ISSN 1516-5388

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

v. 5 – n. 1 – 2003

educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA v. 5 – n. 1 educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática
puc-sp

Correspondência:
Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 – CEP 01303-050 – Consolação – São Paulo – SP
Fone: (11) 3124-7210
Fax: (11) 3159-0189
E-mail: pegedmat@pucsp.br
Expediente: de segunda a sexta-feira das 10h30min às 12h e das 13h30min às 17h30min

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

ISSN 1516-5388

Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 5, n. 1, pp. 1-111, 2003

educ
2003

Catalogação na fonte – Biblioteca Reitora Nadir Gouvêa Kfouri / PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós - Graduados em Educação Matemática / Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - n.1 (março de 1999) - São Paulo : EDUC, 1999 -
semestral
ISSN 1516-5388

1. Educação Matemática Pesquisa - periódicos. I. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

EDUC - Editora da PUC-SP

Direção
Maria Eliza Mazzilli Pereira
Denize Rosana Rubano

Coordenação Editorial
Sonia Montone

Revisão
Sonia Rangel

Revisão de Inglês
Carolina Muniz Ventura Siqueira

Editoração Eletrônica
Artsoft Informática

Capa
Sara Rosa

educ

Rua Ministro Godói, 1197
Cep 05015-001 - São Paulo - SP
Fone: (11) 3873-3359 / Fax: (11) 3873-6133
E-mail: educ@pucsp.br
Site: www.pucsp.br/educ

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Associação Brasileira de Editores Científicos
ABEC

ABDR
EDITORA AFILIADA

Projeto Editorial

A revista *Educação Matemática Pesquisa*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, de regularidade semestral, constitui um espaço de divulgação de pesquisas científicas da área.

O projeto editorial da revista prioriza artigos científicos, inéditos no Brasil, da área de Educação Matemática. Mais particularmente, aqueles relacionados às linhas de pesquisa do Programa: A Matemática na estrutura curricular e formação de professores; História, Epistemologia e Didática da Matemática; e Tecnologias da Informação e Didática da Matemática. A prioridade dada às linhas descritas não é extensiva aos referenciais teóricos, ao contrário, procura-se contemplar a diversidade.

Serão acolhidos, também, artigos que favoreçam o diálogo entre Educação Matemática e áreas afins, como a Matemática, a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História da Matemática e a História das Disciplinas, entre outras.

A seleção dos artigos faz-se mediante a aprovação de dois pareceristas do conselho editorial ou *ad hoc*. Os pareceres serão enviados aos autores.

Os artigos são apresentados sempre na versão original, com resumos bilíngües (português e inglês ou francês).

O projeto editorial prevê, ainda, que os volumes da revista contenham uma ou mais modalidades, como análises ou relatos de pesquisa, comunicações (ciclo de palestras, conferências), entrevistas, depoimentos ou resenhas científicas.

Em cada número, haverá indicações sucintas das dissertações e teses produzidas no Programa, no semestre de edição.

Conselho Editorial

Editorial Project

The journal Educação Matemática Pesquisa *of the Post-Graduation Program in Mathematics Education of the Catholic University of São Paulo (PUC/SP) is published every semester with the aim of providing a space for disseminating scientific research in the area.*

The policy adopted by the editors is to prioritise scientific articles which have not been published in Brazil, related to Mathematics Education, particularly those addressing the lines of research of the program: Mathematics, curriculum structure and teacher training; History, Epistemology and Didactics of Mathematics; and Information Technology and the Didactics of Mathematics. The priority given to the described lines is not restricted to theoretical references; on the contrary, it is hoped that the journal will reflect the diversity that characterises research in Mathematics Education.

The editors also encourage the submission of articles which open dialogues between Mathematics Education and related areas, such as Mathematics, Epistemology, Educational Psychology, Philosophy, History of Mathematics and its teaching, amongst others.

In order to be selected, articles should receive two favourable reviews. Referees will be chosen from the editorial committee or they will be ad hoc *reviewers. Authors will receive copies of the reviews.*

Articles will be presented always in the original language of the author along with abstracts in Portuguese and English or French.

The journal can also include works of various different types, such as: research reports, papers based on lectures or conferences, interviews, commentaries on issues pertaining to research, critiques of articles and books, literature reviews and theoretical analyses.

Each issue will also include brief descriptions of the dissertations and theses produced in the Program during the semester of the edition.

Editorial Committee

Sumário

Editorial

O presente número, primeiro do volume 5, da revista *Educação Matemática Pesquisa* é referente ao primeiro semestre de 2003. Nele estão desenvolvidos três artigos que enfocam questões relativas à aprendizagem da Geometria. Todos eles consideram a importância do meio e suas formas de expressão como fundamentais na construção de significados para atividades matemáticas. É interesante ressaltar que, embora com mais ênfase em dois dos artigos, todos fazem referência a ambientes informatizados ou, particularmente, sistemas de geometria dinâmica. Um segundo tema abordado por dois dos três textos é a prova em Geometria, tanto em seus aspectos epistemológicos quanto didáticos.

No primeiro artigo, Michael Otte discute as idéias de Piaget sobre mecanismos de desenvolvimento de Matemática e as críticas de Rotman sobre essa perspectiva. Tais críticas centram-se, principalmente, na questão da prova e, a partir da consideração de aspectos dos dois lados do debate, o autor enfatiza a importância de uma complementaridade entre estrutura e representação na atividade matemática e na análise de provas.

Ana Paula Jahn e Philippe Clarou apresentam, no segundo artigo, um estudo didático integrando o ambiente Cabri-Géomètre no ensino de transformações geométricas. A partir de uma investigação desenvolvida na França, com alunos da primeira série do ensino médio (15-16 anos), o texto enfoca o papel desse *software* na caracterização de aspectos funcionais das transformações introduzidas. Como no artigo de Olivero, Paola e Robutti, os autores também ressaltam o papel do professor em assegurar condições favoráveis para explorar possibilidades dos sistemas de geometria dinâmica.

O terceiro artigo, de autoria dos pesquisadores italianos Federica Olivero, Domingo Paola e Ornella Robutti, traz um outro olhar sobre prova em Matemática. Descreve um estudo didático envolvendo sujeitos de 17 anos que aborda as potencialidades do *software* de geometria dinâmica Cabri-Géomètre na transição entre níveis perceptivos e teóricos na produção de conjecturas e provas. Os autores apontam que os objetos geométricos nesse ambiente podem ser vistos como intermediários entre o empírico e o genérico, uma característica que, em certas condições didáticas, pode favorecer o acesso à prova.

Completam o número a apresentação dos títulos das dissertações de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP defendidas no primeiro semestre de 2003.

Editores

Editorial

The present issue of the journal Educação Matemática Pesquisa, the first of volume 5, corresponds to the first semester of 2003. It contains three articles which approach questions related to geometry learning. All of them consider the means or medium and associated forms of representation as fundamental in the construction of meaning for mathematical activity. It is interesting to note that all the articles also make some reference to the use of computational environments, particularly to dynamic geometry systems. A second theme examined in two of the three papers is that of proof, both from epistemological and didactic perspectives.

In the first article, Michael Otte discusses Piaget's ideas about mechanisms by which mathematical knowledge develops. He also presents Rotman's criticism of this perspective. The criticism focuses principally on the question of proof. By considering both sides of the debate, the author emphasises the importance of complementarity between structure and representation in mathematical activity and in the analysis of proofs.

Ana Paula Jahn and Philippe Clarou present, in the second article, another didactic study integrating the use of the Cabri-géomètre software, in relation to the teaching of geometrical transformations. By reflecting on an investigation developed in France with 15/16- year-old students, the text focuses on the role of this environment in the characterisation of functional aspects of the transformations introduced. As in the article by Olivero, Paola and Robutti, Jahn and Clarou also emphasise the role of the teacher in ensuring and maintaining favourable conditions for exploring the possibilities enabled by dynamic geometry systems.

The third article, by the Italian researchers Federica Olivero, Domingo Paola and Ornella Robutti, focuses on proof in mathematics from a didactic point of view. It describes a study involving 17-year-old learners that investigates the potential of the dynamic geometry software Cabri-géomètre in the transition between perceptive and theoretical levels in the production of conjectures and proofs. The authors stress how, within this environment, geometrical objects can be seen as midway between the empirical and the generic, a characteristic which, they argue, under certain didactic conditions can facilitate access to proof.

Finally, this issue presents the titles of the Masters' dissertations completed during the first semester of 2003 in the program of Post-Graduate Studies in Mathematics Education of PUC-SP.

Editors

Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico

MICHAEL OTTE*

Resumo

Piaget caracteriza o desenvolvimento histórico da Geometria como uma sucessão de três períodos de pensamento: *intrafigural, interfigural* e, finalmente, *transfigural* ou *estrutural*. Discutimos um exemplo para ilustrar a concepção de Piaget de desenvolvimento geométrico e fornecer uma interpretação particular dela. O exemple envolve o Teorema de Euler, que afirma que os pontos concorrentes das mediatrizes, das medianas e das alturas de um triângulo qualquer são colineares. Queremos mostrar que uma melhor compreensão da concepção de Piaget pode ser atingida se a atividade matemática for concebida essencialmente como construção de provas. Nesse contexto, a crítica de Rotman a Piaget é apresentada e discutida. Rotman argumentou que a caracterização de Piaget sobre a Matemática e sua criação é limitada pela sua compreensão equivocada "da natureza e do status da prova" (Rotman 1977, p. 151). Segundo Rotman, que se concentra nos aspectos semióticos e sociais da Matemática: "O erro central do estruturalismo de Piaget é a idéia de que é possível explicar a origem e a natureza da Matemática independentemente das questões de justificativas não-estruturais, de como as afirmações matemáticas são validadas" (ibid., p. 144). Rotman parece não compreender que provas e justificativas sempre dependem de contextos estruturais e que os significados objetivos de sinais matemáticos são apenas determinações estruturais. Nenhum sinal isolado pode ser, intrinsecamente, um sinal. Nosso objetivo, então, é mostrar que pode haver mérito em uma tentativa de combinar as abordagens de Piaget e Rotman.

Palavras-chave: prova; estruturalismo; representações; complementariedade.

Abstract

Piaget characterizes the historical development of geometry as a succession of three periods of thought: intrafigural, interfigural, and finally, transfigural or structural. We discuss an example to illustrate Piaget's conception of geometrical development and to provide a particular interpretation of it. The example concerns Euler's theorem, according to which the concurrent points of the perpendicular bisectors, the medians and the altitudes of any triangle are collinear. What we want to show is that by conceiving mathematical activity as essentially constructing proofs one might better understand Piaget's conception. In this context, Rotman's criticism of Piaget is presented and discussed. Rotman

* Universidade de Birlefeld / PUC-SP. E-mail: michaelontra@aol.com

argued that Piaget's characterization of mathematics and its creation is limited by his misunderstanding of "the nature and status of proof" (Rotman 1977, 151). Rotman, who concentrates on the semiotic and social aspects of mathematics, continued, "The central error of Piaget's structuralism is the belief that it is possible to explain the origin and nature of mathematics independently of the non-structural justificatory questions of how mathematical assertions are validated." (Rotman 1977, 144). Rotman completely misses the point that proof and justification always depend on structural contexts as represented by signs and language, and that the objective meanings of mathematical signs are nothing but structural determinations. No isolated sign can be intrinsically a sign. Thus, our aim is to show that it may be worthwhile trying to combine the approaches of Piaget and Rotman.
Key-words: *proof; structuralism; represntation; complementarity.*

Parte I

Piaget caracteriza o desenvolvimento histórico da Geometria como uma sucessão de três períodos de pensamento: *intrafigural, interfigural* e, finalmente, *transfigural* ou *estrutural.* Descrevendo as três etapas do desenvolvimento, Piaget escreve:

> A Geometria começa com Euclides – um período durante o qual o objeto de estudo relaciona-se às propriedades geométricas de figuras e sólidos vistos como relações internas entre elementos dessas figuras e desses sólidos. Nenhuma consideração é feita para o espaço como tal, ou consequentemente, para transformações dessas figuras dentro de um espaço que as contenha. Chamaremos esse o período *intrafigural* – uma expressão usada na Psicologia para referir-se ao desenvolvimento de conceitos geométricos pela criança.
> O período seguinte é caracterizado por esforços para buscar relacionamentos existentes entre figuras. Isso se manifesta especificamente na procura de transformações que fazem correspondências, de várias formas, entre as figuras. Entretanto, essas transformações ainda não estão subordinadas a conjuntos estruturados. Esse é o período no qual a Geometria Projetiva predomina. Nós chamaremos esse o período *interfigural*.
> Em seguida, um terceiro período que nós chamaremos *transfigural, é* caracterizado pelo predomínio das estruturas. O trabalho mais característico desse período é o Programa de Erlangen de Felix Klein. (Piaget e Garcia, 1989, p. 109)

Discutiremos primeiramente um exemplo para ilustrar a concepção de Piaget do desenvolvimento geométrico e para fornecer uma interpretação dela. O exemplo trata do Teorema de Euler, que afirma que os pontos concorrentes das mediatrizes, das medianas e das alturas de qualquer triângulo são colineares.

Teorema 1 (Euler, 1748): O ortocentro O, o baricentro G e o circuncentro M de qualquer triângulo são colineares. A reta que passa por estes pontos é denominada reta de Euler do triângulo. O baricentro divide a distância do ortocentro ao circuncentro na razão 2:1.

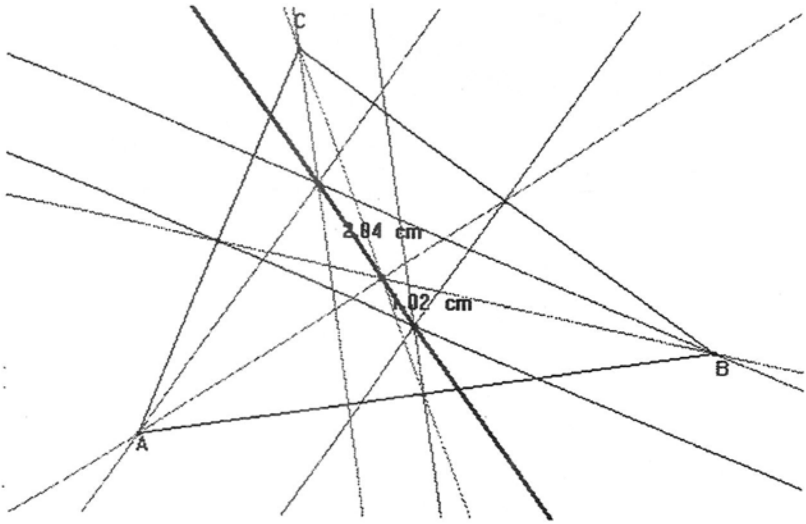


Figura 1 – o teorema ilustrado

Por meio de uma análise das provas desse teorema apresentadas em livros didáticos de Geometria Elementar (veja, por exemplo, Coxeter e Greitzer, 1967, p. 18ss), é possível que surja a idéia de que o teorema não trata as relações entre diferentes propriedades de um único triângulo, mas sim de uma afirmação sobre a relação entre a mesma propriedade (a posição do ortocentro) de dois triângulos diferentes (o triângulo original e o triângulo formado quando os pontos médios dos lados do triângulo original são ligados). Desta maneira, nós prosseguimos do intrafigural à perspectiva interfigural (Figura 2).

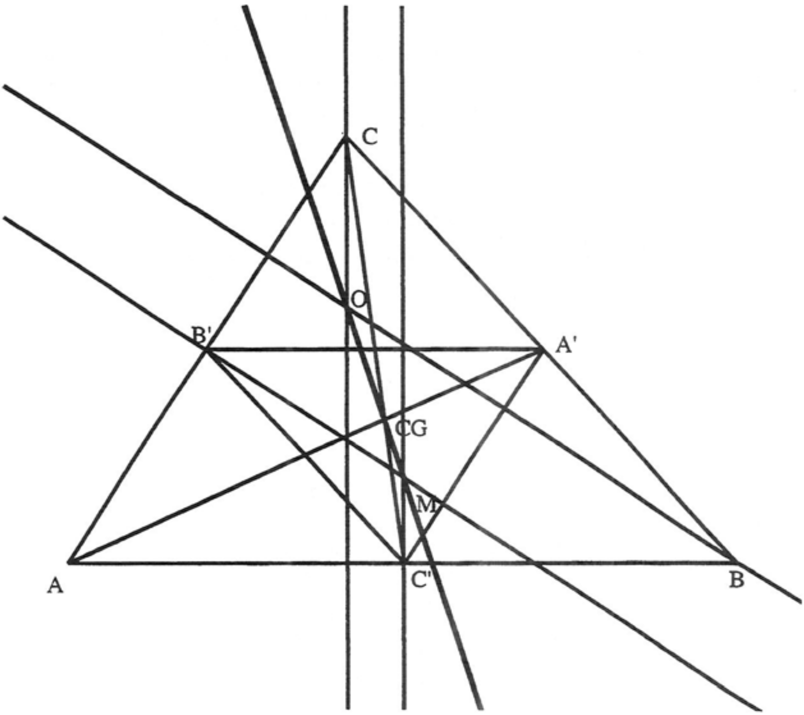


Figura 2

Estes dois triângulos são relacionados um ao outro por meio de uma rotação de 180 graus sobre o baricentro do triângulo dado e de uma redução do triângulo transformado com fator de 0.5, usando o baricentro como centro. Assim, o ponto-imagem X' de qualquer ponto X do plano sobre esta transformação encontra-se na linha que contém X e o baricentro (o centro da transformação): o baricentro é localizado entre os pontos X' e X e a distância entre o baricentro e ponto X' é a metade da distância entre o baricentro e ponto X. Nós chamaremos, para conveniência, tal transformação de DST.

Deixe-nos refletir sobre o que aconteceu. O argumento de nossa prova transformacional apóia-se numa analogia ou algum princípio da continuidade de acordo com os quais coisas semelhantes nas informações dadas se transformam em outras coisas semelhantes. Tal ponto de vista abre imediatamente as portas para mais generalizações. Enquanto as provas sintéticas ou "Euclidianas" tradicionais usam todas as afirmações do teorema de forma complexa e engenhosa (ver a prova alternativa apresentada na Figura 8), o que não é o caso desta nova prova. Ela pode ser considerada como um esquema geral de prova, mais do que uma prova particular. De fato, nossa perspectiva interfigural possibilita não apenas uma prova do teorema original, mas também provas de vários outros. Da mesma forma, podemos validar o teorema que afirma que o centro F do círculo de Feuerbach – ou o círculo do nove pontos – encontra-se também na linha de Euler (Figura 7), observando que F é o circuncentro do triângulo transformado A'B'C'.

Finalmente, a prova fornece também uma primeira generalização de nosso teorema original (teorema 1), porque a consideração do ponto da interseção de quaisquer cevianas do triângulo dado, e não apenas o ortocentro, conduz a um teorema similar (Figura 3).

Teorema 2 de Euler: Tome duas cevianas quaisquer e seu ponto de interseção (em consideração à clareza visual, devemos usar somente duas retas de cada tipo, pois duas já determinam os importantes pontos colineares) e construa paralelas para estas cevianas passando pelos pontos médios dos lados opostos do triângulo dado. Determine o ponto de interseção dessas retas paralelas. A reta que passa pelos dois pontos da interseção contém o baricentro do triângulo.

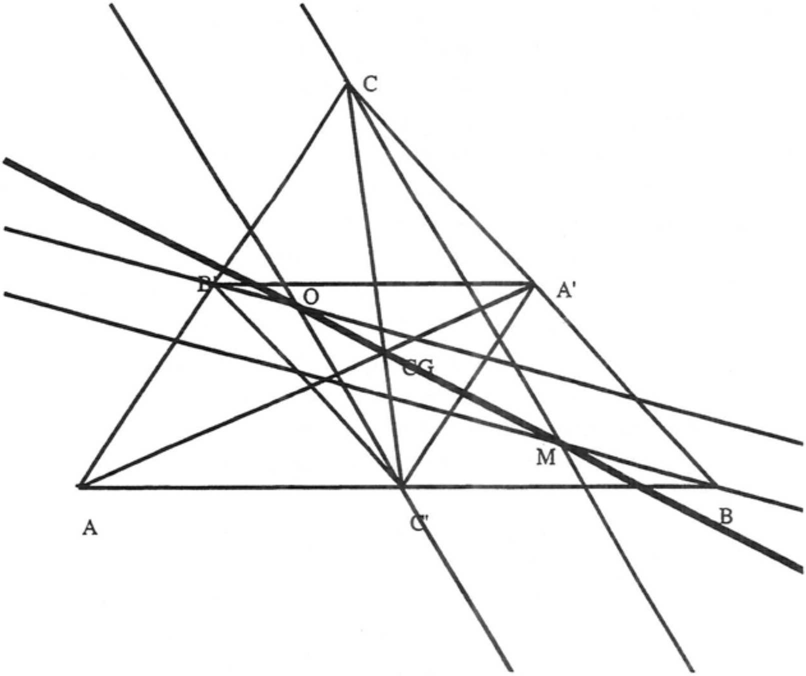


Figura 3

Olhando novamente a nossa prova, por meio de uma transformação geométrica do tipo DST percebemos que o fator 2 pode ser substituído por qualquer outro número, isto é, os dois triângulos semelhantes em questão não precisam, necessariamente, estar relacionados pela razão 2:1. Isto significa que o baricentro CG do triângulo dado, que é também o centro do DST, pode ser substituído por qualquer outro "centro de gravidade", desde que as cevianas CC' e BB' que passam por esse centro se cruzem com os lados do triângulo nos pontos C' e B' e que a reta B'C' permaneça paralela ao terceiro lado BC (Figura 4). Colocado de outra forma, os dois triângulos semelhantes devem ter lados paralelos. Não estamos, assim, olhando para uma configuração de Desargues?

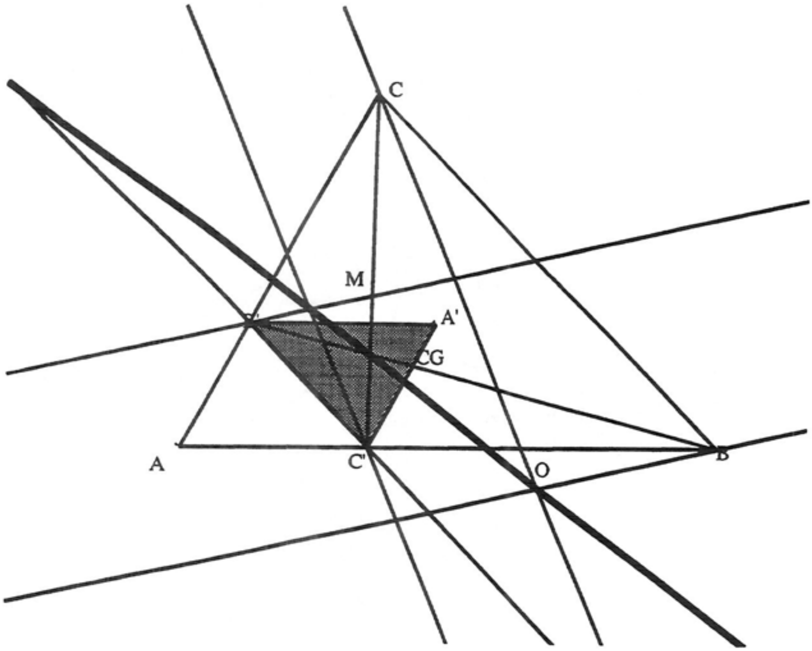


Figura 4

Nossa configuração consiste essencialmente de três pares de retas paralelas. Marque dois pontos em ambas as retas do primeiro par (C e B respectivamente C' e B'). Trace uma reta qualquer (l) passando por B e uma paralela (l') passando por B'. Trace uma reta qualquer (m) passando por C e sua paralela passando por C'. O ponto A é o ponto de interseção de l com m e ponto A' o ponto de interseção de l' e m' (Figura 5). Os pares de retas paralelas são assim determinados: AC e A'C'; AB e A'B'; BC e B'C'.

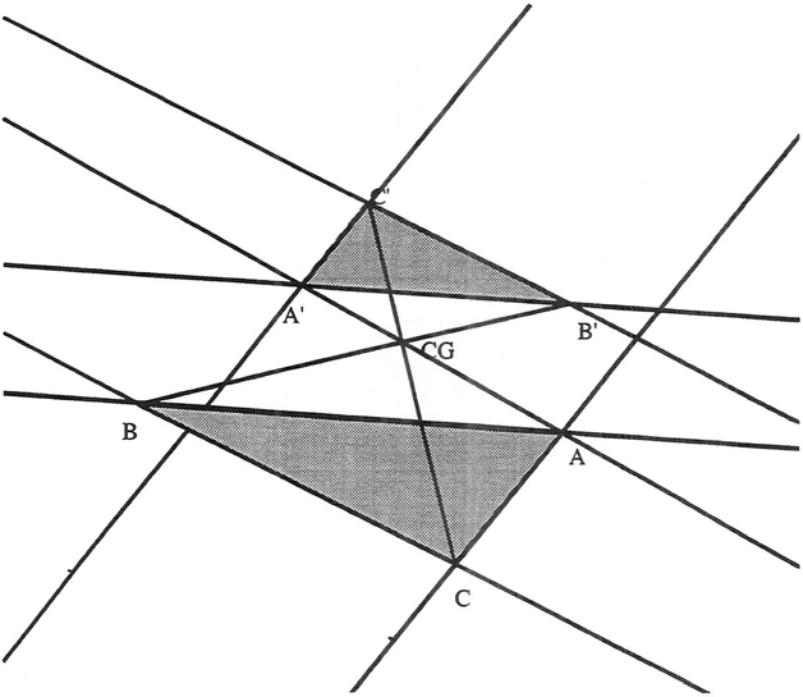


Figura 5

Chegamos assim a uma configuração de Desargues, em que os lados respectivos dos dois triângulos ABC e A'B'C' interceptam-se na reta no infinito, isto é, elas permanecem paralelas. A existência da "reta de Euler" AA' está garantida pela proposição inversa ao teorema de Desargues, que afirma que se as interseções de lados correspondentes de dois triângulos diferentes ABC e A'B'C' (ou os prolongamentos dos lados) encontram-se na mesma reta, então todas as retas passando por vértices correspondentes também passam pelo mesmo ponto CG. Em nosso caso, esta reta é a reta no infinito; porém, se o sistema de coordenadas estiver sujeito a uma transformação simples resulta na afirmação geral, generalizando mais uma vez nosso teorema original.

