ISSN 1516-5388

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

v. 3 – n. 2 – 2001

educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA v. 3 – n. 2 educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

A ***Educação Matemática Pesquisa*** conta com o trabalho de pareceristas *ad hoc*.

Correspondência:

Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Rua Marquês de Paranaguá, 111 – CEP 01303-050 – Consolação – São Paulo – SP

Fone: (11) 3256-1622 ramal 202

Fax: (11) 3159-0189

E-mail: pegedmat@exatas.pucsp.br

Expediente: de segunda a sexta-feira das 10h30min às 12h e das 13h30min às 17h30min

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática
puc-sp

ISSN 1516-5388

Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 3, n. 2, pp. 1-150, 2001

educ
2001

Catalogação na fonte – Biblioteca Reitora Nadir Gouvêa Kfouri / PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática / Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - n. 1 (março de 1999) - São Paulo : EDUC, 1999 -
semestral
ISSN 1516-5388

1. Educação Matemática Pesquisa - periódicos. I. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

EDUC – Editora da PUC-SP

Direção
Maria Eliza Mazzilli Pereira
Denize Rosana Rubano

Coordenação Editorial
Sonia Montone

Revisão
Sonia Rangel

Revisão de Inglês
Carolina Muniz Ventura Siqueira

Editoração Eletrônica
Digital Press

Capa
Sara Rosa

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

educ
Rua Ministro Godói, 1213
Cep 05015-001 - São Paulo - SP
Fone: (11) 3873-3359 / Fax: (11) 3873-6133
E-mail: educ@pucsp.br
Site: www.pucsp.br/educ

Associação Brasileira de Editores Científicos
ABEC

ABDR
EDITORA AFILIADA

Projeto Editorial

A revista *Educação Matemática Pesquisa*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, de regularidade semestral, constitui um espaço de divulgação de pesquisas científicas da área.

O projeto editorial da revista prioriza artigos científicos, inéditos no Brasil, da área de Educação Matemática. Mais particularmente, aqueles relacionados às linhas de pesquisa do Programa: A Matemática na estrutura curricular e formação de professores; História, Epistemologia e Didática da Matemática; e Tecnologias da Informação e Didática da Matemática. A prioridade dada às linhas descritas não é extensiva aos referenciais teóricos, ao contrário, procura-se contemplar a diversidade.

Serão acolhidos, também, artigos que favoreçam o diálogo entre Educação Matemática e áreas afins, como a Matemática, a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História da Matemática e a História das Disciplinas, entre outras.

A seleção dos artigos faz-se mediante a aprovação de dois pareceristas do conselho editorial ou *ad hoc.* Os pareceres serão enviados aos autores.

Os artigos são apresentados sempre na versão original, com resumos bilíngües (português e inglês ou francês).

O projeto editorial prevê, ainda, que os volumes da revista contenham uma ou mais modalidades, como análises ou relatos de pesquisa, comunicações (ciclo de palestras, conferências), entrevistas, depoimentos ou resenhas científicas.

Em cada número, haverá indicações sucintas das dissertações e teses produzidas no Programa, no semestre de edição.

Conselho Editorial

Editorial Project

The journal Educação Matemática Pesquisa *of the Post-Graduate Studies in Mathematics Education Program, PUC/SP, is published each semester with the aim of providing a space for disseminating scientific research in the area.*

The policy adopted by the editors is to prioritize scientific articles related to Mathematics Education previously unpublished in Brazil and particularly those addressing the lines of research of the program: Mathematics, curriculum structure and teacher training; History, Epistemology and Didactics of Mathematics; and Information technology and the Didactics of Mathematics. The priority given to the described lines is not restricted to theoretical references, on the contrary, it is hoped that the journal will reflect the diversity that characterizes research in Mathematics Education.

The editors also encourage the submission of articles which open dialogues between Mathematics Education and related areas, such as Mathematics, Epistemology, Educational Psychology, Philosophy, History of Mathematics and its teaching amongst others.

In order to be selected, articles should receive two favorable reviews. Referees will be chosen from the editorial committee or ad hoc *reviewers. Authors will receive copies of the reviews.*

Articles will be presented always in the original language of the author along with abstracts in Portuguese and English or French.

The editors anticipate that the volumes of the journal will include works of various different types including, for example: research reports, papers based on lectures or conferences, interviews, commentaries on issues pertaining to research, critiques of articles and books, literature reviews and theoretical analyses.

Each issue, will also include the titles of the dissertations and theses produced in the Program during the semester of the edition.

Editorial Committee

Sumário

Editorial

Aproveitamos este espaço para apresentar aos nossos leitores algumas informações sobre os artigos e seus autores.

O professor Michael Otte, matemático e filósofo de formação, é pesquisador da Universidade alemã de Bielefeld. Foi ele um dos primeiros, em todo mundo, a destinar suas investigaçãoes à área da Educação Matemática. Assim sendo, ele tem contribuído para formar mestres e doutores em diversos países e, em particular, no Brasil, tendo sido professor visitante da Unesp de Rio Claro, da Unicamp e da Universidade Federal do Mato Grosso. Seus trabalhos enquadram-se na área da epistemologia da matemática. O artigo apresentado neste número trata da epistemologia da matemática de um ponto de vista semiótico e foi traduzido por pesquisadores da Unicamp.

O professor Vincenç Font é pesquisador da área de Educação Matemática da Universidade espanhola de Barcelona. Seus estudos têm sido dirigidos à Didática da Matemática, tanto do ensino médio quanto universitário, enfocando linguagem e semiótica para análise de episódios de sala de alua. Recentemente, ele incopora a idéia de metáforas conceituais proposta por Lakoff e Núñez. No artigo deste número, Font explora e fundamenta perspectivas para a didática da matemática.

Rafael Núñez é professor e pesquisador da University of California at San Diego. Trabalhou muitos anos em pesquisa com George Lakoff, em Berkeley. Juntos, escreveram o livro *Where Mathematics comes from*, entre outros. Seu principal interesse é na abordagem multidisciplinar do estudo científico da mente e, há mais de uma década, vem trabalhando nas bases da teoria da cognição corporificada (*embodiment cognition*). Na educação matemática, ele vem trabalhando em cooperação com pesquisadores da Itália, França, Espanha, Chile, Brasil, Suíça e Estados Unidos. Foi membro do comitê internacional do PME. No artigo aqui apresentado, ele enfoca, principalmente, a idéia de metáfora conceitual para a compreensão da passagem de tempo.

Completam este periódico os títulos das dissertações produzidas no Programa durante o segundo semestre de 2001.

Editores

Editorial

We take this opportunity to provide our readers with some information on the articles and its authors.

Professor Michael Otte, mathematician and philosopher, is a researcher at the German University of Bielefeld. He was one of the first researchers in the world to carry out his investigations in the area of Mathematics Education. Thus, he has contributed to form masters and doctors in many countries, particularly in Brazil, having been visiting professor at the following Brazilian universities: Unesp-Rio Claro, Unicamp, and the Federal University of Mato Grosso. His works are developed in the area of mathematical epistemology. The article presented in this issue deals with mathematical epistemology from a semiotic point of view and was translated by Unicamp researchers.

Professor Vincenç Font is a researcher in the area of Mathematics Education at the Spanish University of Barcelona. His studies have focused on Didactics of Mathematics, both in secondary school and in university, and he has dealt with language and semiotics for the analysis of classroom episodes. Recently, he incorporated the idea of conceptual metaphors proposed by Lakoff and Núñez. In the article of this issue, Font explores and grounds perspectives for the didactics of mathematics.

Rafael Núñez is a professor and researcher at the University of California, San Diego. He worked for many years with George Lakoff in Berkeley. Together, they wrote, among other books, Where Mathematics comes from. His main interest is the multidisciplinary approach to the scientific study of the mind, and for more than a decade he has been working on the bases for embodiment cognition theory. In the area of mathematics education, he has worked in cooperation with researchers from Italy, France, Spain, Chile, Brazil, Switzerland and the United States. He was a member of the international committee of PME. In the article presented here, he focuses, mainly, on the idea of conceptual metaphor for the understanding of time flow.

The titles of dissertations developed in the Program during the second semester of 2001 complete the present issue of the journal.

The Editors

Epistemologia matemática de um ponto de vista semiótico*

MICHAEL OTTE **

Tradução: Antonio Henrique, Flavio Orlandi, Marcio Constantino Martino, Virgínia Cardia Cardoso, Valéria de Carvalho ***
Revisão da tradução: Maria Laura Magalhães Gomes ****

Resumo

É impossível que tudo signifique alguma coisa. Nem tudo no mundo é razoável e inteligível. A realidade na qual nós vivemos consiste, essencialmente, de dois tipos de entidades: signos, que têm significados, e objetos, que representam a existência real pura. Existentes podem reagir com outros existentes, mas nada significam. Significados, em contraste, são possíveis, isto é, sua objetividade reside no futuro. O significado de uma lei natural ou de um conceito matemático, por exemplo, deve ser visto em suas aplicações potenciais futuras. Os significados de um signo não devem ser confundidos com o próprio signo. Um signo pode ter diferentes tipos de significados, dependendo do código e do contexto, ou seja, signos, além de fazerem parte de um sistema formal, têm significado objetivo. Enquanto, na ciência empírica, existe uma distinção natural entre fatos e possibilidades ou objetos e signos ou coisas e leis (relações), as relações parecem ser universais na Matemática. A distinção entre objetos e relações, em conseqüência, torna-se

* Artigo apresentado em 15/7/01, no DG3 – Semiotics in Math Education, PME-2001, ocorrido em Utrecht.

** Professor do Instituto de Didática da Matemática da Universidade de Bielefeld – Alemanha. E-mail: michaelontra@aol.com.br.

*** Doutorandos da área temática de Educação Matemática do Programa de Pós-graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Membros do Grupo de Pesquisa Hifem (História, Filosofia e Educação Matemática), filiado ao Cempem (Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática). E-mail: forlandi@dgenet.com.br; fvcardia@uol.com.br; valcarvalho@uol.com.br.

**** Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG); doutoranda da área temática de Educação Matemática do Programa de Pós-graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) e membro do Grupo de Pesquisa Hifem (História, Filosofia e Educação Matemática), filiado ao Cempem (Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática). E-mail: laura@mat.ufmg.br.

extremamente relativa. Dentro da Matemática não existe, absolutamente, nível ontológico fundamental. Ainda assim, a Matemática não é uma ciência analítica. No argumento de uma prova geométrica, por exemplo, nós usamos, freqüentemente, frases como: "o triângulo A é congruente ao triângulo B" ou "a reta C é paralela à reta D", ou "o ponto X coincide com o ponto Y", etc. Isso indica que os significados matemáticos refletem possibilidades objetivas. Foi Charles S. Peirce (1839-1913) que explorou sistematicamente as conseqüências dessa situação. O artigo tenta explicar alguns fenômenos da cognição matemática usando uma perspectiva peirceana.
Palavras-chave: educação matemática; semiótica; matemática.

Abstract

It is impossible that everything in the world means something. Not everything is reasonable. The reality in which we are living consists, essentially, of two kinds of entity: signs that have meanings, and objects that represent the pure actual essence. Meanings are possible, i.e., their objectivity depends on the future. The meaning of a natural law or a mathematics concept has to be seen within its future potential applications. The meanings of a sign must not be confused with the sign itself. A sign can have different meanings depending on the code or the context. There is a natural distinction between facts and possibilities, objects and signs, things and laws in empirical sciences, while in mathematics the laws or relations seem to be universal. In mathematics there is no fundamental ontological level; even so, mathematics is not an analytical science. In a geometrical proof argumentation we usually use phrases like "triangle A is congruent with triangle B» and so on. It shows that meaning in mathematics reflects objective possibilities. It was Charles Pierce (1839 to 1913) who systematically explored this situation and its entailments. This article intends to explain mathematics cognition phenomena from this point of view.
Key-words: *mathematics education; semiotics; mathematics.*

O que é epistemologia matemática de um *ponto de vista semiótico*?

Não existe resposta curta para essa questão. Darei, entretanto, algumas ilustrações exemplares do que queremos dizer com isso, começando pelas suposições que se seguem. Essas suposições deveriam ser entendidas em analogia com axiomas matemáticos. Elas devem ser abordadas, de preferência, diretamente, sem maiores considerações quanto às sutilezas e enigmas inerentes e devem ser explicadas e desenvolvidas num futuro trabalho:

– Todo o nosso acesso cognitivo à realidade, em vez de ser direto e absoluto, é relativo e mediado por signos. Mas signos devem ser incorporados e, assim, dependem de objetos a fim de possivelmente se tornarem realidade e funcionar como signos. Dessa maneira, tem sido sempre uma questão, se vivemos em um ou em diferentes tipos de mundo (Bateson, 1973, p. 215). O holismo como uma tese epistemológica, por exemplo, enfatiza a coerência e a compreensão como critérios essenciais de significado e verdade, de modo que, levando essa visão ao extremo, apenas um sistema total de conhecimento parece completamente adequado.

– Signos têm significado e se referem a objetos. Significados e objetos de signos podem ambos ser, eles mesmos, signos.

– O significado último ou o fundamento básico de um signo não pode ser, ele mesmo, um signo: ele deve ser da natureza ou de uma intuição ou de um evento singular. A palavra "*Stuhl*", por exemplo, não significa nada para uma pessoa que não sabe alemão. Para transmitir o significado desse símbolo a alguém, deve-se transformá-lo em algo perceptível, apresentando uma cadeira ou uma imagem dela, ou exibindo o ato de sentar ou o que quer que seja. Resumindo, temos de apresentar algo que seja perceptível, de modo que, se alguém responde a isso apropriadamente, por tal meio revele, descubra, torne manifesto, torne aparente, faça experiencialmente presente ou torne disponível alguma coisa sobre cadeiras. Nós não vemos cadeiras, mas ícones ou imagens de alguma coisa suposta ser uma cadeira, e não uma alucinação. Ao mesmo tempo, o que nós vemos não é uma imagem, por que não reagimos a imagens. Nós nos sentamos, por exemplo, em cadeiras e não em imagens de cadeiras. O que eu quero dizer no momento, por meio dessas formulações paradoxais, é que não há caminho direto da linguagem e da representação para a realidade e que a "vida mental começa com nossa mera constituição fisiológica" (Langer, 1996, p. 89).

– A realidade ou o mundo no qual vivemos consiste, essencialmente, de dois tipos de entidades: signos, que têm significados, e objetos, que representam a existência real pura. Existentes podem reagir com outros existentes, mas nada significam. Significados, em contraste, são possíveis, isto é, sua objetividade reside no futuro. O significado de uma lei natural ou de um conceito matemático, por exemplo, deve ser visto em suas aplicações potenciais futuras. Os significados de um signo não devem ser confundidos com o próprio signo. Um signo pode ter diferentes tipos de significados, dependendo do código ou do contexto.

