

# Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico<sup>1</sup>

Assessing prospective teachers' specialized knowledge of statistics through the analysis of a statistical project

---

PEDRO ARTEAGA<sup>2</sup>  
CARMEN BATANERO<sup>3</sup>  
GUSTAVO R. CAÑADAS<sup>4</sup>  
M. MAGDALENA GEA<sup>5</sup>

## Resumen

*En este trabajo se evalúa el conocimiento especializado de la estadística elemental, que una muestra de 108 futuros profesores de educación primaria, ponen en juego al analizar la idoneidad epistémica de un proyecto de análisis de datos. Utilizando la guía de análisis de la idoneidad didáctica propuesta por Godino (2009) se definen niveles de aplicación de los diferentes descriptores, estudiando el nivel alcanzado en los descriptores y componentes de la idoneidad epistémica. Los resultados muestran un conocimiento especializado escaso sobre la estadística.*

**Palabras clave:** Conocimiento especializado de la estadística, idoneidad epistémica, formación de profesores

## Abstract

*We analyze the specialized knowledge of elementary statistics in a sample of 108 pre-service primary school teachers when analyzing the epistemic suitability of a statistical project. Using the guide to analyze the epistemic suitability proposed by Godino (2009) we define levels in the application of the different descriptors. We study the levels in the different descriptors and components of epistemic suitability. Results suggest a poor specialized knowledge of statistics.*

**Key words:** Specialized statistical knowledge, epistemic suitability, teacher education

## Introducción

Hoy día es constante la presencia de la estadística en nuestra sociedad, donde se reconoce su utilidad como una herramienta metodológica que permite analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar estudios y experimentos y tomar decisiones adecuadas en situaciones de incertidumbre. Como consecuencia, la enseñanza de la estadística se ha

---

<sup>1</sup> Proyecto EDU2010-14947 y becas FPI-BES-2011-044684 FPU-AP2009-2807 (MCIIN y FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

<sup>2</sup> Universidad de Granada, España, parteaga@ugr.es

<sup>3</sup> Universidad de Granada, España, batanero@ugr.es

<sup>4</sup> Universidad de Granada, España, grcanadas@ugr.es

<sup>5</sup> Universidad de Granada, España, mmgea@ugr.es

incorporado, desde hace unas décadas, en forma generalizada en todos los niveles educativos, respondiendo a la necesidad creciente de formar ciudadanos estadísticamente cultos.

Aunque la enseñanza de la Estadística en la educación secundaria tiene ya una tradición consolidada desde hace 20 años, diferentes currículos (por ejemplo, NCTM, 2000; MEC 2006; Campos, Cazorla y Kataoka, 2011) incluyen ahora el tema desde el comienzo de la Educación Primaria. En España, en la Educación Primaria, dentro del *Bloque Tratamiento de la información, azar y probabilidad* del área de Matemáticas se incluyen, en el primer ciclo (6 y 7 años) las técnicas elementales para la recogida de datos, los gráficos estadísticos, e introducción al lenguaje del azar. Se continúan estos contenidos en segundo ciclo (8-9 años), incluyendo las tablas de datos y de doble entrada. En tercer ciclo (10-11 años) se amplía el trabajo con gráficos, resaltando la importancia de analizarlos críticamente. Se introduce la media aritmética, moda y rango, y la estimación de la probabilidad de un suceso.

En este currículo, así como en otros documentos (Franklin, et al. 2005; Burrill y Camden, 2006) se sugiere la enseñanza con proyectos para que los estudiantes experimenten el ciclo completo de trabajo estadístico, diseñando investigaciones, formulando preguntas de investigación, recogiendo datos de observaciones, encuestas o experimentos, y obteniendo conclusiones y predicciones basadas en el análisis de los datos.

Una condición para asegurar el éxito de estas propuestas es la formación de los profesores. Sin embargo, autores como Pierce y Chick (2011) indican que algunos profesores de matemáticas se encuentran inseguros al enseñar esta materia, pues su interés es contribuir a la formación, no sólo de los conocimientos matemáticos de sus estudiantes, sino también de sus intuiciones probabilísticas. Esta situación es especialmente crítica para los profesores de la escuela primaria, puesto que pocos de ellos han seguido un curso completo de estadística durante su formación como maestros.

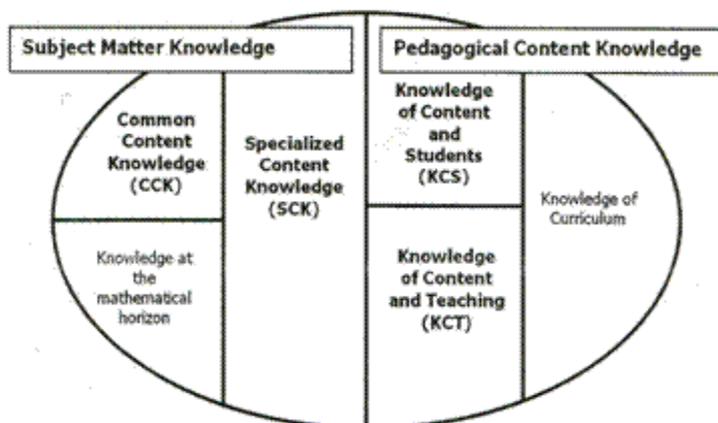
La finalidad de este trabajo es evaluar el conocimiento especializado de la estadística (siguiendo la terminología de Hill, Ball y Schilling (2008) en una muestra de 108 futuros profesores de educación primaria. Para ello se propone a los participantes al analizar la idoneidad epistémica (Godino, Contreras y Font, 2006) de un proyecto realizado por ellos mismos como parte de su formación estadística. Con ello se pretende ampliar la escasa investigación existente y obtener información de utilidad para los formadores de profesores. A continuación presentamos los fundamentos del estudio, material y método, resultados y

conclusiones.