Nós obtemos também, interpretando a Figura 2 à luz dessas introspeções novas, uma outra prova de nosso teorema original. Os triângulos CBO e C'B'M têm lados paralelos. Se definirmos o ponto CG como a interseção das retas CC' e BB', então o teorema de Desargues diz que a reta que passa pelos terceiros vértices dos triângulos, a saber, O e M, passa também pelo ponto de interseção CG (Figura 6). Certamente, podem existir pessoas extremamente talentosas, que chegariam imediatamente a essa nova idéia da prova, encurtando assim todo esse processo de generalização. Mas não é provável que isso aconteça com muita freqüência. Nossa prova e o diagrama no qual ela foi baseada marcam uma trajetória mais natural e podem impedir essa idéia tão radical. Isso significa que existe uma lógica da abdução e da generalização, que é conectada firmemente com nossos meios cognitivos e sistemas de representação.

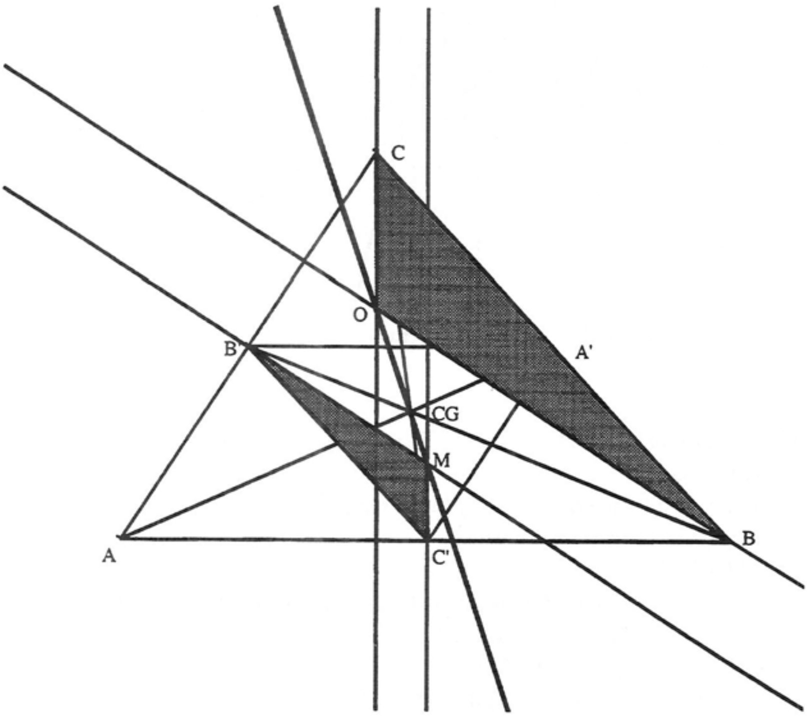


Figura 6

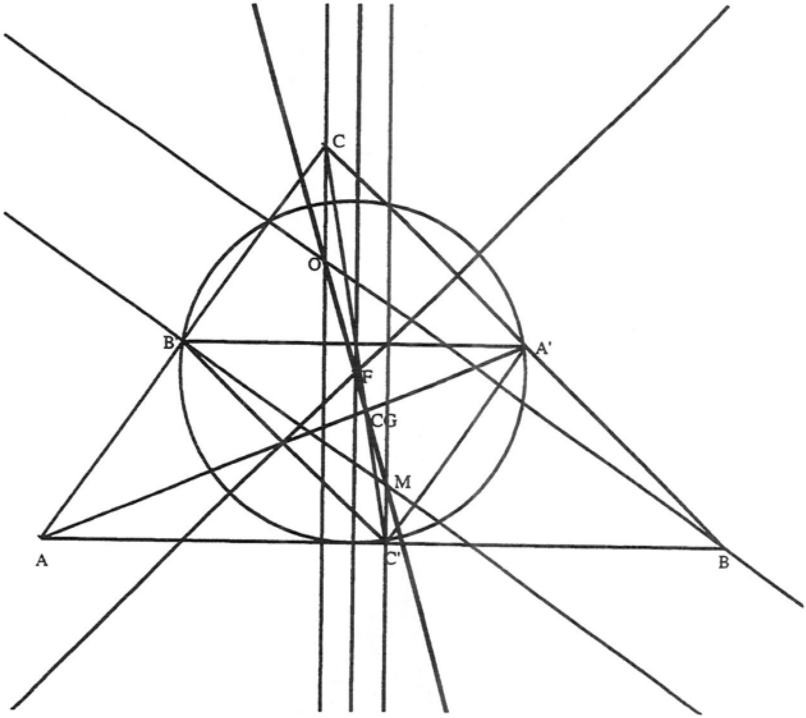


Figura 7

Prova

G é o interseção de OH com BB1. Temos que provar que:

(1) GB=2GB1.

Dado que OB1 é paralela a BH (ambas são paralela a AC por definição), provar (1) envolve demonstrar que:

(2) BH=2OB1.

Seja S a interseção da circunferência (ABC) com BO. BS é um diâmetro desta circunferência, então o ângulo BCS é 90°.

Logo, (3) SC e AH são paralelas.

BASC é inscrito, então o ângulo BAS é 90°. Assim:

(4) CH e AS são paralelas.

De (3) e (4) podemos concluir que AHCS é um paralelogramo.

Sendo B1 o ponto médio de AC, então segue que B1 é o ponto médio de HS. Portanto, OB1 é a reta que passa pelos pontos médios dos lados BS e BH do triângulo SBH. Isto implica que HB = 2OB1, que é (2).

QED (M. Radu)

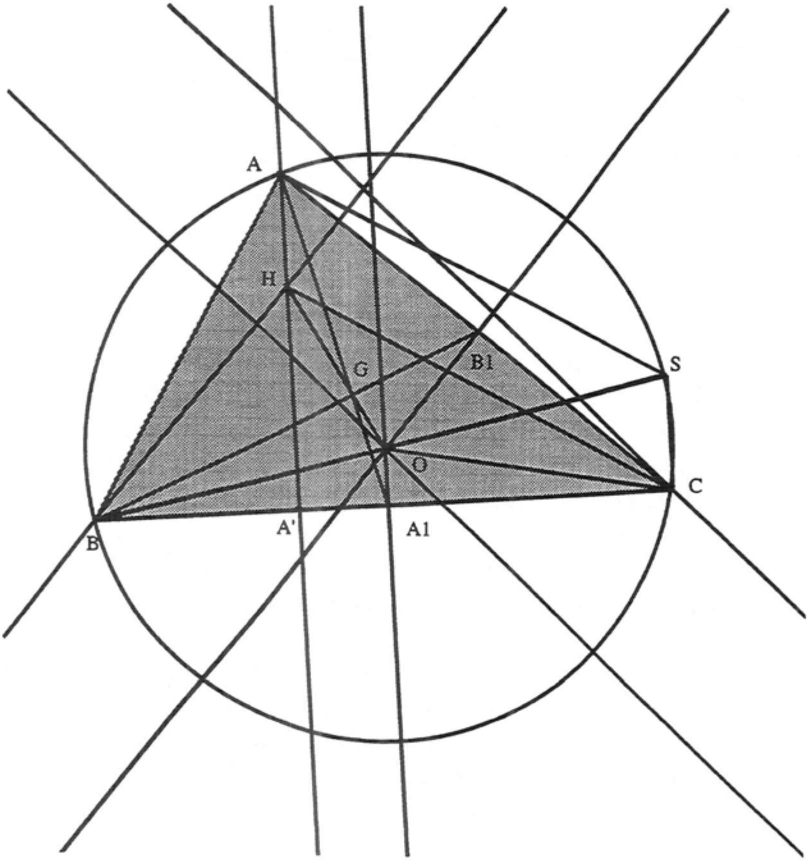


Figura 8

Parte II

Os momentos da atividade cognitiva individual permitem distinguir inteiramente *os meios* e os *objetos* dessa atividade, mas ambos fazem parte do desenvolvimento da cognição. Essa complementaridade (diferença e unidade) dos objetos e dos meios explica o surgimento e o dinamismo da Matemática Pura desde o século XVII. Essa tese parece combinar bem com a afirmação de Piaget de que a abstração reflexiva (*abstraction reflechissante*) representa o próprio mecanismo do desenvolvimento matemático, ainda que Piaget interprete a objetividade de meios cognitivos exclusivamente em termos de estrutura formal.

Segundo essa posição, não há nem fundações absolutas, nem processos universais de justificação para a Matemática. Olhando de perspetivas diferentes e examinando objetos diferentes do mesmo ponto de vista tornam-se abordagens metodologicamente não distinguíveis, assim como na fusão da Geometria Analítica com a Álgebra Linear. As aplicações lineares e as transformações das coordenadas são ambas descritas por meio das matrizes (coordenadas). Ao perceber essa simetria, nós acreditamos caracterizar o estágio transfigural de Piaget. Mas será que Piaget, ele mesmo, vê as coisas desta maneira?

Antes de entrar em uma descrição da Epistemologia Genética de Piaget, parece apropriado acrescentar várias observações.

Não é o problema nem a situação geométrica que devem ser classificados como intrafigurais, interfigurais ou transfigurais, mas sim a perspetiva adotada e os meios pelos quais eles é tratada. Certamente, a prova transfigural da Figura 6 é baseada exatamente no mesmo diagrama que as provas originais do teorema 1. É possível que essas perspetivas coexistam na maior parte da Geometria. Uma perspetiva possível a ser adotada depende, obviamente, do conhecimento prévio e da experiência matemática.

A partir disso, Piaget afirma que a evolução da atividade está baseada em uma lógica suposta. Mas que tipo da lógica é essa? A produção e a análise das provas dependem muito da maneira pela qual as coisas são representadas e das experimentações com essas representações. Fatores contingentes sempre influenciarão essa atividade experimental. Tal lógica, como exigida por Piaget, depende, conseqüentemente, de continuidade que evite aberturas grandes e pulos radicais e audazes.

Nosso compromisso é maior com o lógico do que com o figurativo e as razões básicas para que as provas lógicas sejam preferidas são consideradas muito importantes para o conhecimento matemático, resulta da importância da metáfora da máquina e também de que a lógica de primeira ordem fornece exatamente o modelo correto para nossos modernos sistemas computadorizados. A aprendizagem, o desenvolvimento e a instrução requerem, entretanto, não apenas as provas que provam, mas também as provas que possibilitam a introspeção. Consequentemente, a cognição como a metáfora da percepção é relevante e aqui, os DGS [Sistemas de Geometria Dinâmica] podem ser úteis. A percepção visual deve ser concebida, em um sentido, como uma série contínua de pequenas generalizações ou de inferências abdutivas. A percepção envolve interpretação.

> Se o objeto da percepção ou o julgamento perceptivo forem de uma natureza que não tem nenhuma relação à abdução, espera-se que o objeto da percepção esteja inteiramente livre de todas as caraterísticas das interpretações, porém ele não pode deixar de possuir tais caraterísticas se for meramente uma série contínua de abduções, executadas discretamente e conscientemente. (Peirce, 1931-1958)

Mas percepção, normalmente, não vagueia aleatoriamente porque nós percebemos primeiramente qualidades contínuas ou gerais. Vagueando, nós podemos ver um pequeno animal marrom e apenas numa segunda vista podemos identificá-lo como um coelho ou um gato, ou um esquilo, ou qualquer outro animal. Nós percebemos primeiramente o contexto geral, e determinamos os detalhes, somente mais tarde. Todos os exemplos familiares, que são apresentados com a finalidade de demonstrar os fracassos da percepção e da intuição, mostram que a percepção é relacional ou contextual (ver, por exemplo, Kline, 1985, capítulo IV). Para perceber um fato, isto é, algo invariante na variação da representação, requerer-se uma comparação (como fornecido pela medição, por exemplo). A obsessão pelos fatos descarta o figurativo e o relacional.

A percepção, embora dependa da diferença e da particularidade, é sempre dirigida para o contínuo do possível, para o geral e, assim, depende essencialmente de nossas classificações do mundo fenomenológico. A ontologia matemática, em particular, pode ser concebida simplesmente como um contínuo de possibilidades reais de relações. Dentro dessas possibilidades, as atualizadas em algum contexto e algum momento dependem de nossos objetivos e dos meios da representação e do saber.

Parte III

Piaget era um kantiano, ele acreditou no kantianismo, como afirmou freqüentemente, mas em um kantianismo

> que não é estático, isto é, as categorias não existem no início, mas sim um kantianismo dinâmico, com cada categoria levantando possibilidades novas, o que é algo completamente diferente. Eu concordo que a estrutura precedente, por sua própria existência, abre possibilidades e o papel do desenvolvimento e da construção na história da Matemática é aproveitar estas possibilidades, as converter em realidades e as realizar. (Piaget em Piattelli-Palmarini, 1980, p. 150)

Piaget perdeu, entretanto, algo mais da herança kantiana. Kant tinha percebido, no contraste com os racionalistas e os empiristas dos séculos XVII e XVIII, que não temos nenhum acesso que não seja mediado, nem para nosso mundo mental interno nem para a realidade objetiva. Kant descobriu a objetividade do sujeito. Piaget apreciou isso e sua versão "dinâmica" da epistemologia de Kant nada mais é que uma elaboração da introspecção fundamental de Kant. Nessa elaboração, Piaget concebe essa objetividade em termos da estrutura formal e da necessidade lógica. Permita-nos comentar mais a esse respeito um pouco adiante.

Kant tornou-se famoso entre os lógicos por sua afirmação de que a Matemática é (assim como a metafísica ou as ciências exatas) sintética, mesmo *a priori*. Isso significa que julgamentos matemáticos são essencialmente apodícticos, assim como a constatação dos fatos, mas em contraste a essas constatações, julgamentos matemáticos são, ao mesmo tempo, universais. Hume (1711-76), que precedeu Kant e aceitou a perspectiva comum a respeito do que faz o conhecimento *a priori*, descobriu que muito casos, cujas conexões eram consideradas supostamente como analíticas, em verdade eram sintéticas, notavelmente o exemplo da causa e do efeito. Mas Hume manteve a posição de que a Matemática Pura é analítica ou baseada em "relações das idéias" e não na realidade de fato. As afirmações matemáticas requerem, ele afirmou, "um trem do raciocínio"*, embora "para nos convencermos da proposição, na qual não há nenhuma propriedade, não possa haver nenhuma injustiça, sendo apenas necessário definir os termos e explicar que a injustiça é uma violação da propriedade" (Hume, 1977, Seção XII, Parte III, nossa tradução).

Kant, em contraposição a Hume, compreendeu que os problemas fundamentais do conhecimento matemático se apresentaram exatamente nos mesmos termos que aqueles das ciências empíricas, porque o "trem do raciocínio" citado por Hume que não deixa os julgamentos matemáticos serem óbvios, devem ser, segundo Kant, representados e exigem um esforço construtivo e uma intuição. O raciocínio matemático é, de acordo com Kant, para uma parte essencial, construtivo porque muitos predicados não podem ser ligados, como Hume tinha indicado, a um conceito, sem fornecer o contexto adicional. Por exemplo, a idéia de um triângulo não contém nela mesma o fato de que a soma de seus ângulos é igual a dois ângulos retos. Um filósofo tentaria, Kant escreve, analisar o conceito do triângulo, mas:

* Do inglês, *train of reasoning*.

> Ele pode analisar a concepção de uma reta, de um ângulo ou do número três por muito tempo, sem descobrir nenhuma das propriedades não presentes nessas concepções. Mas, se esta pergunta for proposta a um geômetra, ele começa imediatamente construindo um triângulo. (A 716/B744)

O que parece essencial na descrição de Kant da construção matemática é o fato de que essa construção não prossegue dos conceitos, eles mesmos, mas tem que confiar em exemplos particulares destes também. Por exemplo, quando discutimos que a reta *a* é paralela à reta *b* ou se cruza no ponto *C*, etc. Hintikka parece, até o momento, ter sido o único autor que observa esse aspecto. Ele escreve:

> (...) a caracterização de Kant da Matemática baseada no uso das construções tem que ser entendida como significando que, na Matemática, o tempo todo, são introduzidos representantes particulares de conceitos gerais e realizados argumentos em termos destes representantes particulares, os argumentos que não podem ser realizados apenas por meio de conceitos gerais. (Hintikka, 1992, p. 24)

É exatamente dessa maneira que o espaço (semiótica) e a indicação ostensiva dos pontos no espaço tornam-se importantes. Sem "aqui" e "agora" de posições espaço-temporais o problema da existência matemática não poderia ter sido resolvido e também o pensamento geométrico-relacional não teria evoluído para o estágio "transfigural" de Piaget, porque seria difícil conceber as próprias ações de um indivíduo como entidades objetivas. A Matemática, assim, prossegue tipicamente pelas construções de diagramas (algébricos ou geométricos) e pelas observações das relações nelas e não pela análise dos significados de conceitos matemáticos. A Matemática é um tipo da atividade semiótica. Esse pensamento diagramático e o uso da noção do espaço representam um estágio preliminar e penúltimo da concepção axiomática ou estrutural da Geometria. Mas Kant é ambíguo em sua concepção da Matemática.

Podemos interpretar que Kant nos descreve o método da Matemática que fornece a introspeção no caráter de provas matemáticas como conexões meramente do tipo "se então". Se o postulado das paralelas de Euclides for válido, isso quer dizer, se a reta paralela ao lado oposto do triângulo existe, então a soma dos ângulos no triângulo é de 180 graus.

Isso é exatamente o que o diagrama mostra. Por outro lado, Kant pensa que a Matemática trata de objetos que derivam sua generalidade das regras de acordo com as quais eles têm que ser construídos. Na Geometria, por exemplo, preocupamo-nos com o significado dos conceitos como o "triângulo" ou "reta" em geral, apenas a ponto de realizá-los construtivamente. Como Kant diz, "Não podemos contemplar uma reta sem desenhá-la no pensamento" (B 154), isto é, sem imaginar uma atividade. A Matemática depende de pensamento intuitivo porque é uma atividade "objetiva", uma atividade sobre objetos e não um mero cálculo.

Mas como podemos, pergunta Bolzano, construir ou imaginar uma reta infinita? Para Bolzano, a filosofia de Kant, aceita aquelas

> (...) intuições, que serão uma adição particular para as definições matemáticas dos conceitos, a serem nada mais que um objeto subordinado à definição de um conceito na Geometria, um objeto, que nossa imaginação produtiva deva adicionar à definição fornecida.

Bolzano continua, afirmando que

> (...) o que é exigido aqui pode se aplicar a muitos, mas de nenhuma maneira todos, os conceitos que pertencem à Geometria. Assim, para o exemplo, o conceito de uma reta infinita é também um conceito geométrico que, consequentemente, também tem que ser explicado geometricamente. E a imaginação produtiva certamente não pode criar um objeto que corresponda a este conceito. Não podemos desenhar uma reta infinita por meio de nenhuma imaginação, mas podemos e temos que pensar nela por meio da apenas razão. (1975, p. 76)

Bolzano, então, presume que percepção e intuição são mais limitadas do que o raciocínio conceptual. Mas, como Kant havia demonstrado, conceitos não se aplicam às coisas, mas sim a certas representações delas. De fato, devemos usar ícones para determinar as propriedades de um objeto, tal como uma reta. Tome, por exemplo, escreve Kant, "a proposição: 'Duas retas não podem delimitar um espaço e com estas sozinhas não é possível obter uma figura' e tente deduzi-la a partir das concepções da reta e do número dois" (B 65). As propriedades de objetos matemáticos, como retas, são propriedades relacionais, expressas em nosso exemplo pela afirmação de que dois pontos determinam exatamente uma reta, e devem conseqüentemente ser construídos na intuição. Uma reta infinita, ela mesma, deve ser um símbolo ou um signo e necessita um contexto para ser concebida. Uma reta infinita, ela mesma com *relatum* (referência), pode apenas ser indicada como parte de um sistema teórico ao qual ela pertence. Podemos usar esse símbolo como um índice, de referência e não de atribuição, apenas como a parte de um sistema ou de uma estrutura (talvez a estrutura de um diagrama no espaço semiótico; lembre o método de "perseguir diagrama", da Álgebra Homológica). Estruturas representam as intenções dos termos matemáticos, mas não se segue que provas sobre fatos estruturais poderiam sempre ser estabelecidas por meio de argumentos formais ou sintáticos.

As verdades matemáticas são estabelecidas por meio das provas. Mas as provas matemáticas são, de acordo com a tradição de Kant, tipos de experimentos mentais. Ian Mueller acredita que o obstáculo principal que bloqueia a interpretação de argumentos matemáticos como experimentos mentais

> (...) é a opinião de que tais argumentos não podem ser provas conclusivas. Em particular, pode ser perguntado como a consideração de um único objeto pode estabelecer uma afirmação geral sobre todos os objetos de um tipo dado. Uma parte da dificuldade é devida, na minha opinião, à falha em distinguir duas maneiras de interpretar afirmações gerais como "todos os triângulos isósceles têm seus ângulos de base iguais". Sob uma interpretação, a afirmação se refere a uma totalidade definitiva [...] e diz algo sobre cada delas. Sob a outra interpretação nenhuma totalidade definitiva é pressuposta, e a sentença tem um caráter muito mais condicional – "se um triângulo é isósceles, seus dois ângulos de base são iguais". Uma pessoa que interprete uma generalização na segunda maneira pode argumentar que a expressão "a classe de triângulos isósceles" é sem sentido porque o número de triângulos isósceles é absolutamente indeterminado. (Mueller 1969, pp. 299-300)

Isso significa que, de acordo com essa maneira de compreender, não se pode argumentar que há uma existência absoluta envolvendo nem a caracterização relacional de objetos matemáticos nem provas matemáticas. A Matemática opera apenas com existência relativa. Não é acidental que o ponto da vista da Matemática que é expresso pela fórmula em que a Matemática consiste em afirmações de tipo "se então", que a atividade matemática consiste tipicamente em estabelecer provas, correlaciona com a convicção e que não é a referência aos objetos matemáticos específicos que distingue a Matemática de outras ciências "na mesma maneira que a Botânica é distinta da Biologia Marinha pela diferença nos objetos estudados" (Putnam 1975, p. 2). A Matemática, de acordo com esse ponto de vista, é caracterizada por algum estilo do raciocínio; esse estilo do raciocínio não está conectado com uma ontologia definitiva, mas obtém sua objetividade pelas suas aplicações pretendidas.

Contudo, a Matemática é uma atividade e não há nenhuma atividade sem contexto objetivo. O conhecimento matemático visto como o conhecimento dos objetos, entretanto, depende da intuição. Na intuição, em contraste ao conhecimento discursivo, algo está imediatamente presente, o que significa que um objeto é fornecido sobre o que podemos refletir. A força da intuição pode ser vista em sua ênfase da familiaridade com o objeto, desde que um conteúdo tem que ser dado de onde podemos avançar para o conhecimento. Como Kant dita: "Na ausência da intuição todo nosso conhecimento está sem objetos, e permanece, conseqüentemente, inteiramente vazio" (A 62). "Mas pela intuição uma coisa é apenas dada para nós, não compreendida", escreve Moritz Schlick (1979, p. 146).

Essas considerações podem sugerir para uma "realista" que o objeto é ambas as coisas: o ponto da partida compreendido pela intuição e objetivo da cognição e, assim, que a problemática está situada no processo de desenvolvimento, ele mesmo, por exemplo, na relação entre o conhecimento e a aplicação do conhecimento. A intuição é, portanto, um meio e não um resultado da cognição.

Esse ponto da vista combina com o fato de que nosso acesso aos objetos está mediado por representações. Um objeto matemático ou uma relação objetiva são dados então por uma classe de representações equivalentes. Como nós vimos em nossa prova do teorema de Euler, esse tipo da objetividade se desenvolve por meio da generalização. O que se desenvolve é nossa percepção de relações objetivas dadas, mais ou menos implicitamente, por várias representações. Os objetos matemáticos não podem ser definidos nem indicados com o dedo. São universais e o universal ou o geral é, como Peirce diz, o indeterminado. É uma relação possível entre várias representações. Um conceito matemático, tal como o conceito do triângulo ou da função, não existe independentemente da totalidade de suas representações possíveis, mas também não deve ser confundido com uma representação. Uma teoria matemática não existe independentemente da totalidade de suas caracterizações axiomáticas, e no mesmo tempo, não pode ser confundida com uma delas. Um sistema formal pode ser representado de várias maneiras, e os teoremas têm que ser invariantes em seus valores da verdade apesar de mudanças da representação. Entretanto, isso não significa que, "há uma entidade hipostasiada chamada um sistema formal que exista independentemente de qualquer representação" (Curry 1970, p. 30).

Para adaptar a própria noção da atividade para tal ponto da vista é necessário compreender a atividade também como o sistema de relações dos meios-objetos e não como um mero processo. Não há nenhuma atividade sem meios e sem contexto objetivo. A cognição matemática é essencialmente cognição situada. Piaget, no contraste, concebe a atividade independentemente de qualquer domínio da objetividade e negligencia também os meios simbólicos e o papel da representação na Matemática. Existe, como ele indica, uma "autonomia radical do desenvolvimento operacional. Do nível da experiência lógico-matemática, onde os primeiros conceitos matemáticos pré-científicos aparecem (...) as operações são construídas pela abstração a partir das ações gerais do sujeito, independentemente de objetos físicos específicos e das características subjetivas das ações dos indivíduos" (Beth e Piaget 1966, p. 244).

