O ensino de matemática na licenciatura: a disciplina Teoria Elementar dos Números

Teaching of mathematics in initial teacher education: discipline Elementary Numbers' Theory

MARILENE RIBEIRO RESENDE[1]
SÍLVIA DIAS ALCÂNTARA MACHADO[2]

Resumo
O presente artigo apresenta resultados de uma investigação que teve como objetivo compreender a Teoria dos Números, como um saber a ensinar, voltado para a formação do professor de Matemática da escola básica, buscando elementos e possibilidades para (re)significá-la no ensino da matemática. Optamos por uma abordagem qualitativa, utilizando pesquisa documental e de campo. Realizamos entrevistas semiestruturadas com sete professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou em Educação Matemática. O estudo permitiu concluir que o ensino da Teoria Elementar dos Números deve ser mais enfatizado nos cursos de Licenciatura em Matemática, porque, ao tratar dos números inteiros, consitui-se em espaço propício para o desenvolvimento de habilidades e de ideias matemáticas relevantes.
Palavras-Chave: *Ensino da Teoria dos Números. Formação de Professores de Matemática. Educação Algébrica*

Abstract
This article presents results of an investigation which aimed at understanding the Number Theory, as a piece of knowledge to teach, geared to the Mathematics teacher development in basic education, searching for elements and possibilities to give meaning/new meaning to the teaching of mathematics. We chose a qualitative approach, using documental and field research. We carried out semi-structured interviews with seven teachers and researchers in the Number Theory or in Mathematics Education. The study allowed us to conclude that the teaching of the Elementary Number Theory should have more emphasis in the teacher training courses in Mathematics, because, dealing with whole numbers, it constitutes a space which is conducive to the development of relevant mathematical abilities and ideas.
Key Words: *Teaching of the Theory of Numbers. Development of Mathematics Teachers. Algebraic Education.*

Introdução

A discussão sobre a formação inicial do professor de matemática é complexa, pois envolve olhares, questões e interesses diversos, que se situam em diferentes âmbitos – no campo das políticas educacionais, que nem sempre coincidem com o que

[1] Programa de Mestrado em Educação – UNIUBE - marilene.resende@uol.com.br
[2] Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática - silviaaam@pucsp.br

almeja a sociedade; no campo das comunidades científicas (departamentos, sociedades que congregam matemáticos, educadores matemáticos, formadores de professores), que têm pressupostos e concepções diferentes sobre Matemática e sobre seu ensino; no contexto dos professores da escola básica, que esperam uma formação que atenda às demandas que o ensino de matemática lhes impõe.

Concordando com Fiorentini & Lorenzato (2006), ao pensarmos a formação do professor de matemática, partimos do pressuposto de que as suas atividades profissionais e as do matemático são distintas, pois têm objetivos, abordagens e público diferentes, ainda que estejam tratando do mesmo objeto – a Matemática. Assim, a formação desses profissionais não pode negligenciar esses aspectos.

O objetivo principal da Licenciatura em Matemática é formar o professor para atuar na escola básica, tendo por tarefa educar por meio da Matemática. Para esse fim, concorrem saberes diversos advindos das ciências e das práticas – profissionais, sociais e culturais. Nesse contexto, as chamadas disciplinas "específicas", ou seja, as que tratam dos conteúdos matemáticos, têm papel importante e inquestionável, pois se está formando o professor "de Matemática". Portanto, alguém que tem um compromisso ético com o ensino-aprendizagem desse campo de conhecimento, tão importante para a formação do cidadão de nosso tempo.

Entretanto, a constituição dessas disciplinas, seu papel e sua contribuição no processo de formação inicial necessitam ser problematizados, pois envolvem questões que não são simples nem consensuais.

Partindo dessas considerações iniciais é que nos propusemos a verificar quais são as concepções da Teoria Elementar dos Números, como saber a ensinar, voltado para a formação do professor da escola básica

Não há dúvidas de que os números têm um papel central na Matemática e na História da Matemática. Além disso, eles têm também forte presença na Matemática escolar nos anos iniciais, principalmente os números naturais. Segundo Lins e Gimenes (1997), o estudo dos números sempre foi um assunto que ocupou grande parte do ensino obrigatório de Matemática em todos os países. No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998), ao estabelecerem diretrizes para o ensino de Matemática na escola básica, destacaram o estudo dos números como um dos quatro blocos de conteúdos a serem trabalhados[3].

Entretanto se pode constatar que, embora o estudo dos números, principalmente o dos inteiros, ocupe grande parte do currículo de Matemática da escola básica, parece não merecer na formação de professores um tratamento que corresponda às demandas que o ensino desse tema apresenta ao professor nesse nível.

Nossa preocupação, ao realizar o trabalho[4] que deu origem a este artigo, está inserida no campo da educação algébrica, em que se questiona qual é a Álgebra a ser ensinada nos diferentes níveis da escolaridade, partindo do pressuposto de que o pensamento aritmético e o algébrico se desenvolvem simultaneamente. Como também se insere no campo da formação de professores no que diz respeito aos saberes específicos que devem fazer parte do currículo da Licenciatura em Matemática, tema de estudo ainda pouco explorado na Educação Matemática.

A formação de professores e os saberes específicos

Nas últimas décadas, como consequência de grandes transformações sociais, culturais e especialmente tecnológicas pelas quais tem passado a nossa sociedade, novos paradigmas têm norteado a concepção de homem, de conhecimento, consequentemente, de educação, de escola, de ensino e de formação de professores.

Neste cenário, no Brasil, muitas reformas, incluindo leis, planos nacionais de educação, resoluções e diretrizes para a educação, têm sido discutidas e apresentadas à sociedade. Com relação à formação de professores, no início da década passada, foram estabelecidas as *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica* [5] *(DCNFPEB),* em nível superior.

Nesse documento são apontadas várias questões a serem enfrentadas na formação de professores. Dentre elas, destacamos duas que, a nosso ver, têm afetado bastante a Licenciatura em Matemática. A primeira se refere à *desconsideração do repertório de conhecimento dos professores em formação* – isto é, ao se planejar os cursos, os conhecimentos prévios dos alunos ingressantes nem sempre são considerados.