– É impossível que tudo signifique alguma coisa. Nem tudo no mundo é razoável e inteligível. Existem sentimentos puros ou fatos brutos que parecem escapar a qualquer explicação racional. Nós, portanto, não podemos descrever ou explicar tudo. Nem epistemologia nem ontologia devem ser concebidas a partir de uma perspectiva de olho de Deus. Freqüentemente, declara-se que a abordagem semiótica nos obriga a viver no interior de um mundo de comunicação ou interpretação e, consequentemente, seria melhor abandonarmos a idéia de um mundo que contém objetos e nos concentrarmos no mundo muito mais rico das idéias e conceitos. Tal visão esquece, entretanto, que a semiótica também está relacionada à significação, e transformaria todo conhecimento em conhecimento analítico (cf. Otte e Panza, 1997).

– Enquanto, na ciência empírica, existe uma distinção natural entre fatos e possibilidades ou coisas e leis (relações), as relações parecem ser universais na matemática. A distinção entre objetos e relações, conseqüentemente, torna-se extremamente relativa. Dentro da matemática, não existe absolutamente nível ontológico fundamental. Ainda assim, a matemática não é uma ciência analítica a partir de conceitos, mas, ao contrário, tem sempre também de empregar exemplos particulares deles. No argumento de uma prova geométrica, por exemplo, nós usamos, freqüentemente, frases como: "o triângulo A é congruente ao triângulo B" ou "a reta C é paralela à reta D", ou "o ponto X coincide com o ponto Y", etc.

– L. Tharp (1989) propôs recentemente uma nova versão do conceptualismo. Ele quer evitar todos os problemas colocados pela visão referencial da matemática desde seu início, sugerindo a idéia de que afirmações matemáticas deveriam ser consideradas como expressando relações entre conceitos. O problema com o conceptualismo consiste no fato de que conhecimento e cognição são identificados. Nós não temos mais, de forma alguma, uma variedade indeterminada de acessos aos "objetos" ou pensamentos em questão. Mas a matemática não é sobre conceitos ou qualidades de objetos. Ela lida com relações entre objetos. Identificar conceitualmente objetos particulares de um modo leibniziano requereria, pelo menos, infinitas definições (mas já os números naturais, por exemplo, não podem, como Skolem mostrou, ser caracterizados nem mesmo por um número infinito de axiomas lógicos). Portanto, representações e percepções icônicas são essenciais para introduzir qualquer coisa nova no discurso matemático. Os professores de matemática, muitas vezes, não gostam de representações por ícones, acreditando que elas confundem e são não controláveis com respeito ao seu impacto (Otte, 1983, p. 20). Isso poderia ser tão verdadeiro quanto essencial, se alguma coisa nova deve ser aprendida.

– A epistemologia semiótica, conseqüentemente, começa da suposição de que as características essenciais de um ato de criação imaginativa consistem em ver um A como um B: A = B, bem como em que uma igualdade não é estabelecida por lógica apenas. Em matemática, verificam-se sempre novas representações do mesmo. Um objeto matemático, tal como "número" ou "função", não existe independentemente da totalidade de suas possíveis representações, mas também não deve ser confundido com qualquer representação particular. A objetividade matemática depende da "superdeterminação" (*overdetermination*), que simplesmente significa que existe mais de um modo de chegar lá.

– O construtivismo semiótico matemático, como talvez possa ser chamada a visão da matemática "como um negócio com ideogramas fabricados e não descobertos" (Rotman), tem algumas vezes levado ao *slogan*: "primeiro existem os numerais e então existem os números, não o caminho inverso" (Van Bendegem). Essa semiótica construtiva ou leva ao finitismo matemático estrito ou à introdução de um "Axioma da Infinidade" (Russell). O construtivismo semiótico tem a vantagem, sobre o construtivismo matemático em geral (pense em Brouwer ou na epistemologia genética de Piaget), de não acreditar na "objetividade sem existência" (Castonguay, 1972, p. 88). Não há atividade sem existentes ou objetos, ainda que esses objetos possam pertencer a alguma realidade virtual.

– A epistemologia é sobre o relacionamento entre esses tipos de entidades, objetos e signos. Como todos os fenômenos gerais são fundamentalmente entidades semióticas, enquanto fenômenos singulares não são intrinsecamente signos, poderíamos também dizer que a epistemologia concerne à relação entre o singular e o geral. Desse modo, a generalização aparece como um problema fundamental da epistemologia e da educação. Conhecer significa relacionar uma experiência particular a um conceito (um predicado) ou a uma regra (uma lei), já que não há nenhum raciocínio de particulares para particulares. Assim, conhecer implica, em qualquer caso, relacionar um particular a um geral, ou seja, generalizar.

– Um particular ou individual, por ser representado e por estar, desse modo, sendo transformado em um signo, torna-se um geral e "aquilo que é geral é da natureza de um signo geral" (Peirce, CP1.26). Isso nos é bem familiar quando pensamos na pintura. Uma paisagem particular, por exemplo, se pintada, adquire uma nova qualidade, torna-se ligada a um certo estilo, uma certa maneira de ver, uma concepção da realidade é exibida no produto que influenciará futuros pintores ou até mesmo pessoas simples quando olharem para paisagens. Um signo é um geral porque tem um efeito no futuro. E a estilística pode ser usada apenas por pessoas "que são capazes de alternar repetidamente do particular ao geral e do geral ao particular sem continuamente perder o equilíbrio enquanto dançam esse Charleston particular" (Aragon, 1928, pp. 100-101; ver também Otte, 1991).

– A realidade que poderia ser inteligível deve ser representada e assim generalizada. A essência de qualquer coisa é a essência de uma representação daquela coisa. As características do que quer que exista dependem do sistema de representações através do qual elas são significadas. Nem construção nem representação garante a existência de uma coisa.

– Eventos ou situações são sempre concretos e particulares. Quando nós tentamos, entretanto, abordá-los em termos de sua imediata "Primeiridade"[1] (Peirce), temos sucesso apenas se existe um elemento recorrente ou constante presente. Do contrário, tudo o que permanece é um conjunto de objetos ou sentimentos, que nós não podemos apreender nem lembrar porque não podemos qualificá-los. Além disso, um Primeiro é inevitavelmente seguido de um Segundo, porque somos seres corporais individuais num mundo reativo. Todos, certamente, têm tido, algumas vezes na vida, a experiência dos choques violentos que um conflito emocional pode produzir. Consequentemente, a questão de como emoções e sentimentos podem ser concebidos como ingredientes da racionalidade permanece importante.

---

1 Traduzimos *Firstness* como Primeiridade, *Secondness* como Segundidade e *Thirdness* como Terceiridade, de acordo com Armando Mora D'Oliveira e Sérgio Pomerangblum, tradutores de Peirce. Peirce, C. S. *Escritos Coligidos* (São Paulo, Abril Cultural) 1974 (N. R.).

– Existe uma visão oposta na semiótica, às vezes chamada de "semiótica existencial" (Tarasti, 2000) ou "idealismo semiótico", a qual tenta argumentar que o universo inteiro é basicamente de natureza semiótica e que signos surgem apenas a partir do desenvolvimento de outros signos. Bem, antes de mais nada, uma tal posição não é possível na epistemologia, se concebida do ponto de vista de um sujeito humano limitado, porque muitas coisas ha vida não têm significado nem sentido. Em segundo lugar, deve-se perguntar se é ou não confiável ignorar a experiência que é anterior à interpretação, bem como negar a existência do acaso ou fato bruto, não governado por lei.

– Para a mente individual, a representação lingüística pode parecer um empobrecimento e uma falsificação da riqueza das experiências mentais e intuições. Da perspectiva da linguagem e comunicação, entretanto, parece óbvio que nenhum pensamento ou signo pode ser exaurido por uma interpretação e experiência individual e, assim, é infinitamente mais complexo e variado na medida em que pode ser compreendido por qualquer atualização ou interpretação. Ainda assim, contudo, o progresso da ciência e a sua história são influenciados e moldados de modos essenciais pela imprevisibilidade e peculiaridade da intuição individual e por eventos particulares e inesperados.

– Além disso, em epistemologia, tanto quanto em lógica ou em teoria da comunicação, temos de reconhecer que comunicação e conhecimento são possíveis somente quando há algum Outro, que nem se funde com o Sujeito nem é totalmente diferente dele. Na intuição, conhecimento do fato e conhecimento de sua verdade coincidem. Ao mesmo tempo, o sujeito cognitivo é transformado em um meio, em um mero meio de cognição. O sujeito auto-reflexivo (e também sujeito social-comunicativo) é, entretanto, sempre também um objeto de pensamento e comunicação. E para estabelecer essa complementaridade de significados e objetos, uma instituição mediadora é indispensável. Ela é concebida pela idéia de signo ou representação.

O que é então um signo?

A resposta parece bastante simples. Qualquer coisa concreta, marca ou símbolo pode ser um signo. E não há, na verdade, nenhum signo sem uma marca ou fato concreto. Mas um signo possui um significado, que uma coisa não possui. Signo e significado do signo não devem ser identificados. Um signo não é um signo, a menos que tenha um impacto ou funcione como um signo. Assim, uma primeira resposta à nossa pergunta pode ser tentada: definir um signo em termos da função comunicativa ou representacional. Uma tal visão ou levará a uma teoria psicologista do significado ou terá de reconhecer uma realidade objetiva ou geral dos significados. O significado de um signo não deve ser confundido nem com as compreensões de um intérprete particular nem com um uso particular do signo. Signos e significados são gerais, enquanto objetos ou sentimentos são particulares. Contrariamente ao nominalismo, que faz a diferença entre signo e coisa depender exclusivamente de um intérprete, na visão de Peirce, alguma coisa pode ser intrinsecamente um signo ou pelo menos pode funcionar objetivamente como tal.

O significado, diz Susanne Langer, é uma função de um termo:

> Uma função é um padrão visualizado com referência a um termo especial a cuja volta ele se concentra; esse padrão emerge quando consideramos para o termo dado em sua relação total com os outros termos à sua volta. O total pode ser bem complicado. (1996, p. 55)

Devemos, no entanto, ser cuidadosos no sentido de, em nossos esforços para descrever a função comunicativa, não sermos levados a contextos que tendem a ser mais e mais vastos (o contexto psicológico, o contexto educacional, o contexto sociocultural, etc.) porque, nesse caso, no final perdemos de vista a própria idéia de signo ou mediação semiótica.

É claro que eu posso responder a uma série "sem significado" ou arbitrária de símbolos expressos por um macaco, proferindo ao acaso qualquer conjunto de símbolos igualmente sem padrão como um interpretante intencional para a primeira elocução, e isso pode encetar uma outra série igualmente sem sentido, etc. Assim, o significado certamente deve ser associado a restrições ou leis "objetivas" e com estrutura e redundância, e, em última análise, com aplicação. As restrições da grafia e da sintaxe, por exemplo, são pré-requisitos primeiros para a livre expressão de pensamento.

Um problema similar surgiu quando se questionou sobre o lugar do significado na teoria da informação. Em seus abaladores artigos sobre a teoria da informação, Shannon define aquilo que ele chamou de quantidade de informação, que é medida essencialmente em termos de imprevisto estatístico. Visto que o imprevisto de uma mensagem pode até contrariar sua expressividade, Shannon insistiu em que o conceito de "significado" está fora do âmbito da teoria da informação. Isso tem dado origem à conseqüência indesejável, particularmente no debate sobre o "pensar" dos computadores, de uma aparente oposição entre o mecânico e o espiritual, para um dualismo corpo-mente. Propostas para ignorar esse dualismo definindo o significado da mensagem simplesmente como o padrão de comportamento que ela produz no receptor, por várias razões, não serão suficientes.

Informações teóricas, entretanto, tentaram ultrapassar esse indesejável dualismo mediante uma abordagem funcional do problema do significado, perguntando, por exemplo, qual é a diferença entre quando alguém recebe uma mensagem e quando alguém compreende o significado de uma mensagem. O efeito de uma mensagem, escreve Mackay, respondendo a tal questão,

> (...) não é necessariamente o que você faz, como têm sugerido alguns behavioristas, mas o que você estaria disposto e pronto a fazer, se dadas (relevantes) circunstâncias surgissem. Não é o seu comportamento, mas antes seu estado de prontidão condicional para o comportamento, que indica o significado da mensagem que você ouviu. (Mackay, 1969, p. 22)

Para definir um signo necessitamos, portanto, que exista um objeto, bem como um intérprete. O pragmatismo, com efeito, é conhecido por acrescentar, à sintaxe e à semântica, uma terceira dimensão, a pragmática. Mas ele não é sobre uma pessoa particular nem sobre um comportamento específico quando falamos do intérprete ou, melhor, do interpretante. Caso contrário, o pragmatismo nada seria senão um tipo muito imperfeito de filosofia empirista ou utilitarista, e a teoria pragmatista do significado viria abaixo para uma estreita forma de verificacionismo. Peirce comenta a esse respeito em 1902, através de uma contribuição ao Dicionário de Filosofia e Psicologia de Baldwins. A máxima pragmática, diz ele aí,

> (...) pode ser facilmente mal aplicada... A doutrina parece assumir que o propósito do homem é a ação. Se for admitido, ao contrário, que a ação quer um propósito e que esse propósito deve ser algo como alguma descrição geral, então o próprio espírito da máxima, que é que devemos dirigir o olhar para a essência de nossos conceitos a fim de apreendê-los corretamente, nos direcionaria em direção a alguma coisa diferente dos fatos práticos, nominalmente, para idéias gerais, como as verdadeiras intérpretes de nosso pensamento. (CP. 5.3)[2]

Sem ordem e regulação não pode haver liberdade de ação. Ação, vontade, esforço por um fim, tudo isso certamente exerce uma compulsão, mas, se essa compulsão é de natureza intelectual, ela está relacionada antes a um geral (regra ou idéia) do que meramente à força bruta.

> Toda compulsão é algo que se realiza "hic et nunc" , isto é, numa particular ocasião, afetando um indivíduo. Ela é essencialmente antigeral. Mas a compulsão da aquiescência racional não é simplesmente uma compulsão individual, ela é algo que é percebido, devendo ser sentida por todo ser racional. (...) Isso(...) deve ser dito que uma tal compulsão geral supõe uma *lei*. A percepção, ou percepção aparente de uma compulsão geral, e portanto de uma lei, deve entrar em toda inferência, de modo que uma inferência deve, na inferência mesma, ser referida a uma classe geral de inferências. (MS 787)[3]

Uma lei inclui uma idéia, bem como uma regra para aplicar essa idéia. Mas aqui jaz a dificuldade (ver a versão de Lewis Carroll de "Aquiles e a tartaruga").