O dinamismo de Piaget peca, nós acreditamos, por causa da sua ênfase sobre a necessidade e por causa de sua negação do contexto objetivo que resulta dessa preferência. Piaget, em um sentido, percebe a problemática do direcionamento quando usa o teorema da incompletude de Gödel para propor que as fundações do conhecimento foram encontradas no futuro, tentando definir uma lei direcional interna ou um declive da trajetória do desenvolvimento cognitivo. O teorema de Gödel, de fato, muniu Piaget de um critério interno da ordem hierárquica de estruturas ou de teorias. A rejeição de qualquer noção do contexto faz com que a "necessidade" torne-se um conceito importante, do ponto de vista de Piaget, do desenvolvimento cognitivo, em que o necessário é um resultado do desenvolvimento e não seu começo.

> A dificuldade principal da interpretação genética consiste no fato de explicar porque as construções sucedem progressivamente umas

> às outras e, em particular, porque elas conseguem formas novas. Uma estrutura mais elevada é derivada de uma estrutura mais baixa por meio da abstração dos elementos que partem do segundo, mas esta abstração supõe que esses elementos estão refletidos por meio das operações novas, que se reconstróem transpondo-as. Contudo, temos que explicar como essas operações constituem um momento novo e são determinadas pela estrutura mais baixa. A resposta é que, porque essa estrutura é limitada, suas lacunas demandam uma construção, que possa completá-las. Mas há uma infinidade das maneiras de completar uma estrutura incompleta, e temos que explicar porque uma, que parece a mais simples e o mais provável, é a escolhida. Os resultados de Gödel sugerem uma primeira resposta a essas perguntas: a construção é contínua indefinidamente porque nenhum sistema é auto-suficiente, não em relação o qualquer outro, mas porque falta a coerência interna suficiente para assegurar sua própria não-contradição. Cada sistema deve consequentemente prosseguir no sentido de que sua própria consistência pode ser reforçada. (Piaget em Beth e Piaget, 1966, pp. 274-275)

Parte IV

Existe uma crítica a Piaget que argumenta que a explanação inteiramente estruturalista de Piaget sobre o conhecimento lógico-matemático é equivocada porque ignora o papel central da prova e da comunicação na matemática. O que é discutido é que a caracterização de Piaget da Matemática e da sua criação está limitada por seu engano "da natureza e do status da prova" (Rotman, 1977, p. 151). O que Piaget parece confundir, diz-se, é a descoberta e a invenção da estrutura com prova de afirmações sobre estrutura. Brian Rotman, por exemplo, que concentra nos aspectos semióticos e sociais da Matemática, escreve:

> O que discutiremos é que a explanação inteiramente estruturalista de Piaget sobre conhecimento lógico-matemático falha porque ignora o papel central da prova na Matemática... O erro central do estruturalismo de Piaget é a idéia de que é possível explicar a origem e a natureza da Matemática independentemente das perguntas de justificativas não-estruturais sobre como as afirmações matemáticas são validadas. (Rotman, 1977, pp. 141 e 144)

Rotman nega, em princípio, que a Matemática está preocupada principalmente com a criação das estruturas. E ele lamenta que os escritos de Piaget não contenham nenhuma teoria da prova e propõe que a "necessidade", como enfatizada por Piaget, não é essencial ao desenvolvimento matemático. A substituição de uma análise de necessidade no lugar de uma discussão da prova matemática é enganadora, segundo Rotman. Rotman também critica o estruturalismo de Piaget, em que a estrutura, a prova e a afirmação estão separadas artificialmente, devido à suposição falsa que a Matemática não funciona como uma língua (p. 156). O problema, ele afirma, é que no construtivismo de Piaget é o indivíduo que constrói a matemática sem nenhuma influência do ambiente social ou da língua. "A teoria contrária mais grave, no fato, ao caso progressivo de Piaget, é uma teoria que ele conhece bem, é a reivindicação de que a origem e as leis do pensamento são produtos sociais e culturais e não, simplesmente, produtos evolucionários" (Rotman, 1977, p. 120).

A perspectiva do argumento e da prova, ao que parece, transforma inevitavelmente a Matemática em uma coleção das afirmações. A prova pertence à metamatemática e parece ser um exercício na Lógica e a Lógica não tem nada dizer sobre qualquer coisa que não seja uma afirmação.

De acordo com o consenso lingüístico, a Matemática consiste de teorias e as teorias são conjuntos de proposições, que podem ser organizados por meio de uma base axiomática, e que aparecem como meros fatos consumados não transparentes. O ensino da prova em nossas escolas trata seu problema no contexto da lógica proposicional e não da Matemática. Uma afirmação, na lógica proposicional, é algo que é verdadeiro ou falso. A lógica proposicional é construída inteiramente a partir dessa regra fundamental. Seu poder é também sua fraqueza porque não suporta suposição e experimentação. De um ponto de vista matemático, a geração de hipóteses férteis e tentativa de formulação de conjecturas (em geral, apenas parcialmente corretas) parecem mais importantes do que qualquer prova e isso exige os procedimentos que incluem a experimentação com objetos e diagramas.

A lógica proposicional não concerne aos objetos. Segundo lógicos como Frege, o julgamento, melhor que o objeto ou o conceito, é a unidade fundamental do conhecimento. "É bastante se a proposição examinada por inteiro tiver um sentido; é este que confere às suas partes, também o seu conteúdo" (Frege, 1884, § 60).

Quando, entretanto, pela concepção moderna da Axiomática, esse ponto da vista foi dirigido ao extremo pela proposta que a consistência lógica é suficiente para a existência, Frege não concordou mais, recusando-se a aceitar a interpretação formalista da axiomática de Hilbert. Mas Frege não forneceu uma solução alternativa definitiva, entretanto, e quando, em seu tratamento das classes, tentou evitar a complexidade lógica envolvida na hierarquia de tipos lógicos por meio da suposição que uma função ou um conceito proposicional de qualquer nível determina um objeto *ground-level*, nomeando sua extensão, desmoronando assim as distinções do tipo, encontrou um paradoxo. A suposição de que a extensão existe para cada fórmula é contraditória, como Russell tinha informado Frege. Os paradoxos da teoria dos conjuntos surgiram de uma combinação de duas noções incompatíveis: conjunto-como-um contra conjunto-como-muitos. Uma floresta é apenas um conjunto de árvores ou é algo mais?

Se estivermos preocupados primeira ou exclusivamente com método e prova formal, podemos enfatizar a importância de saber e de proposições, em vez de atividade e de objetividade. Para tal perspectiva, a Matemática parece não ter mudado desde os dias de Euclides e os elementos de Euclides têm, de fato, preservado seu *status* exemplar, ao menos com respeito ao método matemático. Isso é especialmente verdadeiro com respeito ao número: a prova de Euclides, por exemplo, de que a raiz quadrada de 2 não pode ser uma fração é válida exatamente na forma que Euclides lhe deu. "O método matemático, como usado atualmente, provavelmente, não pareceria estranho aos gregos" escreve Ulam (Ulam, 1969, p. 2), e ele continua, "Entretanto, os objetos a que o pensamento matemático é devotado hoje têm sido diversificados e generalizados". Segue obviamente dessas indicações, em contraste, que qualquer perspectiva genética sobre a Matemática deve se preocupar com os objetos matemáticos e com o desenvolvimento do conteúdo matemático.

Problemas, eles mesmos, entretanto, não produzem os meios para suas soluções. A Matemática Moderna, ela mesma, não obtém sua própria dinâmica em nenhuma parte pequena da aplicação de teoremas e métodos que, à primeira vista, não têm nada a fazer com os problemas em jogo. Assim, o que se constitui um objeto da Matemática é certamente condicionado por forças internas, assim como forças externas, pelos métodos assim como objetivos ou motivos da matematização. A análise da prova pode mostrar que uma prova realmente não depende, na totalidade, das características dos objetos envolvidos e assim pode conduzir a enfraquecer-se das hipóteses. A prova não se preocupa com os objetos como tal, mas sim com os relacionamentos entre certas características de objetos possíveis. A nova formulação da situação em questão pode sugerir um diferente teorema. Assim, a análise da prova conduz à reconstrução e à generalização, além das novas provas, que por sua vez, provocam uma outra generalização etc. Isso, nós já vimos na primeira parte deste artigo.

Nessa descrição, a objetividade matemática reside na organização dedutiva da Matemática. É a prova que fortalece a comunicação matemática. Mas a prova como tal não produz nenhuma dinâmica independentemente da dialética dos problemas e dos meios como exemplificados na análise da prova. Se ignorarmos os avisos de Kant em relação à atual atividade da prova e ao processo de provar, podemos ser facilmente convencidos de que a Matemática não tem nenhum objeto e de que o método dedutivo e a prova constituem suas característica essenciais. Essa visão é responsável pela impressão estática da Matemática e pelo caráter exemplar dos Elementos de Euclides. Mas mesmo a Geometria de Euclides é principalmente construtiva, e está assim a serviço da sabedoria e da inteligibilidade (Lachterman 1989, 110ss).

A Matemática, vista como uma atividade, tem mudado tremendamente, o que é indicado de forma apta, nos três níveis de Piaget. Contudo, Piaget apenas concebe a atividade matemática em termos abstratos ou formais porque parece obcecado com necessidade. Para ele, a atividade é relevante somente à medida que as ações formam estruturas, que podem ser caracterizadas formalmente. Piaget acredita

> (...) que a evidência desenvolve em paralelo com o surgimento da estrutura matemática, isto é, com o reconhecimento de relações abstratas independentemente dos objetos particulares entre os quais as relações são válidas. (Castonguay 1972, p. 87)

De acordo com Rotman, "a proposta de que uma afirmação é necessária não pode ser separada da forma pela qual a afirmação é justificada" (1977, p. 145). Piaget negaria que, de fato, ele se afasta da prova por causa dos aspectos convencionais e não lógicos que impregnam inevitavelmente o comportamento lingüístico. A ênfase que Piaget dá à necessidade está, por sua vez, influenciada por Kant, segundo Rotman. Piaget escreve sobre o sujeito epistêmico, que pode ser visto como uma mera derivada do sujeito "transcendental" de Kant e, além disso, admite que a descentralização dessa construção individual é necessária por meio da cooperação com outras.

Mas Rotman não se satisfaz com a evocação de Piaget do sujeito epistêmico.

> É igualmente razoável supor que, de fato, a coordenação dos pontos de vistas é uma questão de argumento justificado e explícito sobre entidades públicas e não, como Piaget insiste, uma questão das necessidades internas que se operam dentro de uma mente individual. (Ibid., p. 154)

Rotman preocupa-se com a concepção de Piaget da generalidade social, com a idéia de que "o que é comum a todos os sujeitos finalmente se apóia na suposição de que a Matemática resulta dos indivíduos e se torna então, em algum sentido, social" (p. 136).

Parece que existem diversos pontos diferentes envolvidos aqui.

Primeiramente, a afirmação de que a generalidade e a necessidade matemáticas são forasteiras em relação à construção individual, algo que tem que ser realizado por um esforço adicional, baseou na lógica e na língua. Nós já tratamos implicitamente dessa alegação, ao caracterizar a prova matemática como um tipo de experimento mental. Há também que se observar que nenhuma teoria social da Matemática pode ser desenvolvida sem uma exploração extensiva da interação entre a Matemática e a Tecnologia e a construção tecnológicas. Além disso, os movimentos e as ações construtivos são, por si mesmo, gerais, o que significa que não são traços específicos de indivíduos particulares. A própria ação e a mera percepção ou imaginação dessa ação ativam, por exemplo, as mesmas partes do cérebro. Existe na neurofisiologia uma teoria dos "neurônios espelhos", que têm como característica o fato de que há

> (...) uma congruência estrita entre a ação observada eficaz em provocar a resposta visual dos neurônios e a ação executada eficaz em dirigir a resposta motora. Ou seja, a ação observada executada por um outro indivíduo evoca no observador o mesmo padrão neural que ocorre durante a execução ativa dessa ação. (Gallese in Metzinger, 2000, p. 327)

Em segundo lugar, parece que Rotman acredita que a coordenação e a unificação, e não o pluralismo intelectual e a variedade das perspetivas são os objetivos mais importantes da Matemática e da Ciência. É possível, em oposição a tal visão, propor que é o pluralismo das perspectivas e não a unificação e coordenação estrita que serve como a base do progresso científico e matemático. A Matemática e a Ciência Modernas nasceram da especialização e divisão de trabalho social. A Matemática Pura, em particular, resultou de um crescimento explosivo da atividade matemática ocorrido ao redor de 1800 e isso, em suas fontes, pode sumariamente ser caracterizado pela afirmação que, pela primeira vez na história da Matemática, um grande número de conexões entre resultados e problemas aparentemente muito diferentes foram descobertos.

Entretanto, a respeito de um ponto central, Rotman está certo, ou seja, ele tem razão ao argumentar que o construtivismo não é suficiente para construir teorias matemáticas porque, para isso, sempre é necessário compreender quais representações, aparentemente diferentes, podem ter essencialmente o mesmo significado. Como um exemplo, Rotman aponta a invenção da Geometria Analítica de Descartes "que ligou áreas previamente separadas da Álgebra e da Geometria... Assim, qualquer prova do isomorfismo, por exemplo, estabelece uma relação entre duas descrições diferentes de uma estrutura" (p. 157). Nessa maneira se esclarece a tese principal de Rotman, ou seja, precisamos deixar bem claro que a construção de uma estrutura é totalmente diferente de descrever ou fazer afirmações sobre essa estrutura.

O conhecimento matemático consiste de seqüências de afirmações da forma "se então" e considera, conseqüentemente, apenas objetos no que diz respeito às conseqüências que puderam ter para o processo do raciocínio matemático. Portanto, o interesse principal da Matemática refere-se a como os objetos poderiam ser introduzidos ao raciocínio matemático ou à teoria. Objetos matemáticos são, em primeiro lugar, objetos intencionais, ou seja, objetos cujos critérios de individualidade devem ser vistos na maneira específica pela qual eles entram na teoria, por meio de determinadas representações. Dois objetos matemáticos podem ser idênticos de forma extensional, mas, ao serem apresentados diferentemente, são intencionalmente diferentes. Exatamente como outras ciências, entretanto, a Matemática tem interesse em obter introspecções objetivas, e, portanto, em objetos extensionais. É por causo disso que os teoremas matemáticos têm, via de regra, a forma de equações $A = B$. Até podem ser justamente conduzidos a definir as características essenciais de um ato da criação imaginativa exatamente nestes termos, pela indicação de que elas envolvem uma visão de um A como de um B: $A = B$, ou "todo A é B", ou "A representam B", etc.

Certamente, pode ser muito difícil provar um teorema, isto é, descobrir tal igualdade, um fato que já levou Hume a conceder que as afirmações matemáticas não são diretamente analíticas no sentido de que o predicado imediatamente flui do significado do termo sujeito e que motivou Kant a denominar a Matemática conhecimento sintético *a priori*. Essa dificuldade implica que é essencial que a Matemática consiga representar a mesma coisa sempre de novas formas. O progresso do conhecimento matemático depende, via da regra, com uma interpretação ou representação apropriada, possivelmente completamente inesperada, do problema dado. O pluralismo das perspectivas e a variedade das representações são essenciais para o desenvolvimento da Matemática, e tem sido enfatizado como uma característica da Matemática repetidas vezes (veja, por exemplo, Putnam, 1975, p. 45).

Não há uma maneira direta nem uma teoria formal – além das regras lógicas ou sintáticas – que garantam que duas representações diferentes se referem à mesma coisa. Para estabelecer estas "equações" $A = B$ se fazem necessárias uma construção e uma síntese, tais como aquelas presentes na descoberta da relação entre a eletricidade, o magnetismo e a luz, todas as quais constituem diferentes aspectos da mesma coisa, o que denominamos hoje o campo eletromagnético. Um outro exemplo é a síntese exibida na maior descoberta da Revolução Industrial, a saber, a relação entre calor e movimento, expressos no teorema da conversação da energia.

Contudo, nós devemos aceitar $A = B$ como uma relação objetiva, de início e, portanto, aceitar também a existência de objetos matemáticos, ainda que estes objetos sejam gerados pelo que Piaget denominou "abstração reflexiva". Não existe nenhuma objetividade sem objetos, embora esses objetos não sejam dados independentemente de uma representação simbólica. A caracterização de "objetos matemáticos" em termos semióticos resolve uma dificuldade observada por Piaget, a saber, a plurifuncionalidade dos objetos matemáticos, que o tinha conduzido a negar sua existência. A Matemática não consiste mais "em tipos de objetos ideais dados, de uma vez por todas por nós ou por algo fora de nós"[1] (Piaget, 1970, p. 88).

Uma "equação" representacional $A = B$ é válida e também é diferente da identidade $A = A$, além da equivalência indicada pelos sinais de igual, há algo diferente também, sugerido pelos símbolos diferentes A e B. Se queremos enfatizar este segundo aspecto, talvez deveríamos interpretar a relação entre A e B como uma transformação, e não como uma igualdade. Nosso problema da reta de Euler fornece um exemplo muito pertinente, porque a prova consiste em ver que o circuncentro M do triângulo do ABC é exatamente o ortocentro do triângulo A'B'C'. Nós compreendemos agora que a idéia da transformação neste sentido é essencial para passar do estágio intrafigural ao interfigural. Com isso, Piaget certamente concordaria. Entretanto, ele não adotaria, pelo menos segundo a crítica, o outro ponto de vista, a saber, o de considerar funções ou transformações também como igualdades ou identidades.

Indicar o papel imprescindível dessa complementaridade entre, por um lado, função ou transformação, e da relação ou lei objetiva, por outro, no desenvolvimento da cognição matemática é o propósito o mais importante deste artigo.

Essa complementaridade reflete a necessidade de duas maneiras diferentes, de acordo com as quais temos que compreender nossos conceitos – tanto de ponto da vista de atribuição quanto da referência – e é estabelecida pela complementaridade entre espaço e estrutura, que servem como metáforas cognitivas e universais.

Nessa perspectiva, Piaget parece radical demais com sua afirmação de que a própria noção do espaço pode ser reduzido à estrutura porque é uma mera construção. Referido pela teoria axiomática dos grupos, por exemplo, ele escreve:

> A lei associativa dos grupos de transformação é fundamental para a coerência do espaço, porque se os termos na teoria dos grupos variam com os trajetos percorridos para os alcançar (se eles eram concebidos como objetos intencionais, minha inserção M.O.), o espaço perderia sua coerência; o que nós teríamos seria um fluxo perpétuo, como o rio de Heraclito. (Piaget, 1970, p. 20)

1 *"(...) des sortes d'objets idéaux donnés une fois pour toutes en nous ou au dehors (...)"*

Mesmo que isto seja verdadeiro, é a coerência do espaço e a possibilidade de empregar representações indiciais e icônicas oferecidas por ele que fornece à Matemática a idéia do conhecimento objetivo, e não o contrário. A respeito do construtivismo de Piaget, Thom, por exemplo, acredita, "é enredado irremediavelmente em dificuldades ligadas ao seguinte problema: como pode a continuidade geométrica surgir de uma 'poeira' discreta de estados ou de processos psicológicos?" (apud Piattelli-Palmarini, 1980, p. 82)

A complementaridade da transformação e da relação aplica-se a todas as áreas de Educação Matemática. Os alunos, em geral, têm dificuldades com equações algébricas porque interpretaram e aprenderam o sinal da igualdade no sentido de "produção". Essa interpretação *input-output* representa uma compreensão direta da equação. O conceito da equação não foi transformado ainda em um objeto da reflexão matemática. Esse ponto de vista funcional tem uma afinidade forte com determinadas situações estandardizadas da aplicação, que poderiam ser caracterizadas como a produção de um objeto novo a partir dos objetos dados pela execução das regras dadas; ou, mais geralmente, a transformação correta de um estado inicial para um estado final desejado. Mesmo as tarefas elementares, entretanto, requerem também uma interpretação diferente de uma equação, uma interpretação que trate a equação como um conceito independente. Como, por exemplo, é possível tratar a expressão $x+3 = 8$ como uma função?

Cognitivamente, o princípio da continuidade tem sempre tido um papel importante em estabelecer essa complementaridade da relação e da transformação. Esse princípio, afinal de contas, tem sido introduzido no raciocínio matemático por pessoas como Desargues ou Poncelet, que tentaram a matematizar o desenho perspectivo. O princípio da continuidade é dependente sempre da representação em questão e ajuda na descoberta das "leis" que a governam. Não é, por exemplo, com respeito a nosso exemplo da reta de Euler, suficiente para observar que esse teorema, sendo sobre a colinearidade de três pontos, pertence no contexto da Geometria Projetiva. É necessário começar a partir da observação de diagramas concretos e a partir de alguma idéia concreta (da prova), tornando inevitável um tratamento inicial dos objetos descritos no teorema anunciado. O desenvolvimento deve ser contínuo, isto é, tem que prosseguir por etapas suficientemente pequenas e cuja escolha não parece ser totalmente determinada. Uma idéia apenas pode ser afetada por uma outra idéia quando existe uma conexão contínua entre elas. Todo raciocínio é baseado na continuidade, embora, em geral, não todas as etapas infinitesimais tenham que ser detalhadas explicitamente.

E não há nenhuma necessidade e nenhuma garantia do sucesso. Como Peirce o indica:

> O princípio da continuidade é a idéia do falibilismo objetificado. Porque o falibilismo é a doutrina que propõe que nosso conhecimento nunca é absoluto, mas sempre nada flui como era, num contínuo da incerteza e da indeterminação. E a doutrina da continuidade é a de que todas as coisas nadam assim nos contínuos. (...) Mas o falibilismo não pode ser apreciado numa maneira que se assemelha, em qualquer forma, seu significado verdadeiro até que a evolução esteja considerada. Uma vez que o princípio da continuidade é adotado, nenhum tipo da explanação das coisas pode ser satisfatório, a não ser que elas cresceram. (Peirce, 1931-1958, pp. 171-175)

Os sistemas dinâmicos da geometria (DGS) são adequados para colocar o princípio da continuidade em operação e a promover assim o crescimento de hipóteses férteis. Sistemas de representação assim como dos DGS, tendo revitalizado esse princípio, têm um papel muito importante no desenvolvimento cognitivo porque realizam uma interação íntima e indissoluta entre a observação e o raciocínio.

Parte V

Piaget indica a importância do conceito da transformação para o desenvolvimento do pensamento geométrico, e ele compreende que a algebrização da Matemática feita por Descartes representa a força essencial subjacente a esse conceito.

> Um período de trabalho longo e sem interrupções na Álgebra e no Cálculo infinitesimal foi requerido [...] para chegar finalmente numa conceituação da própria idéia da transformação geométrica sem atravessar a álgebra ou a análise. (Piaget e Garcia 1989, p. 106)

Parece que Piaget não presta nenhuma atenção, entretanto, ao fato de que pelo menos a análise infinitesimal e o conceito da função dependem essencialmente da própria idéia do espaço e do princípio da continuidade também. O conceito da função ou da transformação matemática tem uma raiz dupla, algoritmo e relação objetiva, como exemplificado pelas regularidades da natureza. Como nós indicamos na tese da última seção, essa complementaridade pode ser de uma importância fundamental para a transição aos estágios interfigural e estruturais do desenvolvimento.

Compreender funções matemáticas significa uma compreensão da complementaridade da fórmula e relação, assim como a auto-referencialidade que governa sua evolução, como se tornou aparente na definição de Cauchy de uma função contínua. Na Matemática dos séculos XVII e XVIII, não era possível representar as funções descontínuas, porque uma função era uma lei analítica. Uma curva geométrica, além disso, era denominada contínua se pudesse ser representada por uma função (analítica) (Euler, 1748, vol. II). Mas essa caracterização provou ser incoerente.

Cauchy, depois demonstrando a inconsistência desses esforços (Grattan-Guinness, 1970), revisou inteiramente a abordagem usando como base o princípio da continuidade, transformando a Matemática numa teoria extensional. Uma função, no sentido de Cauchy ou Dirichlet, pode ser vista como uma classe de equivalência de expressões analíticas ou de fórmulas, na qual a relação de equivalência é baseada no axioma do extensionalidade. Essa mudança de uma visão intencional para uma visão extensional provocado por Cauchy possibilita a identificação de conjuntos de funções usando algumas propriedade particulares, e, em geral, permite raciocinar sobre esses conjuntos sem representá-las explicitamente. Por exemplo, em vez de dar uma função linear diretamente pelo $f(x)=ax$, Cauchy prova que uma função contínua que tem a propriedade $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pode ser representada como apresentada acima (Cauchy, 1821, pp. 99-100). Esse tipo de raciocinar com o próprio objeto matemático assumiu um papel dominante na Matemática no mesmo tempo em que a prova-análise tornou-se sua base.

Ainda falando precisamente, nós não podemos operar sobre o objeto ou o conceito como tais, porque, de qualquer modo, eles têm que ser representados para se tornarem acessíveis. Um conceito não deve ser concebido como uma entidade completamente isolada e distinta num paraíso platônico; por outro lado, não pode ser seja confundido com qualquer conjunto de aplicações pretendidas. Dois predicados ou conceitos ou funções (ou funções das funções) devem ser considerados como diferentes, mesmo que possam ser aplicados exatamente à mesma classe dos objetos, porque influenciam a atividade mental diferentemente e podem conduzir a desenvolvimentos diferentes. A vista do extensional na matemática ignora esses fatos completamente.