[3] Nos Parámetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental – PCN, os conteúdos se dividem em quatro blocos: Números e Operacões, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas; Tratamento da Informacão.
[4] Tese de Doutorado, intitulada *Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemáica na licenciatura*, defendida na PUC/SP, em 2007.
[5] Parecer CNE/CP 09/2001, de 08 de maio de 2001 e Resolução do CNE/CP1, de 18 de fevereiro de 2002

Toma-se como pressuposto o que esses alunos “deveriam saber”. Entretanto, estudos mostram que os estudantes do primeiro ano dos cursos de formação de professores provêm de um meio social e cultural menos favorecido e têm formação insuficiente, decorrente das condições da escolaridade básica.

Outro aspecto diz respeito ao *tratamento inadequado dos conteúdos* – nem sempre há clareza sobre quais conteúdos devem ser tratados na formação e o como devem ser, considerando o conhecimento – objeto de ensino – e aquilo que deverá ser ensinado na escola básica. É comum, segundo o documento, que os cursos de licenciatura que formam especialistas por área de conhecimento coloquem ênfase em conteúdos específicos das áreas, tratando superficialmente (ou mesmo não tratando) os conhecimentos com os quais o futuro professor irá trabalhar no Ensino Fundamental e Médio. Por outro lado, acontece também de alguns cursos se preocuparem excessivamente com os aspectos didático-pedagógicos, sem a construção de uma base sólida dos conhecimentos específicos.

Concordando com o que se apresenta no documento, em relação à formação do professor de matemática, constatamos que muitos cursos enfatizam os conteúdos específicos, visando mais garantir a formação do matemático do que a do professor que vai ensinar Matemática na escola básica. Ao concordar com essa análise, não estamos defendendo que o professor de Matemática não deva ter um conhecimento matemático sólido que lhe dê condições de fazer escolhas de conteúdos e de abordagens, porém, estamos, sim, enfatizando que ensinar Matemática na educação básica envolve conhecimentos e habilidades que não se restringem ao “saber Matemática”.

Dentre os princípios norteadores para um curso de formação, presentes nas *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica*, destacamos um, que julgamos ser fundamental – *a necessidade de coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do professor*.

Deste modo, percebe-se que a problemática da formação de professores é atual e exige investigação para fundamentar as discussões e as escolhas curriculares que deverão ser feitas. Uma das questões centrais do debate e da investigação sobre a formação é, sem dúvida: – O que necessita saber um professor de Matemática para atuar na escola básica brasileira, nos dias atuais?

A resposta a essa pergunta é complexa e dinâmica, pois a construção dos saberes docentes tem várias fontes, incluindo os conhecimentos matemáticos, mas não apenas eles. Além disso, não se inicia nem se completa durante o curso de formação inicial. Deste modo, investigar as disciplinas que compõem o currículo dos cursos de licenciatura, tendo como foco a formação do professor para a escola básica, é algo necessário e fundamental na conjuntura atual, ainda, de questionamentos com relação à qualidade da formação inicial.

A Álgebra a ser ensinada

Com relação a esta problemática, segundo Coelho, Machado e Maranhão (2003, p. 5), há uma escassez de trabalhos que buscam estabelecer inter-relações entre disciplinas teóricas e práticas na Licenciatura em Matemática, como também de estudos que relacionam a Matemática ensinada na licenciatura e a praticada nas escolas de educação infantil e básica. Deste modo, apontam para a relevância de estudos que procuram clarear o papel da Álgebra na formação, diante das novas demandas sociais, educacionais e científicas, incluindo uma nova postura sobre a construção do conhecimento científico.

Em relação à Teoria Elementar dos Números, Machado *et al.* (2005) afirmam que ela tem um potencial formador que vem sendo negligenciado em todos os segmentos da escolaridade e indicam algumas potencialidades para seu ensino:

> […] auxiliar a reconhecer e compensar limitações de estudantes em seu entendimento conceitual da aritmética dos números inteiros; criar oportunidades, através da abordagem de tópicos como decomposição em primos e divisibilidade, para propor problemas fecundos que desenvolvam a compreensão conceitual da matemática; instigar as habilidades de estudantes para generalizar e fazer conjecturas e para encontrar maneiras de justificar essas conjecturas; promover o desenvolvimento de estratégias de prova indutivas e dedutivas. (MACHADO; MARANHÃO; COELHO, 2005, p. 2)

Sobre a aprendizagem dos números inteiros, as investigações vêm mostrando que ela não se completa nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como é comum ocorrer na escola brasileira. Sobre essa questão, Moreira (2004, p. 85), em sua tese de doutorado, afirma “que a aritmética dos naturais é um tema complexo, cuja apreensão, em níveis considerados satisfatórios, não se esgota no processo que se desenvolve ao longo das séries iniciais”.

Em nível mundial, há um interesse crescente dos educadores matemáticos pelo ensino-aprendizagem da Álgebra, em particular pela Teoria dos Números, com investigação nos diferentes níveis educacionais, incluindo a formação dos professores. Stephen R. Campbell e Rina Zazkis, investigadores que se têm dedicado a esse campo, publicaram, em 2002, uma obra: *Learning and Teaching Number Theory - Research in Cognition and Instruction*, com estudos enfocando a cognição e o ensino-aprendizagem da Teoria dos Números, na formação de professores, cobrindo uma variedade de dimensões. Essas investigações foram conduzidas nos Estados Unidos, Canadá, Reino Unido e Itália, demarcando uma área de estudos – a Teoria dos Números como Campo Conceitual.[6]

Coletivamente, esses estudos facilitam algumas indicações do potencial da Teoria dos Números para a compreensão mais profunda da Matemática, entretanto os investigadores apontam para a necessidade de um esforço sistemático por parte da comunidade dos educadores matemáticos para pesquisar esse potencial, pois consideram que as investigações nessa área têm sido relativamente esparsas e desconectadas.

A questão, os objetivos e a trajetória metodológica

Dentro da problemática da formação do professor de Matemática para a escola básica e da Álgebra a ser ensinada, a questão geradora desta investigação foi: *Qual Teoria dos Números poderia ser concebida como um saber a ensinar na Licenciatura em Matemática, visando a prática docente na escola básica?*

Assim, o estudo teve como objetivo: compreender a Teoria dos Números, como um saber a ensinar voltado para a formação do professor da escola básica, nos cursos de Licenciatura em Matemática. Também, buscar elementos e possibilidades para (re)significá-la no contexto do ensino da Matemática.