## 1. Fundamentos del estudio

La investigación sobre el conocimiento didáctico es iniciada por Shulman (1986) y ha sido muy amplia, como podemos ver, por ejemplo en Llinares y Krainer, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007, Wood, 2008 o el ICMI Study 15 (Even y Ball, 2009). En estos trabajos se han desarrollado diferentes modelos del conocimiento del profesor y sus componentes, aunque, el caso particular de la estadística apenas ha sido tenido en cuenta, como se reconoce en el Joint ICMI/IASE Study (Batanero, Burrill y Reading, 2011).

Nosotros partimos de Hill, Ball y Schilling (2008), quienes definen el *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT), como “el conocimiento matemático que los profesores usan en sus clases para producir instrucción y crecimiento en los estudiantes” (p. 347) y lo caracterizan por componentes relacionadas o con el *conocimiento de la materia a enseñar* o con el *conocimiento didáctico del contenido* (figura 1). En este trabajo, nos centramos más específicamente en el *conocimiento especializado del contenido* (SCK), o conocimiento que necesita el profesor para planificar y desarrollar secuencias de enseñanza y le permite representar adecuadamente ideas matemáticas, comprender distintas soluciones para un problema dado y evaluar el conocimiento de sus estudiantes.



**FIGURA 1.** Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)

**FUENTE:** Hill, Ball y Schilling (2008, p. 378).

También nos apoyamos, asimismo en el modelo de Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008), quienes consideran un modelo del conocimiento del profesor de matemáticas y estadística, que tiene en cuenta seis dimensiones: epistemológica, cognitiva, afectiva,

interaccional, mediacional y ecológica. Cada una de estas dimensiones se relaciona con los correspondientes componentes de la idoneidad didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006), que los autores introducen para evaluar situaciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y que son los siguientes:

1. *Idoneidad epistémica*: Este componente valora el grado de adecuación de los contenidos matemáticos enseñados (representatividad de los significados institucionales implementados), respecto de un significado o contenido de referencia, que viene fijado en las directrices curriculares y por el significado del tema dentro de la matemática.
2. *Idoneidad cognitiva*: Valoración del grado en que los significados de los contenidos enseñados o pretendidos son asequibles a los alumnos, así como el grado en el que los alumnos adquieren los significados pretendidos por el profesor para los objetos matemáticos enseñados (los significados personales de los estudiantes se adecúan a los pretendidos por el profesor).
3. *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Los autores denominan conflicto semiótico a los conflictos de interpretación de expresiones o reglas matemáticas por parte de los estudiantes, respecto al significado de que los mismos pretende transmitir el profesor.
4. *Idoneidad mediacional*: Se trata de valorar la disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
5. *Idoneidad emocional*: Grado de interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio.
6. *Idoneidad ecológica*: Hasta qué punto el proceso de estudio llevado a cabo es adecuado con respecto a los currículos oficiales, se relaciona con otras materias y, en general con la vida del estudiante.

Al comparar este modelo con los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008), la dimensión epistémica corresponde al conocimiento especializado del contenido, la cognitiva y afectiva se incluyen en el conocimiento del contenido y los estudiantes, la interaccional y mediacional en el conocimiento del contenido y la enseñanza, y la ecológica al conocimiento del contenido y el currículo.

En lo que sigue nos centramos únicamente en el análisis del conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008), que corresponde a la dimensión epistémica en el modelo de Godino, Contreras y Font (2006), utilizando para ello una parte la pauta introducida por Godino (2009) para el análisis de procesos de enseñanza. Siguiendo la metodología sugerida por este autor, utilizaremos la valoración que los profesores realizan de un determinado proceso de estudio mediante dicha pauta para evaluar y desarrollar los

conocimientos de los profesores.

## 2. Metodología

### 2.1. Muestra y método de recogida de datos

Participaron en la investigación 108 futuros profesores del segundo curso de la titulación de Educación Primaria de la Universidad de Granada, distribuidos en 3 grupos (30 - 40 alumnos por grupo). Los datos se tomaron a partir de los informes escritos realizados individualmente por los futuros profesores en una práctica de una asignatura de Didáctica de la Matemática, realizada a lo largo de dos sesiones de clase, cada una de dos horas de duración. En la primera sesión, los participantes resolvieron un proyecto estadístico, titulado *Comprueba tus intuiciones sobre el azar* en el cual los futuros profesores tuvieron que recoger los datos a través de un experimento aleatorio y posteriormente comparar tres pares de variables estadísticas para concluir sobre las intuiciones del conjunto de la clase sobre los fenómenos aleatorios. La secuencia de actividades fue la siguiente:

7. *Presentación del proyecto y realización del experimento:* Los futuros profesores llevaron a cabo un experimento aleatorio para decidir si tenían o no buenas intuiciones sobre el azar. El experimento constaba de dos partes. En la primera (secuencia simulada) cada participante tuvo que inventar una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda sin realmente lanzar dicha moneda, de tal modo que otra persona pudiera pensar que se trata de una secuencia aleatoria. En la segunda parte (secuencia real) los participantes anotaron los resultados de lanzar 20 veces una moneda.
8. *Recogida de datos e instrucciones:* Finalizado el experimento, se inició una discusión en la clase dirigida por el formador de profesores, sobre cómo podrían compararse las secuencias simuladas y reales de todo el grupo. Finalmente el formador sugirió comparar las siguientes variables estadísticas: número de caras, número de rachas y longitud de la racha mayor en las secuencias real y simulada. Al final de la clase se dio a cada participante una hoja de registro con los datos obtenidos por el conjunto de la clase para las distintas variables a estudiar. Los futuros profesores tuvieron una semana para realizar un informe escrito en el cual tenían que comparar los tres pares de variables estadísticas para obtener información que les permitiese concluir sobre las intuiciones del conjunto de la clase. Tuvieron libertad para usar los análisis de datos que creyesen convenientes, así como la realización o no de gráficos estadísticos. Los informes debían contener el análisis estadístico llevado a cabo por cada participante, así como las conclusiones finales a las que habían llegado.

En la segunda sesión, se pidió a los participantes valorar la experiencia de enseñanza que ellos mismos vivieron durante el desarrollo del proyecto. Para ello se dio a los estudiantes una *pauta*

de análisis de la idoneidad didáctica (Godino, 2009), guía en la que se proporcionan una serie de descriptores para analizar cada componente de la idoneidad didáctica. Los participantes tuvieron una semana para completar el estudio. El concepto de idoneidad didáctica y el uso de la pauta había sido estudiado por los participantes, como parte de la asignatura en una sesión anterior, usando ejemplos de aplicación a otros temas de los diferentes descriptores.

Componentes	Descriptores
Situaciones-problemas	P1. Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. P2. Se proponen situaciones de generación de problemas.
Lenguaje	L1. Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos. L2. Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. L3. Se proponen actividades de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, propiedades, procedimientos)	R1. Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. R2. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. R3. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones propiedades o procedimientos.
Argumentos	A1. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. A2. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	RL1. Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etc.) se relacionan y conectan entre sí.

**Cuadro1. Pauta de análisis de la idoneidad epistémica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática**

En este trabajo presentamos los resultados del análisis de la idoneidad epistémica por parte de los futuros profesores (ver componentes y descriptores en el Cuadro 1). Dicho análisis requiere que el profesor en formación conozca los objetos matemáticos propuestos para la enseñanza de un cierto tema y sea capaz de reconocer su presencia y uso adecuado durante el desarrollo del proyecto. Por tanto se espera que los estudiantes perciban que el proyecto planteado permite contextualizar los contenidos estadísticos elementales incluidos en los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (MEC, 2006) y reconozcan las relaciones existentes entre los distintos objetos puestos en juego en la resolución del proyecto.

El objetivo es que el profesor sea consciente de la trama de objetos y significados que se ponen en juego en los procesos de estudio matemático que deberán diseñar, implementar y evaluar en su trabajo futuro (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). En consecuencia, el análisis de la idoneidad epistémica permite evaluar y a la vez desarrollar el conocimiento especializado de la estadística (en la terminología de Ball, Lubienski y Mewborn, 2001).

## 2.2. Análisis de los datos

Una vez recogidos los informes escritos de los futuros profesores, se realizó un estudio cualitativo de las respuestas en cada uno de los descriptores de las distintas componentes de la idoneidad epistémica (Cuadro 1), para valorar el nivel de aplicación de cada descriptor, con una valoración similar para todos ellos, definiéndose los siguientes niveles:

0. No se hace referencia al descriptor. Se deja la respuesta en blanco, no habiendo comprendido el descriptor o no siendo capaz de aplicarlo en el análisis del proyecto propuesto.
1. El futuro profesor se limita a copiar literalmente el descriptor, sin indicar cómo lo aplica. Ha sido capaz de reconocer su presencia en el trabajo con el proyecto, pero no es capaz de especificar en qué modo se emplea dicho descriptor. Por ejemplo; *“Se proponen situaciones de generación de problemas”* (MF, descriptor P2).
2. El estudiante aplica y hace referencia al descriptor pero sin centrarse en el contenido matemático o en la situación de enseñanza, centrándose en aspectos anecdóticos o no estrictamente matemáticos. En el siguiente ejemplo se hace referencia a problemas presentes en la situación. Sin embargo, aunque en el problema descrito (predecir resultados en juegos de azar) surge la idea fenómenos aleatorios, probabilidad y otros contenidos del tema, no se hace mención explícita de conocimientos matemáticos que se pongan en juego en estos problema: *“La profesora presenta situaciones de la vida cotidiana que realizamos como jugar a la lotería, la quiniela, juegos de azar, pero todas estas situaciones llevan con ella el problema de que no acertamos o no nos vaya como queramos”* (EA, descriptor P1).
3. El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a contenidos matemáticos y a la situación de enseñanza. En el siguiente ejemplo se hace referencia a diversos tipos de lenguaje matemático e incluso gráficos diferentes, por lo que el futuro profesor muestra su conocimiento común y especializado del contenido matemático y su capacidad de análisis. *“Otro de los aspectos es la gran variedad de modos de expresión matemáticos en los que podemos presentar una determinada información, así como su respectivo análisis estadístico (histograma, poligonal, diagrama de sectores y pictogramas; tablas estadísticas y cálculo de estadísticos que muestran la información resumida en unos valores; análisis de dichos estadísticos y posterior conclusión.)”* (SC, descriptor L1).