O próprio Piaget aceita a idéia de que agregar correspondências em uma mão e as construções operacionais na outra, pode incluir dois processos "comum a todos os campos do conhecimento" (Piaget e Garcia, 1989, p. 11). Parece certamente importante estar ciente do fato de que a inovação cartesiana teve já uma natureza dupla desde seu começo, representada pela combinação do número e da variável por um lado, e do espaço e da quantidade por outro; "para a extensão na largura do comprimento e na profundidade, que constituem o espaço é claramente o mesmo que aquele que constitui o corpo", diz Descartes (Garber, 1992, p. 134). A matemática cartesiana não é algébrica em nosso sentido, não é "uma ciência da estrutura pura", mas é baseada em uma interação do número com a visualização geométrica. Essa dualidade é, em nossa visão, a base de uma compreensão apropriada do aspecto complementarista da álgebra (isto é álgebra compreensiva como um sistema que mistura aquelas duas linhas), torna-se crucial assim considerarmos relações entre corpos ou, em termos piagetianos, se passarmos do intrafigural ao interfigural.

No primeiro parágrafo da sua Geometria, Descartes descreve seu programa construtivo como segue: "Todos os problemas de geometria podem facilmente se reduzir a termos tais que há necessidade, por conseguinte, de conhecer somente o comprimento de algumas linhas retas para construi-las".[2]

A Geometria é baseada na introspecção, e esta envolve dois procedimentos, análises e sínteses. A síntese significa a construção e a construção é, como no Euclides, definida em termos dos meios da construção (régua e compasso no exemplo de Euclides ou proporcionalidade-compasso de Descartes – veja Figura 10), e não como um algoritmo ou um procedimento precisamente especificado. Consequentemente, a análise era essencial para terminar a solução de problemas matemáticos, especialmente para casos nos quais a construção falhou.

A Análise e a Geometria Analítica de Descartes, na sua totalidade, foram derivadas da sua investigação da proporcionalidade. A desco-

---

2 *"Tous les problèmes de géométrie peuvent facilement se réduire à des termes tels qu'il n'est besoin par la suite que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire"*.

berta de uma ou de mais média-proporcionais por meio da associação apropriada de termos conhecidos com termos desconhecidos é o paradigma de descoberta e construção engenhosas em termos da representação figurativa que Descartes explica no *Regulae*, especialmente na segunda parte, começando com a Régua 14. Descartes acreditou que a aplicação de figuras para todo o tipo dos problemas seria proveitosa porque a similaridade ou a analogia como expressada na Matemática de relações proporcionais são as únicas maneiras de descobrir verdades novas.

> Se alguém é cego de nascimento, não devemos esperar, pela força do argumento, que ele tenha idéias verdadeiras das cores assim como as idéias que temos, derivadas, como elas são, dos sentidos. Mas, se alguém, em algum momento, tiver visto as cores primárias, mas não as cores secundárias ou misturadas, então, por meio de uma dedução, é possível para ele dar forma a imagens, mesmo àquelas que não viu, em virtude de sua similaridade àquelas que já viu. (Descartes, 1985, Régua 14)

Assim, nós sabemos algo por uma percepção direta ou por meio de comparação.

Isso mostra também que sabemos a verdade em todo o raciocínio dedutivo apenas pela comparação. Assim começa a explanação da Régua 14. O leitor deve perceber, Descartes continua, "que cada conhecimento que não é obtido pela intuição simples e pura de uma coisa única e solitária" é um resultado de uma "comparação entre duas ou mais coisas". Essa comparação deve ser construída se não for simples e direta.

> A razão que explicar porque uma preparação é requerida para outras sortes da comparação é simplesmente que a natureza comum em questão não é igualmente presente em ambos, mas somente por outras relações ou proporções que a implicam. A parte principal de esforço humano é simplesmente para reduzir esta proporção para o ponto em qual igualdade entre o que estamos procurando e o que sabemos já é claramente visível. (Descartes, 1985, a.a.O.)

O processo de saber pode chegar num fim apropriado somente se há verdades auto-evidenciando fenômenos que revelam seus significados simplesmente em termos deles mesmos. O que percebemos, e o que podemos consequentemente imaginar, são sempre apenas as relações, que devem ser concebidas como partes de seqüências do raciocínio figurativo, por um lado, ou fatos simples, por outro.

A Análise era revolucionária, e era a maior realização de Descartes, pois foi Análise que o motivou para ampliar a classe dos meios construtivos e para generalizar a noção da própria construtibilidade, assim tornando-se capaz de resolver os problemas que os gregos não poderiam resolver por meio da régua e compasso sozinho. O "x" famoso da Álgebra transforma o ainda desconhecido em um objeto de atividade. A Matemática cartesiana prossegue do desconhecido como se soube, a seus antecedentes possíveis até chegar em afirmações que reconhecemos serem verdadeiros, provados ou conhecidos. Mas isso é feito pelo cálculo e pela construção, e não pela mera análise, os meios dessa construção sendo as condições ou relações que o desconhecido tem que encontrar. De acordo com Viète ou Descartes, "Análise" não era nada mais que a primeira parte de um método para resolver problemas geométricos; esses problemas foram traduzidos em termos das equações algébricas, nas quais as "quantidades conhecidas ou desconhecidas" ocorrem; as soluções de tais equações forneceram uma expressão algébrica de "quantidades desconhecidas" em termos de quantidades conhecidas. Tal expressão teve que ser interpretada como uma relação geométrica permitindo, na segunda parte do método, a "síntese", para construir as entidades desconhecidas começando com os dados.

Assim, por exemplo, o problema chamado o problema de Delian, a duplicação do cubo (ao preservar a forma do cubo) exigido por Apollo no oráculo – um problema central da construção da geometria grega – não pode ser resolvido com régua e compasso sozinho, mas aparece como um problema com resolução em Descartes porque, agora, no contraste com a antigüidade, as seções cônicas são aceitas como meios legítimos da construção (cf. Figuras 10 e 11).

Era óbvio a Descartes, assim como tinha sido óbvio para os gregos, que o que deve ser construído, o lado do cubo, existe realmente. Era esse ponto que provocou o ímpeto que conduziu a uma amplificação do conceito de construção. Se olharmos o diagrama da Figura 9 – fornecida por Hippocrates de Chios e usada na Antiguidade para analisar o problema de Delian – percebemos imediatamente como Descartes chegou a sua proporcionalidade-compasso (Figura 9) e também como o princípio da continuidade é essencial para a construção desse diagrama, que pretende encontrar o ponto essencial D. Os matemáticos gregos baniram da prova qualquer referência ao movimento. Uma demonstração que envolveu um ponto em movimento e, assim, uma referência ao princípio da continuidade, foi considerada defeituosa e o problema de Delian, conhecido por ter resolução usando tais meios, foi classificado como sem solução. Descartes considerou esse problema resolvido porque admitiu novos meios de construção e se orientou para problemas novos, e não porque tinha redefinido a noção da prova. Descartes preocupou-se com problemas e construções, mais que com teorias e provas.

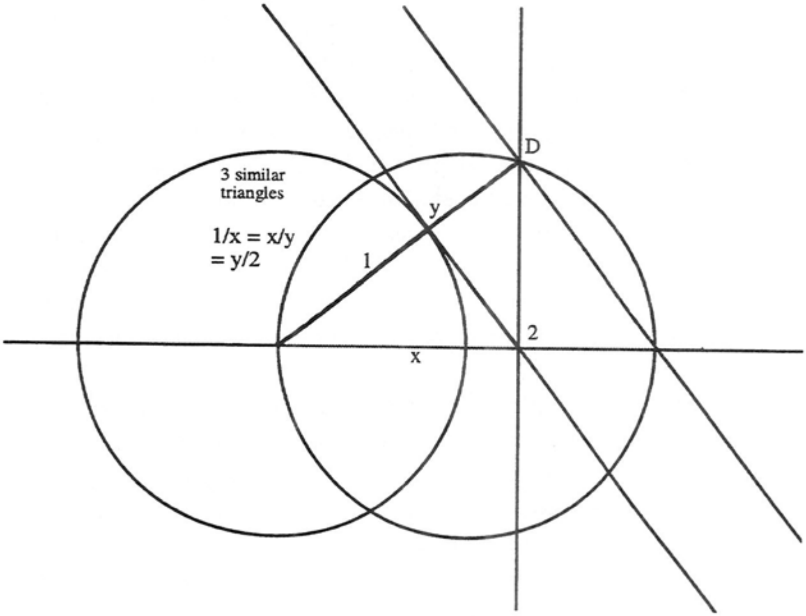


Figura 9

Uma conjetura que tem sido proposta é que Descartes "duvidou da existência de uma curva que corresponde a uma equação a menos que poderia fornecer uma construção cinemática para ela" (Boyer, 1988, p. 88). A construção, entretanto, fornece provas da existência somente na medida em que é percebida encaixada no espaço.

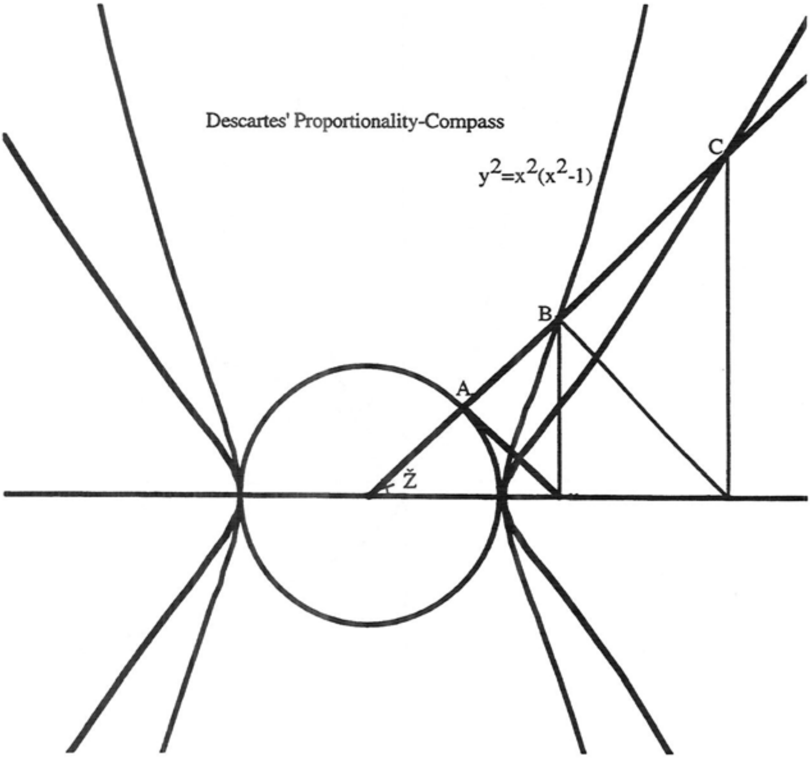


Figura 10

Em sua periodização secular da história matemática, Pierre Boutroux enfoca, quando descreve o desenvolvimento matemático da Antiguidade até o século XVII, o conservadorismo dos matemáticos da idade clássica, em suas preocupações com método e meios da atividade matemática.

> Entre a concepção grega da Matemática e a concepção completamente diferente de sintético-algébricos havia uma similaridade notável. Ambos supõem algum tipo de harmonia preestabelecido entre o objetivo e o método da Ciência Matemática, entre os objetivos que esta ciência persegue e os procedimentos que permitem-na alcançar estes objetivos. (Boutroux, 1920, p. 193)

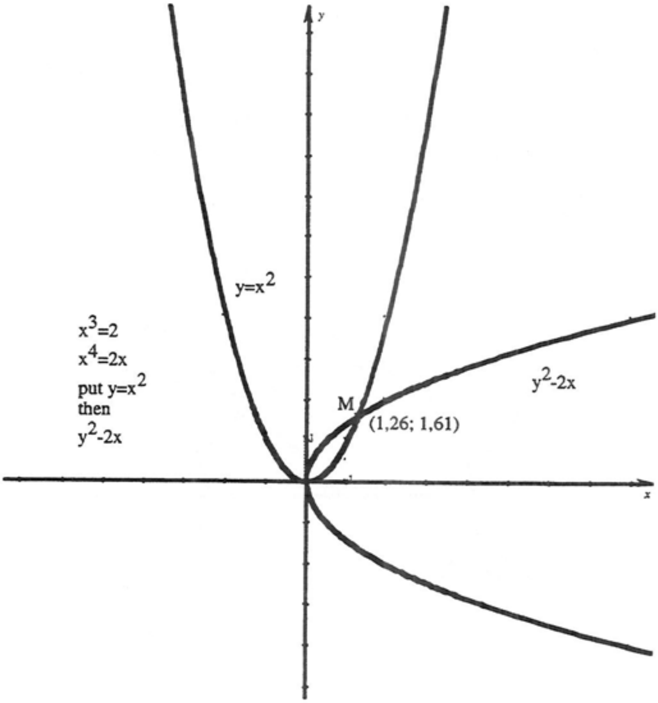


Figura 11

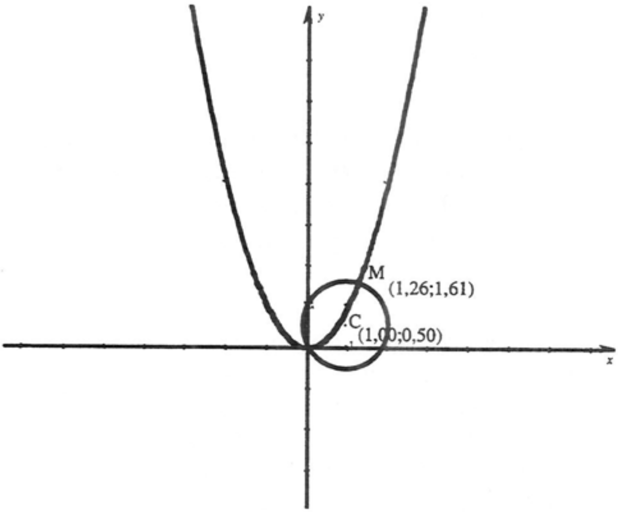


Figura 12

E Boutroux continua, "Descartes supõe que uma vez que os princípios da Geometria Analítica tinham sido estabelecidos, as conseqüências teriam que seguir naturalmente por meio da transformação e combinação algébrica" (ibid., p. 109), assim para a abordagem algébrica inteira os objetos considerados são meras composições ou compostos dos elementos,

> (...) contendo nem mais nem menos do que os elementos eles mesmos; por conseguinte, o objetivo que se persegue será determinado sempre pelos meios aplicados [...]
> Descartes, por exemplo, pede que nós ascendamos gradualmente, depois que estudamos algebricamente as curvas de segunda ordem (ou seções cônicas), para curvas sempre mais "complicadas" de uma ordem sempre mais elevada. O problema assim proposto de início era expressado em termos da composição algébrica [...] Descartes, em suma, tinha ficado satisfeito em esboçar um programa; mostrando uma trajetória para a Matemática; na seqüência, era suficiente seguir essa trajetória para chegar precisamente aos procedimentos do cálculo que se desenvolveram no fim do século XVII. (Ibid., p. 193, 111ss)

Mesmo hoje é possível reconhecer, sem muita reflexão, Boutroux continua,

> (...) que a dificuldade encontrada não era nova e era basicamente a mesma que tinham ocupado os geômetras gregos. O confronto das funções algébricas com as funções não-algébricas (funções transcendentes) levanta um problema comparável, em todos os aspectos, àquele proposto pela teoria de números irracionais. Como este último problema foi resolvido? Pelo uso dos métodos do cálculo aproximativo ou mais precisamente apelando à idéia da *aproximação arbitrariamente grande* ou da *convergência*. É esta idéia que serve como a base para o método da exaustão que encontramos nas escritas de Euclides ou de Aristóteles. (Ibid., p. 105)

Pierre Boutroux pensa que a concepção analítica da Matemática emerge não antes do século XIX, desde que este é o primeiro ponto onde a Matemática começa a se tornar puramente conceptual, parecendo não mais a ser confinada por seus meios.

Boutroux parece estar ao mesmo tempo certo e errado a respeito da concepção e papel histórico de Descartes. Parece estar errado em propor que a Matemática de Descartes é completamente sintética e confinada totalmente por seus meios da representação. No princípio, é verdadeiro, Descartes continuou a ver o problema da construção matemática dentro do quadro da Antiguidade. Corretamente falando, não estendeu este quadro quantitativamente. A concepção de Descartes sobre método e objetividade, entretanto, não foi inspirada tanto pelo procedimento dedutivo de Euclides, mas pelo exemplo da invenção e da descoberta na Geometria e nas Artes Mecânicas.

Diferentemente de Fermat, Descartes não considerou uma equação algébrica como uma definição adequada de uma curva, mas usou álgebra apenas como um meio para a classificação e ordenação de curvas porque Descartes não estava interessado em curvas como tais, como objetos da investigação, mas quis usá-las como meios de construção. Para construir essas curvas, empregou vários dispositivos mecânicos. Admitiria somente tais curvas que podem ser descritas "por um movimento regular e contínuo". Descartes desejou também sistematizar a Geometria num nível mais elevado, de modo que não devesse haver nenhuma limitação no grau ou na dimensionamento de um problema. Descartes, realmente, havia desejado conseguir algo que os gregos não tinham alcançado, isto é, introduzir uma perspectiva comum na totalidade do conhecimento matemático e criar a base para mais generalização por este sistematização.

Descartes usa a estrutura da Aritmética, e especialmente o fato de que "a Aritmética inteira contém apenas quatro tipos de cálculos", para classificar todos os problemas da Geometria e apresentá-los de forma consistente. Depois de ter explicado o paralelismo de construção Geométrica e a operação aritmética por meio de alguns diagramas, e depois ter enfatizado que "todos os problemas da Geometria ordinária podem ser construídos pela aplicação exclusiva do poucas coisas conteve nas figuras explicadas", ele prossegue criticar os "Antigos" para obviamente não ter percebido isto,

> (...) pois eles poderiam ter evitado esforços na escrita de muitos livros volumosos sobre isto, nos quais a ordem de seus teoremas mostra que eles não dominavam o método verdadeiro, o qual fornece todos estes teoremas, mas tinham escolhido meramente aqueles que tinham encontrado acidentalmente. (Descartes, *Geometria*, nossa tradução)

Neste papel, a Álgebra funcionou como uma lógica, uma idéia que Leibniz, e não Descartes, por causa de sua própria ênfase na prioridade da forma sobre o conteúdo concreto, iria desenvolver.

> Álgebra é especificamente uma questão de se livrar de algum conteúdo. Então, em virtude da descoberta de Descartes, a prova geométrica pode ser concebida como puramente formal. Leibniz pensou que Descartes tinha parado prematuramente, e não tinha visto um caminho para chegar numa característica universal que poderia ser considerada completamente geral. (Hacking, 1980)

Leibniz quis essa característica porque pensava que a verdade é constituída pela prova. Descartes não acreditou nisso. "Descartes quis boas maneiras para descobrir a verdade e era indiferente ao estatuto lógico de seus métodos" (ibid.). Mas Descartes decidiu seguir seu caminho para trazer a Análise, o método da descoberta, mais perto da síntese ou prova. Ele poderia ter feito isso simplesmente por "admitir na Geometria todas as curvas dadas por equações algébricas, mas ele preferiu uma base cinemática" (Boyer, 1988, p. 88).

Boutroux está completamente certo, entretanto, em sua afirmação de que Descartes, assim como Leibniz, não pensou conceitualmente e estruturalmente na Matemática, mas ficou confinado dentro dos limites do representacionalismo e do método sintético ou construtivo.

O que significa isso? Os geômetras do século XIX, como Poncelet, Grassmann, Möbius, Plücker, etc. queixaram-se muito sobre o caráter artificial de coordenadas cartesianas, e estabeleceram o objetivo "de calcular com as coisas elas mesmas". Quiseram operar sobre o conceito completo, isto é, com a forma ou a estrutura própria, como é representada por uma classe de diagramas equivalentes, e não apenas uma representação específica. Uma expressão formal, Grassmann diz, atinge um significado concreto "pela busca por todas as expressões que são iguais à expressão dada". Com esse procedimento,

> (...) começamos uma série de representações concretas dessa conexão formal e a classe que estas representações possíveis se relacionaram como uma unidade, como a espécie de um gênero (não como as partes de um todo), indicaria o conceito concreto a nossos olhos. (Grassmann, 1844, p. 108)

Um conceito matemático não existe independentemente da totalidade de suas representações possíveis, mas também não deve ser confundido com uma representação. Essa classe ou totalidade de representações possíveis, obviamente, não é uma classe determinada em absoluto, como sugerido uma concepção extencional ou conjunto-teórica da Matemática. Na Geometria, usa o princípio da continuidade como um tipo da orientação heurística. O Erlangen Programm, de Klein, representa uma outra maneira de definir essa classe. Por conta disso, operar sobre o conceito próprio na Geometria significa procurar aspectos que são invariantes sob determinadas transformações. Essa concepção estrutural de objeto matemático é expresso em novas formas de prova, como exemplificado acima na discussão do teorema sobre a reta de Euler, sendo um exemplo especial do teorema de Desargues e assim derivá-lo dos axiomas da Geometria Projetiva.

Conclusão

Os três estágios de desenvolvimento cognitivo propostos por Piaget – da consideração de objetos individuais à orientação para ações e transformações e finalmente às estruturas – parecem *grosso modo* correto. Piaget, entretanto, faz uma distinção muito radical entre agir e perceber e entre abstração empírica e abstração reflexiva. A razão pode ser encontrada exatamente no seu estruturalismo.

Piaget partiu das observações fundamentais de que operações sobre qualquer conjunto de objetos podem ser combinadas para formar estruturas numa maneira muito natural, embora os objetos, eles mesmos, parecem isolados completamente um do outro. Por exemplo, as transformações de qualquer conjunto de objetos para eles mesmos formam uma estrutura matemática do grupo. Assim, estruturas de ações, por exemplo, da estrutura de um grupo das transformações, são gerais, uma vez que as ações elas mesmas permanecerem individuais, entidades concretas. Essa "auto-organização" das ações em totalidades estruturadas, pelas quais são generalizadas, certamente não ocorre sem que se percebam os efeitos "empíricos" dessas ações. Pensar estruturalmente em termos de relações é impossível sem a percepção de efeitos muito concretos. Daqui a idéia de transformação concreta ou movimento concreto, como surgiu da Álgebra e desde Descartes foi introduzido gradualmente na Geometria, permanece essencial.

Piaget é certo em enfatizar a importância fundamental da noção da estrutura em nosso tempo. Nós não somente pensamos em termos estruturais, também percebemos e visualizamos estruturas, pintamos, compomos e escrevemos guiados por princípios estruturais. Mas Piaget negligencia a representação, a percepção e a língua, e esqueceu que a estrutura não vem despida, sem substância ou vestimentas. As estruturas, por si próprias são apenas os esqueletos que não podem nem evoluir nem se sustentar sozinho.

Referências

BETH, E. e PIAGET, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology.* Dordrecht, Reidel.

BOLZANO, B. (1975). *Einleitung zur Größenlehre und erste Begriffe der allgemeinen Größenlehre.* BERG, J. (ed.). Stuttgart/Bad Canstatt, Frommann-Holzboog.

BOUTROUX, P. (1920). *L'Ideal Scientifique des Mathématiciens*. Paris, Librairie Félix Alcan.

BOYER, C. (1988). *History of Analytic Geometry*. N. J., The Scholar's Bookshelf.

CASTONGUAY, C. (1972). *Meaning and Existence in Mathematics*. Wien, Springer Verlag.

CAUCHY, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris, Impr. Royale.

COXETER, H. e GREITZER, S. (1967). *Geometry revisited.* Princeton, The MAA New Math. Library (v. 19).

CURRY, H. B. (1970). *Outlines of a formalist Philosophy of Mathematics.* North-Holland Publishing Company Amsterdam.

DESCARTES, R. (1985). *The Philosophical Writings of Descartes*. J. Cottingham, R. Stoothoff, D. Murdoch (eds.). Cambridge University Press.

EULER, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum.* Berlin, Springer Verlag.

FREGE, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik*. Reprint 1961. Olms, Hildesheim.

GARBER, D. (1992). *Descartes' Metaphysical Physics*. Chicago, Univ. of Chicago Press.

GRASSMANN, H. (1844/1969). *Die lineare Ausdehnungslehre*. Leipzig, Wigand, Reprint New York, Chelsea Publ. Comp.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1970). *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Mass., MIT Press.

HACKING I. (1980). *Leibniz and Descartes: Proof and Eternal Truths in: Descartes' Philosophy, Mathematics and Physics*, Stephen Gaukroger (ed.). Brighton, Sussex, The Harvester Press.

HINTIKKA (1992). "Kant On the Mathematical Method". In: POSY, C. J. *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*. Dordrecht, Kluwer, Synthese Library.

HUME, D. (1777). *Enquiries Concerning Human Understanding* Oxford, Ed. L. A. Selby-Bigge.

KLINE, M. (1985). *Mathematics and the Search for Knowledge*. Oxford University Press.

LACHTERMAN, D. R. (1989). *The Ethics of Geometry: A Genealogy of Modernity*. New York, Routledge.

METZINGER, T. (ed.) (2000). *Neural Correlates of Consciousness*. Cambridge, Mass., The MIT Press.

MUELLER, I. (1969). Euclid's Elements and the Axiomatic Method. *Brit. J. Phil. Sci.*, n. 20, pp. 289-309.

PIATTELLI-PALMARINI, M. (1980) (ed.). *Language and Learning – The Debate between Piaget and Chomsky*. Cambridge, Mass., Harvard University Press.

PIAGET, J. (1970). Structuralism. London, Routledge.