Podemos sintetizar nossas considerações sobre significado até agora dizendo que essa noção de significado é inseparavelmente associada à idéia de possibilidade, porque a possibilidade expressa um relacionamento entre o geral e o particular, entre lei e aplicação ou hábito e regra, ou

---

2 CP é a abreviatura para *Collected Papers of Peirce*; a referência é feita por número do volume e dos parágrafos.

3 MS se refere à obra *Annotated Catalogue of the Papers of C. S. Peirce*; a referência é feita por número do parágrafo.

ainda entre limitantes e limitados. Uma disposição de comportamento nada é senão uma tal relação. Um possível, em contraste com algo real, é alguma coisa que pode ter um efeito objetivo no futuro. Um signo determina seu intérprete, produzindo nessa pessoa um interpretante, que representa o objeto no mesmo tipo de relação que aquela que o próprio signo representa. Um signo funciona tornando relações efetivas, ele funciona como uma regra ou um hábito, por exemplo. Vemos agora que o que poderia ser chamado de o significado do signo é o interpretante. Para o próprio resultado significado de um signo, eu proponho, Peirce escreve, que "o nome, o interpretante do signo... é tudo o que está explícito no próprio signo, exceto seu contexto e circunstâncias de expressão" (CP 5.473).

O que importa aqui é observar que o interpretante é deliberadamente *não* descrito como sendo necessariamente uma idéia na mente de alguma pessoa e não deve ser confundido com o intérprete. O interpretante é aquilo no qual resulta um signo como tal, enquanto o intérprete é um agente pessoal. Sendo a interpretação os efeitos mediadores de um signo, estender-se continuamente é o significado objetivo do signo.

Significados são gerais e não são nem simples qualidades de sentimento, como em "estas qualidades não têm significados intrínsecos além deles mesmos", nem existentes ou fatos reais porque eles também permanecem eventos singulares. Tratar alguma coisa como objeto é tratá-la como coisa identificável e particular, vê-la como um signo significa relacioná-la a algo mais e falar sobre seu significado. Este algo pode ser uma regra ou uma operação ou pode ser algum fenômeno real. A persistência e a continuidade de encontros com um objeto pode provocar essa transição da coisa para o signo. Se eu corro por um bosque e em meu caminho encontro um galho que foi quebrado de um arbusto ou se eu encontro três pedras colocadas no caminho de modo a formar um certo padrão, tudo isso nada significa. Galho e pedra permanecem objetos aos quais eu prestarei pouca atenção. Mas se isso continua a ocorrer repetidamente em meu caminho e o acontecimento tiver uma certa persistência, eu perceberei o galho e as pedras como um signo e não mais apenas como um objeto. E o próprio pensamento que constitui um signo como diferente de um objeto prevalece significando para o signo e é ele mesmo um signo, como em "o significado de um signo é o signo ao qual ele tem de ser traduzido" (CP 4.132). Esse segundo signo, sendo uma idéia ou regra, deve levar, em seu resultado final, insiste o pragmatismo, a alguma ação concreta.

Entretanto, o significado não deve ser identificado com essa ação mais do que uma lei deve ser identificada com uma particular aplicação ou efeito dela.

Signos são essencialmente sinais, eles influenciam ativamente ou determinam seu interpretante. Objetos, em contraste, não possuem nenhuma qualidade por si próprios ou intrinsecamente (CP 2.232). Eles apenas representam a existência factual isolada como tal. Poderíamos, assim, estabelecer a diferença entre objeto e signo dizendo que signos são possíveis.

Essa diferença é de fato algumas vezes afirmada como sendo a característica essencial do pensamento humano. Cassirer escreve, por exemplo:

> (...) em sua Crítica do Juízo, Kant levanta a questão se é ou não possível descobrir um critério geral pelo qual possamos descrever a estrutura fundamental do intelecto humano e distinguir essa estrutura de todos os outros possíveis modos de conhecimento. Depois de uma análise penetrante, Kant é levado à conclusão de que um tal critério deve ser procurado no caráter do conhecimento humano, o qual é tal que a compreensão está sob a necessidade de se fazer uma distinção nítida entre a realidade e a possibilidade das coisas. O conhecimento humano é, por sua própria natureza, conhecimento simbólico. É esse o aspecto que caracteriza ao mesmo tempo sua força e suas limitações. E para o pensamento simbólico é indispensável fazer uma clara distinção entre real e possível, entre coisas reais e ideais. (Cassirer, 1962, p. 86)

Além de perceber a distinção entre real e possível, temos de procurar o relacionamento entre os dois. Se o signo é um símbolo intelectual, seu significado deve ser concebido em termos de lei, disposição ou hábito. Um hábito representa simultaneamente experiência do conhecimento e de suas aplicações, experiência de um conteúdo e das condições de sua verificação. A consciência do hábito, diz Peirce, "é uma consciência ao mesmo tempo da substância do hábito, do caso especial de aplicação, e da união entre os dois" (CP 8.304). Muito do trabalho da ciência cognitiva moderna tem assumido que o pensamento é essencialmente a manipulação de símbolos de acordo com certas regras sintáticas. Um dos principais problemas com essa concepção é o de como as manipulações formais de símbolos são aplicadas e tomam significados apropriados.

Como a aplicação de uma regra não pode, em última análise, ela mesma, ser regida novamente pela regra, se não queremos terminar na regressão infinita (ver a discussão dos Paradoxos de Zenão), os hábitos não podem ser reduzidos a regras, mas devemos antes incluir algo de uma natureza contextual, experiência ou intuição, ou o que quer que seja. Os hábitos claramente ultrapassam a consciência, embora a aprendizagem concebida como mudança de hábito possa ocasionalmente transformar o inconsciente, ou alguma parte do inconsciente, em consciência.

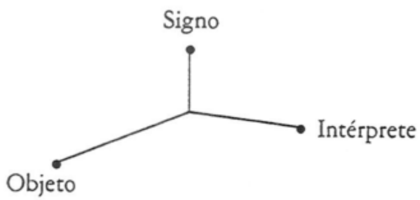

Figura 1

Aceitamos a definição pragmatista de signo de Peirce como representada na Figura 1. Em contraste com os tradicionais modelos diádicos, Peirce define um signo como qualquer coisa que representa alguma coisa (chamada o seu objeto) de tal modo a gerar outro signo (seu interpretante ou significação). Um signo não representa seu objeto em todos os pormenores

> (...) mas em referência a usar uma espécie de idéia, que eu tenho algumas vezes chamado de a base do *representamen*[4]. A palavra idéia deve ser aqui entendida em uma espécie de sentido platônico, muito familiar na conversação do dia-a-dia. (CP 2228 e 4.536)

4 Mantivemos esta palavra no original pela inexistência de um termo adequado na língua portuguesa. Seu significado é "o produto como distinguido da representação filosófica". Fonte: *Webster's Third New International Dictionary* (Chicago, Britannica) 1966 (N. R.).

Enquanto a fórmula clássica retrata o signo em termos de um relacionamento diádico, a definição de Peirce o concebe em termos de uma estrutura triádica. Na semiótica peirceana, a tríade fundamental é precisamente objeto-signo-interpretante (CP 8.361). Esse diagrama possui uma estrutura recursiva: signo dentro do signo, dentro do signo, etc. *ad infinitum*. Assim, um signo não é somente uma coisa, mas também um processo.

> Um Signo é qualquer coisa, escreve Peirce, que está relacionada a uma Segunda coisa, seu objeto, com respeito a uma Qualidade, de tal maneira a trazer uma Terceira coisa, seu interpretante, em relação ao mesmo Objeto, e de tal maneira a trazer uma Quarta em relação àquele Objeto, da mesma forma, ad infinitum. Se a seqüência é interrompida, o Signo perde em certo grau o caráter significativo perfeito. Não é necessário que o interpretante exista realmente. Uma existência no futuro bastará. (CP 292)

Entretanto, a primeira abordagem um tanto ingênua da questão "o que é um signo?" tem algum mérito, já que coloca em primeiro lugar o problema da relação entre signo e objeto. Assumimos a partir de agora que a realidade é feita de objetos e signos, ou contínuos e átomos, ou relações e correlatos, e que, ao caracterizar e classificar signos, o mais importante é seu relacionamento com objetos. Um signo é antes de tudo definido pela relação com um objeto, e essa relação, que é uma mera possibilidade, precisa ser compreendida.

Voltamos, assim, àquela tricotomia dos signos, que Peirce viu como a mais fundamental divisão dos signos, e que é provavelmente a mais conhecida pelos estudiosos da teoria dos signos: é a divisão dos signos em ícones, índices e símbolos.

Peirce nos diz que uma análise da essência de um signo

> (...) nos leva a uma prova de que todo signo é determinado pelo seu objeto, primeiramente, por compartilhar das características desse objeto, quando chamo o signo de Ícone; em segundo lugar, por estar realmente e em sua existência individual relacionado com o objeto individual, quando chamo o signo de Índice; em terceiro lugar, pela certeza mais ou menos aproximada de que será interpretado como denotando o próprio objeto, em conseqüência de

> um hábito (termo que eu uso como incluindo uma disposição natural), quando chamo o signo de Símbolo. (CP 4.531)

Portanto, essa divisão de signos surge porque os mesmos possuem objetos, e ela é baseada em como cada signo representa seu objeto. Em outra ocasião, Peirce declara:

> Descobriu-se que há três tipos de signos, que são indispensáveis em todo raciocínio: o primeiro é o signo diagramático ou Ícone, que exibe sua similaridade ou analogia com o tema do discurso; o segundo é o Índice, que, como um pronome demonstrativo ou relativo, força a atenção para o objeto particular intencionado, sem descrevê-lo; o terceiro, ou Símbolo, é o nome geral ou descrição que dá significado ao seu objeto por meio de uma associação de idéias ou conexão habitual entre o nome e o caráter significado. (CP 1.369)

Categorias universais

Mas antes de tentarmos desdobrar e desenvolver a teoria de signos de Peirce, precisamos mencionar suas *categorias universais*. O "coração" da fenomenologia Peirceana é o sistema de categorias de Peirce. As categorias são básicas para o entendimento, não apenas do conceito de ciência normativa de Peirce, mas também de sua teoria dos signos e, na verdade, de seu pensamento como um todo.

> Para Aristóteles, Kant e Hegel, uma categoria é um elemento dos fenômenos do primeiro nível de generalidade. Dentro dessa linha de pensamento, segue-se naturalmente que as categorias são pouco numerosas, assim como os elementos químicos. O objetivo da fenomenologia é redigir um catálogo de categorias e provar a sua suficiência e liberdade diante das redundâncias. (CP 5.43)

Peirce, então, tenta capturar a estrutura da nossa possível experiência através de três categorias fundamentais, as quais, a fim de evitar reificação prematura, ele nomeia utilizando-se de termos completamente abstratos: *Firstness* (Primeiridade), *Secondness* (Segundidade) e *Thirdness* (Terceiridade). Escreve Peirce:

> Eu fui levado, há muito tempo (1867) (...) depois de apenas três ou quatro anos de estudo, a "jogar" todas as idéias nas três classes de Primeiridade, Segundidade e Terceiridade. Esse tipo de noção é tão desagradável para mim quanto para qualquer pessoa, e, durante anos, eu me esforcei para refutá-la, mas há muito tempo ela me conquistou completamente. Por mais desagradável que seja atribuir tal significado a números e acima de tudo a uma tríade, isso é tão verdadeiro quanto desagradável. Devo definir Primeiridade, Segundidade e Terceiridade da seguinte maneira:
> Primeiridade é o modo de ser daquilo que é tal como é, positivamente e sem referência a mais nada.
> Segundidade é o modo de ser daquilo que é tal como é com respeito a um segundo, mas sem considerar qualquer terceiro.
> Um primeiro é algo como aparece em si próprio, um segundo é algo como aparece em reação a alguma outra coisa, mas sem qualquer inteligibilidade ou mediação.
> Terceiridade é mediação, é o modo de ser daquilo que é tal como é ao trazer um primeiro e um segundo em relação um com o outro. (CP 8.328)

E em uma outra oportunidade, Peirce escreve:

> Terceiridade é a relação triádica existente entre um signo, seu objeto e o pensamento interpretativo, ele próprio um signo, considerado como constituindo o modo de ser de um signo (CP 8.328).

De longe, a categoria mais difícil de ser discutida é a Primeiridade. Ela é, entre outras coisas, a categoria do sentimento, que Peirce vê como

> (...) um exemplo daquele tipo de consciência que não envolve qualquer análise, comparação ou qualquer outro processo, nem consiste no todo ou em parte de qualquer ato pelo qual um esforço de consciência é distinguido de outro, o qual tem sua própria qualidade positiva que não consiste em nada mais, e é de si própria

> tudo o que é, embora possa ter sido provocado; de modo que se esse sentimento está presente durante um lapso de tempo, ele está, de forma completa e igual, presente em todos os momentos. Um sentimento, então, não é um evento, um acontecimento, algo que vem e passa... um sentimento é um estado que está, em sua totalidade, em todos os momentos do tempo enquanto resiste. (CP 1.306)

A Primeiridade, a categoria do sentimento ou qualidade nesse sentido, assim como a cor vermelha, por exemplo,

> (...) aquela mera qualidade (*suchness*) não é em si mesma uma ocorrência, como é ver um objeto vermelho; é um mero pode ser. A sua única existência consiste no fato de que pode haver uma qualidade peculiar, positiva em um Faneron[5]. (CP 1.304)

Um Primeiro é inevitavelmente seguido por um Segundo, porque somos seres corporais individuais em um mundo reativo. Todos, certamente, em alguns momentos da vida, experimentaram e testemunharam os violentos choques que um conflito emocional pode produzir.

Suponha que alguém deva tomar uma decisão. Deve haver primeiro um motivo, um desejo ou uma emoção. Ao pensar mais, esse alguém começa a cogitar sobre possíveis obstáculos. Mas o que conta no final, ao se tomar a decisão, é um procedimento de decisão viável (lembre-se da máxima do pragmatismo!).

A Primeiridade é preponderantemente a categoria do pré-reflexivo. A dificuldade de falar sobre primeiros é que quando reconhecemos que algo é apreendido como um primeiro, a sua Primeiridade como Primeiridade efetivamente desaparece. Quando tentamos focalizar alguma coisa em termos de sua imediata Primeiridade, só temos sucesso se houver um elemento recorrente ou constante presente. Caso contrário,

5 Segundo Peirce, "...com este termo (faneron) designo tudo o que é presente ao espírito, sem cuidar se corresponde a algo real ou não". E ainda: "Os filósofos ingleses atribuíram à palavra idéia uma significação aproximada daquilo que entendo por faneron. Por motivos vários, restringiram o âmbito da palavra, e deram-lhe uma conotação psicologista que desejo evitar". Peirce, C. S. *Escritos Coligidos*. Tradução de Armando Mora D'Oliveira e Sergio Pomerangblum (São Paulo, Abril Cultural) 1974, p. 91 (N. R.).

tudo o que resta é um conjunto de objetos e sentimentos, os quais não podemos apreender e dos quais não podemos nos lembrar, por não conseguir qualificá-los.