Buscamos referenciais teóricos que pudessem clarear a relação entre saber científico, saber a ensinar e saber ensinado, e, consequentemente, as relações entre as disciplinas científicas, as acadêmicas e as escolares, pois nossa preocupação é com a Teoria Elementar dos Números como saber a ensinar, reconhecendo que esta guarda relação com o saber científico referente ao campo. Assim, fundamentamo-nos na Teoria da Transposição Didática de Chevallard (1991) para considerar que os saberes a ensinar não se confundem com os saberes científicos nem são meras adaptações didáticas

[6] Campbell e Zazkis adotam a concepção de campos conceituais de Gérard Vergnaud. Citando esse autor, consideram que um campo conceitual é um conjunto de situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas que são ligados uns aos outros. (CAMPBELL; ZAZKIS, 2002, p. 7, tradução nossa)

destes. São, sim, criações didáticas que têm objetivos próprios e espaços de significações diferentes.

Ainda, com base em Lopes e Macedo (2002), concebemos as disciplinas acadêmicas, ou seja, o saber a ensinar, como instituições sociais, frutos de una negociação, e não, apenas, recortes de um campo científico transposto para o ensino, referindo-se a um campo complexo de saberes e de práticas e com uma legitimidade própria. Assim, são consideradas como um conjunto de: conteúdos, frutos de una transposição didática; práticas, finalidades, elementos pedagógicos e de outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral, organizados de modo a manter uma unidade científica e didática.

A Teoria dos Números é um importante campo científico de conhecimentos e de pesquisa dentro da Matemática. Como tal, deve ser apropriado pelas novas gerações, o que exige a sua transformação em saber a ensinar, constituindo-se em disciplinas acadêmicas a serem desenvolvidas nos cursos superiores.

Para buscar responder as questões levantadas e alcançar os objetivos propostos, em um enfoque qualitativo, utilizamos como estratégias metodológicas a pesquisa bibliográfica, documental e de campo. Neste artigo, trazemos os resultados da pesquisa de campo, obtidos por meio de entrevistas semiestruturadas, realizadas com sete professores-investigadores, aqui identificados por apelidos, sendo duas mulheres e cinco homens.[7]

São eles: um doutor em Matemática, com tese em Álgebra, coautor de um livro de Teoria dos Números, atualmente professor e investigador na área de Educação Matemática em uma instituição privada de ensino, havendo atuado também em uma instituição pública estadual, identificado como Avelar; três doutores, investigadores em Teoria dos Números, coautores de livros nesta área e também professores na graduação e na pós-graduação em uma instituição pública federal, denominados Borges, Cunha e Dias; um educador matemático, com pós-graduação em Teoria dos Números e doutorado em Educação Matemática, atuando como professor da graduação e da pós-graduação em uma instituição privada de ensino, denominado Elias; um doutor em Educação e mestre em Matemática Aplicada, docente e investigador na área de Educação Matemática, em uma instituição pública estadual, interessado em educação

[7] Para garantir a confidencialidade dos dados, todos serão tratados como sendo do sexo masculino.

algébrica, aqui chamado de Gomes; e, finalmente, um doutor em Matemática, atualmente investigador no Ensino de Matemática e professor da disciplina Introdução à Teoria dos Números na licenciatura, em uma instituição pública federal, denominado Félix.[8]

Para a análise das entrevistas, utilizamos a análise de conteúdo, conforme caracterizada por Lüdke e André (1986), Laville e Dionne (1999) e Bardin (1977), procurando indagar o discurso de cada entrevistado com relação: ao papel da Teoria dos Números na Matemática e nos currículos dos cursos de Matemática; às interfaces da Teoria dos Números com outros campos da Matemática, particularmente a Álgebra e a Aritmética; e, finalmente, com relação ao que estamos chamando Teoria Elementar dos Números, procurando revelar seus modos de ver os temas tratados.

Razões para a presença da Teoria dos Números nos currículos

Todos os entrevistados afirmam que a Teoria dos Números tem um papel central na Matemática e na História da Matemática, e que é pouco enfatizada nos currículos, especialmente na Licenciatura em Matemática, concordando com o que afirmam Campbell y Zazkis (2002) a esse respeito. As razões apresentadas por eles são de natureza diversa e revelam as suas concepções de Matemática e de seu ensino, crenças e valores, resultantes da formação de cada um e das atividades nas quais estão engajados como investigadores ou docentes.

Assim, na visão deles, a Teoria dos Números deve estar nos currículos, porque trata de assuntos que são considerados fundamentos em Matemática, e, portanto, são

---

[8]A escolha dos sujeitos investigados se deu em função do objetivo das entrevistas - verificar como grupos acadêmicos, pesquisadores em Matemática, em Educação Matemática e professores na graduação ou na pós-graduação, concebem o ensino de Teoria dos Números, buscando desvelar aspectos que justificassem a sua presença na formação do professor de matemática da escola básica. Outro motivo que orientou a escolha foram os resultados da pesquisa documental, que incluiu o levantamento das propostas curriculares de disciplinas em que eram tratados conteúdos de Teoria dos Números, constantes dos currículos de doze universidades brasileiras, com o objetivo de verificar qual teoria dos números estava sendo ensinada nos cursos de Licenciatura em Matemática, no Brasil. Constatamos que o estudo dos inteiros estava presente nos currículos pesquisados, em disciplinas com nomes, ementas, conteúdos, bibliografias e ênfases diversas, sem uma preocupação explícita com a formação do professor de Matemática da escola básica. Essa constatação conduziu à necessidade de clarear: as relações entre Teoria dos Números, Álgebra e Aritmética; os objetivos da disciplina na Licenciatura; os conteúdos e as metodologias, visando à formação do professor da escola básica. Daí a necessidade de ouvir sujeitos envolvidos com a formação de professores, como docentes e/ou como investigadores, e conhecedores dos campos de conhecimento matemático que se pretendiam compreender.

necessários para construir e para aprender mais Matemática. Esse pensar está presente na fala de Elias, ao destacar o papel de "fundamentos" que ela tem dentro da Matemática, nas diferentes áreas, evocando Gauss, que a considerou a "rainha da matemática". Esse ponto de vista foi reforçado por Dias, que a considera um campo sem fronteiras, pois, ao mesmo tempo em que ela está na base da construção do conhecimento matemático, ela se vale de todo esse conhecimento para resolver as questões que lhe são próprias. Além disso, esse entrevistado destaca que os números naturais têm um papel fundamental na criação dos demais conjuntos numéricos. Esses números não têm una definição imediata, porém, a partir deles, os demais números poderão ser construídos de uma forma dedutiva. Avelar, Borges e Cunha consideram os inteiros como um exemplo natural e concreto para a compreensão das estruturas algébricas.