_____ (1972). "The Concept of Structure". In: *Unesco, Scientific Thought, Mouton Humanities Press*. The Hague.

_____ (1977). *Recherches sur L'abstraction Réfléchissante*. Paris, Presses Universitaires de France.

PIAGET, J. e GARCIA R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York, Columbia Univ. Press.

PEIRCE, C. S. (1931-1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce I-VIII*. C. Hartshorne, P. Weis and Vurgs (eds.). Camb. MASS Harvard University Press.

PUTNAM, H. (1975). "Mathematics without Foundations". In: *Mathematics, Matter and Method*. Cambridge, Mass., University Press.

ROTMAN, B. (1977). *Jean Piaget, Psychologist of the Real*. Hassocks Harvester Press,

RUSSELL, B. (1997). *The Problems of Philosophy*. Oxford

SCHLICK, M. (1979). *Allgemeine Erkenntnislehre*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt/M.

ULAM, S. (1969). "The applicability of Mathematics". In: *The Mathematical Sciences*. MIT Press (Cosrims Report).

Recebido em out./2002; aprovado em nov./2002

Notion de transformation géométrique en classe de seconde avec Cabri-Géomètre et la TI-92*

ANA PAULA JAHN**
PHILIPPE CLAROU***

Résumé

Cet article est consacré à la présentation d'un travail de recherche mené en interaction avec le développement de scénarios d'enseignement. En premier lieu, nous présentons la problématique autour de la notion de transformation géométrique dans laquelle s'insere la recherche de A. P. JAHN[1]. Les points développés dans cette partie se centrent sur l'analyse de l'objet transformation du point de vue de l'enseignement actuel en France et nous conduisent à l'explicitation de nos choix didactiques pour la conception d'une séquence d'enseignement où l'environnement informatique Cabri-géomètre s'avère être un outil adapté. Cette séquence a été utilisée dans un projet de scénarios en classe de Seconde visant l'intégration de la calculatrice TI-92 dans l'enseignement de mathématiques. Les moyens utilisés pour cette intégration ainsi que les résultats de l'expérimentation en classe seront présentés en deuxieme lieu.

Mots-clé: *transformations géométriques; géométrie dynamique; scénarios.*

Resumo

Este artigo dedica-se à apresentação de um trabalho de pesquisa em interação com o desenvolvimento de cenários de ensino. Em primeiro lugar, é apresentada a problemática relativa à noção de transformação geométrica na qual se insere a pesquisa de A. P. Jahn. Os pontos desenvolvidos nesta parte centram-se na análise do objeto transformação do ponto de vista do ensino atual na França e conduzem à explicitação de nossas escolhas didáticas para a concepção de uma seqüência de ensino em que o ambiente Cabri-Géomètre se mostra como uma ferramenta eficaz. Esta seqüência foi utilizada em um projeto de cenários com uma classe de 2º grau (1ª série do Ensino Médio, 15-16 anos) visando a integração da calculadora TI-92 no ensino de Matemática. Os meios e estratégias utilizados para esta

---

* Article présenté et publié dans les Actes du Colloque Francophone Européen "Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques", la Grande-Motte, 14-16 mai 1998, IREM de Montpellier.

** PUC-SP. E-mail: jahn@pucsp.br

*** Laboratoire Leibniz/Université Joseph Fourier. E-mail: philippe.clarou@imag.fr

1 Thèse préparée au sein de l'équipe EIAH du laboratoire Leibniz-IMAG, dans le cadre d'une coopération franco-brésilienne CAPES-COFECUB et soutenue en octobre/98.

integração, bem como os resultados da experimentção da seqüência em classe, são apresentados em segundo lugar.
Palavras-chave: transformações geométricas; geometria dinâmica; cenários.

Abstract

This article presents a research study in interaction with the development of teaching scenarios. Firstly, we present the discussions involving the notion of geometrical transformation, in which A.P. Jahn's research is inserted. The points developed in this part focus on the analysis of the object transformation from the standpoint of the current teaching in France, and leads to the explanation of our didactic choices for the conception of a teaching sequence in which the Cabri-géomètre environment proves to be an efficient tool. This sequence was used in a project of scenarios with a class of 15/16-year-old students, with the aim of integrating the TI-92 calculator in Mathematics teaching. Secondly, the means and strategies used to achieve this integration, as well as the results deriving from applying the sequence in the classroom are presented.
Key-words: *geometrical transformations; dynamic geometry; scenarios.*

Les transformations géométriques du collège au lycée: transformation de figures – transformation ponctuelle du plan

Regard sur les programmes actuels en France

La notion de transformation géométrique occupe une place importante dans l'enseignement des mathématiques en France. Elle est abordée au collège en tant que transformation qui opère sur des figures mais elle est introduite, sinon utilisée au lycée en tant qu'application ponctuelle, notion difficile à conceptualiser chez les élèves comme l'ont souligné plusieurs recherches.

Tout au long du collège, les textes officiels de programmes explicitent les liens envisagés entre transformations et figures. Les transformations sont essentiellement présentées comme étant des opérations sur des figures: une transformation agit globalement sur l'ensemble d'une configuration ou sur une figure partielle extraite.

Les transformations étudiées au collège sont des isométries: les symétries orthogonale et centrale, la translation et la rotation. Nous pouvons résumer les objectifs de cet enseignement en trois points :

1) faire agir les transformations sur les figures (construire les images de figures simples);

2) dégager les propriétés de conservation de l'alignement, du parallélisme, des angles, des distances, des aires;

3) reconnaître les éléments de symétrie de figures géométriques.

Nous pouvons souligner que les programmes actuels mentionnent explicitement que : *"...Ces transfonnations ne doivent pas être présentées comme une application du plan sur lui-même. Suivant le cas, elles apparaîtront dans leurs actions sur des figures, ou comme laissant invariant une figure*[2]*"* (programme de 4ème, éd. 1992).

En classe de Seconde (15-16 ans), un nouvel objectif s'ajoute aux précédents: *"dans l'esprit des programmes de collège, on fera d'abord agir les transformations sur des figures, puis on dégagera l'idée essentielle qu'une transformation associe à tout point du plan un point du plan bien déterminé"* (Programme de 2nde, éd. 1992). Nous voyons ici une étude des transformations toujours liée à la géométrie de figures, mais le point de vue considéré n'est pas tout à fait le même: les transformations sont considérées plutôt sous leur aspect ponctuel.

Nous pouvons caractériser ainsi un changement dans la transition collège-lycée: on passe d'une transformation qui opère sur des figures (simple relation entre deux configurations) à une application du plan sur lui-même (objet fonctionnel) qui opère sur des points et qui va opérer sur les figures comme parties du plan constituées de points. Ce passage n'est pas naturel, bien au contraire, il marque une première rupture car ces deux aspects mettent en jeu des conceptions différentes du plan: d'une part, le plan est conçu comme un espace contenant des figures (points, droites, triangles, cercles,...), un "lieu de figures", un support neutre sur lequel la transformation n'agit pas, ses effets étant limités aux objets géométriques eux-mêmes, et d'autre part, le plan est un ensemble de points et les figures géométriques sont alors considérées non comme des entités particulières mais comme des sous-ensembles de points du plan. Cette *"idée essentielle"* soulignée dans les programmes de 2nde suppose une conception homogène du plan, absente au niveau du collège. La notion d'application ponctuelle prend donc pour hypothèse implicite qu'une figure est un ensemble de points et cette caractérisation ponctuelle pose des difficultés aux élèves habitués à une pratique de "figures" considérées comme des objets, pris dans leur globalité (forme, dimension, position) et composés d'éléments tels que points, segments, lignes... Pour illustrer cette difficulté nous renvoyons à l'une des conclusions de l'étude de Grenier

2 Cet interdit correspond aux changements notables intervenus en 1985 et s'oppose donc à la conception des programmes précédents ou les transformations étaient considérées, dès leur introduction, comme des applications de l'ensemble de tous les points du plan dans lui-même.

(1988) sur la symétrie orthogonale qui souligne que: "*de nombreux élèves savaient bien construire l'image d'un point par une symétrie orthogonale, mais ne savaient pas mettre en oeuvre cette même procédure dans la construction du symétrique d'une figure, parce qu'ils n'analysent pas la figure en termes de points*". Notre intérêt porte particulièrement sur cette question, comme nous le précisons par la suite.

Du côté des manuels

Nous pouvons constater que les manuels de Seconde (15-16 ans) sont assez attentifs aux consignes du programme. Ils mettent en place la même démarche qu'au collège: on passe des *figures aux points* et le fait que la transformation agisse sur des points "autorise" une définition ponctuelle, accompagnée du vocabulaire et de la notation fonctionnelle. Malgré cette définition ponctuelle, les transformations vont continuer d'agir sur des figures ou sur des parties de figures de façon globale car elles sont toujours caractérisées par des propriétés de conservation, énoncées sous la forme de théorèmes, pour la plupart admis, évitant ainsi l'aspect ponctuel. En réalité, ces propriétés invariantes déterminent la nature de l'image d'une figure qui est ainsi repérée par certains de ses points tel que l'explicite ce "*point méthode*" extrait d'un manuel de Seconde.

POINT METHODE

- Les **propriétés de conservation** sont déterminantes dans la construction de figures-images: connaître la nature de l'image et ses éléments géométriques permet de ramener sa construction à celle d'un *petit nombre de points*.
- Concernant les deux pièces de base de la géométrie, droite et cercle, nou avons:
- **Image d'une droite** D

Les images de *deux* points de D suffisent toujours pour construire la droite image D'. *Un seul point peut suffire* si l'on sait à l'avance que, par exemple, D' // D (symétrie centrale, translation) ou encore D' $\perp$ D (quart de tour)...

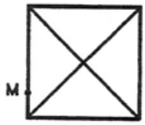
- **Image d'un cercle** C

Construire *l'image du centre*: ce sera le centre du cercle image C'; ensuite, on peut utiliser le fait que C et C' ont le même rayon ou construire l'image d'un point de C (cette procédure est souvent la mieux adaptée).

Point méthode, Terracher 2de (1995, p. 334)

Dans la plupart des exercices proposés aux élèves, soit de constructions ou tracés soit de démonstrations, on se limite aux images de quelques points particuliers vus eux-mêmes en tant qu'objets géométriques, autrement dit vus comme la figure la plus simple ou la figure minimale. Il apparaît ainsi un "jeu" entre les aspects global et semi-ponctuel[3] où la décomposition d'une figure en un ensemble de points ainsi que la mise en évidence de son image comme l'ensemble de points images ne s'avèrent pas nécessaires. Même dans les cas, peu nombreux, où la définition ponctuelle de l'image d'une figure est à l'origine de la solution du problème, les élèves ne peuvent la mettre en oeuvre du fait de son absence et de son utilisation très implicite dans les manuels. Un exemple est présenté ci-dessous.

"Le carré ABCD de centre O est en sens direct. Soit M un point du segment [AD] et N son image par le quart de tour de sens direct et de centre O.
1) Montrer que N appartient au segment [AB]."



Exercice 14, Terracher 2de (1995, p. 344)

Dans cet exercice, outre les points particuliers (sommets du carré), on considère un point quelconque M du segment [AD]. La solution attendue, selon le "livre du professeur", suppose d'abord la correspondance des segments [DA] et [AB] par la rotation donnée. Il s'agit ensuite de façon immédiate de conclure que l'image N de M appartient au segment-image [AB]. Ce dernier point apparaît comme allant de soi, il ne fait pas l'objet d'une justification, ni d'un point méthode au sein du cours.

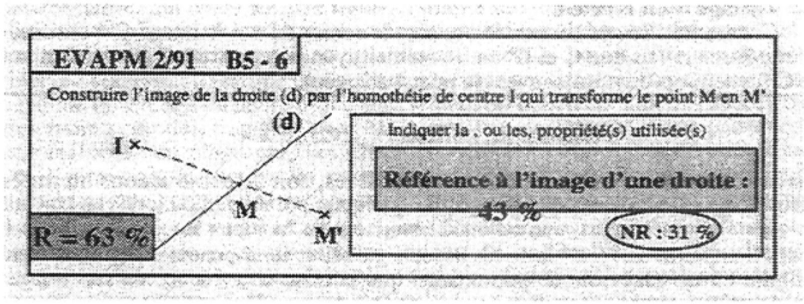
Il en est de même quant à l'utilisation des transformations dans les problèmes de lieux géométriques. En effet, dans les manuels, ce type de problème ne contribue pas au développement de l'aspect ponctuel et fonctionnel de la transformation en jeu car la recherche d'un lieu est limitée à reconnaître une transformation en raisonnant sur un seul couple, un point et son image. Ensuite, le lieu cherché n'est autre que l'image globale de la figure-objet par la transformation identifiée. En outre, si un problème de lieu évoque une transformation usuelle, le recours à la

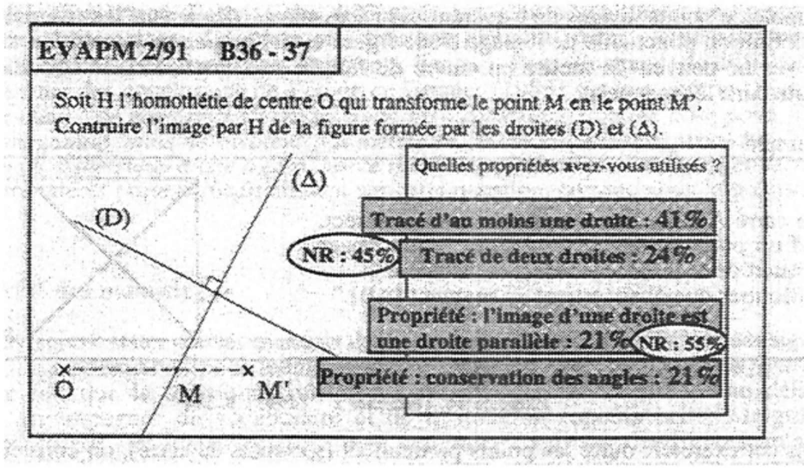
3 D'après Gallou (1987), on appelle ainsi une procédure globale qui consiste à se représenter et à tracer l'image d'une figure à partir de points particuliers: les sommets dans le cas d'un polygone, deux points pour un segment, le cercle repéré par son centre et un point...

construction des images de plusieurs points afin de conjecturer le lieu et l'étude de la réciproque s'avèrent inutiles, on consolide ainsi la conception globale de la transformation en jeu.

Quelques indicateurs d`obstacles au passage à la conception ponctuelle

En ce qui concerne les acquis des élèves, les évaluations EVAPM (1991) fournissent quelques éléments qui renforcent la pertinence de nos remarques précédentes quant aux difficultés liées à l'appréhension ponctuelle d'une transformation. L'EVAPM en fin de Seconde affirme que "*aspect ponctuel n'est pas maîtrisé par les élèves*" (p. 39). Cette affirmation est issue de la comparaison des réponses à deux questions sur l'homothétie reproduites ci-dessous.





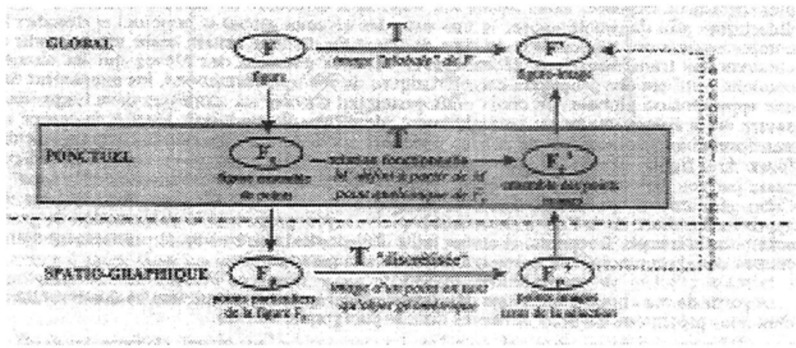
En effet, l'écart entre les taux de réussite (de 63% à 24%) est significatif surtout s'agissant d'un même type de tâche: construire l'image d'une droite par une homothétie. En ce qui concerne la première question (B5-6), il est important de souligner que pour la résoudre, les élèves n'ont pas besoin d'avoir recours à une conception ponctuelle de la transformation. Au contraire, la reconnaissance de la propriété que par une homothétie "*l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle*" au niveau global, ramène de façon efficace et économique, la solution au tracé d'une droite parallèle à une droite donnée. Cela ne pose guère de problème en classe de 2nde et les commentaires des auteurs soulignent d'ailleurs que les élèves sont nombreux à donner des explications parfaites en évoquant le parallélisme et en effectuant un tracé convenable.

De façon analogue, ce "traceur de parallèles" peut être utilisé pour construire l'image de la droite (D) dans la question E36-39, mais pas directement pour la deuxième droite (D). Dans ce cas, une autre propriété intervient, la conservation de l'angle droit, et il faut au préalable trouver l'image d'un point (le sommet de l'angle). Nous y voyons deux difficultés: premièrement la considération d'un point quelconque ne résout pas le problème car le rapport r d'homothétie n'est pas donné, il faut donc repérer ce point particulier, non désigné, qu'est l'intersection de deux droites. Deuxièmement, il faut considérer que l'image de ce point d'intersection appartient à l'intersection des figures-images des droites (D) et (D); c'est ainsi que la conception de la transformation comme opérateur fonctionnel défini sur l'ensemble des points du plan induit la réponse.

La cohabitation des aspects global et ponctuel et les difficultés que cela implique sont également abordées dans l'EVAPM-Première. La question E36-39 est reprise à ce niveau et montre une légère amélioration des performances des élèves (36% de réussite). En revanche, les auteurs insistent sur le fait que la plupart des élèves tracent correctement seulement une des deux droites en mettant en évidence *"la difficulté dans l'utilisation conjointe de l'aspect global (l'image d'une droite est une droite) et de l'aspect ponctuel (l'image d'un point défini comme intersection de droites)"* (EVAPM-Première, 1993, p. 64).

Présentation synthétique de la problématique

Nous pouvons résumer les analyses précédentes par le schéma suivant:



Ce schéma nous permet de mieux cerner le rôle et le fonctionnement des transformations géométriques dans l'enseignement. En effet, comme nous l'avons mentionné, l'étude des transformations s'articule à celle de figures particulières. Les relations entre figures et transformations s'établissent d'une part par les propriétés ou théoremes (GLOBAL) et d'autre part, par l'utilisation d'éléments particuliers dans des constructions ou tracés (SPATIO-GRAPHIQUE). Dans ces deux niveaux, les transformations sont réduites à leurs effets sur quelques points ou éléments d'une figure ce qui permet de contourner leur appréhension ponctuelle (PONCTUEL). Dans la pratique, l'appréhension ponctuelle indispensable à la compréhension en profondeur de la notion de transformation est occultée par le recours à cette réduction des figures en leurs éléments particuliers, la détermination des images s'appuyant sur les théoremes d'invariance.

Ainsi cette problématique se centre autour de deux pôles. Le premier concerne le passage de la notion de figure prise globalement comme objet géométrique, à la notion de figure en tant qu'ensemble de points (F –Fe). Remarquons que ces deux conceptions conduisent à donner différents statuts aux points et aux autres objets géométriques relevant d'un processus cognitif complèxe qui ne peut être laissé complètement à la charge des élèves.

Le second pôle s'attache à une conceptualisation dans un cadre fonctionnel où la notion de point variable est primordiale. Il s'agit alors de caractériser l'image d'une figure comme ensemble des points images par une application du plan sur lui-même, introduisant ainsi une définition ponctuelle de la figure-image.

Nous considérons que le concept de transformation ponctuelle peut se nourrir de l'appréhension progressive du concept de fonction et des éléments de ce champ conceptuel (vocabulaire, bijectivité, transformation réciproque, transformations composées, symbolisme. ..) et en retour participer à la conceptua lisation de l'objet fonction.

Notre objectif général est la conception et la réalisation d'un processus d'enseignement en utilisant Cabri-géomètre qui vise à faire évoluer les conceptions des élèves vers la notion d'application ponctuelle. Les activités qui suivent ont pour but de déterminer les conditions qui favorisent l'installation de l'aspect dual global/ponctuel des transformations géométriques.

Des expérimentations: les élèves face à des nouvelles situations

Présentation des activités introductives aux transformations

Dans la conception de nos activités, en fonction de la problématique de recherche précédemment exposée, nous avons été amenés à effectuer un certain nombre de choix didactiques afin de problématiser le lien entre les niveaux global et ponctuel et d'étudier les comportements des élèves dans ce type de situation. Il nous fallait, entre autres, sortir du contexte des transformations géométriques usuelles connues des élèves qui les auraient conduits à utiliser des propriétés caractéristiques de ces transformations, les maintenant dans une appréhension globale. Ce choix nous permettait d'éviter les stratégies dans lesquelles la nature de la figure-image est préalablement identifiée. Il conduisait ainsi à envisager une transformation non-isométrique définie ponctuellement ne conservant pas nécessairement la forme de la figure. Nous voulions de plus que la construction effective de l'image d'une figure passe par son appréhension ponctuelle, ce qui était rendu possible grâce à l'outil "Lieu" de Cabri-géometre II, particulièrement bien adapté au cadre fonctionnel. Pour réaliser une approche similaire dans l'environnement papier-crayon proposant la construction de grands ensembles d'images de points, il aurait fallu utiliser des instruments au maniement délicat comme des systèmes articulés, des symétriseurs, des pantographes...

A partir de ces choix, nous avons développé une progression au travers de quatre situations dont nous présentons les deux dernières dans le paragraphe suivant.

Ce processus d'enseignement a été réalisé en Seconde avec des classes travaillant dans des salles équipées d'ordinateurs avec le logiciel Cabri-géomètre II et disposant en classe et à la maison d'une calculatrice TI-92. C'est à ce niveau que le travail de recherche décrit précédemment rejoint le projet "*Scénarios*" centré sur l'utilisation de la TI-92.

Approche d'une transformation comme boîte noire

L'environnement Cabri-géomètre permet de présenter une transformation seulement par ses effets sur différents objets du plan comme le ferait une boîte noire dont on ignore le principe de fonctionnement. Il s'agit d'une construction dans laquelle les relations entre les objets ne sont pas explicitées à l'utilisateur qui doit, au contraire, les découvrir. Le problème qui se pose est donc l'étude des invariants et du comportement de la boîte noire. Les effets des déplacements des objets de base ainsi que d'autres outils fournis par Cabri (mesure, vérification de propriétés,...) permettent de faire des conjectures sur les propriétés géométriques et par là de construire une suite d'opérations permettant de reconstituer cette boîte noire.

Dans Cabri-géomètre II et dans l'application Cabri-géomètre de la TI-92, les outils de transformation sont : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie et inversion. Ces outils permettent de construire l'image des objets tels que point, droite, demi-droite, polygone, vecteur, cercle, coniques, arc de cercle[4] ; on désigne[5] d'abord l'objet à transformer puis l'élément qui définit la transformation (une droite pour la symétrie axiale, un point comme centre dans le cas de la symétrie centrale,...). On obtient ainsi directement l'image de l'objet désigné, le logiciel ne donne aucune indication sur le mode de construction de cette image, seul l'objet image apparaît sans aucune autre trace de construction ni étape intermédiaire et c'est en cela que la transformation peut apparaître comme une boîte noire. Ces opérateurs permettent donc d'approcher les transformations plutôt de façon globale. Toutefois, il est

4 A l'exception toutefois de l'inversion qui ne donne que rimage d'un point.

5 Au sens de sélectionner à l'aide du curseur .

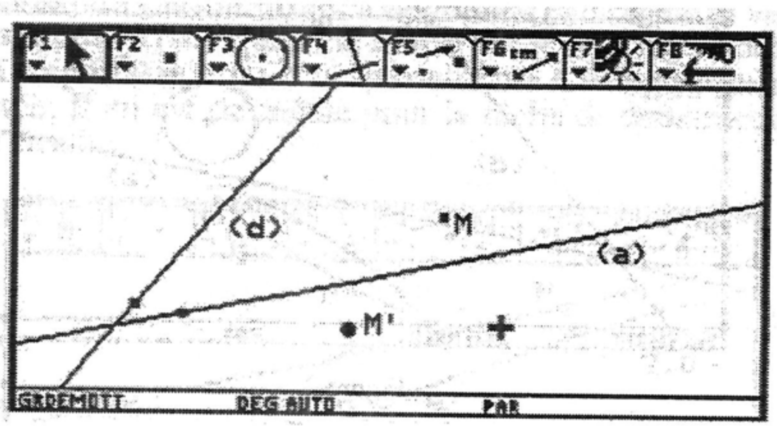


Figure 1

possible de définir d'autres transformations sous la forme de boîte noire en abordant l'aspect ponctuel en premier, c'est-à-dire en étudiant la procédure de construction de l'image d'un point et en la définissant ponctuellement. C'est ainsi que nous avons mis au point une boîte noire *TransformationX* dissimulant une symétrie oblique de direction et d'axe donnés. Dans cette activité, l'élève dispose donc d'un outil "TransformationX" qui permet d'obtenir l'Image d'un point à partir de deux droites: en désignant successivement le point M, la droite (d) et la droite (a), on obtient le point M' (Figure 1). Lorsqu'on déplace le point M ou l'une des droites, la position du point M' se modifie et on peut observer que (MM') reste toujours parallèle à (d) et que le point d'intersection I de (MM') et de (a) est aussi le milieu de [MM'].

Après avoir appliqué la TransformationX à un point quelconque P, le travail de l'élève consiste à jouer dans un premier temps sur le déplacement des éléments de base (contrôle perceptit) afin de caractériser ensuite les propriétés géométriques de la boîte noire et de retrouver une méthode de construction équivalente.