> Apesar de toda a consciência em qualquer instante não ser nada mais que um sentimento, ainda assim a psicologia nada pode nos ensinar sobre a natureza do sentimento, e nós também não podemos obter conhecimento de qualquer sentimento por introspecção, sendo o sentimento velado à introspecção pelo fato de ele próprio ser nossa consciência imediata. (CP 1.310)

Segundos são existências particulares, eventos ou ações e reações, únicos no espaço e no tempo. Por exemplo, observações específicas registradas em um laboratório, seja na física ou na psicologia, são segundos. Enquanto a Primeiridade é essencialmente atemporal, a Segundidade nos disponibiliza os pontos discretos distinguíveis, que ordenamos por sua seqüência temporal. A existência bruta e inquestionável dos segundos pode nos levar a pensar na Segundidade como a categoria do "realmente" real, pelo menos enquanto acreditarmos que a realidade é feita de objetos particulares.

Peirce consideraria essa análise inadequada. Para ele, a realidade é mais do que uma questão de eventos discretos ocorrendo em pontos dados no espaço-tempo. A realidade também é uma questão das relações entre eventos, e aqui é onde entra a categoria da Terceiridade. A Terceiridade é a categoria da lei, do hábito, da continuidade, da relacionalidade e da representação, pois Peirce afirma "que a idéia de significado é irredutível às de qualidade e reação" (CP 1.345), ou seja, é irredutível a Primeiridade e à Segundidade.

É muito importante notar que Peirce estabelece uma firme distinção entre existência e realidade, o particular e o geral ou entre objetos e leis.

> Eu não me admiraria se alguém sugerisse que talvez a idéia de uma lei seja essencial à idéia de uma coisa agindo sobre outra. Mas certamente esta seria a sugestão mais insustentável no mundo considerando... que nenhuma lei da natureza faz uma pedra cair, ou uma garrafa de Leyden descarregar-se, ou um motor a vapor funcionar. (CP 1.323)

As leis naturais devem ser aplicadas, e isso envolve hipóteses geradas abdutivamente, bem como métodos de verificação.

Assim, no mundo existem objetos – porque "nós estamos continuamente nos chocando contra o fato bruto" como diz Peirce –, assim como signos ou representações, Segundos e Terceiros. Pois "a Terceiridade é apenas um sinônimo para representação" (CP 5.105).

Deixe-me ilustrar as três categorias por meio de um exemplo simples porém fundamentalmente importante em relação à matemática, a saber, o que diz respeito ao diagrama:

$x = 2$:

"=" é um primeiro; é um ícone de uma idéia. Robert Recorde (1510-1558) introduziu esse ícone dizendo que "nada poderia ser mais igual". Mas equações algébricas são ícones também, na medida em que exibem as relações das quantidades em questão. Visto assim, "x" e "2" são índices. Mas visto por si mesmo, "2" é um outro ícone. Gödel diz:

> Dois é a notação que abriga todos os pares, e mais nada. Há certamente mais do que uma noção, no sentido construtivista, satisfazendo essa condição, mas pode haver uma "forma" ou "natureza" comum a todos os pares. (Gödel 1944, 38)

Essa forma ou natureza ou idéia é uma abstração hipostática e é a "base" de um signo, como diria Peirce. Idéias ou ícones são indeterminados, mas determináveis em uma variedade de maneiras. "2 pode ser qualquer coisa", admira-se a criancinha na escola.

"$x = 2$" no decorrer de um cálculo é um fato, um fato contingente, e como tal é um Segundo. A Segundidade é expressa pelas regras sintáticas da aritmética.

Mas, quando "$x = 2$" é considerado como uma função proposicional ou como uma proposição e "x" possui algum significado concreto como parte de uma aplicação, é um Terceiro.

Esse simples exemplo indica três aspectos da verdade matemática: verdade teórica modelo, dedutibilidade formal ou cálculo e adequação no sentido de aplicação concreta. Também podemos notar que uma proposição pode ser um Segundo ou um Terceiro. Uma proposição considerada como parte de um argumento declara um fato, e assim deve ser vista, antes, como um Segundo do que como um Terceiro. Quer-se provar um teorema, e todas as proposições que se usam no decorrer da argumentação são reativas a esse argumento. A prova é uma representação que deve ser aplicada.

Se considerarmos os serviços que os diferentes elementos da argumentação nos prestam, poderíamos dizer que um termo ou uma palavra geralmente servem para evocar uma idéia, e assim devem ser considerados um Ícone, enquanto proposições são usadas para declarar fatos e, assim, são Índices. Agora, um argumento considerado funcionalmente serve para estabelecer um certo encadeamento de pensamento ou um hábito de lidar com certos assuntos de forma intelectual e, assim, deve ser chamado de Símbolo. Como Peirce escreveu em 1906, em seus *Prolegômenos para uma apologia do pragmatismo*:

> Quando um argumento aparece diante de nós, é trazido à nossa observação... um processo no qual as Premissas geram a Conclusão, não informando o Intérprete de sua Verdade, mas apelando no sentido de que concorde com ela. Este Processo de Transformação, que é evidentemente o centro da questão, não é construído com Proposições mais do que um movimento é construído com posições. A relação lógica entre a Conclusão e as Premissas deve ser afirmada; mas isso não seria um argumento, o qual essencialmente se pretende que seja entendido como representando o que representa apenas em virtude do hábito lógico que traria qualquer intérprete lógico à sua aceitação. (CP 4.572)
> Qualquer palavra comum como "dar", "pássaro", "casamento"... é aplicável a qualquer coisa que possa ser encontrada para compreender a idéia ligada à palavra; ela própria não identifica tais coisas. Ela não nos mostra um pássaro, nem encena diante de nossos olhos uma doação ou um casamento, mas supõe que somos capazes de imaginar tais coisas e ter associado a palavra a elas. (CP 2.298)

Portanto, para obter conhecimento discursivo, devemos entender uma palavra como "pássaro" tal como uma sentença do tipo "isto é um pássaro" ou outra qualquer. A função proposicional "x é um pássaro", "x = 2" ou "x é vermelho", por exemplo, é um signo que não pode ser dito verdadeiro ou falso, até que um quantificador ou outro índice desse tipo seja adicionado para dizer de qual ou de quantos x's nós estamos falando. Isso define com intensidade uma classe, e uma tal classe definida com intensidade constitui uma parte essencial de qualquer símbolo. Parece-me que Peirce não distingue realmente entre proposição e função proposicional quando declara:

> Uma proposição, no sentido em que eu uso esse termo, é um símbolo dicente (*dicent*). Um dicente não é uma asserção, mas um signo capaz de ser afirmado (CP 8.337).
> O símbolo, assim, se torna uma proposição pela qual um Índice tem sido relacionado a uma Idéia ou Ícone.
> Um significado são as associações de uma palavra com imagens, seu poder de provocar sonhos. Um índice não tem nada a ver com significados; ele tem de trazer o ouvinte para compartilhar a experiência do falante, mostrando sobre o que ele está falando. É a conexão entre uma palavra indicativa e uma palavra simbólica que faz uma asserção. (CP 4.56)

Assim, uma proposição ou símbolo representa o mundo mais como uma multitude de estado de coisas do que como um conjunto de objetos. "Uma proposição é uma figura de uma estrutura – a estrutura de um estado de coisas" (Langer 1996, p. 68). Essa teoria da figura se tornou famosa através do *Tractatus* de Wittgenstein. Ela não se encaixa perfeitamente na idéia de Peirce, da matemática como "pensamento diagramático", pois a última não é por si própria proposicional, e, além disso, é contrária ao que Wittgenstein afirma que uma sentença não mostra seu significado.

Ícones, índices e símbolos

Estamos de volta agora à teoria dos signos e aos três tipos fundamentais de signos que Peirce menciona: *Ícones*, *Índices* e *Símbolos*. A contribuição original de Peirce deve, de fato, ser vista na sua caracterização da cognição como um processo semiótico e na sua idéia de basear a própria noção de signo nas três categorias da fenomenologia.

Parece haver alguma coisa confusa aqui. De um lado, o símbolo aparece como o nível fundamental de percepção e cognição (da mesma maneira como a sentença é a unidade natural da representação lingüística (Townsend e Bever, 2001) ou a proposição representa o nível básico do conhecimento). Por outro lado, na procura das raízes não-intelectuais da cognição e semiose, os signos podem ser analisados por si mesmos, já que pertencem a um dos três níveis de realidade de Peirce, o que significa que os aspectos dos símbolos devem ser classificados de acordo com as três categorias fundamentais. E pode-se afirmar que a originalidade verdadeira de Peirce deve ser procurada aqui nesta classificação.

Por exemplo, levando em conta que a matemática não deve ser reduzida ao pensamento conceitual e à linguagem, mas deve essencialmente ser concebida como uma atividade, a noção de índice torna-se fundamentalmente importante. E, de fato, algumas vezes se afirma que é com sua noção de índice "que Peirce é ao mesmo tempo novo e produtivo" (Seboek 1995, p. 223). Peirce viu, Seboek continua, "como ninguém antes dele, que a indicação (apontamento, ostentação, *deixis*) é um modo de significação tão indispensável quanto irredutível". Do ponto de vista da matemática, a qualidade relativa ao índice[6] é o que realmente torna a abordagem semiótica inevitável, porque ela ajuda a resolver o enigma dos objetos matemáticos.

Um signo *per se* é um Primeiro, um qualisigno, como o chama Peirce. Um qualisigno é uma qualidade, a qual é um signo. Não pode na verdade agir como um signo até que seja incorporado, mas essa incorporação nada tem a ver com o seu caráter como um signo. Um índice ou um símbolo, por exemplo, obviamente não pode ser um qualisigno (CP2.248). Se considerado isoladamente, um signo é somente uma qualidade, a sua própria base, que é "uma espécie de idéia". Ele se mostra, mas não explica a si mesmo. Como Wittgenstein escreve no *Tractatus*: "O que pode ser mostrado, não pode ser dito" (4.121).

Um signo por Primeiridade é um ícone – "uma imagem de seu objeto, e mais estritamente falando, pode ser somente uma idéia", diz Peirce (CP2.276). Um signo que se refere a um objeto ou fato o faz por

6 No original, a palavra empregada é *indexicality* (N. R.).

meio de um contraste ou Segundidade, porque um objeto ou fato como tal não possui significado próprio, ele não representa nada além de uma existência isolada e particular. Isso implica que todos os signos, necessariamente, "compartilham da Segundidade" (Sebeok 1995, p. 229), tanto quanto "seria difícil se não impossível, exemplificar um índice absolutamente puro, ou achar qualquer signo absolutamente desprovido da qualidade relativa a índice" (CP 2.306). Peirce chama segundos que são signos de sinsignos[7]. Um sinsigno (onde a sílaba "sin" é tomada com o significado de "ser somente uma vez", como em "single" – "solteiro" em inglês – ou em "simples", ou na palavra latina "semel"[8], etc.) é uma coisa que de fato existe ou um evento que é um signo. Somente pode ser assim por meio de seu significado, o qual depende de algumas qualidades, de modo que envolve um qualisigno ou, melhor, vários qualisignos.

O signo como um símbolo é, então, um Terceiro, na medida em que seu modo de ser "consiste na existência de réplicas destinadas a trazer o seu intérprete em relação com algum objeto" (Peirece, NEM IV, p. 297). Um símbolo é em si mesmo um tipo, e não uma coisa sozinha (MS404).

> Um símbolo é um signo convencional, o qual, estando ligado a um objeto, significa que aquele objeto tem certas características. Mas um símbolo, em si mesmo, é um puro sonho: ele não mostra do que está falando. Nenhum outro tipo de signo vai responder a este propósito.

O símbolo é o mais importante e o mais difícil de se entender.

> Desde que o uso do símbolo aparece num estágio tardio, é presumivelmente uma forma altamente integrada de atividades animais mais simples. Deve brotar de necessidades biológicas, e justificar a si mesmo como um bem prático. A conquista do mundo pelo homem repousa, sem sombra de dúvida, no supremo desenvolvimento de suas reações pela interpolação de símbolos nos

---

7 No original, o termo utilizado é *sinsigns* (N. R.).

8 A palavra "semel", em latim, significa "uma vez". Conforme Saraiva, F. R. S. *Novíssimo Dicionário Latino-Português*. (10. edição. Rio de Janeiro/Belo Horizonte, Garnier) 1993 (N. R.).

> espaços não preenchidos e confusões da experiência direta, e por meio de "signos verbais" para adicionar as experiências de outras pessoas às suas próprias. (Langer, 1996, 29)
> Um Símbolo é um *Representamen* cujo caráter Representativo consiste precisamente em ser uma regra que irá determinar o seu Interpretante. Todas as palavras, sentenças, livros e outros signos convencionais são Símbolos (CP 2.292). A simbolização parece sinônima da representação.

O ser de um símbolo consiste no fato real de que alguma coisa certamente será experimentada se certas condições forem satisfeitas. Isto é, influenciará o pensamento e a conduta de seu intérprete. Toda palavra é um símbolo. Toda sentença é um símbolo. Todo signo que depende de convenções é um símbolo. Símbolos são gerais e como tal são possíveis.

> Agora, o que é geral tem sua existência nas instâncias que determinará. Deverá haver, portanto, instâncias existentes do que o Símbolo denota, embora devamos entender aqui por "existente", existente no universo possivelmente imaginário ao qual o Símbolo se refere. (CP 2.249)

Como tem sido dito, qualquer proposição poderia ser interpretada como um símbolo. Por exemplo, "Esta rosa é vermelha". O símbolo mesmo é somente a relação entre "Rosa" e "Vermelhidão", a relação íntima, e obviamente isto representa uma possibilidade ou um possível. É impossível achar uma proposição tão simples que não faça referência a dois signos. Tomemos, por exemplo, a sentença "chove". Aqui, Peirce escreve,

> (...) o ícone é a fotografia mental composta de todos os dias chuvosos que o pensador tenha vivido. O índice é tudo aquilo por cujo meio ele distingue aquele dia, da forma como está colocado em sua experiência. O símbolo é o ato mental mediante o qual a pessoa marca aquele dia como chuvoso. (CP 2.438)

Mas nós, certamente, deveríamos evitar reificar um símbolo, e não identificá-lo com uma proposição, um conceito, um pensamento, uma regra ou qualquer outra coisa. O que é importante com respeito ao símbolo é a sua Terceiridade, sua função ou característica mediadora. Um símbolo não pode nem mesmo ter a si próprio como seu objeto, porque isso implicaria auto-referência na maneira tautológica de A=A.

> Uma progressão regular de um, dois, três pode ser notada nas três ordens de signos – Ícone, Índice, Símbolo. O Ícone não tem qualquer conexão dinâmica com o objeto que representa, acontece simplesmente que suas qualidades assemelham-se às daquele objeto, e provocam sensações análogas às daquilo com que se parecem na mente. Mas ele realmente permanece sem conexão com tais sensações. O Índice está fisicamente conectado ao seu objeto; eles fazem um par orgânico, mas a mente interpretadora nada tem a ver com esta conexão, exceto notá-la depois que ela já foi estabelecida. (CP 2.299)

Se a fumaça é entendida como um sinal de fogo, então esse sinal é um signo relativo a índice, pois "o índice (...) força a atenção sobre o objeto particular pretendido sem descrevê-lo" (CP 1.369).