### 3. Resultados

A continuación se resumen los resultados para cada una de las componentes, mostrando algunos ejemplos de respuestas en los niveles 2 y 3, ya que el nivel 0 supone no respuesta y el nivel 1 simplemente una copia literal del enunciado del descriptor.

#### 3.1. Situaciones-problemas

Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos dos descriptores, pidiéndoles que los valoraran en la situación analizada. Estos descriptores se analizan a continuación.

*P1. Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se espera que los estudiantes perciban que el proyecto planteado permite generar una muestra representativa de problemas de índole estadística. El proyecto requiere, en primer lugar la realización de un experimento aleatorio, lo que contextualiza la idea de aleatoriedad, experimento y suceso. Como todo proyecto estadístico, se requiere también la recogida de datos, recuento y realización de tablas, gráficos y cálculos de resúmenes estadísticos, así como la interpretación de resultados (Connor, Davies y Payne, 2002). Implícitamente aparecen problemas elementales de cálculo de probabilidades simples y compuestas, así como de estimación del valor medio de una variable. Además el proyecto permite ejercitar y aplicar dichos contenidos, todo ello debidamente secuenciado.*

*P2. Se proponen situaciones de generación de problemas. Aunque el proyecto en si mismo constituye un problema extra matemático, esperamos que los futuros profesores hagan referencia a que, al tratar de resolverlo, se plantean nuevos problemas, como por ejemplo, ¿Cuál sería un gráfico adecuado para representar los datos dados? ¿Cómo elegir las escalas de dicho gráfico? ¿Qué estadísticos de posición central o dispersión serían los mejores para comparar las dos distribuciones? Por ello se debe pasar del problema inicial (que es difuso y no completamente cerrado) a preguntas concretas que puedan resolverse con la estadística.*

En el siguiente ejemplo la alumna aplica el descriptor P1 a nivel 2, pues, aunque implícitamente el problema descrito (predecir resultados en juegos de azar) es un problema del cuál surge la idea fenómenos aleatorios, probabilidad y otros contenidos del tema, no hace mención explícita de conocimientos matemáticos que se ponen en juego en estos problema. Por otro lado, los problemas señalados por la futura profesora no son problemas estrictamente matemáticos y más

aún, no tienen una solución matemática, pues no es posible predecir un juego de azar.

*La profesora presenta situaciones de la vida cotidiana que realizamos como jugar a la lotería, la quiniela, juegos de azar, pero todas estas situaciones llevan con ella el problema el que no acertamos o no nos vaya como queramos (EA, descriptor P1).*

En otro ejemplo, de nivel 3, BA aplica el descriptor P1 a contenidos matemáticos, analizando la manera en la cual el formador de profesores contextualizó la práctica que tuvieron que realizar los alumnos, haciendo mención por ejemplo a la realización del experimento aleatorio. Pone de manifiesto que el proyecto es una buena manera de trabajar y contextualizar temas como la estadística, azar y probabilidad.

*Previamente a la realización del experimento (lanzar la moneda al aire), la profesora introdujo a su alumnado en el tema de la estadística y el azar. De esta manera dotó de sentido y contextualizó el motivo de la práctica; introduciendo así la importancia de la estadística, la intuición y la probabilidad en la vida cotidiana y el desarrollo de la persona en la sociedad (Alumna BA, descriptor P1).*

En la Tabla 1 presentamos los resultados en este apartado, observando que pocos estudiantes (menos del 30%) son los que llegan a hacer una valoración, incluso incompleta de la idoneidad epistémica del proyecto, en relación a los problemas propuestos y generación de nuevos problemas. Una parte importante no aplica el descriptor o se limita a copiar su descripción sin intentar reformularlo. Otro 25% lo aplica anecdóticamente, sin hacer referencia al contenido matemático (para el descriptor P1). Comparativamente ha sido más sencillo el primero de los dos descriptores (problemas propuestos) respecto al segundo (problemas generados por el estudiante), posiblemente por la concepción subyacente de que es el profesor quien plantea los problemas.

**Tabla 1. Frecuencia (y porcentaje) del nivel de aplicación de los descriptores de las situaciones-problemas**

	<b>P1</b>	<b>P2</b>
<b>Nivel 0</b>	24 (22,2)	48 (44,4)
<b>Nivel 1</b>	28 (25,9)	20 (18,5)
<b>Nivel 2</b>	27 (25)	17 (15,7)
<b>Nivel 3</b>	29 (26,8)	23 (21,3)

### **3.2. Lenguaje**

Un segundo punto a valorar es la variedad de lenguaje involucrada en el desarrollo del proyecto.

Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos tres descriptores:

*L1. Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos.* En el proyecto planteado los estudiantes han utilizado multitud de términos estadísticos, tales como dato, variable, resultado, experimento aleatorio, suceso, distribución, frecuencia, etc. Para resumir sus datos pueden emplear diversos tipos de gráficos, como diagramas de barras o líneas, histogramas y gráficos de puntos, así como las tablas de frecuencia (disposición tabular), pues el lenguaje gráfico tiene un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999). Con frecuencia se emplean símbolos para referirse a la media, moda, mediana y rango. Asimismo se emplea el lenguaje numérico para expresar los datos y los cálculos de estadísticos.

*L2. Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige.* Se trata de valorar si los documentos entregados, donde se describe el proyecto, que es una unidad didáctica dirigida a la formación de profesores o a la educación secundaria y últimos cursos de primaria, tiene un lenguaje comprensible y adecuado para los alumnos a los que va dirigido o si por el contrario hay aspectos confusos. Se esperaría también que en caso de encontrar aspectos no comprensibles, se señalaran.

*L3. Se proponen actividades de expresión matemática e interpretación.* En este descriptor se debe valorar las situaciones de comunicación que permite el desarrollo del proyecto, que pueden ser de varios tipos: (a) Comunicación escrita de los estudiantes para resumir en un informe los resultados de su análisis de datos; (b) durante la fase de presentación del proyecto y recogida de datos se plantearon también situaciones de comunicación oral entre el profesor y los alumnos y entre los grupos de alumnos.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El futuro profesor alude a algunas expresiones verbales utilizadas en el proyecto, de modo que identifica la categoría “lenguaje matemático” y la aplica a la situación, pero su aplicación es incompleta. Respecto a la adecuación del lenguaje para el alumno, no dice si es o no adecuado, sino simplemente hace referencia a que se debe usar un lenguaje adecuado con los niños. Esto muestra un conocimiento pedagógico general por parte de esta alumna, más que un conocimiento especializado del contenido matemático.

*Hay que utilizar palabras como azar, cara o cruz, etc. Siempre utilizando términos que sean adecuados a los niños (AB, descriptores L1 y L2).*

*Nivel 3.* La respuesta del siguiente participante es mucho más completa, pues hace referencia a diversos tipos de lenguaje matemática e incluso diferencia dentro de los gráficos diferentes tipos de ellos. Por otro lado, hace referencia a la utilidad de estos gráficos para representar y resumir la información y posterior obtención de una conclusión. Muestra su conocimiento común y especializado del contenido matemático y su capacidad de análisis.

*Otro de los aspectos es la gran variedad de modos de expresión matemáticos en los que podemos presentar una determinada información, así como su respectivo análisis estadístico (histograma, poligonal, diagrama de sectores y pictogramas; tablas estadísticas y cálculo de estadísticos que muestran la información resumida en unos valores; análisis de dichos estadísticos y posterior conclusión.) (SC, descriptor L1).*

En la tabla 2 se presentan los resultados en este apartado, que han sido muy variables, resultando mucho más sencillo de aplicar el primero de los descriptores (variedad de lenguaje matemático), seguido del segundo (nivel adecuado). El tercer descriptor (situaciones de representación en interpretación) ha resultado demasiado difícil para los futuros. Hay un gran porcentaje que no aplica los distintos descriptores, aumentando hasta el 65,74% en el descriptor L3.

**Tabla 2. Frecuencia (y porcentaje) del nivel de aplicación de los descriptores del lenguaje matemático**

	<b>L1</b>	<b>L2</b>	<b>L3</b>
<b>Nivel 0</b>	30(27,78)	40(37,04)	71(65,74)
<b>Nivel 1</b>	19(17,59)	28(25,93)	16(14,81)
<b>Nivel 2</b>	21(19,44)	21(19,44)	7(6,48)
<b>Nivel 3</b>	38(35,19)	19(17,59)	14(12,96)

### **3.3. Definiciones, propiedades y procedimientos**

El proyecto propuesto está encaminado al aprendizaje de diferentes conceptos (como dato, variable, media), propiedades y procedimientos. Es importante, por tanto que los futuros profesores sepan reconocerlos en la situación. Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos tres descriptores:

*D1. Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.* De hecho, durante el desarrollo del proyecto no se dieron definiciones ni se propusieron procedimientos, puesto que se trataba de una actividad abierta, en que se dio a los estudiantes libertad para usar sus conocimientos previos, como es habitual en el

trabajo con proyectos (Batanero y Díaz, 2004). Es de esperar que los estudiantes hagan referencia a que debieran haberse recordado algunas definiciones y procedimientos, quizás en una sesión previa a la resolución del proyecto. También podrían hacer referencia a las definiciones y procedimientos presentadas durante la fase de corrección de las soluciones del proyecto.

*D2. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.* Respecto a este descriptor podemos hacer el mismo comentario que para el anterior, pues al trabajar el alumno de forma autónoma, se le dio libertad de uso de diferentes enunciados y procedimientos.