De façon générale, les élèves[6] sont arrivés à la solution, les deux propriétés, parallélisme et équidistance, ayant été identifiées. La plupart

6 Les résultats présentés dans cet article correspondent à 10 binômes observés.

des élèves ont vérifié leurs conjectures au moyen de tracés: la droite (PP'), des segments, le symétrique de P... Nous avons pu relever dans les fiches des élèves certaines confusions dans l'explicitation des outils utilisés, autrement dit les formulations ne s'avèrent pas conformes aux actions effectuées. Par exemple, les élèves qui ont utilisé cercle ou symétrie centrale lors de la construction, présentent de réponses faisant référence à l'équidistance par rapport à la droite (a) ou à une symétrie orthogonale.

Certains élèves n'ont pas cherché à vérifier leur construction en utilisant la *TransformationX* sur le point Q. La validation s'est limitée au déplacement des objets de base et à l'observation de ses effets, c'est-à-dire que la résistance au déplacement semblait être une règle de contrat déjà installée dans le travail avec Cabri-géomètre.

L''image d'un cercle par la TransformationX

Nous avons vu que les transformations figurant dans les programmes de collège sont des isométries, complétées ensuite au lycée par l'homothétie et la similitude. Elles conservent toutes l' alignement et les angles, donc les formes. Pour les élèves, ces propriétés vont de soi, elles ne s'imposent pas comme permettant de distinguer les différentes transformations. Elles offrent en revanche, la possibilité de déterminer la nature de l'image d'une figure en privilégiant son aspect global (l'image d'une droite est une droite,...) et sont indispensables dans l'environnement

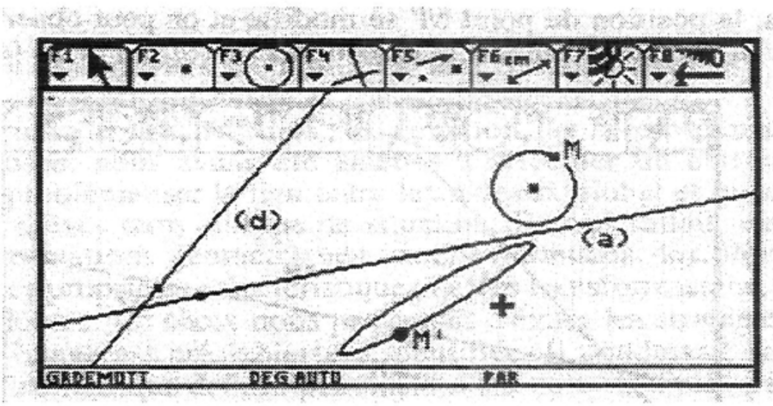


Figure 2

papier/crayon pour obtenir concrètement ces images. Ce n'est pas le cas de *TransformationX* dont les propriétés sont inconnues des élèves. Nous avons donc proposé, suite à l'activité boîte noire *TransformationX*, de rechercher comment à partir de l'image d'un point, on pouvait obtenir l'image d'un cercle par symétrie oblique (on passe des points aux figures). Une telle tâche se situe au niveau ponctuel car il est à noter que la boîte noire "TransformationX" n'opere que sur les points et qu'on s'intéresse à *"la figure formée par l'ensemble de points images de points du cercle"*[7]. Les stratégies attendues consistent à réinvestir l'outil "Lieu", conçu comme l'ensemble des points obtenus comme images d'un autre ensemble de points par la TransformationX (Figure 2): les élèves avaient déjà rencontré cette conception du lieu dans d'autres activités préparatoires.

Une majorité d'élèves a eu des difficultés pour se placer dans le cadre ponctuel proposé. Ces élèves cherchaient à trouver le moyen de tracer l'image du cercle à l'aide des outils de Cabri-géomètre plutôt qu'à prédire ce que pouvait être l'image d'un cercle. Alors que nous voulions problématiser la notion d'image d'une figure à partir de l'ensemble des images de ses points, les élèves ont préféré utiliser l'outil "Trace" de Cabri pour obtenir la nature de l'image et en particulier sa forme. Même si la plupart des réponses évoquaient l'outil "Lieu" (et "Trace"), nous pensons que ces références proviennent davantage d'un effet de contrat que d'une réelle compréhension de la situation de transformation ponctuelle. Les difficultés d'utilisation de l'outil "Lieu" montrent effectivement que les élèves n'avaient pas une interprétation cohérente de ce qui apparaissait à l'écran. Cependant, quelques binômes (3 sur 10 observés) sont arrivés à bien interpréter et à formuler correctement leurs résultats.

Une transformation qui transforme...

Pour renforcer ce changement de point de vue, dans l'activité suivante, nous avons présenté une transformation ne conservant pas l'alignement dans le but de remettre en cause des stratégies "isométriques" de base (cf. p. 100). Cette tâche nous permet de préciser les difficultés des élèves à concevoir la droite comme un ensemble de points et également son image comme l'ensemble des points images. Nous introduisons une transformation appelée "TrOk", définie ponctuel1ement: *étant donnés un*

7 Formulation extraite de la fiche de l'élève.

point O et un nombre k (représentant une distance), à tout point M *on fait correspondre le point M' de la demi-droite {MO) tel que MM' = k.* A partir de cette définition, les élèves doivent d'abord construire l'image d'un point quelconque M. La méthode de construction est conservée (ou mise en mémoire dans le système) et devient un outil rajouté aux menus de Cabri (une macro-construction): l'éleve dispose ainsi d'un opérateur qui fournit l'image d'un point étant donnés un point O et un nombre k[8]. Ensuite, les élèves ont à traiter la question de l'image d'une droite (d) par cette transfonnation TrOk et plus précisément, ils doivent la construire. Deux stratégies sont envisagées: 1) *"l'image d'une droite par TrOk est une droite"* et il suffit de construire l'image de deux points de la droite; 2) *"l'image d'une droite est l'ensemble des points images des points de la droite"* et en utilisant les outils "Lieu" ou "Trace" de Cabri on peut avoir une représentation de la figure-image à l'écran.

Comme nous l'avons prévu, la stratégie (1) a été privilégiée par les élèves: à l'exception d'un seul binôme, tous les élèves ont construit l'image de deux points de la droite et ensuite la droite passant par ces deux points images en concluant que cette droite est l'image de la droite(d) donnée. Cependant, 6 binômes sur 9 ont spontanément cherché à valider cette réponse, c'est-à-dire, dans un deuxième temps, ils ont remis en cause leur méthode en se posant la question: *"est-ce que deux points suffisent?"*. Ainsi, 2 binômes ont immédiatement utilisé l'outil Trace, comme ils l'avaient fait pour le cas de l'image du cercle par la TransfonnationX. Les 4 autres binômes ont pris un autre point sur la droite (d) (voire plusieurs) et ont construit son image par la transformation TrOk afin de vérifier si ce point image appartenait à la droite image. Outre cela, le déplacement de ce troisième point et l'observation du comportement de son image a également participé à la va1idation. Au niveau de la construction, c'est l'outil Trace qui a été utilisé par les élèves, l'outil Lieu n'intervenant qu'après l'intervention du professeur ou sous la contrainte d'enregistrement des figures, ou la trace n'est pas conservée. Il en est de même pour la tâche de construction de l'image d'un cercle par TrOk traitée ensuite.

8 La valeur initiale du nombre k était 5.

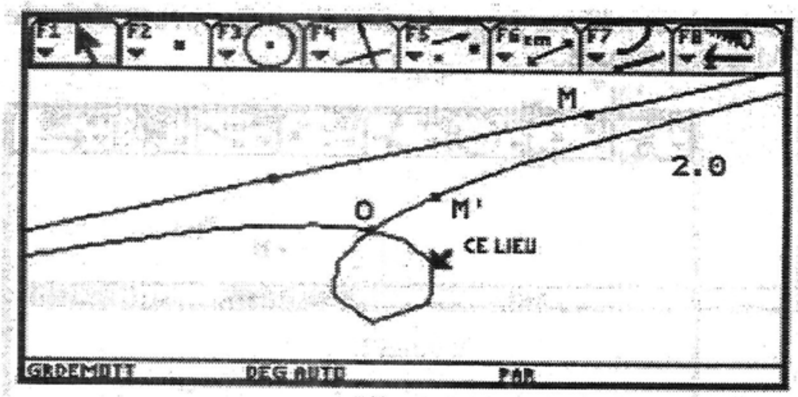


Figure 3

Activités introductives à l'homothétie

Dans le prolongement de ce travail, nous avons proposé à la même classe, un scénario de présentation de l'homothétie intégrant l'utilisation de Cabri-géomètre.

Approche ponctuelle

Le logiciel permet d'aborder cette transformation non par l'application de consignes de construction mais par la découverte des relations géométriques liant un point et son image, ceci par l'intermédiaire du déplacement du point et par l'observation des conséquences de ce déplacement sur son image.

Nous avons proposé un fichier donnant à l'écran un point M et un point M' en présentant ce dernier comme l'image de M par une certaine transformation appelée h. En réalité, M' est l'image de M par une homothétie de rapport 1,5 et de centre un point invisible situé dans l'écran légèrement sur la gauche et vers le bas. Ce centre ne peut apparaître et le rapport n'est pas accessible directement. Le travail de l'élève a consisté à utiliser la possibilité de déplacement de M pour trouver une méthode de construction du point image M', cette méthode devant être valable pour n'importe quelle position de M.

Nous avons choisi le rapport 1,5 car il permettait un certain nombre de procédures essentiellement géométriques.

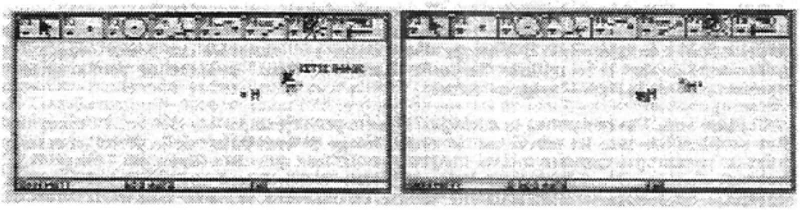


Figure 4

Les élèves ont assez vite remarqué l'existence d'une position particulière pour laquelle M' était confondue avec M et également le fait que M et M' s'éloignent au fur et à mesure que l'on s'écartait de cette position. Ils ont aussi été sensibles au fait que M' restait du même côté de M jusqu'à cette position puis passer de l'autre côté lorsqu'on déplaçait M au delà.

Quelques uns ont tracé un cercle centré sur M et passant par M', d'autres ont construit le milieu de [MM'] et le cercle de diamètre MM', mais la plupart ont tout de suite tracé le segment [MM'] ou la droite (MM'). Enfin, certains ont placé le point M sur une droite ou sur un cercle et ont essayé de déterminer quelle figure décrivait le point M'. On peut penser que pour ces élèves, ils pouvaient affiner leur observation des propriétés de la transformation s'ils associaient le point M à une figure.

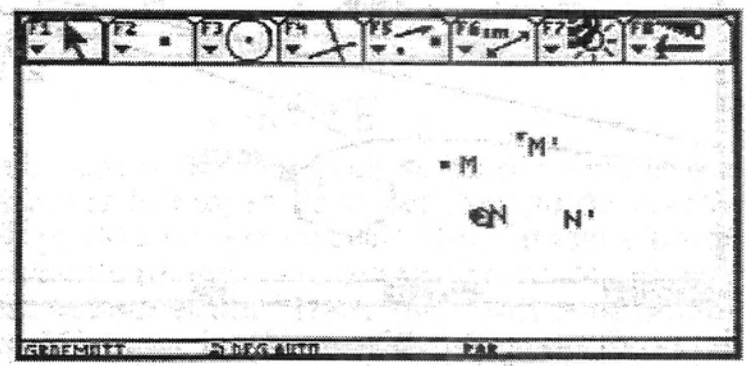


Figure 5

Aux élèves qui avaient construit seulement le segment [MM'] et qui n'avançaient pas, nous avons assez vite proposé d'ouvrir un nouveau fichier grâce auquel il disposait cette fois de deux points M et N (ces points étant déplaçables librement) ainsi que leurs images respectives M' et N' par la même transformation h. Dans ces conditions, tous les élèves ont mis en évidence le point invariant et en dehors de deux binômes, ils ont déterminé une procédure pour obtenir l'image. Ce qui a paru particulièrement intéressant dans cette approche, c'est qu'elle obligeait les élèves à expliciter la propriété d'alignement du point M, de son image M' et du point invariant de la transformation h.

Deux binômes au moins n'ont pas eu besoin du deuxième écran. L'un d'eux a déterminé le point invariant en traçant la droite (MM') puis en activant la trace de cette droite et en déplaçant le point M. Cette observation leur a permis de trouver très vite une méthode de construction de M'.

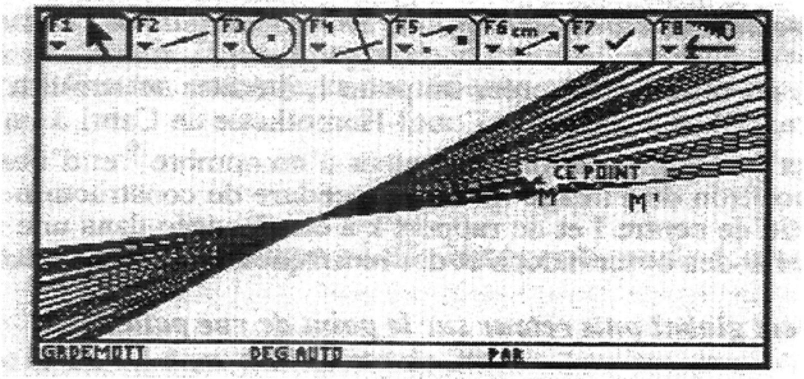


Figure 6

Vers les propriétés

Nous avons ensuite proposé un nouveau fichier avec cette fois, trois points M, N et P et leurs images respectives M', N' et P' par cette même transformation h. Nous avons demandé quelles caractéristiques ils pouvaient conjecturer pour h.

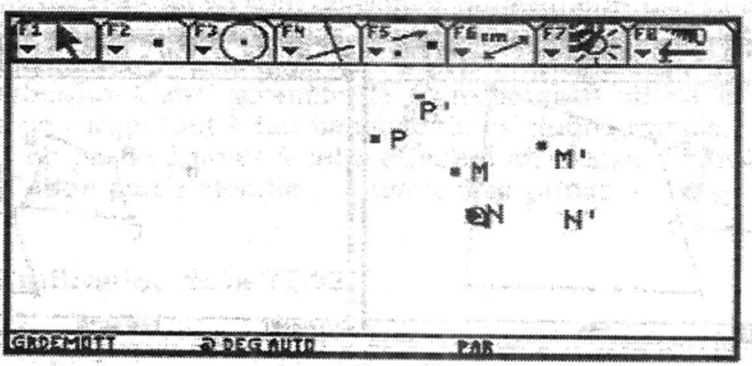


Figure 7

Tous les élèves ont tracé les droites (MM'), (NN') et (PP') ainsi que les segments {MN}, {NN'} et {PP'}. Beaucoup ont évoqué alors la configuration de Thalès et ont cherché à mettre en évidence les rapports des longueurs de ces segments.

Remarquons que ces élèves avaient auparavant revu l'ensemble des propriétés des transformations usuelles (réflexion, symétrie centrale, translation et rotation) en commençant par la conservation de l'alignement. L'enseignant avait insisté sur l'importance de cette propriété en évoquant notamment le cas de la transformation TROk décrite précédemment. Comme on peut l'observer dans les classes, il semble que pour beaucoup d'élèves, la conservation de l'alignement ne constitue pas une propriété assez remarquable pour être toujours relevée.

Les élèves ont eu ensuite à chercher, avec le 1er fichier comportant seulement un point M et son image M', l'ensemble des images par h des points d'un segment et l'ensemble des images par h des points d'un cercle. En référence à ce travail antérieur, ils ont généralement pensé à utiliser la redéfinition d'un point (M est alors redéfini comme point sur segment ou point sur cercle) et les outils Trace ou Lieu. Ceux sont les élèves qui sont plutôt à l'aise avec l'abstraction qui adoptent plus facilement l'outil Lieu. Les autres préferent généralement revenir à l'outil Trace[9]. Ils semblent très attachés à l'aspect dynamique de cet outil. La procédure utilisant l'outil Lieu permet d'éviter la construction de l'image, par la transformation h, d'un autre point.

9 Sur l'écran fourni, il n'y a qu'un point M et son image.

Approche des caractéristiques d'une homothétie de centre I et de rapport k

Les élèves ont eu cette fois, à créer un point I, à éditer un nombre k (en prenant comme valeur particulière 2,5) et à appliquer l'outil Homothétie de Cabri à un point M quelconque. Le logiciel permet de modifier à loisir la valeur d'un nombre[10] et d'observer immédiatement les effets sur la position de l'image M'. La procédure de construction de l'image d'un point M par l'homothétie de centre I et de rapport k a été dégagée dans une séance de synthèse en classe entière à partir des observations et des remarques faites lors de la réalisation de ce TD.

Aspect global puis retour sur le point de vue ponctuel

Les élèves ont eu aussi à observer les effets de l'outil Homothétie sur un polygone et d'observer les différentes caractéristiques de l'homothétie, en déplaçant le centre ou en modifiant le rapport.

En particulier, après avoir appliquer l'outil Homothétie, à un polygone P, il est possible d'observer que l'image de P est un polygone P', que l'image d'un point X du polygone P est un point du polygone image P' et que si X parcourt P alors X' parcourt P'. Il est aussi possible de retrouver l'image P' en construisant le lieu de X' lorsque X parcourt P.

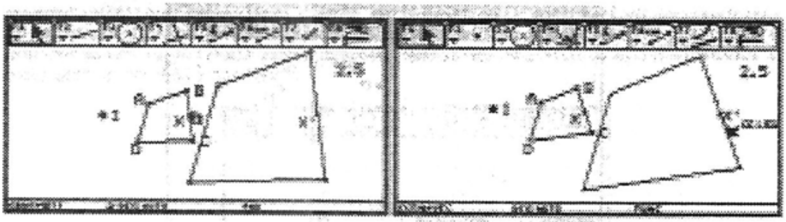


Figure 8

Vers une définition vectorielle d'une homothétie

Les élèves ont eu aussi à utiliser le travail qu'ils avaient effectué avec Cabri-géomètre, à propos de la multiplication d'un vecteur par un

10 Il suffit de le sélectionner et d'utiliser les flèches du clavier pour l'augmenter ou le diminuer.

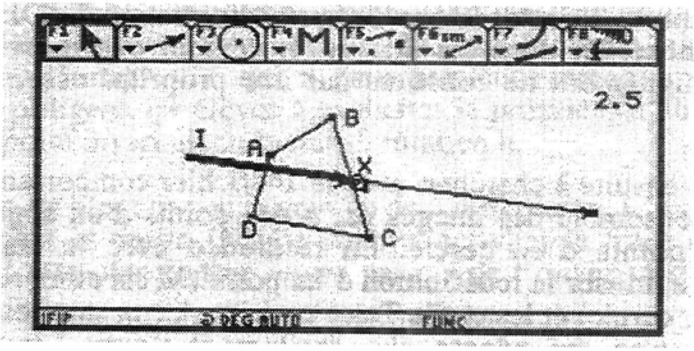


Figure 9

nombre et ils ont retrouvé assez facilement que la construction de l'image M' d'un point M par l'homothétie de centre I et de rapport k correspondait à celle du point M' tel que IM = k. IM.

Remarquons pour terminer cette présentation partielle de quelques activités sur l'homothétie, qu'il est difficile de comparer les apprentissages réalisés avec l'aide de Cabri-géomètre et ceux réalisés à l'occasion d'une approche plus classique de l'homothétie dans un environnement papier-crayon. Il paraît assez manifeste que Cabri-géomètre permet des investigations qui ne sont guère envisageables par ailleurs. Les apprentissages ne se réalisent pas à partir des mêmes éléments. Il y a un approfondissement possible avec la possibilité de déplacement ou de modification des valeurs numériques qui n'est pas reproductible sans un logiciel équivalent.

La TI-92, moyen permettant une réelle intégration de Cabri-géomètre

Utilisation de la TI-92 dans une classe de 2^nde^

Grâce au soutien financier de la région Rhône-Alpes ainsi que du GIS[11] Axe 3 "Nouvelles technologies dans la formation des enseignants", le laboratoire Leibniz-IMAG a pu acquérir quatre vingts TI-92. Outre des fonctionnalités de calculatrice graphique évoluée et un module de

11 Groupement d'Intérêt Scientifique interuniversitaire.

ca1cul formel, ces machines possèdent une application “Cabri-géomètre” qui n’est autre qu’une version légerement restreinte de Cabri-géomètre II.

Les expérimentations décrites ici se sont déroulées notamment dans une classe de 2nde dans laquelle chaque élève avait reçu en prêt pour l’année scolaire, une TI-92. Cette classe a pu avoir accès assez régulièrement à une salle équipée d’ordinateurs avec un certain nombre d’applications et en particulier Cabri-géomètre II. Comme nous allons le voir par la suite, ce prêt de TI-92 a permis un usage tout à fait banalisé de ce micro-monde. Le travail dans cet environnement pouvait ne pas se limiter à celui effectué en classe. Il pouvait d’une part être prolongé à la maison, d’autre part s’étendre à d’autres disciplines.

Évolution de l`utilisation de la TI-92

En 95-96, nous avons pu prêter une TI-92 à chaque éleve d’une classe de 2nde seulement à partir du mois de janvier jusqu’à la fin juin. Les élèves avaient eu à utiliser en classe pour quelques séances de travaux dirigés avec un scénario “autour de la translation”. Ils avaient eu à utiliser la machine comme aide à la conjecture lors d’exercices de démonstration sur quelques configurations et à propos des aires.

En 96-97, les élèves ont eu la TI-92 dès la fin septembre. Ils ont appris à utiliser l’application Cabri-géomètre avec l’étude de quelques configurations. Ils l’ont ensuite utilisé de façon intensive pour l’étude d’un scénario complet sur la notion de vecteurs. Après un travail assez intensif qui s’est étalé sur près de deux mois, certaines activités proposées se sont avérées un peu trop lourdes à mettre en oeuvre sur la machine et les élèves ont éprouvé une certaine lassitude. Par la suite, la machine a été utilisée pour des activités plus ponctuelles en particulier pour l’aide à la conjecture et pour l’étude de certaines propriétés des transformations. Le travail sur les scénarios relatifs aux transformations a été fait en salle informatique. La machine a servi pour certains travaux de complément ou de recherche personnelle. Pour les contrôles sous forme de devoirs surveillés, les élèves ont toujours eu la possibilité d’utiliser la machine s’ils le souhaitaient.

Depuis septembre 97, l’utilisation de la machine s’est faite conjointement au travail en salle informatique en mettant l’accent sur le travail individuel et la recherche personnelle. De plus, la machine a servi de façon plus systématique lors des contrôles. Pour un certain nombre de devoirs à la maison et de devoirs surveillés, les élèves ont eu à rendre un ou plusieurs fichiers. La machine a servi aussi pour des activités numériques, algébriques et pour l'étude des fonctions.

Utilisation de la TI-92 pour le travail personnel

Après une séance de travaux dirigés durant laquelle les élèves ont manipulé l'ordinateur dans l'environnement Cabri-géomètre, que reste-t-il pour eux? Disposent-ils d'assez de temps pour traiter complètement avec l'aide du logiciel, une notion occupant une place importante du programme, exclusivement en séance de travaux dirigés (TD)? Il est pourtant impossible, au premier abord, de demander un travail personnel sur ordinateur en dehors des séances de travaux dirigés ou de cours, simplement parce que les élèves ne possèdent généralement ni le matériel ni le logiciel nécessaire.

Cette question se pose lorsque, malgré les contraintes et la crainte de manquer de temps pour finir le programme, l'enseignant hésite à consacrer une séance supplémentaire de TD pour finir un travail et pour permettre à chacun d'approfondir autant qu'il le souhaite une question entrevue. Souvent aussi, une séance de cours peut s'intercaler entre deux séances de TD sans que les élèves aient eu assez de temps pour avancer dans leurs investigations. Dans les conditions où nous avons travaillé, il a été possible de demander un travail personnel de préparation, travail qui a pu être repris et corrigé lors de la séance suivante en classe entière. Sans ce travail de préparation, la mise en commun n'aurait pu s'effectuer dans de bonnes conditions.

Voici quelques exemples de travaux personnels demandés à l'occasion de l'étude des transformations dans l'année scolaire 96-97.

Pour la Transiation

Après avoir étudié en classe les effets de deux symétries centrales successives sur un polygone et caractérisé les effets de l'article "translation" sur un polygone, les élèves ont eu à prolonger leur travail sur un cercle. L'ensemble des observations effectuées à cette occasion a été repris lors d'une synthèse en classe entière avec l'appui d'une tablette rétroprojetable.

Les élèves ont eu à observer sur leur machine, les propriétés relatives aux composées de translations. Les élèves ont eu à chercher comme problème à la maison dans quelles conditions la composée de symétries centrales par rapport à trois points donnés était l'identité. Ils ont dû aussi étendre leur recherche à quatre points, à cinq, ...à n points.

Pour l'Homothetie

Après avoir étudié en classe les effets d'une homothétie appliquée à un polygone, les élèves ont eu à étudier chez eux les effets d'une homothétie appliquée à une figure usuelle droite, triangle et cercle. Certains avaient eu plus ou moins le temps de commencer ce travail en classe. Les élèves ont eu aussi à trouver la construction de l'image d'un point M par une homothétie déterminée par son centre et la donnée d'un point A et de son image A' .

Voici d'autres exemples d'utilisation pour l'année 97-98 :

- Au cours du 1er trimestre, les élèves ont eu à vérifier sur leur machine, en travail à la maison, la plupart des propriétés relatives à la somme de deux vecteurs et à la multiplication d'un vecteur par un nombre.
- Ils ont eu aussi à construire un certain nombre de configurations particulieres: carré, losange, hexagone, octogone, ...