O símbolo está conectado ao seu objeto em virtude de uma disposição da mente que usa símbolos, sem a qual tal conexão não existiria. E essa disposição é estabelecida por uma convenção. A coisa essencial sobre o símbolo não é, entretanto, que ele esteja estabelecido pela convenção, mas que haja uma disposição e um hábito, que se tornam objetivos e constituem uma relação entre símbolo e objeto. Resumindo, "somente é simbólico aquele signo que satisfaz sua função de designar um objeto sobre a base de uma lei geral" (M. Hoffmann).

O próprio Peirce escreve:

> Um Símbolo incorpora um hábito, e é indispensável, pelo menos à aplicação de qualquer hábito intelectual. Além disso, Símbolos proporcionam os meios de pensar sobre pensamentos de tal maneira que, de outra forma, não poderíamos pensar neles. Eles nos permitem, por exemplo, criar Abstrações, sem as quais nos faltaria um grande mecanismo de descoberta. Eles nos permitem contar; eles nos ensinam que as coleções são indivíduos (indivíduo = objeto individual), e em muitos aspectos eles são a própria urdidura da razão. (CP 4.531)

A generalização depende, assim, da simbolização. O processo de generalização, como concebido pelo estruturalismo matemático construtivo, é sempre o mesmo: dirige-se a atenção para as "propriedades" relacionais das representações matemáticas dadas, transformando-as em novos objetos por um processo que Piaget e Peirce denominaram "abstração reflexiva" e "abstração hipostática", respectivamente. Números, por exemplo, começando dos seus fundamentos mais elementares, são generalizados simbolicamente por representações de atividades aritméticas e pelo ato de se fazer das propriedades relacionais das leis aritméticas assim estabelecidas objeto de consideração. O formalismo, e também Piaget, interpretam isso como um processo de deontologização progressiva da matemática, tomando o pensamento axiomático moderno como sua mais alta expressão. Não há, entretanto, nenhuma atividade sem um objeto, embora esse objeto possa ser constituído pelo ato de reificar ou hipostasiar uma ação ou um processo. Em termos semióticos, dizemos que o objeto imediato de um símbolo é o próprio signo. Existe um último significado ou um nível ontológico final? Para responder a uma tal pergunta, temos de assumir um ponto de vista genético, e perguntar a nós mesmos como o conhecimento vem a existir. Peirce, em sua busca por Kant, procurou pela lógica da atividade (semiótica) para descobrir sobre essa gênese.

> Como os símbolos se apóiam exclusivamente em hábitos já definitivamente formados, porém sem fornecer qualquer observação nem mesmo deles próprios, e desde que o conhecimento é hábito, eles não nos permitem adicionar nada ao nosso conhecimento,

escreve Peirce, em continuação à citação acima (CP 4531). A palavra "*Stuhl*", por exemplo, não significa nada para uma pessoa que não saiba alemão. Para proporcionar o significado desse símbolo para uma tal pessoa, é preciso transformá-lo em alguma coisa perceptível, um ícone de uma cadeira ou uma exibição do ato de sentar, ou qualquer outra coisa. Nós não vemos cadeiras, mas os ícones ou imagens de alguma coisa que se supõe ser uma cadeira, em vez de uma alucinação. Ao mesmo tempo, o que nós vemos não é uma imagem, porque não reagimos a imagens.

Assim, o que é requerido é uma atividade metódica ou método de investigação, para descobrir acerca da objetividade e verdade de nossas representações, e esse método deve ser recursivamente organizado (fato que proporciona epistemologias com o sabor de paradoxo).

Em todo caso, para ganhar novos *insights* e conhecimento, temos de fazer uso de ícones e índices. Já mencionamos esse fato quando falamos sobre a proposição. Vamos nos voltar agora para esses outros tipos de signos, os ícones e os índices.

A principal característica de um ícone é que ele carrega uma semelhança, de alguma forma, com o seu objeto, "quer tal Objeto realmente exista ou não" (CP 2.247). Davis e Hersh parecem interpretar erroneamente a natureza de um ícone, já que este corresponde à Primeiridade e assim à possibilidade. A semelhança pode ser a extrema similitude de uma fotografia (CP 2.281) ou pode ser mais sutil. Sob quaisquer circunstâncias, "cada Ícone participa de alguns caracteres mais ou menos manifestos de seu Objeto" (CP 4.531).

Essa participação pode ser de um tipo complexo: particularmente merecedores de destaque são os ícones nos quais as semelhanças são auxiliadas por regras convencionais. Assim, uma fórmula algébrica é um ícone, tornado tal pelas regras de comutatividade, associatividade e distributividade dos símbolos. Pode parecer, à primeira vista, que é uma classificação arbitrária chamar uma expressão algébrica de um ícone; que ela poderia tanto, ou melhor, ser interpretada como um símbolo convencional composto. Mas não é assim.

> Pois uma grande propriedade que distingue o ícone é que por sua observação direta outras verdades relativas ao seu objeto podem ser descobertas além daquelas que bastam para determinar a sua construção. (CP 1.179)

Aqui, novamente, o caráter distintivo do ícone está indicado, ou seja, este é o único signo pelo qual podemos ampliar nosso conhecimento. Peirce afirma, em um manuscrito não publicado, que todos os ícones,

> (...) desde as imagens no espelho às fórmulas algébricas, são muito parecidos, não se comprometendo a absolutamente nada, mas

> mesmo assim são a fonte de toda a nossa informação. Eles desempenham um papel no conhecimento, um papel iconizado pelo desempenhado na evolução de acordo com o Darwinismo por variações fortuitas em reprodução. (MS 694, SEM I, 429)

O ícone, num sentido muito definido, faz parte da vida de seu objeto. Uma vez que isso é estabelecido, inferências sobre ele se transformam em inferências sobre o objeto, na medida em que ele é icônico. Uma figura matemática de discurso seria dizer que um ícone é um mapeamento de seu objeto ou um morfismo dele. A função mapeadora pode ser muito parecida com uma função identidade, como no caso de fotografias vistas como ícones; por outro lado, ela pode ser complexa e convencional. Temos empregado uma analogia matemática ao falarmos de ícones; o reverso da moeda é que os ícones são de importância fundamental na matemática. A analogia ou semelhança estrutural, por exemplo, desempenham um papel fundamental em matemática. Para melhor compreender essa "grande propriedade distintiva" do ícone, sobre a qual Peirce fala, dever-se-ia compará-lo com uma definição, a qual está sempre confinada à exibição de algumas propriedades do definido selecionadas um tanto arbitrariamente.

O matemático que concebe a matemática como raciocínio a partir de conceitos assemelha-se bastante, então, ao "homem que confundiu sua esposa com um chapéu" no estudo de caso de Oliver Sacks. Um homem que havia, como coloca Sacks, caído do concreto para o abstrato. Essa pessoa, de fato, exibiu uma atitude extremamente abstrata, que a tornou incapaz de reconhecer objetos ou situações à primeira vista. Ela preferia buscar e fazer conjecturas a partir de características particulares, e ocasionalmente suas conjecturas estavam absurdamente erradas.

Seus enganos eram freqüentemente tão engenhosos que poderiam também ser qualificados como especulações corajosas, como no caso de um matemático abstrato. Ele poderia ver, por exemplo, diante de um monte de areia, não apenas essa areia, mas diria: "Vejo água e uma pequena pousada com um terraço sobre a água. Pessoas estão jantando lá fora no terraço. Vejo guarda-sóis coloridos espalhados". A ausência de propriedades ou traços específicos na verdadeira imagem o levou a imaginar tudo isso. As formas abstratas ou definições não apresentaram problema para esse homem, mas a imprecisão de qualquer situação real sim. Ele poderia, algumas vezes, nem mesmo reconhecer sua mulher quando não estivesse atento às propriedades que tinha armazenado sobre ela em sua memória.

Os Ícones substituem tão completamente seus objetos que dificilmente podem ser distinguidos deles. Assim são os diagramas de álgebra e geometria. Os diagramas são essencialmente ícones, e ícones ou imagens são particularmente adequados a tornar apreensível e concebível o possível e potencial, mais que o real e factual. A matemática tem sido sempre chamada de a "ciência do possível" ou do logicamente possível, e para verificar se alguma combinação de asserções é consistente ou logicamente possível, ela deve ser "visualizada", porque a dificuldade reside na interação entre as várias afirmações, mais do que em significados particulares como tais.

Nenhuma análise de significados conceituais irá, em geral responder à pergunta se duas afirmações relacionais diferentes ou derivações chegam ao mesmo resultado ou não.

> O Ícone não representa inequivocamente esta ou aquela coisa existente, como o faz o Índice. Seu Objeto pode ser uma pura ficção, assim como a sua existência. Muito menos é seu Objeto necessariamente uma coisa de um tipo habitualmente encontrado. Mas há uma certeza que o Ícone proporciona em seu mais alto grau. E o que é mostrado diante do olhar mental – a Forma do Ícone, que é também seu objeto – deve ser logicamente possível. (CP 4.531)

Como não há relação sem correlatos – não há Primeiridade sem uma Segundidade –, um diagrama matemático sempre contém índices como partes da representação icônica. Mas, também, na medida em que tem um significado geral, um diagrama não pode ser um puro ícone; "mas no meio de nosso raciocínio esquecemos em grande parte essa abstração e o diagrama é para nós a própria coisa" (CP 3.363).

Os professores sempre tentam alertar seus alunos para não identificarem coisas e ícones, mas para entenderem seus diagramas geométricos como símbolos. Basta pensar no notório triângulo genérico. A problemática associada a uma tal idéia foi expressa por Locke, quando ressaltou que, por um lado, a idéia geral de um triângulo é imperfeita, pois "ele não deve ser nem oblíquo nem retângulo, nem eqüilátero nem escaleno, mas todos e nenhum desses ao mesmo tempo". Por outro lado, temos necessidade de tais idéias gerais "para a conveniência da comunicação e ampliação do conhecimento" (Locke, *Essay concerning human understanding*, livro 4, capítulo 7).

Com respeito ao pensamento matemático, Berkeley já havia escrito, criticando a idéia de Locke de um "triângulo geral", que "devemos reconhecer que uma idéia, que considerada em si própria é particular, torna-se geral quando se a faz representar ou ficar no lugar de todas as outras idéias particulares do mesmo tipo" (*Principles of Human Knowledge*, Introdução, §§ 11-12). Jesseph caracterizou a filosofia da geometria de Berkeley pelo termo "generalização representativa" e escreve:

> O aspecto mais fundamental da alternativa de Berkeley (para a filosofia abstracionista aristotélica da matemática, minha inserção) é a afirmativa de que podemos fazer uma idéia substituir muitas outras tratando-a como um representante de um gênero. (Jesseph, 1993, p. 33)

Aqui reside, de fato, o segredo e toda a dificuldade da semiose. Como pode um particular funcionalmente servir como um geral? Como pode um objeto concreto particular comunicar significados gerais?

Em geometria, o geral, tem-se dito, pode ser representado apenas pelo particular, já que a imagem pura não tem generalidade.

> Tomemos, por exemplo, os círculos pelos quais Euler representa as relações dos termos. Eles preenchem bem a função de ícones, mas sua falta de generalidade e sua incompetência para expressar proposições devem ser sentidas por todos que os usaram. O Sr. Venn tem, portanto, sido levado a agregar sombreado a eles; e este sombreamento é um sinal convencional da natureza de um símbolo.

A simbolização ou a atividade proposicional coleta algum aspecto particular que parece apropriado com respeito a um certo problema ou meta. Poderíamos, por exemplo, afirmar que o que serve como uma idéia "geral" em geometria deveria ser interpretado em relação à finalidade particular que se tenha em mãos. Se, por exemplo, deseja-se provar o teorema que afirma que as três medianas de um triângulo se intersectam em exatamente um ponto, então um triângulo eqüilátero serve perfeitamente bem como um exemplo de um triângulo geral, porque a afirmação do teorema menciona apenas conceitos que são independentes de distância e ângulos (assim como pode-se definir o tamanho de uma área independentemente de seu comprimento e medidas de ângulos utilizando-se uma função determinante, a definição da mediana é também independente desses conceitos) ou, em outras palavras, as condições do teorema em questão são invariantes com respeito a transformações afins. Por outro lado, pode ser mais fácil encontrar um argumento que prove meu teorema num caso do que em outro. O triângulo eqüilátero, por suas características altamente simétricas, é um exemplo favorável para esse caso. Mas é a indeterminação do ícone que nos habilita a selecionar a perspectiva apropriada. Nenhuma definição lingüística nos proporciona essa liberdade e variabilidade.

Assim, para compreender um desenho geométrico ou um diagrama matemático em termos semióticos, temos de levar em conta não só sua aparência concreta, mas também a sua funcionalidade. Um signo é algo ativo, ele determina o seu interpretante. E, nesse sentido, o que fazemos é transformar nossos diagramas até que algum fato perceptual se torne inegável. Peirce escreve que, se você admite o princípio de "que essa lógica para onde seu autocontrole para, você se verá obrigado a admitir que um fato perceptual, uma origem lógica podem envolver generalidade" (CP 5.149). Se não posso fazer nada a esse respeito, devo aceitar um fato perceptual como geralmente válido? Essa longa discussão sobre o ícone leva à conclusão de que a classificação de Peirce dos signos pode ser vista como uma classificação de representações de funções cognitivas.

O mesmo se aplica aos símbolos que são entendidos como Índices. Nenhum fato pode ser afirmado sem o uso de algum signo que sirva como um índice.

> Em álgebra, as letras, tanto quantitativas quanto funcionais, são desta natureza. Mas os símbolos sozinhos não declaram qual é o tema do discurso; e isso não pode, de fato, ser descrito em termos

> gerais, pode somente ser indicado. O mundo real não pode ser distinguido de um mundo imaginário por nenhuma descrição. Daí a necessidade de pronomes e índices, e quanto mais complicado o assunto, maior a necessidade deles. (CP 3.363)

Um ícone representa pela semelhança. Um índice, por outro lado, não necessita carregar uma semelhança com seu objeto. A coisa básica sobre um índice é que ele tem uma conexão existencial direta com seu objeto. Os usos do inglês comum são confiáveis em nosso discurso sobre índices; o dedo indicador é usado para apontar alguma coisa, por exemplo. O apontar-para é uma conexão existencial direta com aquilo que é apontado, e assim o é um índice no sentido de Peirce. Índices servem à identidade de referência.

Inchaço, dor, vermelhidão, calor, febre, são índices de inflamação. "Índices fornecem uma garantia positiva da realidade e da proximidade de seus objetos. Mas junto com a garantia não vai qualquer *insight* da natureza desses Objetos" (4.531). Alguém poderia, primeiramente, não saber nada sobre a doença que a febre indica. Quanto mais sintomas e reações se observam, mais claro se torna o quadro, porque os sintomas, como o inchaço ou a febre, não são puros índices, mas também fornecem informações. É importante notar que em geral os signos de modo algum necessitam ser puramente ícones ou índices (ou símbolos, também). O signo diante de uma loja é índice por sua conexão com a loja. Mas pode também ser icônico, ao apresentar, por exemplo, a figura de um livro para indicar que a loja é uma livraria.