Sobre essa visão e suas justificativas, é importante, contudo, ponderar que duas concepções podem estar subjacentes a elas. Uma, que pode ser vista como reducionista – a de que se ensina Matemática apenas como o objetivo de ensinar mais Matemática –, pois coloca a Matemática como fim e não como meio do processo educativo. Por outro lado, pode estar subjacente às justificativas o princípio da concretização no ensino-aprendizagem da Matemática, apontado por Harel (2000). De acordo com esse princípio, o estudante, para abstrair um conceito matemático, deve ter em sua estrutura cognitiva elementos conceituais que podem ser tomados como referências para a nova aprendizagem, isto é, algo que os torna concreto. O concreto toma, aqui, a conotação de familiar ao estudante. Neste sentido, o estudo do conjunto dos números inteiros permite desenvolver elementos conceituais que servirão de base para outras aprendizagens.

Outra justificativa, quase consensual, diz respeito ao fato de que a Teoria dos Números, tendo como objeto o estudo dos números inteiros, tem uma importância histórica, pois oportuniza colocar a Matemática no contexto da civilização humana, conforme afirma Borges. Ainda que a Teoria dos Números, como saber científico, seja nova, como fala Dias, os números estão na base da civilização humana. Segundo os historiadores, na Idade da Pedra, a ideia de contar, considerada prelúdio do pensamento científico, já estava presente. Essas justificativas também são apresentadas por Gomes, que percebe o estudo dos números inteiros como de grande riqueza para a formação do professor, tanto sob o ponto de vista histórico, como epistemológico, e por Félix, ao considerar que a Aritmética faz parte da cultura dos povos, podendo constituir-se em uma oportunidade para que o conhecimento matemático possa ser associado ao de outras áreas, como a história, a geografia, a antropologia, entre outras.

Neste sentido, é importante recordar que o conhecimento matemático é, para muitos alunos e até mesmo para os professores, não histórico, pronto e acabado. Esse ponto de vista dos entrevistados apresenta o estudo dos números como uma oportunidade para que a Matemática seja percebida como uma produção humana, como uma das humanidades, cuja significação é tratada na compreensão compartilhada pelos seres humanos, conforme consideram Davis e Hersh (1986, p. 454), estando, assim, contextualizada na história da humanidade e sendo possuidora de um valor cultural.

Essas justificativas podem ser estendidas aos dias de hoje, pois os números inteiros estão presentes nas diferentes práticas sociais e, em especial, na matemática do discreto. Esse modo de ver é destacado por Borges ao considerar que nós pensamos com números, no sentido de que os números estão presentes nas argumentações que fazemos no dia a dia. Também por Dias, ao considerar que hoje, por exemplo, nós temos problemas relacionados com o uso de cartões de crédito, uso de senhas para abrir o computador, armazenamento de dados dentro do computador, e que todo esse sistema é digital, está baseado na qualidade dos números inteiros.

Essa valorização da Aritmética, pela utilização do discreto, corrobora o que afirma Gimenes (Lins e Gimenes, 1997), ao considerar que há hoje um interesse pela matemática discreta no âmbito curricular, pois, para a resolução de certos tipos de problemas aplicáveis à vida cotidiana, são necessárias estratégias que não se resumem a simples cálculos. São necessários métodos importantes da Matemática, como a indução e o tratamento recursivo, presentes na Teoria dos Números. O discreto é importante tecnologicamente, pois os aparelhos digitais trabalham nesse domínio. Aparece em estruturas combinatórias, no uso de padrões iterativos ou recursivos, na análise de redes, em códigos, em elementos probabilísticos.

O uso de senhas e de códigos levou à necessidade de desenvolvimento de sistemas de segurança de comunicação. Assim Borges e Dias se referem à aplicação da Teoria dos Números na criptografia, ao considerar que um dos sistemas mais famosos de criptografia, hoje, é chamado RSA e está baseado na fatoração em primos, e que qualquer pessoa pode entender, se tiver um conhecimento básico de Teoria dos Números. Isto dá significado ao estudo dos números primos no ensino, já que esse conceito é também central na Teoria dos Números, conforme indicaram Avelar e Dias.

Nesse sentido, os entrevistados confirmam o que apontam outros pesquisadores, como Campbell e Zazkis (2002), que consideram ser hoje indefensável o argumento de que a Teoria dos Números, devido a sua natureza teórica, tem pouco ou nenhum valor prático, pois, na era da informação, ela tem múltiplas aplicações, como nos métodos de criptografia.

Cinco dos entrevistados apontam a Teoria dos Números como uma área da Matemática que lida com problemas que são aparentemente simples. São acessíveis, isto é, têm poucos dados, conforme pontuou Dias, como também envolvem elementos que são familiares aos alunos, segundo Borges, o que os torna fáceis de serem compreendidos, embora apontem que as soluções nem sempre são simples, exigem engenhosidade. Dias afirmou que essa dificuldade está ligada ao fato de que não há modelos ou padrões de resolução. Assim, existem conjeturas até hoje não demonstradas. Elias também afirmou que a Teoria dos Números traz problemas e indagações simples, aparentemente óbvias num primeiro momento, mas que se tornam difíceis, porque não é fácil explicar o que parece óbvio. Por esses motivos, a Teoria dos Números é considerada um ramo desafiador e instigante.

Outra justificativa presente explicitamente no discurso de cinco dos entrevistados é a possibilidade de que o ensino de Teoria dos Números promova o desenvolvimento de um modo de pensar mais científico e de habilidades cognitivas, como a de argumentar e a de provar. No entanto, as concepções com relação a este ponto não são convergentes, pois alguns dos entrevistados colocam o foco no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, ao enfatizar a abordagem axiomática e a demonstração formal, que, partindo de uma hipótese, permite chegar a uma tese, como concebido por Borges e Cunha, de maneira explícita, e também por Dias, em algumas considerações. Já Avelar diz que existem problemas que podem ser formulados de uma maneira muito clara e simples, porque envolvem conceitos que, facilmente, os alunos podem dominar. São interessantes e exigem, às vezes, que a criança trabalhe com argumentos, sendo assim uma forma de se propiciar o exercício da argumentação desde cedo.