Pour l'évaluation

La pratique du logiciel Cabri-géomètre permet aux élèves de développer certaines compétences. Il est intéressant de pouvoir les évaluer dans l'environnement même de Cabri-géomètre. Une telle évaluation permet d'aborder certains problemes non accessibles dans l'environnement papier-crayon. Elle rend possible aussi certaines procédures non envisageables sans l'outil logiciel.

Au cours des ces deux années d'expérimentation, nous avons laissé les élèves libres d'utiliser ou non leur TI-92 lors des différentes évaluations. En juin 97, lors des entretiens effectués avec certains élèves pour l'évaluation de l'expérimentation, ils avaient généralement regretté que leur maîtrise du logiciel n'ait pas été évaluée.

Pour l'année 98, nous avons fait entré la machine plus systématiquement dans l'évaluation. Les élèves ont réalisé les premières manipulations avec l'application Cabri-géomètre pour un travail sur les configurations élémentaires.

- Pour le devoir maison n° 1, les élèves ont construit : un carré à partir d'un côté AB; un triangle isocèle; un triangle équilatéral.

- Pour le 1er devoir surveillé, les élèves ont eu à réaliser un fichier comportant: un triangle rectangle dont la longueur d'un côté de l'angle droit restait toujours égale à la moitié de celle de l'autre côté; un triangle rectangle avec un angle de 30°; un triangle rectangle dont la longueur d'un côté de l'angle droit était la moitié de celle de l'hypoténuse.
- Pour le 2^{nde} devoir surveillé, les élèves ont eu à construire: un losange avec la longueur d'une diagonale égale au double de celle de l'autre; un trapèze isocèle.

Les exercices du devoir surveillé n° 2 ont été bien réussis par près de deux tiers des élèves: –Pour le devoir maison n° 3, les élèves ont rendu des fichiers relatifs à des activités proposées dans le scénario *Vecteur* .

- Pour le devoir surveillé n° 7, les élèves ont eu à construire sur la grille un représentant du vecteur de coordonnées (-2; 1); la droite d'équation $x+2y+1$ et une droite d'équation de la forme $2x-y+c=0$ (c étant un nombre réel quelconque).
- Pour le denier devoir maison, les élèves ont eu à chercher grâce au déplacement dans Cabri-géomètre, certains cas particuliers d'une configuration géométrique et établir un résultat grâce à une transformation. Ils ont eu à réaliser des constructions pour lesquelles ils pouvaient s'appuyer utilement sur l'utilisation des transformations.

Bilan provisoire

Le bilan que l'on peut tirer dès maintenant de cette expérimentation porte sur quelques points seulement:

- au niveau d'une classe de 2^{nde} l'utilisation de la machine doit être initiée et intégrée par l'enseignant lui-même; un élève ne se lance que très rarement de lui-même dans l'exploitation des possibilités offertes par la machine essentiellement parce qu'il ne domine pas les concepts sur lequel s'appuie son fonctionnement; cette constatation reste valable, mais peut-être dans une moindre mesure, pour des élèves de $1^{ère}$ S. À l'issue d'une année d'usage de la TI-92 en classe de mathématiques on peut constater que la personnalisation de la machine reste limitée pour la plupart des élèves. La machine prend très vite le statut d'un "instrument scolaire" *(verbatim)*;

- pour avoir des chances d'être réellement fait, le travail de recherche et d'approfondissement à effectuer par les élèves à la maison doit être bien explicité et très circonscrit, conséquence de l'absence constatée d'initiative de la part de l'éleve;
- de façon assez générale, pour des élèves de 2nde, le travail sur la machine doit se limiter à des situations assez simples et bien définies pour lesquelles il y a un réel apport du logiciel.

Conclusion

L'environnement de Cabri-géomètre, au travers de l'ingénierie présentée, permet donc d'aborder de façon très spécifique la notion de transformation ponctuelle du plan. Ainsi, il est possible d'expliciter et d'approfondir certains points de vue qui ne sont habituellement traités mais qui sont nécessaires à une meilleure compréhension. Avec l'aspect boîte noire, les transformations sont abordées par leurs caractéristiques et non pas au travers d'une procédure de construction de l'image d'un point, tout au moins dans un premier temps. Les outils Trace et Lieu, très facilement mis en oeuvre avec le logiciel, permettent d'expliciter de façon factuelle le lien entre les aspects ponctuel et global d'une transformation du plan. Les élèves ont ainsi un support leur permettant de passer de l'un à l'autre de ces aspects. L'environnement permet aussi d'envisager, de façon très simple, des transformations non classiques, en particulier ne conservant pas l'alignement et de donner ainsi une vision plus générale des transformations. Les propriétés, en particulier la conservation de l'alignement, apparaissent moins comme allant de soi mais bien comme caractérisant les différentes transformations. Il n'est guère envisageable, dans l'environnement papier-crayon, d'étudier même de façon succincte, une transformation telle que l'image de trois points alignés ne soient pas trois points alignés puisque la construction de l'image d'une figure même élémentaire devrait se faire point par point. Par contre, c'est tout à fait facile avec l'outil informatique.

Une telle ingénierie conduit les élèves à une meilleur compréhension mais les enseignants peuvent craindre que sa mise en oeuvre nécessite trop de temps compte tenu des contraintes de programme. L'expérimentation entreprise sur deux années scolaires nous a montré que certaines conditions rendaient cette mise en oeuvre moins fastidieuse et plus efficace. L'une d'elles est la pratique tout à fait banalisée du logiciel tout au long de l'année, chaque fois que cela s'avérait pertinent. D'ailleurs, les occasions d'une telle utilisation ne manquent pas au travers de l'ensemble des programmes actuels. Une autre condition est la possibilité, pour les élèves, de disposer de cet environnement pour un travail d'approfondissement personnel. L'évolution rapide des matériels et des systèmes permet de ne pas renvoyer cette condition au domaine de l'utopie. Il paraît enfin particulièrement intéressant de pouvoir réaliser certaines évaluations dans ce même environnement afin de bénéficier des ses apports spécifiques et de disposer de situations problèmes très riches.

References

ACTES de l'Université d'Été (1993). *Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur: utilisation du logiciel Cabri-Géomètre en classe.* IUFM de Grenoble, Irem de Grenoble, LSD2-Imag de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

ACTES de l'Université d'Été (1996). *Cabri-géomètre: de l'ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie.* IUFM de Grenoble, Irem de Grenoble, Leibniz-Imag de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

ARTIGUE, M. (1986). Etude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 7.1, pp. 1-62.

______(1997). Le logiciel Derive comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, v. 33.2, pp. 133-169.

ASSUDE, T.; CAPPONI, B.; BERTOMEU, P.-G. et BONNET, J.-F. (1997). De l'économie et de l'écologie du travail avec le logiciel Cabri-Géomètre. *Petit x*, n. 44, pp. 53-79.

CAPPONI, B. et LABORDE, C. (1994). *Cabri-classe.* Argenteuil, Éditions Archimède.

CHARRIERE, P.-M. (1996). *Apprivoiser la géométrie avec Cabri-Géomètre.* Monographie du Centre informatique pédagogique – CIP, Genève.

CHEVALLARD, Y. (1992). Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques,* Cornu, B. (ed.). Paris, PUF.

EVAPM (1991). *Evaluation du programme de mathématiques, fin de Seconde*, publ. n. 88.

GALLOU-DUMIEL, E. (1985). *Symétrie orthogonale et angles.* Thèse de 3ème cycle en Didactique des Mathématiques. Université Joseph Fourier (Grenoble 1).

GRENIER, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en Sixième*. Thèse de 3ème cycle en Didactique des Mathématiques, Université Joseph Fourier (Grenoble 1).

JAHN, A-P. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles: étude didactique d'une séquence d'enseignement avec Cabri-Géomètre. Relations des aspects fonctionnels et géométriques en classe de Second.* Thèse de Doctorat. Spécialité Didactique des Mathématiques, Université Joseph Fourier (Grenoble1).

LABORDE, C. (1997). Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques en classe. Défis et tentatives. *Didaskalia*, n. 10, pp. 97-112.

LABORDE, J.-M. (1985). Cahier des charges pour un logiciel de géométrie à manipulation directe. *Rapport IMAG*. Université Joseph Fourier (Grenoble1).

MARTIN, Y. (1994). *Expérimenter en mathématiques avec Cabri-Géomètre.* Argenteuil, Editions Archimède.

MOISAN, J. (1996). *Faire des mathématiques avec l'ordinateur au Lycée.* Ministère de l'Éducation Nationale, DITEN B2.

Recebido em ago./2002; aprovado em out./2002

Approaching theoretical thinking within a dynamic geometry environment*

FEDERICA OLIVERO**
DOMINGO PAOLA***
ORNELLA ROBUTTI****

Abstract
In this paper we describe one classroom activity, part of a long-term project aimed at investigating the potentialities of dynamic geometry software, namely Cabri-Géomètre, in supporting students' production of conjectures and proofs in geometry at secondary school level. The paper focuses on the activity of a pair of students solving an open geometry problem in Cabri. The analysis shows that Cabri might be a support in bridging the gap between exploration (and conjecturing) and proof: first, exploration provides students with a wide range of local logical relationships between elements or properties of the figure; then, these local concatenations are to be globally rearranged in the proving phase, in order to construct a complete proof.
Key-words: *conjectures and proofs; dynamic geometry systems; open problems.*

Resumo
Neste artigo, descrevemos uma atividade de sala de aula, parte de um projeto mais amplo visando a investigar as potencialidades do software de geometria dinâmica Cabri-Géomètre, como suporte para alunos na produção de conjecturas e provas em Geometria no ensino secundário. O texto apresenta a atividade de uma dupla de alunos resolvendo um problema aberto no Cabri. A análise mostra que o Cabri pode servir como apoio, diminuindo a lacuna entre exploração (e levantamento de conjecturas) e prova: primeiro, a exploração propicia aos alunos um conjunto diverso de relações, lógicas e locais, entre elementos ou propriedades da figura; segundo, estas concatenações locais são reorganizadas na fase de prova, a fim de construir uma prova completa.
Palavras-chave: conjecturas e prova; sistemas de geometria dinâmica; problemas abertos.

---

* Previously published in *L'educazione matematica*, vol. 3, n.3, pp. 127-148 (2001).

** Graduate School of Education, University of Bristol, UK. E-mail: Fede.Olivero@bristol.ac.uk

*** Liceo scientifico "A. Issel", Finale Ligure G.R.E.M.G., Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Italy. E-mail: paola.domingo@mail.sirio.it

**** Dipartimento di Matematica, Università di Torino, Italy. E-mail: robutti@dm.unito.it

Introduction

Approaching theoretical thinking in mathematics requires giving up naïve empiricism, that is the common habit to gather conclusions and to justify conjectures on the basis of observations of particular cases. This habit is strong in human beings, as in everyday life we often need to gather conclusions from the observations of just a limited number of cases and experiences. This way of thinking is often transferred by students to situations for which it is not appropriate, as for example when they need to prove conjectures in geometry. Research has shown that students are usually satisfied with empirical verification of properties, for example using measures, and for only a limited number of cases (e.g. Chazan, 1993). In this way, they either validate or refute conjectures, without feeling the need for proving them.

In our opinion, naïve empiricism might be abandoned only if the didactic contract in the classroom makes explicit the role of mathematical proof as explaining why a conjecture 'works', other than just convincing (ourselves or a friend or an enemy) of the validity of a certain conjecture; precisely, explaining how a conjecture (proposition) is logically deduced from other propositions within a theory.

The concept of proof is a crucial issue of current international discussion among researchers in Mathematics Education at international level. The Italian contribution to this debate concerns both historical and epistemological analysis of the concept of proof and development of suitable learning environments, which can support students in the transition from explorations and conjectures to more formal hypothetical reasoning and proofs (Boero, Garuti & Mariotti, 1996; Bartolini Bussi, Boero, Ferri, Garuti & Mariotti, 1997; Furinghetti & Paola, 1998; Arzarello, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, 1998 (a); Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 1999). Results from this research show that providing students with problems in the form "prove that…" may prevent them from being able to attempt proving. On the contrary, providing students with problems which require and support the production of conjectures may help them in the proving phase: the hypothesis is that a cognitive continuity in the transition from exploration to proving might be constructed on the basis of the production of conjectures. The research project[1] we have been involved in for some years now within the

1 We would like to acknowledge all the participants in the project: teachers, students, researchers and the co-ordinator Ferdinando Arzarello.

Mathematics Education group at the University of Turin is aimed at investigating the potentialities of dynamic geometry software, namely Cabri-Géomètre, (Baulac, Bellemain & Laborde, 1988; Laborde & Strässer, 1990) in supporting students' production of conjectures in geometry. Our hypothesis, based on classroom experiments, is that Cabri may be a strong support for students not only in the conjecturing phase, but also in the proving phase.

In the paper we will analyse one classroom activity involving the solution of a geometric open problem in Cabri. First, we will describe the context of the experiment; secondly, we will present a preliminary analysis of students' solution process, which shows how Cabri was useful in supporting the production of conjectures, the dynamic exploration of the situation and the construction of proofs.

The classroom experiments

In order to investigate the main aim of the ongoing project, we have been carrying out classroom experiments, in secondary schools, in which students are asked to solve geometric problems in Cabri. Cabri-Géomètre[2] consists of a package for constructing geometrical figures. It deals with points, lines, circles and their relations and allows the user to do geometrical constructions. The most relevant feature of Cabri from the didactical point of view is the dragging function, that is the possibility of directly manipulating the constructed figures on the screen. If a figure has been correctly drawn, according to the rules and properties of Euclidean geometry, it keeps all its internal relationships whenever it undertakes dragging. Otherwise it loses its initial features.[3]

---

2 There are different versions of Cabri. In the activity we will describe, students used Cabri I.7.

3 For example if you want to draw an isosceles triangle, you can use the following construction:

1. Draw a segment
2. Draw its perpendicular bisector
3. hoose a point on this perpendicular bisector
4. Draw the segments from this point to the endpoints of the first segment.

The Cabri-construction, which translates the previous construction into Cabri commands, is shown below:

We observed one pair of students in each classroom and we collected the written material from all the students. Then we analysed the data collected with respect to students' cognitive processes, in order to find out the kind of support Cabri might give in the solution process.

The activities used in the classroom experiments are open problems, that is problems in which students can explore a situation, make conjectures and at first test them within the Cabri environment through the dragging function. Then they need to validate their conjectures within a mathematical theory, i.e. they need to construct a proof. The role of the proof is to show how the discovered properties, which are formulated in the conjectures, can be deduced from the axioms of the mathematical theory considered, in this case Euclidean geometry. Open problems can be tackled at different levels, according to students' knowledge and expertise. Students can perform different things, such as:

- exploring the most general case and looking for a general property which is always true under the given hypotheses;
- making conjectures and constructing proofs related to one or more particular cases;
- analysing an intermediate situation which is a generalisation from a number of cases and construct a proof for that;
- making many conjectures, but no proofs;
- constructing proofs for some cases without exploring the situation further.

The main potentiality of open problems is the fact they foster a wide mathematical production, in that all the students usually succeed in observing something from the situation they are exploring, while in problems of the form "prove that..." most students think a brilliant idea is needed in order to be able to provide a solution and so they get stuck.

---

1. Segment
2. Perpendicular bisector (of the segment)
3. Point on object (on the perpendicular bisector)
4. Segment (repeated twice: the endpoints are the point on the perpendicular bisector and the endpoints of the first segment)

If you implement the previous construction then when you drag one of the vertexes of the triangle, it keeps the property of being isosceles. On the contrary if you only draw an isosceles triangle 'by eye', i.e. a triangle that seems to be isosceles but has not been constructed as such, it will loose its property as soon as you drag it.

The students are usually divided in pairs; each pair works at the computer with Cabri. We will present a detailed analysis of the solution process of a pair of students, who tackled an open geometric problem in Cabri. They belong to a classroom of a 'liceo scientifico PNI[4] (17 year old students). It is a mixed ability class[5] (there is group of high achievers, a few low achievers and another group in the middle). They are used to working in groups, both with paper and pencil and with the calculator (Cabri, spreadsheets, programming languages) and to sharing results, conjectures and proofs at the end of an activity. The teacher does not usually teach at the front, but his lessons are interactive and he usually co-ordinates a classroom discussion after group work. Working in groups, comparing and sharing results is now part of the classroom culture. As far as Cabri is concerned, this classroom has used Cabri since the first year of Secondary School (14-15 years old), both in construction problems and in exploration problems (as those described above). The teacher has introduced students not only to the technical features of the software, but also to the different modalities of exploration and dragging (finding invariants, limit cases and properties by exploiting different dragging modalities). The teacher plays a fundamental role in the introduction of Cabri in the classroom: in general, we observed that if the teacher makes explicit the different uses of dragging, students make a better use of Cabri, both in testing constructions and in exploring a situation, and they exploit many different dragging modalities, both at perceptive and theoretical level.

In a previous project, we identified different modes of dragging students use when solving geometric problems in Cabri, according to different aims (Arzarello, Gallino, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, 1998 (b); Olivero, 1999). The most frequently used are listed below:

- *Wandering dragging*, that is moving the basic points on the screen randomly, without a plan in mind, in order to discover interesting configurations or regularities in the figures;
- *Guided dragging*, that is dragging the basic points of a figure in order to obtain a particular shape;

4 It is a scientific secondary school. Students attend 5 mathematics classes per week and they use new technologies in the mathematics class.

5 In Italy all the classrooms at all school levels are mixed ability.

- *Lieu muet*[6] *dragging*, that is moving a point so that the figure keeps a discovered property following a 'hidden' path (*lieu muet*), even without actually seeing the path;
- *Dragging test*, that is moving a figure in order to see whether it keeps the initial properties it had: if so, then the figure passes the test; if not, then it means the figure was not constructed according to the geometric properties it was supposed to have.

A fine-grained analysis of students' cognitive processes

We have analysed the solution process of the pair Piero and Gervasio. They are high achievers. They are used to working together and interacting with each other in a productive way.

The problem that was given in the classroom was formulated as follows.

> You are given a quadrilateral ABCD. Construct a square on each of the sides AB, BC, CD and AD, outside the quadrilateral. Construct the centres of the squares and name them E, F, G and H respectively.
>
> 1. After reading the problem carefully, explore the quadrilateral EFGH in relation to ABCD and make conjectures (in the form if…then).
> 2. Prove some of your conjectures.

An external observer who took notes observed the two students. The students' written work was collected as well.

The analysis of the students' solution process shows two key points of students' cognitive activity in this context[7], such as:

a) The transition from **perceptive** (in particular within the Cabri environment) to **theoretical** (towards the logic of proof in geometry) practices, which is shown by:

- a change in the way dragging is used;
- the use of sketches;

6 *Lieu muet* is a French word for *dummy locus*.

7 Only some aspects of the analysis will be described in the paper.

• the transition from perceived[8] objects to generic[9] objects.

b) The continuity from the Cabri exploration to the proving process, which is shown by:

• the use of some elements of the exploration process as starting points for proving[10];

• students' use of language.

We divided the process in three episodes, and each episode is divided in shorter episodes which will be numbered 1.1, 1.2, etc.... The following part contains the protocol and the analysis for each of the episodes.

Episode 1

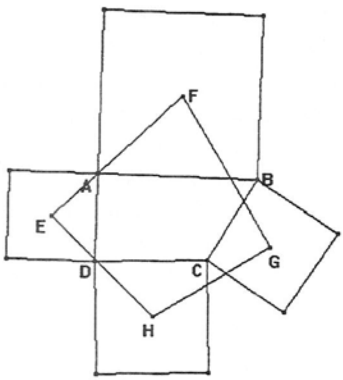


Figure 1 – A configuration showing point A on EF

8 A perceived object is a concrete object that students see, touch or read, i.e. an object they experience through their physical senses. For example, the drawing of a triangle on a sheet of paper or the diagram of a function, or a numer written on paper.

9 A generic object is an abstract object students think of; it has got all the properties of the class of the particular objects it represents. For example, a generic triangle or a function, or a number as a concept.

10 We distinguish proving from proofs. Proving is the process of constructing logical deductions to link some assumptions (hypotheses) with a final result (thesis). The product of this process is to be called proof, that can be either oral or written.

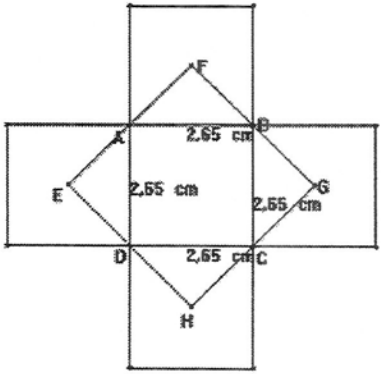


Figure 2: Measurements are added

1.1 The students construct a Cabri-figure. 1.2 They check if the construction is correct using the 'dragging test'[11] (in particular they check the construction of the four squares). 1.3 They begin to explore the situation moving the basic points randomly on the screen; they pass through particular and general cases, concave and convex quadrilaterals, moving quite fast. 1.4 While moving, they see that the vertices of ABCD happen to be either inside or outside EFGH and they realise that there is a moment in which one of the vertices of ABCD belongs to one of the sides of EFGH (Fig. 1). 1.5 Piero: "Maybe it is a square". 1.6 When the students observe that at some point one of the vertices of ABCD belongs to one of the sides of EFGH, they stop moving. Then they drag another point till they get a square (ABCD), they stop dragging and they observe the still Cabri figure. Then they put measurements on the sides (Fig.2). 1.7 They write down the conjecture "If ABCD is a square Þ EFGH is a square. The sides of EFGH pass through the vertices of ABCD".

The construction in Cabri shows a first transition from perceptive to theoretical activity (cf. key point 1.): the students realise they cannot construct a square just 'by eye' (as they tried to do at first), but they need

11 They check if the Cabri figure was constructed according to geometric rules. If the squares constructed on the sides of the quadrilateral stay squares when any vertex is moved, then the costruction is correct. If they mess up, then it means the construction is not correct.

to use geometrical properties. They succeed in constructing the four squares on the sides of ABCD and they check each square is correct through the *dragging test*. This mode of working (constructing a figure and checking the validity of the construction) might become a routine for the students if the teacher makes the opportunity of doing this explicit in the classroom.

In this particular case, the habit of checking each construction through the dragging test before going further with the exploration is part of the classroom culture, because it was promoted by the teacher. This has become a tool students are in control of and normally use. After the construction is completed, exploration begins (1.3)[12]. At first students move points randomly on the screen, doing *wandering dragging*. They drag one of the vertices of ABCD, trying to make ABCD change, considering particular cases and limit cases, concave and convex quadrilaterals. Students' observations about how the figures change on the screen are made at spatio-graphical level (Laborde, 1998), in that they only perceive different types of quadrilaterals, without relating them to one another. The students look at the continuous variation of the quadrilaterals on the screen (we named this way of observing the change in a Cabri figure, a 'film'), trying to perceive information, i.e. properties or invariants, from this. Dragging is quite fast and is aimed at seeing in the figure something that does not change while moving, something that is a 'good idea' to pursue. Such an exploration is typical of the Cabri environment and it could not be done with paper and pencil[13].

In the second phase, a new dragging modality is observed (1.4): while dragging students do not look at the figure as a whole, but they pay attention to single parts of it. Usually this dragging modality involves slower movements than before, and students aim at finding relationships between elements of the figure.

In this first episode, at some point students see that one of the vertices of ABCD belongs to EFGH (1.4); Piero anticipates (1.5) what still has to be seen on the screen: his thinking is quicker than the movement

---

12 The numbers in brackets refer to the protocol.

13 We observed that students who solved the same problem in paper and pencil did another kind of exploration: they started with very precise drawings of general quadrilaterals and carefully observed them. They did not have the variety of figures as in Cabri. At this point students very often got stuck and the teacher's intervention was needed in order to make them go further.

of the figure in Cabri. *"Maybe it's a square"* is an intuition at a perceptive level (it is difficult to say if it involves theoretical thinking as well). The conjecture is not yet formulated in a conditional sentence (if...then), because the idea of the square is part of Piero's thinking process, which is still in progress.

After Piero's anticipation, the students make ABCD a square, dragging all the vertices (1.6); then they stop dragging and they put measurements in order to check it is really a square. After that, they write down their conjecture (1.7) in a conditional form: *"If ABCD is a square ⇒ EFGH is a square. The sides of EFGH pass through the vertices of ABCD"*. The language has evolved towards a more standard mathematical form (if...then), which is part of the classroom culture.

Episode 2

> 2.1 Once they are in control of the square configuration, they switch to a rectangle.
> 2.2 They observe that the other quadrilateral is still a square (without moving anything in Cabri).
> 2.3 Gervasio: "let's transform ABCD into a parallelogram, then it is a general case. What figure is more general than the parallelogram? A trapezium, but with a trapezium it doesn't work any longer. Then we can prove the general case and the proof holds also for the other configurations".
> 2.4 The mouse, moved by Piero, follows Gervasio's suggestions and transforms ABCD from a rectangle into a parallelogram.
> 2.5 After that, the students need to slow down the Cabri rhythm: exploration has finished, so they keep the Cabri figure still on the screen and they start proving, looking at the figure on the screen. They do not immediately succeed in proving the parallelogram case, so they begin with the case of a rectangle and then they move to the case of a parallelogram.

The students use dragging in order to get a precise figure they want to work with (*guided dragging*), that is a rectangle (2.1); they are at a spatio-graphical level and they observe the particular figure they selected, instead of the continuous 'film' of figures. When they get a rectangle they stop dragging (2.2): this shows a transition to a theoretical level, because at this point the students try to discover properties by observing the still figure, i.e. they look for geometrical relationships suggested by their own knowledge and not by Cabri.

In this episode exploration is much more controlled than in Episode 1: the students are in control of the situation and there is also a good synchrony with the Cabri environment.