> As letras comuns da álgebra que não apresentam nenhuma peculiaridade são índices. Também o são as letras A, B, C etc., ligadas a uma figura geométrica. Advogados e outros profissionais que precisam lidar com casos complicados com precisão recorrem a letras para distinguir indivíduos. As letras assim usadas são meramente pronomes relativos melhorados. Assim, enquanto pronomes demonstrativos e pessoais são, como usados comumente, "índices genuínos", pronomes relativos são "índices degenerados", pois apesar de poderem, acidentalmente ou indiretamente, referir-se a coisas existentes, eles diretamente se referem e precisam apenas se referir, a imagens na mente as quais palavras prévias criaram. (CP 2.305)

Continua Peirce,

> Tem sido um enigma, há muito, como poderia ser que, por um lado, a matemática é puramente dedutiva em sua natureza, e tira suas conclusões de modo apodíctico, enquanto, por outro lado, apresenta uma série tão rica e aparentemente interminável de descobertas surpreendentes como qualquer ciência empírica?

Várias tentativas têm sido feitas para resolver o paradoxo, quebrando uma ou outra dessas asserções, mas sem sucesso. A verdade, no entanto, parece ser que todo raciocínio dedutivo, até mesmo um simples silogismo, envolve um elemento de observação, isto é, a dedução consiste na construção de um ícone ou diagrama no qual as relações de suas partes apresentarão uma analogia completa com aquelas relações das partes do objeto de raciocínio, de experimentação sobre a imagem na imaginação e da observação do resultado de forma a descobrir relações despercebidas e escondidas entre as partes.

Com relação à álgebra, a própria idéia da arte é que apresente fórmulas que possam ser manipuladas, e que pela observação dos efeitos de tal manipulação encontremos propriedades que não seriam discernidas de outra maneira. Em tal manipulação, somos guiados por descobertas prévias, que estão incorporadas em fórmulas gerais. Esses são padrões que temos o direito de imitar em nossos procedimentos, e são os ícones *par excellence* da álgebra. As letras de álgebra aplicada são usualmente símbolos, mas os x, y, z, etc., de uma fórmula geral, tal como $(x+y)\,z = x\,z + y\,z$, são espaços a serem preenchidos com símbolos, eles são índices de símbolos. Uma tal fórmula pode, é verdade, ser substituída por uma regra abstratamente estabelecida (por exemplo, que a multiplicação é distributiva); mas nenhuma aplicação poderia ser feita de uma tal afirmação abstrata sem traduzi-la em uma imagem sensível (CP 3.363).

O valor de um ícone consiste em sua exibição das características de um estado de coisas tomadas como se fossem puramente imaginárias e abertas a modificações arbitrárias. Os índices, por outro lado, fornecem uma garantia positiva da realidade e da proximidade de seus objetos. Mas aqui também esses objetos podem, como as letras em álgebra ou geometria, pertencer a uma realidade completamente virtual.

Mas junto com a garantia não vai nenhum *insight* sobre a natureza desses objetos. Aquela famosa pegada que Robinson Crusoe encontrou na areia foi um índice, para ele, de que alguma criatura estava em sua ilha, e, ao mesmo tempo, como um ícone, trouxe a idéia de um homem. O índice juntamente com o ícone resultaram na afirmação "há um homem na ilha". Essa proposição é, como já foi dito, um símbolo.

O discurso metafórico

Vimos até agora que há dois tipos básicos de signo, ícone e índice, que, com respeito à linguagem comum, devem ser entendidos como metáfora e metonímia, respectivamente. O discurso metafórico é uma fala através de fronteiras contextuais, enquanto que o relativo ao índice ("*indexical*") sempre é, essencialmente, uma fala contextual. A metáfora depende de associações por similaridade, enquanto que a metonímia é baseada em associações por contigüidade. Parece um critério metodológico comum estudar a interação entre esses dois tipos de representação através da análise de casos de comportamento deficiente. Roman Jakobson classificou toda afasia da fala, essencialmente, como desordem por similaridade ou desordem por contigüidade. Qualquer signo lingüístico, diz ele, envolve dois métodos de organização: combinação e contextura e seleção e substituição. Há, portanto, por analogia à distinção intenção[9]-extensão, dois possíveis significados ou interpretantes de um signo. Um deles refere-se ao código. A palavra "martelo", por exemplo, estimula uma variedade de idéias icônicas na mente do falante/ouvinte, as quais guiam as possíveis substituições dessa palavra, fazendo-a simbolizar uma "ferramenta para fincar pregos", um "peso para construir um pêndulo" ou qualquer outra coisa.

O outro tipo de significado é produzido pelo contexto e está ligado, pela metonímia, ao resto da mensagem ou ao discurso posterior. Por exemplo: "Este martelo é pesado" ou "Traga-me o martelo", etc.

9 Intensão: ato de intensar, isto é, tornar-se mais intenso; força, veemência, energia. Intensão e intenção especializaram seus sentidos para cada forma, ainda que ambos provenham de *intendere* (estender, entesar), que possui duas formas: *intentum* e *intensum*. Fonte: *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa* (Rio de Janeiro, Objetiva) 2001 (N. R.).

Em seu livro *Fundamentals of Language*, em co-autoria com Morris Halle, esses tipos de afasia são descritos como se segue:

> Distinguimos dois tipos básicos de afasia – dependendo se a maior deficiência jaz na seleção ou na substituição, com uma relativa estabilidade da combinação e da contextura; ou, inversamente, se a deficiência está mais ligada à combinação e contextura, com uma relativa retenção da seleção e da substituição normais. (p. 77)
> Para os afásicos do primeiro tipo (deficiência de seleção), o contexto é o fator decisivo e indispensável. Quando apresentado a fragmentos de palavras ou sentenças, um paciente desse tipo prontamente as completa. Sua fala é meramente reativa: ele facilmente prossegue a conversação, mas tem dificuldades em começar um diálogo; é capaz de responder a um interlocutor real ou imaginário quando é ou imagina ser ele mesmo o destinatário da mensagem. (p. 77-78)
> A sentença "está chovendo" não pode ser produzida a menos que o emissor veja que realmente está chovendo. Quanto mais profundamente a elocução está cravada em um contexto verbal ou não-verbalizado, maiores são as chances de seu desempenho ser bem-sucedido por essa classe de pacientes. (p. 78)

Diz-se, algumas vezes, que as palavras não têm significado sem um contexto concreto, mas o contexto é indispensável somente para esse tipo de pacientes. Eles não podem manipular abstrações ou o raciocínio simbólico. Mesmo um simples símbolo como "faca" parece estar além de suas capacidades.

> Assim, o paciente de Goldstein nunca pronunciou a palavra *faca* sozinha, mas de acordo com seu uso e circunstâncias, alternativamente, chamava a faca de apontador de lápis, descascador de maçã, faca de pão, garfo e faca (p. 62); de modo que a palavra faca foi mudada de uma forma livre, capaz de ocorrer sozinha, para uma forma confinada. (p. 79)

Solicitado a repetir a palavra "não", o paciente de Head respondeu "Não, eu não sei como fazê-lo". Embora usando espontaneamente a palavra no contexto de sua resposta ("Não, eu não ..."), ele não pôde produzir a forma mais pura da afirmação equacional, a tautologia a = a:

"não" é "não" (p. 81). Como numerosos testes têm demonstrado, para tais pacientes, duas ocorrências da mesma palavra em dois contextos diferentes são meros homônimos. Uma vez que vocábulos distintos carregam uma maior quantidade de informação do que vocábulos homônimos, alguns afásicos desse tipo tendem a suplantar a variação contextual de uma palavra por meio de termos diferentes, cada um deles específico para o ambiente dado.

Não é suficiente dizer que a fala consiste de palavras. A ordem das palavras é importante também e, algumas vezes, mudar de ordem significa mudar de conteúdo. A fala consiste de palavras que se referem uma à outra, de um modo particular, e, sem uma apropriada inter-relação de suas partes, uma elocução verbal seria uma mera sucessão de nomes, sem dar forma a qualquer proposição.

> O comprometimento da capacidade de emitir proposições ("*propositionize*"), ou falando genericamente, de combinar entidades lingüísticas mais simples em unidades mais complexas, é, de fato, restrito a um tipo de afasia, o oposto do tipo discutido na seção anterior. (p. 85)

A ordem das palavras torna-se caótica; os vínculos da coordenação e da subordinação gramaticais são dissolvidos.

E mais adiante:

> O tipo de afasia que afeta a contextura tende a dar origem a declarações infantis de uma única sentença e a sentenças de uma única palavra. Somente sentenças um pouco mais longas, estereotipadas, "fabricadas prontas" ("*ready made*") conseguem sobreviver. Em casos avançados dessa doença, cada elocução é reduzida a uma única sentença de uma só palavra. Enquanto a contextura se desintegra, a operação seletiva continua. "Dizer o que uma coisa é, é dizer com o que ela se parece", observa Jackson. (p. 125)
> O paciente limitado a um jogo de substituição (uma vez que a contextura é deficiente) lida com similaridades, e suas identificações aproximadas são de natureza metafórica, contrárias às metonímicas, que são familiares ao tipo oposto de afásicos. (p. 68)

Até aqui, referimo-nos a Jakobson e Halle.

A criatividade matemática ou mesmo o comportamento criativo em geral pode ser analisado de acordo com essa linha, a interação das representações icônicas e relativas a índices sendo mais importante para compreender a cognição matemática. A matemática pode, de modo proveitoso, nós acreditamos, ser entendida, em grande parte, como uma arte construtiva e visual, mais do que como uma ciência ensejada por conceitos. O tema principal da matemática é essencialmente constituído pela observação de identidades ou igualdades e diferenças. As características essenciais de um ato de criação imaginativa consistem em ver um A como um B: $A = B$. Uma tal equação pode significar que A e B são aspectos de uma mesma substância. Na terminologia fregeana, isso significa dizer que A e B são diferentes intenções de uma mesma extensão ou que são representações com um referente compartilhado, mas com significados diferentes. Isso pode também, contudo, ser interpretado em termos funcionais ou em termos de uma relação de causa e efeito. Neste caso, A = B significa algo como A produz B ou B é um resultado ou uma representação de A.

O ponto de vista relacional é melhor compreendido quando A = B aparece como uma metáfora. O que nos guia na criação de boas metáforas? Tudo parece similar a tudo, pelo menos em alguns aspectos. Assim, como descobrimos quais são as analogias ou as metáforas úteis? Não há um método infalível. Por outro lado, as metáforas parecem ser absolutamente indispensáveis quando nós não podemos identificar, com certeza, o significado com o uso. Diferentemente de um símile, uma metáfora é simétrica; ela lança luz sobre ambos os lados da equação. O "Homem é um lobo" é um símile, não uma metáfora. Mas a "Juventude é a estação feita para a alegria" ou "O presidente arou o seu caminho penosamente através da discussão"[10] são metáforas (acrescentando a essa última sentença: "E usou sua secretária como um trator", obtemos uma metonímia, ganhando um exemplo de como o discurso emprega combinações de metáfora e metonímia).

---

10 No original, a sentença é: "*The president ploughed through the discussion*", que poderíamos traduzir aproximadamente como: "O presidente abriu caminho a custo através da discussão". Essa tradução não foi aqui adotada, tendo em vista a possibilidade de perda do sentido metafórico referente ao verbo "*to plough*" – "arar".

Na escola, também, temos familiaridade com esses dois tipos de interpretação. Os alunos, via de regra, têm dificuldades com equações porque interpretam e aprendem o sinal de igualdade no sentido de "produzir". Essa interpretação entrada-saída ("*input-output*") representa um entendimento direto da equação. O conceito de equação ainda não foi transformado em uma relação objetiva. Esse ponto de vista funcional tem uma forte afinidade com certas situações padronizadas de aplicação, [as quais podem ser caracterizadas como] produzindo um novo objeto a partir de objetos dados pela aplicação de regras dadas ou, mais geralmente, a transformação correta de um dado estado inicial em um desejado estado final.

Essa é, como tem sido dito, a definição precisa da função como uma ação de entrada e saída (*input-output*). Até as tarefas elementares, contudo, também requerem uma interpretação diferente de uma equação, uma interpretação que trate a equação como um objeto independente, pode-se dizer, como uma metáfora. Os estudantes compreenderão muito bem que a mesma coisa pode ser feita aos dois lados de uma equação, mas, em geral, eles não compreendem que somar ou subtrair uma equação $A = B$ é tão legítimo quanto no caso da equação $A = A$.

Gostaríamos de usar esse modelo, i.e., a conexão entre a compreensão funcional e a metafórica, para descrever os processos no exemplo do comportamento criativo apresentado por H. Freudenthal (*Educational Studies in Mathematics*, vol. 8, (1977), nº 1).

Pode-se ver quatro passos:

(1) Estritamente operativo, usando "literalmente" o que está lá: Bastiaan encontrou, notou e pegou fragmentos de ferro. Ele tinha de criar algo com eles. A chapa de ferro perfurado deve estar disponível para que o sistema ativo possa agir.

(2) Pensamento livre e interpretação metafórica: dois cachorros unidos com sua boca.

(3) Tomando o novo significado de "cachorro" de modo literal novamente e agindo conseqüente e intencionalmente de acordo com isso: estritamente, um cachorro tem de ter quatro pernas. Da mesma forma, o ato de encurvar requer um tratamento "literal" do material de que o "cachorro" é feito.

(4) Ele pode ficar lá como um cachorro quase abanando sua cauda. A compreensão metafórica, à maneira Gestalt, de (2) e (4) é baseada na similaridade ou analogia e envolve um alto grau de nossa consciência. Portanto, a maioria dos estudiosos coloca mais ênfase nesse tipo de compreensão; da mesma forma, a matemática escolar é dominada por um tipo mais instrumental de raciocínio. Os passos (1) e (3), contudo, são de uma natureza diferente. Eles nos chegam muito mais como uma experiência "Aha", como que emergindo do mar vago do inconsciente, mas, ao mesmo tempo, dando-nos uma chance de agarrar uma oportunidade para agir. No uso real dessa oportunidade, o final da execução dispara um novo passo metafórico. Nos passos (2) e (4), podemos ver uma Gestalt. O passo relacional (2) abre a porta para o passo operacional (3). O passo relacional (4) marca o final da seção. A forma final está pronta. Ela pode, talvez, evocar um novo passo operacional, mas até o momento não o fez.

Agora, levando em consideração essa apresentação, alguém poderia estar inclinado a dizer que a cognição em matemática representa uma complementaridade da "compreensão instrumental e relacional" (Skemp, 1969) ou da representação metafórica e metonímica (Jakobson), em vez de colocar muita ênfase em um único lado dessa complementaridade. Esta parece ser uma outra afirmação da importância do simbólico como um Terceiro no sentido de Peirce, ou como mediação.