*D3. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones propiedades o procedimientos.* Por el contrario, la situación planteada puede plantear este tipo de situaciones. Por ejemplo, los estudiantes deben decidir qué gráfico o qué medida de posición central es preferible para representar los datos. Ello llevaría a que deban comparar, y en cierto sentido negociar, las definiciones y propiedades o procedimientos empleados en la solución.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* En el siguiente ejemplo, SC indica que en el proyecto no se ofrecieron a los estudiantes las definiciones de los conceptos necesarios o los procedimientos para la realización de los gráficos. Sin embargo no hace referencia a que todos los contenidos necesarios para la elaboración del proyecto se han estudiado en la educación primaria y secundaria, por lo que el futuro profesor no necesitaría que el educador se los volviera a repetir. No ha valorado la utilidad del trabajo con proyectos estadísticos para motivar al estudiante a buscar él mismo en sus libros de texto de otros cursos o incluso preguntando al profesor, por la información que no recuerda para trabajar con la estadística.

*Sin embargo consideramos que no se puede delegar la generación de definiciones y procedimientos a los alumnos. Sí es cierto que en la medida de lo posible debemos procurar el aprendizaje significativo de nuestros alumnos, pero en esta ocasión tenemos que ofrecerles las técnicas de estudio y los conceptos (SC, descriptor D2).*

*Nivel 3.* En el siguiente ejemplo, la alumna HG aplica el descriptor D1 al proyecto, destacando que algunos de los conceptos no se introdujeron explícitamente, ya que se conocían por parte de los alumnos, aunque sí que se les definió conceptos como el de racha.

*El concepto de racha si tuvo que definirse puesto que no se conocía entre los*

*compañeros de la clase. Sin embargo conceptos como media y rango, al hacer preguntas en clase los alumnos contestaron a cerca de estos adecuadamente (Alumna HG, descriptor D1).*

**Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) del nivel de aplicación de descriptores sobre las reglas**

	R1	R2	R3
<b>Nivel 0</b>	24(22,22)	68(62,96)	61(56,48)
<b>Nivel 1</b>	28(25,93)	14(12,96)	12(11,11)
<b>Nivel 2</b>	27(25,00)	15(13,89)	20(18,52)
<b>Nivel 3</b>	29(26,85)	11(10,19)	15(13,89)

Los resultados de la valoración de las definiciones, propiedades y procedimientos se presentan en la Tabla 3. Observamos que, salvo el primero, estos descriptores han sido escasamente aplicados, por lo que parecen no haber sido comprendidos adecuadamente por los estudiantes. Estos resultados coinciden con los obtenidos en la investigación de Chick y Pierce (2008), donde los profesores participantes fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes en un proyecto estadístico, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada.

### 3.4. Argumentos

La situación planteada es muy rica en argumentación, pues los estudiantes deben proponer una conclusión sobre las intuiciones de los alumnos de la clase, argumentando en base al análisis estadístico de los datos. Por otro lado, puesto que los resultados son para ellos contra intuitivos (debido a sus mismas intuiciones incorrectas) toda la situación de clase es una confrontación con estas intuiciones incorrectas para ayudar a superarlas. Por ello, durante el desarrollo del proyecto, fue necesario el debate y argumentación del profesor y los estudiantes. Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos dos descriptores.

*A1. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen.* Los futuros profesores han de valorar la claridad de las explicaciones que se dieron en las sesiones, así como en la sesión posterior en que se corrigieron las posibles soluciones al proyecto. Debido al gran número de participantes, no fue posible, como hubiera sido deseable que cada uno expusiera y debatiera sus soluciones, creándose una situación de validación en el aula. Sí hubo, sin embargo, una situación de institucionalización pues se hizo una corrección global por parte del profesor, del proyecto. Asimismo se escanearon y discutieron con los estudiantes algunas soluciones incorrectas dadas o algunos gráficos que contenían errores, indicando la causa del error. Finalmente, los futuros profesores que así lo desearon tuvieron posibilidad de examinar con el formador su propia solución en las horas de tutoría.

*A2. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.* Se espera que se valore

las posibilidades de argumentación que ofrece el proyecto, pues en el informe escrito, los estudiantes han de sacar una conclusión sobre las intuiciones y esta conclusión ha de ser apoyada por los resultados de su análisis de datos. Durante la fase de recogida de datos y solución global de la actividad también aparecen ocasiones de argumentación, aunque, como hemos comentado, lo ideal hubiera sido crear una situación de validación por parte de los alumnos. Siguiendo a Murray y Gal (2002) hemos tratado de desarrollar en los estudiantes la comprensión e interpretación de la información estadística, que no sólo requiere conocimiento estadístico o matemático, sino también habilidades lingüísticas, conocimiento del contexto, capacidad para plantear preguntas y una postura crítica ante la información.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* En el siguiente ejemplo, JR aplica el descriptor pero sin especificar los motivos que le llevan a dar esa respuesta. Podríamos clasificar esta respuesta como de un nivel superior si la alumna hubiese justificado de alguna manera su afirmación.

*En cuanto a las argumentaciones, éstas creo que son escasas (Alumna JR, descriptor A).*

*Nivel 3.* Por el contrario, CC hace referencia a la necesidad de argumentar en la solución del proyecto, donde se deben comparar las diferencias en las variables analizadas entre la secuencia real y la simulada y dicha comparación constituye una argumentación, pues ha de estar apoyada en el análisis estadístico realizado.

*En cuanto a los argumentos, al realizar el ejercicio es necesario razonar lo que se ha hecho y comentar los resultados obtenidos (Alumna CC, descriptor A2).*

En la Tabla 4 se presentan los resultados sobre estos descriptores que fueron bastante difíciles para los futuros profesores, quienes no parecen reconocer las situaciones de argumentación creadas en el proyecto. Es posible que ello sea debido a que su concepción de argumentación se restrinja a las demostraciones formales de tipo deductivo y no incluyan las argumentaciones apoyadas en razonamiento estadístico, como la utilizada en este proyecto.