No entanto, Gomes e Félix, ao discutirem as abordagens para estes conteúdos na Licenciatura em Matemática, rejeitam a ênfase excessiva na abordagem axiomática, por considerá-la “engessante” – conduzindo à valorização de procedimentos na visão de Gomes, e como algo pouco proveitoso para a maioria dos alunos, na visão de Félix.

Deste modo, um valor formativo do ensino de Matemática que poderia emergir fica condicionado a uma série de fatores, que não são intrínsecos ao conhecimento matemático, mas que incluem concepções, crenças, formação, escolhas e experiências de quem ensina.

Alguns entrevistados apontam, ainda, para o que poderia ser considerado como valor estético do ensino de Matemática, conforme descrito por D'Ambrósio (1990). Borges refere-se à beleza escondida nos números – ao falar do Teorema da Reciprocidade Quadrática de Gauss, considera-o um teorema tão bonito que Gauss o demonstrou de cinco maneiras diferentes. Também Cunha aponta para esse valor ao afirmar que há problemas em Teoria dos Números que são interessantes, atraentes, e, com isso, acha que se pode desenvolver o gosto pela Matemática.

No entanto, a questão do apreciar "o belo" e do "gostar" de Matemática, apresentada pelos entrevistados, merece uma reflexão mais aprofundada. Num primeiro momento, parece ser a beleza algo intrínseco à Matemática, mas o apreciar, o desejar alguma coisa tem uma carga de subjetividade que tem significações mais profundas e que não atinge a todos os sujeitos do mesmo modo. A demonstração de um teorema de cinco modos diferentes para um matemático é algo que faz emergir esse valor estético. No entanto, para muitos alunos, mesmo os da Licenciatura em Matemática, pode ser alguma coisa sem significado ou até mesmo desnecessária, podendo, inclusive, impedi-los de ver essa beleza.

Para outros, o belo se manifesta na sensibilidade às qualidades estéticas, tais como a simetria, a analogia, a simplicidade e a ordem, como compreende Sinclair (2002, p. 219). De acordo com essa autora, a dimensão estética da atividade matemática não é meramente um julgamento fantástico e romantizado da beleza matemática, mas algo que permite o conhecimento matemático, impelindo à atividade, gerando processos e permitindo a avaliação do produto.

Uma justificativa para a presença da Teoria dos Números nos currículos, que não pode ser considerada convergente, pois foi apresentada apenas por Gomes e Félix, toma como referência o principal objetivo da licenciatura, que é o de formar professores de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Afirmam eles que o estudo dos números (da Aritmética) tem uma presença forte na escola básica de todas as nações, o que exige que o professor tenha um conhecimento aprofundado desses temas, indo além do que irão ensinar. Félix aponta a necessidade de que o licenciando vivencie processos e experiências que ele deverá desenvolver com seus alunos na escola básica, não no sentido de apenas suprir falhas de sua aprendizagem desses temas, mas aponta para o que podemos identificar como o "conhecimento do conteúdo" e o "conhecimento pedagógico do conteúdo", descritos por Shulman (1986). Neste sentido, esses dois entrevistados trazem também a preocupação com a coerência entre a formação e a prática esperada do professor.

Sobre a pouca ênfase dada à Teoria dos Números nos currículos, quatro dos entrevistados apresentaram suas explicações. No currículo das licenciaturas, Avelar aponta para resquícios do Movimento da Matemática Moderna, em que a ênfase foi dada ao estudo das estruturas algébricas. Gomes percebe que esses conteúdos são tratados em disciplinas de Fundamentos de Matemática, muitas vezes com uma abordagem única, e geralmente axiomática. Félix aponta para uma questão histórica nos currículos dos cursos de Matemática, no Brasil, que dão ênfase ao estudo do contínuo, ficando o discreto restrito, muitas vezes, a uma disciplina.

Na educação básica, Avelar conjetura que questões envolvendo os inteiros não têm uma presença mais forte nos currículos, pela falta de familiaridade dos professores com esses temas, no sentido de saber explorá-los, visando à argumentação, que foi o aspecto defendido por ele. Dias se refere a vários fatores: à existência de problemas em Teoria dos Números que não são fáceis de serem resolvidos; à falta de representação figurativa como a existente em Geometria; à inexistência de modelos, cada problema se resolve de um modo; à forma inadequada da apresentação da Teoria dos Números nos livros didáticos no mundo inteiro. Assim, consideramos que as dificuldades apresentadas são elementos para a reflexão e para a pesquisa dentro da Educação Matemática, em especial, por aqueles que estão envolvidos com o ensino de Teoria dos Números.

Sintetizando, podemos afirmar que os entrevistados apresentaram elementos que podem justificar uma maior presença da Teoria dos Números no ensino de Matemática nos diferentes níveis da escolaridade, em especial no curso de Licenciatura em Matemática, embora o modo de ver alguns aspectos não seja consensual. Além disso, apontaram aspectos que abrem caminho para a pesquisa, no sentido de avaliar as possibilidades e, também, as dificuldades que o ensino-aprendizagem desse campo pode apresentar.

Teoria dos Números, Aritmética e Álgebra e as suas relações

Em um estudo preliminar[9] em que buscamos verificar como a disciplina Teoria dos Números estava incluída no currículo da Licenciatura em Matemática em algumas universidades brasileiras, pudemos verificar que o estudo dos números inteiros era tratado em disciplinas com diferentes denominações: Álgebra 1 para a licenciatura, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Álgebra Elementar, Álgebra 1, Estruturas Algébricas 1, Fundamentos de Matemática 1, Teoria dos Números, Teoria Aritmética dos Números, Introdução à Teoria dos Números; Aritmética e Álgebra; Teoria Elementar dos Números e Os Números.