Um signo é uma mediação

Não há nada, de fato, mais essencial para ser uma representação do que ser um estado de mediação. O problema da mediação, contudo, leva à infinidade, à regressão infinita e ao paradoxo, quando analisado cuidadosamente. Já falamos sobre o paradoxo do significado.

Tomemos a percepção como um exemplo diferente de mediação entre sujeito e mundo. "Isto é uma rosa" é um juízo perceptual que deve ser distinguido do objeto percebido, porque certamente não percebemos proposições. Agora a questão é: posso saber alguma coisa sobre o objeto percebido que não esteja incluída previamente em algum juízo perceptual? Peirce diz: Não! E isso parece plausível, já que não somos deuses.

> Em lugar do objeto percebido, embora não esteja a primeira impressão do sentido, está uma construção com a qual a minha vontade nada tem que ver, e pode, portanto, ser propriamente chamada a evidência dos meus sentidos; a única coisa que eu carrego comigo são os fatos perceptuais, ou a descrição feita pelo intelecto da evidência dos sentidos, realizada pelo meu esforço. Esses fatos perceptuais são, na melhor das hipóteses, completamente diferentes do objeto percebido; e eles podem ser completamente falsos em relação a ele. Porém não tenho nenhum meio para criticá-los, corrigi-los ou recompará-los, a menos que eu possa reunir novos fatos perceptuais... Os fatos perceptuais são um relato muito imperfeito dos objetos percebidos, mas não posso ver atrás desse registro. (CP 1.141)

Tudo o que sei sobre os meus objetos percebidos é mediado por juízos perceptuais interpretativos; então, de onde vem a confiança para dizer que existe alguma coisa objetiva por detrás da minha percepção, que não seja uma mera ficção ou um "monstro" alucinado? Certamente não posso ter tal confiança diretamente, pois um "monstro" alucinado pode nos assustar tanto quanto uma coisa real, ainda que nossas interações subseqüentes com ele possam nos tornar claro que é apenas uma alucinação. Isso significa que pode ser necessária uma série infinita de interações para se chegar cada vez mais perto da realidade objetiva do objeto percebido, da mesma maneira que é necessário um número infinito de distinções para definir um número real ou para marcar um ponto individual em uma linha contínua.

Zenão de Eléia parece ter sido o primeiro a abordar esse problema, e muitos o têm seguido: Platão e Aristóteles, Santo Tomás de Aquino (1225-1274), Descartes (1595-1650) e Leibniz (1646-1716), Laurence Sterne (1713-1769) e Kant (1724-1804), Lewis Carroll (1832-1898), Charles S. Peirce (1839-1914), G. Cantor (1845-1918) e Francis Bradley (1846-1924) e E. Husserl (1859-1938) ou Jorge Luis Borges (1899-1986), para nomear apenas alguns.

O contínuo exibe a verdadeira natureza do quebra-cabeças de relacionamento. Pelo menos, tal tem sido a crença comum desde Aristóteles. Por um lado, relações como axiomas matemáticos ou leis naturais referem-se a gerais e não a coisas particulares – variáveis livres como um número geral ou uma pedra arbitrária que cai – e, assim, podem ser representados de muitas maneiras. Por outro lado, uma vez que as relações têm de ser nomeadas ou representadas de alguma maneira pelo menos, elas tornam-se também particulares, que devem ser distinguidas de outros particulares de seu mesmo tipo. Sem o pensamento relacional as relações tornam-se, elas mesmas, objetos de ordem superior que podem, por sua vez, tomar parte em vários relacionamentos, e assim por diante.

Filósofos (por exemplo, Bradley, 1893) têm argumentado que não somente é possível começar a construir essa hierarquia de relacionamentos, mas que isso é necessário. Qualquer sentença levará a uma regressão infinita quando cuidadosamente analisada, pois uma afirmação relacional necessária envolve novos relacionamentos entre cada um dos objetos originais e a relação que foi estabelecida entre eles. A intuição básica de Bradley, por exemplo, "parece ser que nada pode ser ligado a qualquer outra coisa sem uma relação mediadora" (Rucker, 1982, p. 147).

Afirmando-o diferentemente: uma relação não inclui sua aplicação e emprega, por si própria, sua função de "referente" ou de mediação. Por si mesmos, uma lei, um signo ou um argumento não podem ser a causa de qualquer coisa. "Uma lei da natureza deixada a si mesma seria inteiramente análoga a uma corte sem um rei" (Peirce, CP 5.48). Tomemos o exemplo da prova matemática. Como a comunicação sempre depende da metacomunicação – qualquer signo pode significar muitas coisas diferentes, dependendo do contexto –, não parece acidental que a versão de Lewis Carroll sobre o paradoxo assinale o ponto essencial, a saber, a hierarquia dos metaníveis no interior de nossa concepção de realidade.

Cada prova enfrenta a requisição de comprovação de que está correta. E a prova da correção da prova novamente defronta-se com a mesma requisição, e a prova da correção da correção da prova também... etc. (ver também Peirce: CP 2.27 Fn 1 p 15S: cf. "O que a Tartaruga disse a Aquiles" de Lewis Carroll, Mind, N. S. vol. 4, p. 278, reimpresso in D. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach). E, na tentativa de justificar axiomas e leis, temos de recorrer a axiomas ou a leis mais gerais,

> (...) eles mesmos muito menos rígidos, e assim por diante em uma regressão infinita, e quanto mais voltarmos, mais indefinida é a natureza das leis... O acaso é indeterminação, é liberdade. Mas a ação de liberdade emana da mais estrita regra da lei. (Peirce, 1884, Ms 975)

Interromper a regressão infinita da mediação, da prova ou da explicação por força pura ou mera compulsão externa não funciona. Qualquer compulsão, diz Peirce,

> (...) é alguma coisa que acontece hic et nunc, isto é, em uma ocasião particular, e afeta uma pessoa em particular. É essencialmente anti-geral. Mas a compulsão da aceitação racional não é, meramente, uma compulsão individual; é aquela que é percebida e deve ser sentida por cada ser racional... Tal compulsão geral supõe uma lei... A percepção, ou a percepção aparente, de uma compulsão geral, e, assim, de uma lei, deve entrar em cada inferência, para que uma inferência possa, na própria inferência, ser referida a uma classe geral de inferências. (Peirce MS 787 (1897))

E isso implica a acolhida de alguma cognição de segunda ordem.

Uma prova matemática é um tipo, um tipo de representação, em vez de uma mera construção simbólica. Além disso, tem-se de apreender a sua idéia, e não seguir, meramente, os passos lógicos ou o cálculo. O próprio cálculo depende apenas dos sinais relativos a índices e das regras de inferência convencionais. Ele é importante, mas não é suficiente porque não tem significado enquanto alguém não refletir sobre ele, sobre sua estrutura ou simetrias, suas aplicações etc.

> Um índice não tem que ver com significados; ele tem de levar o ouvinte a partilhar da experiência do falante, mostrando sobre o que ele está falando... É a conexão entre uma palavra indicativa e uma palavra simbólica que faz uma asserção. (Peirce, CP 4.56)

Uma prova tem de ser rigorosa tanto quanto significativa. Ela é um pensamento e, por isso, representa um ato intencional. Assim, o significado de uma prova depende de um intérprete. Mas esse intérprete tem de acolher hábitos razoáveis de pensamento. E a prova tem de desenvolver tais hábitos. Ela faz isso forçando certas experiências na mente do intérprete. Pode-se, portanto, alegar que a Tartaruga não entendeu realmente Aquiles, considerando que ela não tenha aplicado o argumento e, portanto, não obteve um metaconhecimento relevante. Um argumento ou um símbolo é um sinal que está relacionado ao seu objeto somente em virtude de ele ser interpretado como um signo desse objeto. Assim, a prova e a comunicação, em geral, têm de realizar uma mudança de hábito ou de disposição, e esta demanda certos hábitos de segunda ordem. Por exemplo: "Não olhe para a prova como um procedimento obrigatório para você, mas como um procedimento que possa guiá-lo" (Wittgenstein, RFM 30).

Mas como tudo isso ocorre realmente parece misterioso e confuso, tão confuso como o Paradoxo de Zenão sobre a corrida entre Aquiles e a Tartaruga.

Embora assuma-se geralmente que Zenão, em seu "Aquiles e a Tartaruga", produza um argumento inválido que depende da ignorância da teoria das séries numéricas infinitas convergentes, a teoria dos limites e dos números reais desenvolvida no cálculo de Cauchy e a teoria dos conjuntos de Cantor são completamente irrelevantes para a solução do paradoxo da corrida de Aquiles. Este é um paradoxo do movimento ou da continuidade.

O movimento é descrito matematicamente por meio do conceito de função, afinal. Seja x a localização de Aquiles e $f(x) = 1/10x + 1$ a da Tartaruga. O que se procura, então, é um ponto fixo de f (Otte 1990, p. 57).

$x = f(x)$ resolve o problema sem a necessidade sequer de mencionar os números reais ou os limites. Essa equação resolve o problema completamente no interior do universo enumerável dos números "computáveis". Mesmo que a incomensurabilidade estivesse envolvida, se, por exemplo, a velocidade de Aquiles fosse duas vezes maior que a raiz quadrada da velocidade da Tartaruga, permaneceríamos dentro do universo enumerável dos números computáveis (veja, por exemplo, M. Minsky, *Computation*, Prentice-Hall, 1967, para uma definição desse conceito). O que está em jogo, matematicamente falando, é o cálculo do zero de uma função contínua $F(x) = f(x) - x$. Isso pode ser feito, em geral, apenas aproximadamente, e seu sucesso depende do "princípio da continuidade". Esse princípio pressupõe que existem leis objetivas na realidade.

O paradoxo do movimento leva à complementaridade no conceito de "função". A função contínua, como um modelo do movimento, realmente reflete muito claramente o duplo caráter desse conceito: por um lado, ele contém aspectos discretos, com o fato de que me permite calcular valores simples quando é escrito como uma fórmula. Por outro lado, ele enfatiza aspectos contínuos, por exemplo, na ilustração do gráfico funcional que me oferece uma idéia qualitativa total da função (= movimento). A função é simultaneamente qualitativa e quantitativa, conceitual e construtiva. Ela é conhecimento (idéia total) e instrumento (fórmula de cálculo) ao mesmo tempo. Esse conceito tem de ser entendido, obviamente, como um todo, como uma idéia universal, tanto como uma mera coleção ou conjunto de relações de entrada e saída (*input-output*). Essa dualidade é inevitável enquanto nós acreditarmos que as funções devem antes ter certas propriedades, continuidade, por exemplo, para serem matematicamente interessantes, do que serem concebidas em meros termos da teoria dos conjuntos.

No final da Idade Média, foi aceito que o instante ("*the instantiation*") pode ser estendido.

> Ockham e seus seguidores argumentaram que a mudança não é nada mais do que a posse de uma seqüência de propriedades diferentes em tempos diferentes. Isto foi chamado de doutrina da forma mutante. A doutrina oposta foi chamada de a doutrina da mudança da forma (*fluxa formae*). (Bigelow e Pargetter, 1989, pp. 289-306)

A doutrina ockhamiana sustentava que o movimento não é nada mais do que apenas a ocupação de diferentes lugares em tempos sucessivos. Assim, ele é representado pelo conjunto de todos os (x, f(x)). A doutrina oposta afirmava que um corpo em movimento não somente possui uma posição, mas também uma velocidade instantânea, um ímpeto. Esta deve ser representada pelo conceito como tal, por f definida com intenção por suas propriedades ou por sua representação.

A questão permanece: o que é movimento ou, em termos matemáticos: O que é uma função contínua? Os conceitos de função e de continuidade, de fato, vieram a existir juntos, como o topólogo S. Bochner observou (Bochner, 1974). Para fazer da continuidade uma propriedade essencial de uma função, contudo, tem-se de definir uma função geral como uma classe de equivalência de representações simbólicas. A relação de equivalência em questão é estabelecida pelo axioma da extensão. Cauchy demonstrou isso e assim retificou erros na concepção de função do século XVIII (Grattan-Guinness).

A definição de Cauchy de uma função contínua, por um lado, pressupõe noções muito gerais e abstratas de relação ou correspondência funcional no sentido afirmado acima. Lembremos o relacionamento ε-δ que ocorre na definição de uma função contínua. Por outro lado, ela fornece essas noções com um significado matemático operativo, expressando-as no interior do contexto mais específico de uma versão aritmetizada da noção de continuidade. A definição de função contínua de um livro-texto comum, no sentido de Cauchy e Weierstrass, é, em certo sentido, auto-referente, e isso é apenas uma expressão do que acima se tem chamado complementarismo. Desse modo, entender funções matemáticas significa entender a complementaridade das fórmulas concretas e da relação abstrata, bem como a auto-referência que governa sua evolução e que torna-se aparente na definição de Cauchy de função contínua.

Chegamos agora a um segundo ponto, a saber: o que nos capacita a falar de uma complementaridade em tais casos, em vez de uma mera dualidade ou antinomia? Afinal de contas, a auto-referência tem sempre um gosto de paradoxo.

Vários autores têm, durante anos, usado o termo "Complementaridade", de Niels Bohr, para capturar aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico dos conceitos científicos e matemáticos (Otte e Steinbring, 1977; Kuyk, 1977: Otte; Keitel e Seeger, 1980; Otte, 1990, 1994; Douady, 1991; Jahnke, 1992). Caracterizar, de modo convincente, a dinâmica inerente a essa concepção, e assim distinguir a complementaridade da mera polaridade ou dualidade, sempre tem sido uma dificuldade. A idéia essencial destas notas é tentar superar essa dificuldade pela interpretação da complementaridade em termos semióticos.

Aspectos construtivos e descritivos do conhecer e também as estratégias de aprendizagem e desenvolvimento às avessas podem ser reconciliadas e combinadas somente se entendermos que redes inteiras de atores ou de sociedades de mentes trabalham simultaneamente, em vez de sujeitos singulares isolados.

A epistemologia clássica, e mesmo as teorias de aprendizagem e a didática de hoje, nunca alcançaram a idéia de complementaridade porque sempre conceberam a situação epistêmica e a situação de aprendizagem em termos de um sujeito isolado, que é ativo solitariamente e que é confrontado com um mundo totalmente passivo de meros objetos a serem conhecidos. A pluralidade de perspectivas e a objetividade do conhecimento implicam-se mutuamente, em vez de estarem em oposição uma à outra.

A pluralidade de perspectivas, contudo, expressa em termos semióticos, não significa nada mais do que pluralidade de representações.

Um objeto matemático, tal como uma função, não existe independentemente da totalidade de suas possíveis representações, mas ele não deve ser confundido com qualquer representação particular, tampouco. Ele é um geral que, como se tem dito, não pode ser exaurido como tal por qualquer número de suas representações. Isso tornou-se claro quando matemáticos, de Euler a Cauchy, tentaram esclarecer a idéia de uma função contínua de modo a representar as leis da natureza. Após um primeiro período histórico, durante o qual diferentes idéias fenomenológicas sobre função coexistiram essencialmente de forma não relacionada, a concepção de função e a de continuidade desenvolveram-se de modo simultâneo e em conexão estreita uma com a outra.