**Tabla 4. Frecuencia (y porcentaje) del nivel de aplicación de los descriptores sobre argumentación**

	A1	A2
Nivel 0	67(62,04)	45(41,67)
Nivel 1	25(23,15)	24(22,22)

<b>Nivel 2</b>	9(8,33)	18(16,67)
<b>Nivel 3</b>	7(6,48)	21(19,44)

### 3.5. Relaciones

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), los diversos objetos matemáticos aparecen ligados entre sí en las prácticas de resolución de problemas. Las situaciones-problemas son el origen de la actividad matemática; el lenguaje sirve para representar los problemas, procedimientos, conceptos y proposiciones; los argumentos justifican los procedimientos y las soluciones de los problemas, y las proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Por otro lado, la estadística se conecta con otros bloques temáticos y los objetos matemáticos de los mismos, como se resalta en las orientaciones curriculares (MEC, 2006; Consejería de Educación, 2007). Como parte del análisis de la idoneidad epistémica, se pidió también valorar las relaciones establecidas en el proyecto entre diversos tipos de objetos matemáticos. Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos un descriptor:

*RL1. Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etc.) se relacionan y conectan entre sí.* En este proyecto se conecta el problema planteado con los procedimientos de análisis de datos y éstos con las definiciones y propiedades de resúmenes estadísticos y gráficos. Además todos ellos se conectan con propiedades numéricas, y geométricas, como representación de números en la recta o proporcionalidad. Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican este descriptor a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* En el siguiente ejemplo, se aplica el descriptor, y aunque implícitamente se hace referencia a los fenómenos aleatorios, no hay mención explícita de conocimientos matemáticos que se pongan en juego en este proyecto.

*Debe de existir una relación entre la definición (lanzamiento simulado y real), cuántas veces sale cara o cruz (proporciones), etc. (AB, descriptor RL1).*

*Nivel 3.* El siguiente ejemplo hace referencia a la interrelación de los objetos matemáticos (que ML denomina objetivos) poniendo ejemplos concretos de algunos que aparecen en el proyecto como azar, probabilidad, tablas, estadísticos y gráficos. También hace referencia a la secuenciación lógica y teniendo en cuenta el nivel de dificultad del contenido, por lo que consideramos la aplicación ha sido bastante completa.

*A partir de la secuencia de actividades comprobamos que los objetivos matemáticos*

que parten están interrelacionados y conectados, siguen una secuencia lógica de enseñanza- aprendizaje, secuenciada de conceptos más simples, por ejemplo en la probabilidad y el azar a otros más complejos, como tablas de frecuencias, estadísticos y gráficos (ML, descriptor RL1).

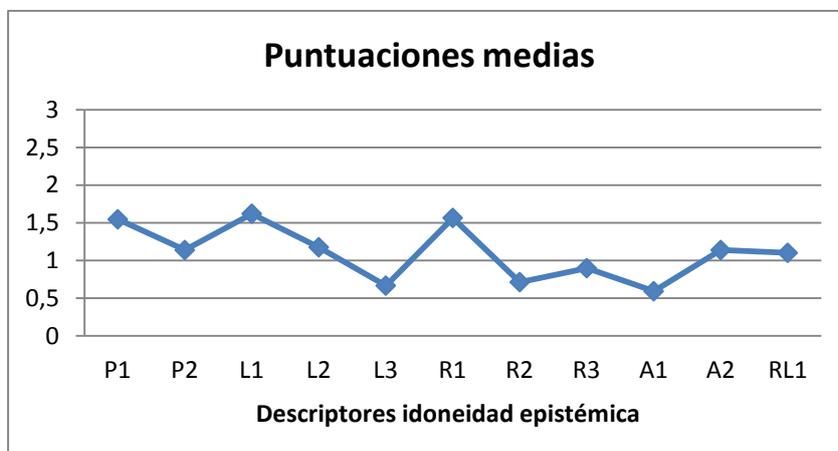
**Tabla 5. Frecuencia (y porcentaje) del nivel de aplicación del descriptor sobre relaciones**

	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
<b>Nivel 0</b>	41	37,96
<b>Nivel 1</b>	31	28,70
<b>Nivel 2</b>	20	18,52
<b>Nivel 3</b>	16	14,81

En la Tabla 5 presentamos los resultados de este descriptor, que resultó de nuevo difícil a los futuros profesores pues fueron minoría los que llegaron a último nivel y sólo un 32% alcanza un nivel 2 o 3. Alrededor del 40% dejaron el descriptor en blanco, lo que indica que los estudiantes no fueron capaces de identificar posibles relaciones entre objetos estadísticos o de ellos con otros objetos matemáticos dentro de la actividad.

### 3.6. Síntesis de resultados y conclusiones

En la Figura 2 se presentan los valores medios obtenidos por el conjunto de alumnos al aplicar los descriptores de la idoneidad epistémica, que nos permiten valorar, según Godino (2009) su conocimiento especializado del contenido matemático en este proyecto. Dicho conocimiento debiera incluir la capacidad para identificar los objetos matemáticos implícitos o que se han hecho explícitos en una cierta situación de enseñanza, para poder valorar qué han aprendido sus estudiantes. Hill, Ball, y Schilling (2008) lo incluyen dentro de “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno.” (p. 374).