O fato de ter denominações diversas pode parecer irrelevante, sob o argumento de que o importante é que tópicos de Teoria dos Números sejam tratados e abordados de modo a atender aos objetivos do curso e ao perfil do profissional que se pretende formar. Entretanto, no nosso modo de ver, analisado com mais cuidado, revela-nos concepções de Matemática, de ensino e de formação de professores, como também ênfases que serão dadas no tratamento dos conteúdos. Confirma, inclusive, o que se discute sobre a constituição das disciplinas acadêmicas e escolares, ou seja, nesse processo há uma transposição didática dos saberes científicos, mas essa transposição envolve escolhas, negociações, lutas de poder, o que transforma a disciplina em uma instituição social.

Assim ocorre com a Teoria dos Números que, sendo um campo da Matemática, estruturado e organizado, ao se constituir em disciplina acadêmica, sofre transformações e está sujeita a negociações, a concepções de Matemática e de formação de professores que conduzem à inclusão de tópicos a ela relacionados em disciplinas com diferentes denominações, expondo, mesmo que não de maneira explícita, as suas inter-relações com a Álgebra e com a Aritmética.

Quando a disciplina é denominada Álgebra, por exemplo, constatamos que há uma pulverização maior dos conteúdos, e os inteiros são tratados como exemplos de estruturas algébricas, podendo ficar negligenciados aspectos próprios e abordagens dos inteiros que interessariam ao professor da escola básica. Desse modo, procuramos ouvir dos entrevistados o que eles pensam a respeito da relação entre esses campos: Álgebra,

[9] Esse estudo foi realizado em 2005, considerando os currículos da Licenciatura em Matemática em 12 Universidades brasileiras: USP, UFMG, UNESP-Rio Claro, UNICAMP, PUC/SP, UFSCar, UnB, UFRJ, UFSC, UFSM, UFPE, UFBA

Aritmética e Teoria dos Números.

Para todos eles, a Teoria dos Números, enquanto um campo da matemática, é classicamente definida como o estudo dos inteiros, das propriedades e das relações entre eles. Embora considerem que o objeto da Teoria dos Números sejam os números inteiros, a maioria deles destaca que, para resolver problemas de Teoria dos Números, são necessárias ferramentas de outros campos, como, por exemplo, da Análise e da Geometria. Cunha e Dias chegam a afirmar que é um campo sem fronteiras, e Borges assegura que a Teoria dos Números tem como foco resolver os mistérios dos números, e, para isso, são utilizados métodos algébricos, métodos analíticos, ou também métodos geométricos. Cunha considera, ainda, que a Teoria dos Números nasce de problemas aritméticos, mas avança muito mais e envolve outras teorias que já não usam mais necessariamente a aritmética dos inteiros, nem mesmo a de corpos finitos. Além disso, afirma que ela é extremamente abrangente, podendo envolver também conhecimentos de outros campos, como da Análise Complexa. Elias ressalta que a Teoria dos Números se torna uma ferramenta para a análise e para Álgebra em nível de pesquisa. Desse modo, podemos observar que a Teoria dos Números é ferramenta para outros campos da Matemática, assim como utiliza os conhecimentos e ferramentas desses campos na resolução de seus problemas.

Quatro dos entrevistados manifestaram que a Teoria dos Números é vista como parte da Álgebra Moderna, ficando claro que não se trata de inclusão, pois a Álgebra avança para outras questões que não envolvem apenas o estudo do anel dos inteiros. E a Teoria dos Números, por sua vez, também tem problemas que não são resolvidos com ferramentas da Álgebra, mas da Análise, da Geometria. Para dois deles, o anel dos inteiros, ou a Teoria Elementar dos Números, pode ser visto como a intersecção entre Álgebra e Teoria dos Números.

A Álgebra é concebida pelos entrevistados como Álgebra Moderna, cujo objeto de estudos são as estruturas algébricas: grupos, anéis e corpos. Cunha, inclusive, descreve como se dá o processo de busca da estrutura, ao afirmar que, na Álgebra abstrata, o que se quer é exatamente – dada uma situação, buscar qual é o esqueleto daquela situação, quer dizer, retirar tudo aquilo que é dispensável, e manter o que é indispensável para entendê-la, desvelando, assim, um núcleo que pode ser comum a várias situações.

No entanto, quando se considera a Álgebra escolar, a visão que os educadores matemáticos vêm discutindo é mais abrangente, pois outras concepções têm fundamentado as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse campo em nível mundial, como indicam Berdnaz, Lee e Kieran (1996)[10].

Considerando que, em muitas universidades brasileiras, a Teoria dos Números é apresentada como unidade ou disciplina, dentro da matéria Álgebra, a situação do ensino dos inteiros, abordados como um exemplo de estrutura algébrica, pode também caminhar no sentido do distanciamento da formação em relação à prática docente no ensino básico, conforme mostrou Moreira (2004).

Com relação à Aritmética, a visão manifestada pelos entrevistados não parece muito clara, e o discurso deles, no que se refere a essa questão, é reticente, entremeado de perguntas, de frases incompletas. Ao tratá-la, referem-se ao "fazer contas", às operações com números que não se restringem aos inteiros, aparecendo também a questão da representação dos números e os problemas de contagem. Entretanto, Borges diz ter dificuldades de separar Aritmética e Teoria dos Números, lembrando que um livro famoso, intitulado Aritmética Superior, é só Teoria dos Números.

Quanto à relação entre Aritmética e Álgebra, Avelar, Elias e Gomes voltam-se para a questão do ensino dessas áreas na escola básica, considerando que a educação algébrica e a aritmética não estão dissociadas, mas podem coexistir, estando uma imbricada no desenvolvimento da outra. Avelar considera que a introdução da Álgebra no ensino não ocorre no momento em que se introduzem letras para representar incógnitas, variáveis, mas lembra que, quando se trabalha com a ideia de invariante, ou a ideia de sequência em problemas, com a ideia de igualdade, já estamos entrando no domínio do pensamento algébrico. Elias questiona a associação da Aritmética ao concreto e a associação da Álgebra ao abstrato, pois isso conduz, segundo ele, à discussão da "passagem" da Aritmética à Álgebra, inclusive à discussão de se postergar o ensino da Álgebra, por considerar que o aluno não tem um pensamento abstrato formal, e diz que as coisas poderiam estar, muito bem, juntas, acontecendo ao mesmo tempo.

