto Alegre, UFRGS/FACED/PPGEdu.

______(2007). "O professor pesquisador e a liberdade do pensamento". In: BECKER, F. e MARQUES, T. *Professor pesquisador.* Porto Alegre, Mediação.

VINH-BANG (1970). "El metodo clínico y la investigación en psicologia de nino". In: AJURIAGUERRA, J. *Psicología y epistemoligia genítica.* Buenos Aires, Proteo.

Recebido em ago./2007; aprovado em out./2007.