Gervasio's intervention (2.3) contains a sequence of mental experiments at a theoretical level: he has moved from a perceptive level to a theoretical level, thinking in the geometry world. He is looking for the most general quadrilateral ABCD, which makes EFGH a square, so that he can construct a proof only for this general case that includes the other particular instances (provided more restrictive hypotheses are set). This shows a transition to the logic of proof. Since EFGH is a square when ABCD is either a rectangle or a parallelogram, the students want to generalise this conjecture to the case of a trapezium; however they see that the thesis does not hold in this case. So the conjecture to be proven is now: if ABCD is a parallelogram then EFGH is a square. Exploration is no longer useful, so the Cabri figure the students work on is still (2.5). Instead they use hand gestures and a ruler to point at segments and angles on the screen and they start proving their conjectures. The figure on the screen has now the status of a generic object, the students are working at a theoretical level and they work on that figure to construct a proof.

This episode shows some different phenomena happening at the same time:

- the transition from spatio-graphical to theoretical level, which is shown by Gervasio's words (2.3);
- the transition to the generic object, which is controlled by the students both in the mental experiments, that are the starting point for a new exploration in Cabri, and in the proving phase (2.3 & 2.5);
- the increasing control of the students over the situation.

This episode shows that Cabri is a support for students in the transition towards a mathematical theory because it helps them to see the figure from another point of view, that is to consider it as a generic object, from a theoretical point of view. Cabri supports students towards theoretical thinking. Moreover Cabri seems to influence students' attitude towards the problem, i.e. it avoids they get stuck without being able to go further in the production of conjectures and proofs. Thanks to Cabri, students approach the problem in a condition similar to experts (working without Cabri): dragging makes 'physically' possible all the dynamic explorations and transformations experts usually do in their mind. This situation is typical of students who are used to Cabri and have already internalised its practice through the teacher's intervention, as the software itself does not produce a transition to theoretical thinking.

Episode 3

3.1 Piero and Gervasio prove the parallelogram case, looking at the still Cabri figure on the screen (Fig.3).
3.2 At some point Gervasio makes a sketch on paper representing the parallelogram situation (Fig.4).
Observer: "Why did you feel the need to use paper and pencil?"
Gervasio: "Because I like it better, I can sketch things. I can't do this in Cabri. Constructing is faster in Cabri, better than using ruler and compass. When I start proving I may want to draw a sketch. If I need to discover other things then I go back to Cabri.
3.3 They go back to Cabri and they add the segments they had drawn on paper (diagonals of the squares).
3.4 They go to paper again and they sketch two triangles they want to prove congruent.
3.5 They look at the screen, using ruler and gestures to point at segments on the still Cabri figure.
3.6 Piero: "I know it! I can't remember by which theorem these two are equal…". He proves the property on the screen.
3.7 The students write down their proof for the rectangle and the parallelogram (Fig.5).

In the first part of the episode (3.1) the students work at a theoretical level, because they are constructing a proof for the case ABCD parallelogram, by observing the still Cabri figure. Then at some point (3.2) they feel the need to sketch a figure on paper: this usually happens when Cabri is no longer sufficient to prove an idea that comes to mind. Sketches are used to check what is being said. Sometimes sketches represent only a part of the figure (see fig.4). The use of sketches represents a kind of a-synchrony between Cabri and students' thinking flow: when they have an idea in mind they need to have a figure they can scribble on very quickly, which is possible with paper and pencil but not with Cabri (cf. Gervasio's intervention in 3.2). The sketch embodies students' thinking

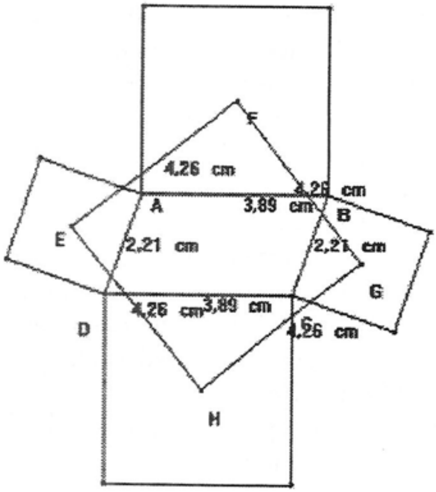


Figure 3 – Cabri figure on the screen

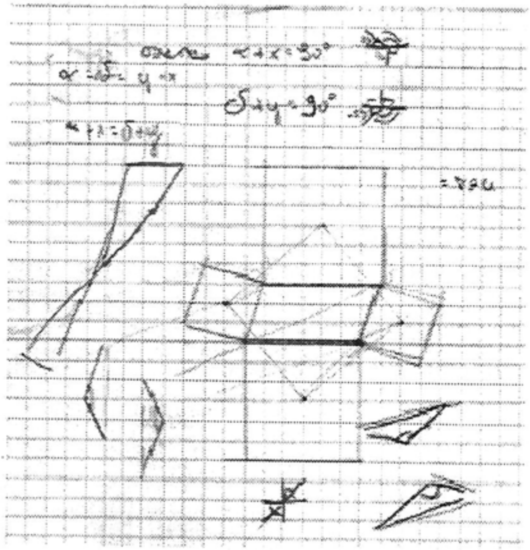


Figure 4 – Sketch on paper

flow, better than Cabri, at two levels. First of all the sketch is immediately available to students, in that there is not a mediator between their thoughts and such a visual representation (whereas in Cabri they have to interact with the software commands before producing an image). A sketch is drawn in real time, while a figure in Cabri is longer to be constructed. Secondly, at a theoretical level, a sketch can be seen by students as the representative of a set of objects, that is as a generic object. For example at some point the students draw on paper two triangles only (3.4), which are proven to be congruent (Fig. 4). Only when Piero is in control of the situation completely, he is able to produce a proof just looking at the screen (3.6), while a dialectic Cabri figure - sketches was crucial in the phase of constructing and looking for a proof (3.2 to 3.5). This dialectic proved richer in high achievers. If this dialectic supported students' proving activity then making it explicit in the classroom, particularly to low achievers, would be a goal to be pursued in a long-term process; the role of the teacher in this process is crucial.

As far as the written proofs are concerned, we observed that they contain bits of the Cabri exploration (cf. key point 2.). The whole protocol shows that students' success depends on the availability of a rich production in the exploration phase (Boero, Garuti & Mariotti, 1996). The starting point of the production of conjectures (the fact that one of the vertices of ABCD belongs to one of the sides of EFGH, see 1.4 to 1.6) is recollected in the proof for the rectangle (Fig.5): *"The sides of EFGH pass through the vertices of ABCD"*; it is then refined in the case of the square: *"The vertices of ABCD are the midpoints of EFGH"*. These two sentences are written down as theses of the conjectures about the rectangle and square, and they are to be proven. Students seem to feel the need to find a justification for what they discovered in the previous exploration phase, and they say: *"A belongs to EF because BAF=45°=EAD and DAB=90°"*. The students want to conclude that, if there are two 45° angles and one 90° angle, then the whole angle is 180° and E, A and F are on the same line.

This shows that Cabri might be a support in bridging the gap between exploration and proof: first, exploration provides students with a wide range of local logical relationships between elements or properties of the figure, then these local concatenations are to be globally rearranged in the proving phase, in order to finally produce a complete proof.

When proving the case of the rectangle, the students exploit the previous observations to say that all the sides of EFGH are equal (because they are the sum of equal segments); however they still need to prove that the quadrilateral has got one 90° angle in order to say EFGH is a square. In order to do this, they use the fact that E, A and F are on the same line (a fact that was discovered in Cabri) and the fact that the sum

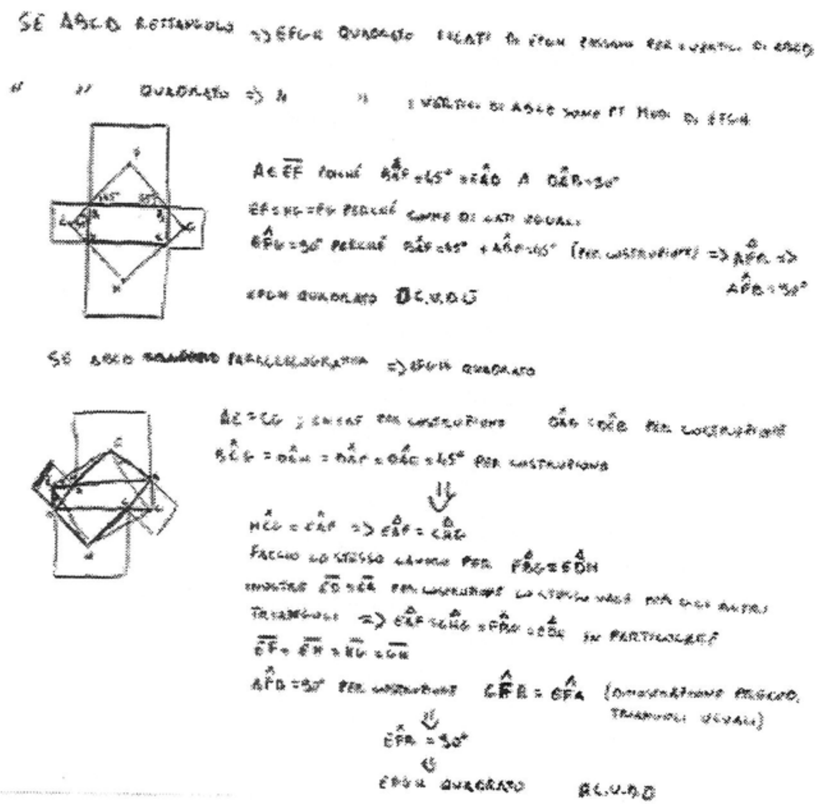


Figure 5 – The written proof

of the interior angle of a triangle is 180° (which comes from their geometrical knowledge); consequently their proof is based on their discoveries and conjectures.

The key point of the exploration phase is the fact that the point A can be moved so that it belongs to EF. This has got a dynamic function: dragging shows that A may or may not belong to EF, because A is on one side of EF first, then it belongs to EF, then it is on the other side of EF. The same fact reveals a key point in the following proving phase. The dynamic function is transformed into a logic function: the essential thing to be proven is that E, A and F are on the same line; then this can be used to prove that the sides of EFGH are equal and that EFGH has got one right angle, so it is a square.

Some Concluding Remarks

According to Balacheff (1998)[14] and Otte (1999)[15], mathematical objects are accessible only through their representations; therefore, having good representations becomes a relevant didactical problem. Laborde (1998) says: "Diagrams in 2D geometry play an ambiguous role: one the one hand they refer to theoretical objects whereas on the other hand they offer graphical - spatial properties which can give rise to a perceptual activity from the individual. This ambiguous role of diagrams is completely implicit in the traditional teaching of geometry in which theoretical properties are assimilated into graphical ones".

In our opinion, representations of geometric objects within dynamic geometry software, as Cabri, are a good way to foster the transition from perceptive to theoretical level. Cabri figures are a midway between empirical and generic objects. On the one hand, they can be manipulated as empirical objects and the effect of this manipulation can be seen on the screen as it happens (this constitutes a feedback, which is typical of the interaction of a subject with an external system)[16]. On the other hand, dragging figures in Cabri allows one "to see the one as a multitude, other than one among others" (Pimm, 1995, p.59).

In the same way, the Cabri figures are in between perception and theory. They can be directly manipulated, so they give information at a perceptive level. At the same time "they have an internal logic, which relates to their construction: the different parts of a Cabri figure are related

14 "Les objets mathématiques ne sont accessibles que par des représentations et la manipulation de ces représentations" (Balacheff, 1998).

15 "A mathematical object, such as a geometrical point, a number or a function, does not exist independently of the totality of its possible representations, but it is not to be confused with any particular representation either" (Otte, 1999).

16 "When the user drags one element of the diagram, this latter is modified according to the geometrical way it has been constructed and not to the wishes of the user. This is not the case in paper and pencil diagrams which can be slightly distorted by the pupils in order to meet their expectations. Computers diagrams are external objects whose behaviour and feedback is no longer controlled by the user as soon as they have been created. Their behaviour requires the construction of an interpretation by the pupils. Geometry is a means, among others, of interpreting the behaviour of these computer diagrams" (Balacheff & Sutherland, 1994).

to each other according to the way the figure was constructed" (Mariotti, 1996, p. 271).

Our classroom experiments have shown that the software itself does not grant the transition from empirical to generic objects, from perceptive to theoretical level. On the contrary, the teacher plays a very important role in students' approach to theoretical thinking. Technology itself cannot bring about an educational change. Very often there is the belief that if the technology used is *good*, then didactics will certainly improve. This assumption does not recognise that a computer based learning environment may be very complex, may need sometime to be usefully exploited (both by the teacher and the students), according to set learning objectives. Generally speaking, using new technologies in the classroom implies the redefinition of contents, methods and of the role of the teacher (Bottino & Chiappini, 1995; Noss, 1995). Simply making a software available does not mean that people will more or less automatically take advantage of the opportunities that it affords (Perkins, 1985).

For example, dragging in Cabri allows students to validate their conjectures; therefore the function of convincing (themselves, a friend or an enemy) proof has in mathematics is no longer useful. The work in Cabri is enough for the students to be convinced of the validity of their conjectures. If the teacher does not motivate students to find out *why* a conjecture (proposition) is true, then the justifications given by students may remain at a perceptive-empirical level: the proposition is true because the property observed on the Cabri figure stays the same when dragging the figure, given the hypotheses do not change. When such a belief is shared in the classroom, then Cabri might become an obstacle in the transition from empirical to theoretical thinking, as it allows validating a proposition without the need to use a theory. However, if the teacher makes explicit the role of proof in justifing, then students will be motivated to prove *why* a certain proposition is true (within a theory), after they know *that* it is true (within the Cabri environment). To paraphrase Polya (1954), first we need to be convinced that a proposition is true, then we can prove it.

References

ARZARELLO, F.; MICHELETTI, C.; OLIVERO; F., PAOLA, D. and ROBUTTI, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proof in geometry, *Proceedings of PME XXII*, Stellenbosh, South Africa, v. 2, pp. 24-31.

ARZARELLO, F.; GALLINO, G.; MICHELETTI, C.; OLIVERO, F.; PAOLA, D. and ROBUTTI, O.(1998). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, *Proceedings of PME XXII*, Stellenbosh, South Africa, v. 2, pp. 32-39.

ARZARELLO, F.; OLIVERO, F.; PAOLA, D. and ROBUTTI, O.(1999). Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva., *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* v. 22B, n. 3.

BALACHEFF, N. and SUTHERLAND, R. (1994). "Epistemological domain of validity of microworlds The case of Logo and Cabri-Géomètre". In: LEWIS, R. and MENDELSOHN, P. (eds.). *Lessons from Learning*. IFIP Transactions, A 46, pp. 137-150. Amsterdam, North Holland and Elsevier Science B.V.

BALACHEFF, N. (1998). *Apprendre la preuve* (draft copy).

BARTOLINI BUSSI, M.; BOERO, P.; FERRI, F.; GARUTI, R. and MARIOTTI, M.A. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceedings of PMEXXI*, Lathi, v.1, pp. 180-195.

BAULAC, Y.; BELLEMAIN, F. and LABORDE, J. M.(1988). *Cabri-Géomètre, un logiciel d'aide à l'apprentissage de la géomètrie. Logiciel et manuel d'utilisation*. Paris, Cedic-Nathan.

BOERO, P.; GARUTI, R. and MARIOTTI, M. A.(1996). Some dynamic mental process underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of PME XX,* Valencia, v. 2, pp. 121-128.

BOTTINO, R. M. and CHIAPPINI, G.(1995). ARI-LAB: models, issues and strategies in the design of a multiple-tools problem solving environment. Kluwer Academic Publishers. *Instructional Science*, v. 23, n. 1-3, pp. 7-23.

CHAZAN, D. (1993). High school geometry student's justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, v. 24, pp. 359-387.

FURINGHETTI, F. and PAOLA, D. (1998). Context influence on mathematical reasoning. Stellenbosh. *Proceedings of PMEXXII*, v. 2, pp. 313 - 320.

LABORDE, C. (1998). "Relationship between the spatial and theoretical in geometry: the role of computer dynamic representations in problem solving". In: TINSLEY, D. and JOHNSON, D. (eds.). *Information and Communications Technologies in School Mathematics*. London, Chapman & Hall.

LABORDE, J. M. and STRÄSSER, R. (1990). Cabri-Géomètre: A microworld of geometry for guided discovery learning, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 90, n. 5, pp. 171-177.

MARIOTTI, M. A. (1996). Costruzioni in geometria: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* v. 19B, n. 3, pp. 261 - 287.

NOSS, R.: 1995, Thematic Chapter: Computers as Commodities. In: DI SESSA, A. A.; HOYLES, C. and NOSS, R. (eds.). *Computers and exploratory learning*. Berlin, Springer Verlag (Nato Asi Series F, v. 146).

OLIVERO, F. (1999). *Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations*. 4th INTERNATIONAL CONFERENCE FOR TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING, Plymouth (in print).

OTTE, M. (1999). Proof and Perception III, *International Newsletter on the Teaching and Learning of proof,* http://www.cabri.net/Preuve/.

PERKINS, D. N. (1985). The fngertip effect: How information-processing technology changes thinking. *Educational Researcher,* v. 14, n. 7, pp. 11-17.

PIMM, D.(1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. New York, Routledge.

POLYA, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton, NJ, Princeton, University Press.

Recebido em ago./2002; aprovado em out./2002

Dissertações defendidas no primeiro semestre de 2003

FACCO S. R. *Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem*
(Concept of area: a proposal for teaching and learning)
Palavras-chave: conceito de área, decomposição, configuração, composição, perímetro, ensino-aprendizagem.
Key-words: concept of area, decomposition, configuration, composition, teaching and learning.

LEME, J. C. M. *Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada*
(Processual and Structural aspects of the derivative notion)
Palavras-chave: cálculo, derivada, desenvolvimento conceitual, livro didático.
Key-words: calculus, derivative, conceptual development, textbook.

MARTINS, V. L. O. F. *Atribuindo significado ao seno e cosseno utilizando o software Cabri-Géomètre*
(Attributing meaning to sine and cosine using the software Cabri-Géomètre)
Palavras-chave: ciclo trigonométrico, seno e cosseno, ferramenta-objeto, seqüência de ensino, Cabri-Géomètre.
Key-words: trigonometric cycle, sine and cosine, tool-object, teaching sequence, Cabri-Géomètre.

MEYER, C. *Derivada/reta tangente: imagem conceitual e definição conceitual*
(Derivate/Tangent: concept image and concept definition)
Palavras-chave: imagem conceitual, definição conceitual, derivada, reta tangente.
Key-words: concept image, concept definition, derivative, tangent line.

NAKAMURA, O. Y. A. *Generalização de padrões geométricos: caminho para construção de expressões algébricas no ensino fundamental*
(Generalising geometric patterns: routes to constructing algebraic expression in secondary school mathematics)
Palavras-chave: generalização, padrões, seqüência, expressões algébricas, equivalência de expressões, abstração.
Key-words: generalisation, patterns, sequence, algebraic expressions, equivalence of expressions, abstraction.

PELHO, E. B. B. *Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis*
(Introducing the function concept: the importance of understanding variables)
Palavras-chave: função, variáveis, dependência entre variáveis, aquisição de conceito, registros de representação.
Key-words: function, variables, dependability between variables, concept acquisition, representation registers.

SANTOS, S. da S. *A formação do professor não especialista em conceitos elementares do bloco Tratamento da Informação: um estudo de caso no ambiente computacional*
(The education of a non-specialist teacher in elementary concepts of the block Data Handling: A case study in a computational environment)
Palavras-chave: estatística, informática, formação de conceitos, séries iniciais e formação de professor.
Key-words: statistics, computational environments, concept formation, education of teachers at the elementary school level.

SANTOS, V. C. M. *A Matemática escolar nos anos 1920: uma análise de suas disciplinas através das provas dos alunos do Ginásio da Capital do Estado de São Paulo*
(School Mathematics in the 1920s: a analysis of its disciplines through student tests of the Ginásio da Capital do Estado de São Paulo)
Palavras-chave: educação matemática, ginásio da capital de São Paulo, Benedito Castrucci, reforma Francisco Campos, reforma Rocha Vaz, arquivos escolares.
Key-words: mathematics Education, Ginásio da Capital de São Paulo, Benedito Castrucci, Francisco Campos reform, Rocha Vaz reform, school files.

SILVA, C. D. P. *Problemas de transformações geométricas: diferentes apreensões de figuras em ambiente de geometria dinâmica*
(Geometrical transformation problems: different aprehensions of figures in a dymanic geometry environment)
Palavras-chave: transformações geométricas; classes de problemas; intra e interfigural; apreensões de uma figura; Cabri-Géomètre.
Key-words: geometric transformations; classes of problems; intrafigural and interfigural; apprehension of figures; Cabri-Géomètre.

VEIGA, M. S. *Interpretações de estudantes sobre comprimentos de segmentos*
(Students' interpretations about the length of segments)
Palavras-chave: conservação de comprimento, Teorema de Thales, divisão de segmentos.
Key-words: length conservation, Thales' Theorem, division of segments.

WERNECK, A. P. T. *Euclides Roxo e a reforma Francisco Campos: a gênese do primeiro programa de ensino de Matemática Brasileiro*
(Euclides Roxo e the Francisco Campos reform: the genesis of the first Brazilian Mathematics teaching programme)
Palavras-chave: educação matemática, reforma Francisco Campos, Euclides Roxo, arquivos pessoais.
Key-words: mathematics education, Francisco Campos reform, Euclides Roxo, personal files.

Normas para publicação

Pesquisadores interessados em contribuir com publicação nesta revista deverão preparar o texto e enviá-lo segundo as regras que se seguem.

Preparação para envio – uma cópia do texto em disquete(s) com os nomes dos autores e sem numeração de página. Outras quatro (4) cópias impressas, sendo que uma deve ser idêntica à(s) do(s) disquete(s) e as outras três (3) devem ter numeração de página e não trazer os nomes dos autores.

Versão – programa Word 6.0 for Windows, para ser lido em PC.

Formatação

Título – centralizado, em letras maiúsculas e em negrito.

Nomes dos autores – em uma só das vias impressas e no disquete, separar os nomes dos autores do título por um espaço simples entre linhas. Os dados de cada autor deverão ser colocados conforme exemplo, abaixo do título.

Ex: Maria Dolores da Silva
Mestre em Educação Matemática – PUC-SP
Professora do Curso de Matemática – PUC-SP
e-mail: dolores@pucsp.br

Resumo – em português e inglês ou francês, com, no máximo, 10 linhas, espaço duplo, mesma fonte do texto, em itálico, acompanhado de três palavras-chave.

Corpo do texto – Papel tamanho A4
Margem superior e inferior com 2,5 cm
Margem direita e esquerda com 3,0 cm
Fonte Times New Roman,
Tamanho da letra 12 pontos.
Espaçamento entre linhas 1,5 linha
Alinhamento justificado

Referências bibliográficas – de acordo com as normas da ABNT em vigor.

Exemplos:

- Livro

  GOMES, L. G. F. (1998). *Novela e sociedade no Brasil.* Niterói, EdUFF. (Coleção Antropologia e Ciência Política, 15).

- Tese

  BARCELOS, M. F. P. (1998). *Ensaio tecnológico, bioquímico e sensorial de Soja e guandu enlatados no estádio verde e maturação de colheita*. Tese de doutorado em Nutrição, Campinas, Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas.

- Artigo de revista

  GURGEL, C. (1997). Reforma do Estado e segurança pública. *Política e Administração*, Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, pp. 15-21, set.

Citações no texto – citações no texto devem vir acompanhadas de sobrenomes(s) do(s) autor(es) em corpo menor e entre parênteses, acrescido do ano de publicação e página.

Tabelas e gráficos – deverão ter como elementos: número, título, data de referência, fonte e nota.

Impressão – em jato de tinta ou em laser. Páginas impressas só numa face.

Os trabalhos devem ser enviados para:
Revista Educação Matemática Pesquisa
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 - Consolação - SP - CEP 01303-050
Fone: (11) 3124-7210
Fax: (11) 3159-0189
e-mail: pgedmat@pucsp.br

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

REVISTA DO PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa publica trabalhos voltados para as linhas de pesquisa: *A Matemática na estrutura curricular e a Formação de Professores; Epistemologia e Didática da Matemática; Tecnologias de Informação* e *Didática da Matemática.* Também está aberta para outros campos do conhecimento, que venham proporcionar um diálogo com a área, como a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História das Ciências e a História Disciplinar.

INFORMAÇÕES PARA AQUISIÇÃO

Anexo cópia do depósito em conta no **Banco Bradesco**, agência 3227-1, c/c 1285-8, favorecido **Sonia B. C. Igliori**, para aquisição dos seguintes exemplares de *Educação Matemática Pesquisa:*

☐ v. 1 n. 1 ☐ v. 1 n. 2 ☐ v. 2 n. 1 ☐ v. 2 n. 2	R$ 40,00
☐ v. 1 n. 1 ☐ v. 1 n. 2	R$ 24,00
☐ v. 2 n. 1 ☐ v. 2 n. 2	R$ 24,00
☐ v. 3 n. 1 ☐ v. 3 n. 2	R$ 30,00
☐ v. 4 n. 1 ☐ v. 4 n. 2	R$ 30,00
☐ v. 5 n. 1 ☐ v. 5 n. 2	R$ 30,00

Número avulso: ______________________________ R$ 18,00 (cada)

Nome: ____

Endereço: ____

____

Cep: ______________ Cidade: __________________ Estado: ___

Telefone: ___________ Fax: ___________ Ocupação: _________

Impressão de miolo e acabamento:

Gráfica da PUC-SP

Rua Ministro Godói, 965 – Perdizes – SP

Tel.: 3670-8366

SUMÁRIO