---

[10] No artigo intitulado *Approaches to Álgebra: Perspectives for Research and Teaching*, elas apresentam as seguintes concepções: o estudo de uma linguagem e sua sintaxe; o estudo de procedimentos de resolução de certas classes de problemas; o estudo das regularidades que governam as relações numéricas; e o estudo de relações entre quantidades que variam. (BERDNAZ; KIERAN; LEE, 1996, p. 4).

Esse modo de ver é também compartilhado por Lins e Gimenes (1997), que sugerem que uma não só se beneficia da outra como também depende da outra. Consideram que a educação aritmética realizada hoje precisa ampliar o conjunto de atividades e habilidades tendo em vista o desenvolvimento do sentido numérico, e a educação algébrica deve promover a produção de significados não apenas dentro da Matemática e conduzir o aluno a *pensar o mundo em números*.

Gomes afirma que precisamos aprender a trabalhar de forma mais sistemática na Licenciatura em Matemática a inter-relação entre estes campos. A questão da fragmentação da Matemática no ensino é questionada também por Borges, ao afirmar que é mais importante ver a beleza da Matemática do que se preocupar em colocar "divisórias", ou ainda, como observou Dias de modo enfático, que não existem Matemáticas, mas Matemática, no sentido de que os diversos campos são diferentes formas de olhar para os objetos matemáticos. Alguns entrevistados, como Dias e Gomes, acrescentam que a pessoa que consegue transitar facilmente de um campo a outro, terá mais condições de resolver problemas em Matemática.

A partir das contribuições dos entrevistados e das leituras realizadas, neste trabalho, consideraremos que Teoria dos Números é o estudo dos números inteiros, de suas propriedades e das relações entre eles. Consideraremos também que a Teoria dos Números tem intersecção com a Álgebra, não só com a Álgebra Moderna, cujo objeto é o estudo das estruturas algébricas, mas também com a Álgebra Clássica, cujos objetos são as equações. A essa intersecção denominaremos Teoria Elementar dos Números, como o fez um dos nossos entrevistados. Consideramos importantes as observações de Avelar e de Elias de que a educação algébrica e a aritmética devem coexistir, e acrescentamos: não, apenas, nas séries iniciais da escolaridade, mas durante toda a escola básica, devendo influenciar a formação de professores.

Destacamos, contudo, que, ao se definirem as disciplinas acadêmicas nos currículos da Licenciatura em Matemática, ainda que concordemos com os pressupostos da não-fragmentação do conhecimento matemático, com as inter-relações entre Álgebra, Aritmética e Teoria Elementar dos Números, julgamos que é necessário garantir que os elementos caracterizadores dos inteiros, presentes inclusive na escola básica, sejam trabalhados. Mesmo que incluídos no campo da Álgebra, o estudo dos inteiros não pode se reduzir a um exemplo de estrutura algébrica, daí a importância de uma disciplina cujo objetivo seja explorar ideias matemáticas relevantes relativas aos inteiros, tais como: a ideia de recorrência através da qual se definem muitas noções; a indução matemática; a questão da divisibilidade; questões relativas aos números primos e à estrutura multiplicativa dos inteiros. Nesse sentido, concordamos com Campbell e Zazkis quando consideram que a Teoria dos Números deva ter um espaço próprio nos currículos da Licenciatura em Matemática.

A Teoria Elementar dos Números – uma disciplina acadêmica fundamental na formação do professor

Ao apresentarmos essa categoria de análise, é necessário lembrar que concebemos uma disciplina acadêmica como um construto social, fruto de uma negociação entre os pares no âmbito das instituições de ensino superior, considerando o perfil de profissional que se quer formar. Trata-se de um conjunto de conteúdos e práticas, fruto de uma transposição didática; de finalidades; de elementos pedagógicos, além de outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral, organizado de modo a manter uma unidade científica e didática.

Sem a pretensão de prescrição do que deve ser ou do que é necessário, destacamos alguns aspectos que depreendemos da fala dos entrevistados, da pesquisa documental e bibliográfica realizadas, os quais podem contribuir para a concepção de uma disciplina que trate de Teoria dos Números, visando à formação do professor da escola básica.

Assim, a definição dessa disciplina, tanto no que se refere aos objetivos, como à seleção de conteúdo e de abordagens a serem feitas, deve considerar que:

1) **tópicos de Teoria dos Números estão presentes na educação básica:** os números naturais e os inteiros ocupam grande parte dos currículos de Matemática da escola básica, e o seu ensino tem questões próprias que não podem ser desconsideradas na formação do professor;

2) **a Teoria dos Números é um espaço propício para o desenvolvimento de ideias matemáticas relevantes relativas aos números naturais e algumas também estendidas aos inteiros, presentes na matemática escolar,** tais como: a ideia de recorrência através da qual se definem muitas noções; a indução matemática; a questão da divisibilidade; questões relativas aos números primos e à estrutura multiplicativa dos inteiros;

3) **a Teoria dos Números é um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova:** porque, ao tratar dos inteiros, permite que os estudantes trabalhem com algo que lhes é familiar; porque oferece ricas oportunidades para a exploração dos diferentes tipos de provas, permitindo ao licenciando perceber que a prova no ensino não deve ser compreendida da mesma forma que na pesquisa em matemática, perceber também que a prova tem diferentes funções não só de validar e convencer, mas principalmente de explicar;

4) **a Teoria dos Números é um campo propício para a investigação matemática:** porque a exploração de padrões e relações numéricas, o uso da recursão e da indução matemática, envolvendo os inteiros, as questões envolvendo a divisibilidade e os números primos sempre estiveram presentes na investigação matemática e podem ser explorados no ensino, oportunizando o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, de generalizar, testar e validar as conjecturas.

Nos depoimentos dos entrevistados, buscamos identificar justificativas para a presença da Teoria dos Números nos currículos, em especial no de Licenciatura em Matemática, o que responde às questões: por que e para que, analisadas anteriormente. Entretanto, há ainda duas questões que também são cruciais para pensar uma disciplina acadêmica: o que e o como ensinar.