## **FIGURA 2.** Puntuación media en los descriptores de la idoneidad epistémica

Los resultados muestran que este conocimiento es muy escaso, pues en promedio no llegan a alcanzar el nivel 2 (aplicación anecdótica), aunque, como hemos visto en el análisis detallado, una proporción de estudiantes que varía entre el 10% y 35% según los descriptores llegan al nivel más alto de aplicación. En consecuencia, los participantes en nuestro estudio mostraron poca capacidad para identificar los objetos matemáticos implícitos o que se han hecho explícitos en la situación de enseñanza, y por tanto de poder valorar qué han aprendido sus estudiantes. En palabras de Hill, Ball, y Schilling (2008) les faltaría “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno.” (p. 374). Estos resultados coinciden con las mostradas por los profesores participantes en la investigación de Chick y Pierce (2008) en cuya investigación tampoco los profesores participantes no hicieron un uso adecuado de los datos y proyectos al planificar sus lecciones, y fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada.

## **4. Consideraciones finales**

Algunas investigaciones previas muestran que el conocimiento común del contenido estadística es pobre en los futuros profesores de educación primaria (Bruno y Espinel, 2005; Arteaga y Batanero, 2010). Ello sin duda influye en nuestro caso en el escaso conocimiento especializado de contenidos referentes a estadística elemental mostrado por los participantes en nuestra investigación.

Una implicación del estudio es la necesidad de mejorar el conocimiento especializado del contenido de futuros profesores y su capacidad de análisis de tareas de enseñanza, necesaria para abordar con éxito la enseñanza del tema en la educación primaria. Para ello sería necesario mejorar la preparación estadística de los futuros profesores de educación primaria, a la que en este momento se dedica un tiempo insuficiente.

La mejora de esta formación del profesorado es un reto para hacer realidad la mejora de la enseñanza de la estadística en las escuelas. Este reto de la preparación específica de los profesores para enseñar estadística ha sido reconocido por la International Comisión on Mathematical Instruction (ICMI) y la International Association for Statistical Education (IASE)

que han promovido un Estudio Conjunto específicamente orientado a promover la investigación y reflexión a nivel internacional sobre la educación y desarrollo profesional del profesor para enseñar Estadística (Batanero, Burrill y Reading, 2011).

Esperamos que dicho estudio, así como los resultados mostrados, ayuden a tomar conciencia de esta necesidad a todos los implicados en la formación de profesores: Escuelas de Formación del Profesorado, asociaciones de profesores y autoridades educativas. Creemos que es necesario también continuar con la investigación y reflexión didáctica para poder seguir construyendo la Educación Estadística y concretándola en cursos destinados a futuros profesores. Esperamos que este trabajo logre interesar a otros investigadores por esta problemática.

## Referencias

ARTEAGA, P.; BATANERO, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *XII Simposio de las Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (p. 211-221). Lleida: SEIEM.

BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study*. Springer, en prensa.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. En J. Patricio Royo (Ed.). *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.

BALL, D. L.; LUBIENSKI, S. T.; MEWBORN, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

BRUNO, A.; ESPINEL, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficos estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII*, 57-85.

BURRILL, G.; CAMDEN (Eds.) (2006). *Curricular development in statistics education: IASE 2004 Roundtable*. Voorburg: International Association for Statistical Education. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/>.

CAMPOS, T.; CAZORLA, I.; KATAOKA, V. (2011). Statistics school curricula in Brazil. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 5-8). New York: Springer.

CHICK, H. L.; PIERCE, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008*

IASE Round Table Conference. Monterrey, Mexico: ICMI e IASE. Online: [www.ugr.es/~icmi/iase\\_study/](http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/).

CONNOR, D.; DAVIES, N.; PAYNE, B. (2002). Web-based project and key skill work. *Teaching Statistics*, 24(2), 62-65.

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN (2007). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria Obligatoria en Andalucía*.

EVEN, R.; BALL, D. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.

FRANKLIN, C.; KADER, G.; MEWBORN, D. S.; MORENO, J.; PECK, R.; PERRY, M.; SCHEAFFER, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education. GAISE report*. Online: [www.amstat.org/education/gaise/](http://www.amstat.org/education/gaise/).

GODINO, J. D. (2009). Categorías de análisis de conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(1-2), 127-135.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; ROA, R.; WILHELMI, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI /IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Monterrey, Mexico: ICMI e IASE. Online: [www.ugr.es/~icmi/iase\\_study/](http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/).

GODINO, J. D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

HILL, H. C.; SLEEP, L.; LEWIS, J. M.; BALL, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

LLINARES S.; KRAINER K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 429 – 459). Rotherdam / Taipei: Sense Publishers.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria*.

MURRAY, S.; GAL, I. (2002). Preparing for diversity in statistics literacy: Institutional and educational implications. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, Cape Town, South Africa. Voorburg: International Statistical Institute.

- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- PIERCE, R.; CHICK, H. (2011). Teachers' beliefs about statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education* (pp. 151-162). New York: Springer.
- SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- WILD, C.; PFANNKUCH, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- WOOD, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.