Com relação aos conteúdos, apresentamos na entrevista uma proposta de conteúdos para apreciação dos entrevistados. Essa proposta foi definida a partir da pesquisa preliminar aos currículos de algumas universidades brasileiras e incluía o estudo dos ***Números Inteiros****: operações e propriedades, princípio da indução finita; a* ***Divisibilidade****: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; a* ***Congruência módulo m:*** *Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Euler e Teorema de Wilson; as* ***Equações diofantinas lineares.***

Ao apreciá-la, houve por parte dos entrevistados uma tendência inicial no sentido de considerar necessário e suficiente o que foi proposto. Quanto aos tópicos referentes aos números inteiros, à divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, números primos e Teorema Fundamental da Aritmética, houve um consenso de que devam ser abordados numa disciplina de Teoria Elementar dos Números, mesmo porque são conteúdos que também devem estar presentes na educação básica.

No entanto, três dos entrevistados passaram a discutir os tópicos indicados, sugerindo o que poderia ser retirado ou acrescentado. Avelar não considera como essencial o estudo da Aritmética modulo *m*, pois alega se tratar de uma notação para a divisibilidade que pode ser trabalhada de outra forma, opinião também compartilhada por Félix. Quanto aos teoremas de Euler, Wilson e o Pequeno Teorema de Fermat, esses dois entrevistados acham que envolvem questões interessantes sobre os números primos e poderiam ser tratados de uma forma intuitiva e investigativa. Borges e Cunha sugerem acrescentar o Teorema da Reciprocidade Quadrática de Gauss, por ser um teorema muito bonito, com várias demonstrações, e, segundo Borges, uma oportunidade de trazer para o ensino a figura de Gauss, que é importante na Teoria dos Números. Cunha, pensando em um currículo "ideal", sugere, ainda, o Teorema Chinês do Resto e equações diofantinas de grau maior do que um.

Diante da apreciação e das sugestões feitas pelos entrevistados, percebemos que o que foi apresentado, inicialmente, são conteúdos que poderão ser tomados como ponto de partida para a definição da ementa de uma disciplina acadêmica de introdução à Teoria dos Números, que pode contribuir de forma significativa na formação do professor. A inclusão de outros tópicos dependerá de fatores que influenciam a seleção de conteúdos, como a carga horária, as condições reais dos alunos, a metodologia a ser adotada e, principalmente, os objetivos da Licenciatura em Matemática.

Além dos conteúdos, emergiu do discurso dos entrevistados, de forma implícita ou explícita, a questão da abordagem desses conteúdos, aspecto que também é constituinte de uma disciplina, na concepção que adotamos. Entretanto, não há convergência a esse respeito, duas vertentes podem ser percebidas de modo claro e uma terceira que pode ser identificada em duas das entrevistas. Uma delas é a abordagem dedutiva axiomática, identificada como forma de fazer Matemática e de pensar matematicamente. Uma segunda propõe o processo de investigação matemática, que é, segundo alguns entrevistados, uma abordagem que valoriza o conjecturar, o testar a veracidade das afirmações, o argumentar. Uma terceira forma de abordagem é indicada por Gomes e também por Félix, que é a abordagem histórica e epistemológica dos conceitos. Sabemos que as ideias trazidas pelos entrevistados e apresentadas neste texto expõem dificuldades e tensões com relação ao ensino de Matemática e à formação de professores, que não poderão ser discutidas dentro dos limites deste artigo, mas que devem ser pesquisadas e discutidas no campo da Educação Matemática.

Reflexões finais

Neste texto, procuramos trazer nossas compreensões e as dos entrevistados sobre a Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, voltado para a formação inicial do professor da escola básica, procurando levantar possibilidades para (re)significar essa área nos currículos da Licenciatura em Matemática. Cabe lembrar que a compreensão é um modo fundamental de conhecimento que busca captar os significados de uma situação ou fenômeno, movendo-se na esfera do concreto, da intuição global, do subjetivo. A compreensão inclui, portanto, subjetividade, sentimentos, pensamentos, finalidades, concepções e relação com os valores, por isso *comporta limites e riscos de erro, inclusive o risco da incompreensão, pois uma compreensão só pode compreender o que compreende.* (Morin, 1999, p.158).

Referências

BARDIN, L. (1977). Análise de Conteúdo**.** Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa/Portugal: Edições 70 LDA.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental (1998), Parâmetros Curriculares Nacionais**:** Matemática **(**5ª a 8ª séries). Brasília: MEC.

BRASIL. Ministério da Educação (2001). Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena**.** Brasília: MEC.

CAMPBELL, S. R.; ZAZKIS, R.(Eds.) (2002). Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction. Westport, CT: Ablex.

CHEVALLARD, Y (1991). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage.

COELHO, S. P.; MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M.C. S. A. (2003) Projeto: qual a Álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática? In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Santos, SP. Anais. CD-ROM.

D'AMBROSIO, U. (1990). Etnomatemática. São Paulo: Ática.

DAVIS, J. P.; HERSH, R. (1986). Matemática e realidade. 3.ed. Rio de Janeiro: F. Alves.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S (2006). Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados. (Coleção formação de professores)

HAREL, G. Three principles of learning and teaching mathematics. In: DORIER, J.L. (ed.). On the teaching of linear algebra**.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. (1999). A Construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**.** Tradução de Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Porto Alegre: Artes Médicas; Belo Horizonte: Editora UFMG.

LINS, R.C.; GIMENES, J. (1997). Perspectivas em aritmética e Álgebra para o século XXI. 4.ed. Campinas, SP: Papirus.

LOPES, A. R. C.; MACEDO, E. (2002). A estabilidade do currículo disciplinar: o caso das ciências. In: Disciplinas e integração curricular: histórias e políticas**.** Rio de Janeiro: DP&A.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. (1986). Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**.** São Paulo: EPU.

MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M.C.; COELHO, S. P. Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental. In: Actas do V CIBEM. Porto, julho de 2005, v.1, p. 1-12.

MOREIRA, P. C. (2004). O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. Tese (Doutorado em Educação). UFMG, Faculdade de Educação. Belo Horizonte.

MORIN, E. (1999). O método 3: a consciência da consciência**.** Tradução de Juremir Machado da Silva. 2.ed. Porto Alegre: Sulina.

RESENDE, M. R. (2007) Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura. Tese (Doutorado em Educação Matemática) PUC/SP.

SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: knowlege growth in teaching. In: Educational Research**.** Frebruary.

SINCLAIR, N. (2002). For beauty of Number Theory. In: Proceedings of PME 26, pp. 218-223.