Essa pluralidade de perspectivas ou de representações não é nada mais do que uma afirmação de que nossa própria realidade deve ser concebida em termos evolutivos, em vez de como um conjunto estático de objetos. Uma função matemática representa uma lei e uma lei não é menos real porque ela nos permite predições em relação ao que acontecerá sob certas circunstâncias.

Referências

ANDERSON, D. R. (1986). The Evolution of Peirce's Concept of Abduction. *Trans. of the Ch. S. Peirce Society,* n. 22, pp. 145-164.

ARAGON, L. (1928/1987). *Traité du style*. Traduzido de *Abhandlung über den Stil*, Berlin, Bittermann.

ARMSTRONG, D. M. (1983). *What Is a Law of Nature?* Cambridge, Cambridge University Press.

BATESON, G. (1973). *Steps to an Ecology of Mind*. Paladin Frogsmore.

______ (1979). *Mind and Nature*. Bantam Books, New York.

BIGELOW, J. e PARGETTER, R. (1989). Vectors and Change. *British Philosophycal Science*, n. 40.

CASSIRER, E. (1962). *An Essay on Man*. Yale University Press.

CASTONGUAY, Ch. (1972). *Existence and Meaning in Mathematics*. Springer Wien.

CURRY, H. B. (1970). *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company,.

DOUADY, R. (1991). "Tool, Object, Setting, Window". In: BISHOP, A.; VAN DORMOLEN, J. e MELLIN-OLSEN. St. (eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*. Reidel, Dordrecht.

GÖDEL, K. (1944). "Russell's Mathematical Logic". In: SCHILPP, P. A. (ed.). *The Philosophy of Bertrand Russell*. Open Court, La Salle.

JAKOBSON, R. e HALLE, M. (1956). *Fundamentals of language*. Mouton, The Hague.

JESSEPH, D. M. (1993). *Berkeley's Philosophy of Mathemtics*. Chicago, The University of Chicago Press.

JAHNKE, H. N. (1992). "Beweisbare Widersprüche - Komplementarität in der Mathematik". In: FISCHER, E. P.; HERZKA, H. S. e REICH, K. H. (eds.). *Widersprüchliche Wirklichkeit*. München/ Zürich, Piper.

KUYK, W. (1977). *Complenentarity in Mathematics*. Dordrecht, Reidel.

LANGER, S. K. (1996). *Philosophy in a New Key*. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press,.

MacKAY, D. M. (1969). *Information, Mechanism and Meaning*. Cambridge, Mass., The MIT Press.

MINSKY, M. (1967). *Computation*. Prentice-Hall Englewood Cliffs.

OTTE, M. e STEINBRING, H. (1977). Probleme der Begriffsentwicklung – zum Stetigkeits-begriff, Didaktik der Mathematik.

OTTE, M.; KEITEL, Chr. e SEEGER, F. (1980). Text, Wissen, Tätigkeit Scriptor. Königstein/ Ts., 244 Seiten.

OTTE, M. (1983). Textual Strategies, FLM 3, 15-28.

_____ (1990). Arithmetics and Geometry - Some Remarks on the Concept of Complementarity. *Studies in Philosophy and Education*, n. 10, pp. 37-62.

_____ (1991). Style as a Historical Category. *Science in Context*, n. 4, pp. 233-264.

OTTE, M. (1994). "Intuition and Logic in Mathematics". In: ROBITAILLE, D. E.; WHEELER, D. H. e KIERAN, C. (eds.). *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education. Sainte-Foy.* Laval, Les Presses de l'Université.

OTTE, M. e PANZA, M. (1997). Mathematics as an Activity and the Analytic-Synthetic Distinction. In: *Analysis and Synthesis in Mathematics*. Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

ROTA, G. C. et alii (1988). Syntax, Semantics and the Problem of the Identity of Mathematical Objects. *Philosophy of Science*, n. 55, pp. 376-386.

RUCKER, R. (1982). *Infinity and the Mind*. Birkhaeuser, Basel.

SAVAN, D. (1983). Toward a Refutation of Semiotic Idealism. *Semiotic Inquiry*, n. 3, pp. 1-8.

SEBEOK, T. (1995). "Indexicality". In: KETNER, K. L. (ed.). *Peirce and Contemporary Thought*. New York, Fordham University Press.

SFARD, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. *Educational Studies in Mathematics,* v. 22, pp. 1-36.

SKEMP, R. R. (1969). *The Phychology of Learning Mathematics*. London, Penguin Books.

TARASTI, E. (2000). *Existencial Semiotics*. Indiana, UP, Bloomington.

THARP, L. (1989). Myth and Mathematics: A conceptualistic philosophy of mathematics. Part I. *Synthese*, n. 81, pp.167-201.

TOWNSEND, D. J. e BEVER, Th. (2001). *Sentence Comprehension*. Cambridge, The MIT Press.

TUOMELA, R. (1983). *Theoretical Concepts*. Springer, Wien.

WIGNER, E. P. (1964). Symmetry and Conservation Laws. *Proceedings of the National Academy of Sciences.*

Recebido em maio/2000; aprovado em ago./2000

Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática

VICENÇ FONT*

Resumen

El trabajo que presentamos es fundamentalmente una reflexión de tipo filosófico sobre la relación entre las matemáticas y las cosas, es una mirada realizada desde la perspectiva de la educación matemática. Los diversos enfoques que se han propuesto en la didáctica de las matemáticas se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) Una ontología general, 2) Una epistemología, general, 3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) Una definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) Una metodología de investigación. Si un programa de investigación problematiza y se posiciona explícitamente sobre cuestiones de ontología y de epistemología general, diremos que se trata de un programa de investigación global, si problematiza la naturaleza de las matemáticas hablaremos de programa semi-local y si sólo se posiciona en los últimos tres puntos hablaremos de programa local.

Palabras claves: *didática da matemática; educação matemática; ontologia e epistemologia.*

Abstract

This work is mainly philosophical; we raise some points about the relationship between things and mathematics based on a mathematics education perspective.

The different points of view that have been proposed in didactics of mathematics are implicitly or explicitly based on the following aspects: 1) A general ontology, 2) A general epistemology, 3) A theory about the nature of mathematics, 4) A general theory about teaching and learning and about mathematics in particular, 5) A definition of the object of didactics of mathematics, and 6) A methodology of investigation. If a program of investigation explicitly emphasizes questions about general epistemology and ontology, we will refer to it as a global investigation program; if the emphasis is on the nature of mathematics we will say that it is a semi-local program; and if a program is based on the last three points, it will be called a local program.

Key-words: *didactics of mathematics; mathematics education; ontology and epistemology.*

* Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona. E-mail: vfont@d5.ub.es

Introducción

En nuestra opinión, los diversos enfoques que se han propuesto en la didáctica de las matemáticas se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) Una ontología general, 2) Una epistemología, general, 3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) Una definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) Una metodología de investigación. Si un programa de investigación problematiza y se posiciona explícitamente sobre cuestiones de ontología y de epistemología general, diremos que se trata de un programa de investigación global (puntos 1 y 2), si problematiza la naturaleza de las matemáticas hablaremos de programa semilocal (punto 3) y si sólo se posiciona en los últimos tres puntos hablaremos de programa local. En Font (2002) analizamos el posicionamiento sobre estos seis puntos de algunos de los principales programas de investigación en didáctica de las matemáticas: el enfoque cognitivo, el constructivismo radical, el constructivismo social, el enfoque sistémico, el enfoque antropológico, el enfoque semiótico y el enfoque crítico.

El hecho de que los diferentes programas de investigación se posicionen explícitamente o bien implícitamente sobre la naturaleza de las matemáticas conlleva que, para una parte de los investigadores en didáctica de las matemáticas, una preocupación central haya sido la clarificación de la propia naturaleza de las matemáticas, realizando investigaciones propias de la filosofía de las matemáticas.

A continuación se exponen algunos puntos de vista sobre la relación entre las matemáticas y las "cosas" y se comentan algunas implicaciones sobre los modos de enseñar matemáticas que de ellos se derivan. Si bien el trabajo que presentamos es fundamentalmente una reflexión de tipo filosófico sobre la relación entre las matemáticas y las cosas, es una mirada realizada desde la perspectiva de la educación matemática.

Distintas concepciones sobre la relación entre las matemáticas y las cosas

Un hecho ampliamente aceptado en el campo de la educación matemática es que las concepciones de los profesores, y de las instituciones escolares, sobre la naturaleza de las matemáticas influye en su enseñanza. También está ampliamente aceptado que no es el único factor a tener en cuenta ya que hay otros que también son muy importantes como, por ejemplo, las concepciones pedagógicas y psicológicas de tipo general. A continuación se realiza un recorrido por algunos puntos de vista sobre la relación entre las matemáticas y las "cosas" y se comentan algunas de sus implicaciones didácticas

De las teorías acabadas a la praxis

Las matemáticas se pueden considerar como una determinada organización de los productos de la actividad matemática. Esta organización no es estática sino que va evolucionando históricamente.

El análisis de las diferentes organizaciones de los productos de la actividad matemática, según el positivismo lógico, se puede hacer desde un punto de vista interno (contexto de justificación) o bien desde un punto de vista externo (contexto de descubrimiento). El contexto de justificación tendría que ver con los criterios metodológicos normativos subyacentes a la ciencia y, consiguientemente, podría ser objeto de un análisis *a priori* y metacientífico, mientras que los procesos de descubrimiento deberían ser objeto de los estudios de historiadores, sociólogos y psicólogos de la ciencia, en tanto que interesados en la descripción *a posteriori* de aspectos diversos vinculados a la actividad científica. Actualmente, después de un largo proceso, se ha producido un desplazamiento de los estudios sobre la ciencia que han dejado de centrarse en las teorías y han pasado al análisis de las prácticas. Este desplazamiento ha sido posible gracias a la superación de la división propuesta por el positivismo lógico.

Las prácticas matemáticas, también llamadas actividad matemática, se pueden considerar tanto como una actividad social (institucional) como una actividad individual. La actividad matemática se puede considerar como un conjunto de prácticas realizadas en el seno de una institución, o bien como la actividad que desarrolla un sujeto individual. La sociología del conocimiento explica cómo se genera la actividad personal a partir de las instituciones y cómo la actividad institucional se genera a partir de la actividad de los miembros de la institución.

En nuestra opinión, la actividad matemática (personal e institucional) se puede considerar como una manipulación de ostensivos acompañada de pensamiento en el que se manipulan símbolos mentales. Por este motivo, siguiendo a Heidegger (1975), consideramos que la actividad matemática es una determinada manera de pensar sobre las "cosas". Los diferentes puntos de vista sobre las matemáticas que se han ido proponiendo a lo largo de la historia polemizan tanto sobre el tipo de "cosas" como sobre la "manera de pensar" sobre estas "cosas".

Respuestas clásicas

1) El "pensamiento matemático" se puede entender como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" que no depende de las "cosas" o bien como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" que sí depende de las "cosas".

Una de las clasificaciones que ha generado la lógica es la que distingue entre juicios universales y particulares. Las afirmaciones matemáticas suelen tener la forma de juicios generales. Las afirmaciones generales son muy útiles porque nos permiten hacer predicciones. Por ejemplo, podemos predecir que si calentamos agua a más de 100° entrará en ebullición, o bien que los ángulos formados por tres torres suman 180°. A los juicios que nos aportan información sobre las "cosas" como árboles, sillas, etc. se les llama juicios "sintéticos". Los juicios sintéticos se distinguen de otra clase de afirmaciones generales, como por ejemplo, el juicio "todos los solteros no son casados". Este juicio no parece de gran utilidad, pues si queremos saber si un hombre es soltero, debemos primero saber si está casado o no; y una vez que lo sabemos el juicio no nos dice nada más. La implicación no agrega nada a la condición expuesta en ella. Los juicios de esta clase, para muchos lógicos son vacíos, y no aportan información. Este tipo de juicios recibe el nombre de "analíticos". Si nos preguntamos cómo podemos averiguar si una afirmación general es verdadera, observamos que por lo que respecta a las implicaciones analíticas, esta cuestión se resuelve fácilmente. La implicación "todos los solteros no son casados" no es sino una consecuencia de la palabra "soltero". Pero sucede una cosa diferente con los juicios sintéticos del tipo "todos los metales se dilatan". El significado de las palabras "metal" y "caliente" no incluye ninguna referencia a la dilatación. La implicación puede, por lo tanto, comprobarse sólo por medio de la observación. Los juicios sintéticos tales que su verdad depende de la experiencia se llaman "sintéticos *a posteriori*".

Se puede considerar que afirmaciones matemáticas del tipo "los ángulos formados por tres torres suman 180°" son analíticas y que no informan sobre las cosas de nuestra experiencia, o bien considerar que son sintéticas (informativas), en este último caso ¿su verdad depende de la experiencia? Esta pregunta se puede responder afirmativamente o negativamente. Si se responde negativamente tenemos que, por una parte, la afirmación "los ángulos de un triángulo suman 180°" se considera un juicio sintético que informa sobre las cosas del mundo físico, ya que de él podemos deducir que "los ángulos formados por tres torres suman 180°", y, por otra parte, tenemos que su verdad no depende de la experiencia, ya que no resulta de una generalización de nuestras experiencias en la medición de los ángulos de un triángulo, ni puede ser refutada por el hecho de encontrar un triángulo tal que sus ángulos no sumen 180°. De hecho, la verdad de esta afirmación se demuestra a partir de los axiomas por razonamiento.

Si se considera que las afirmaciones matemáticas son juicios sintéticos que no dependen de la experiencia – son *a priori* y no *a posteriori* –, se esta defendiendo que la razón humana tiene capacidad de descubrir propiedades generales de los objetos físicos independientemente de la experiencia y se tiene que explicar cómo la razón puede descubrir la verdad sintética. Una de las primeras explicaciones se debe a Platón.

2) La dependencia respecto de las "cosas", históricamente se ha entendido de diferentes maneras. La primera explicación es la platónica y consiste en considerar que hay unas determinadas "cosas" que son entidades ideales existentes objetivamente, diferentes de las cosas como los árboles, sillas, etc., que forman un mundo trascendente que podemos intuir merced a una cierta facultad intelectual, de manera análoga a como nuestros cinco sentidos nos permiten percibir objetos físicos.

Platón dice que además de las cosas físicas hay otra clase de cosas que él llama "ideas". Existe la idea de triángulo, de paralelas o de círculo, además de las correspondientes figuras trazadas sobre el papel. Las ideas son superiores a los objetos físicos, muestran las propiedades de estos objetos de un modo perfecto, y por ello sabemos más sobre los objetos físicos mirando sus ideas que mirando los objetos mismos. Estos, dice él, participan de los objetos ideales en forma tal que muestran las propiedades de los objetos ideales de un modo imperfecto. Según Reichenbach (1951) la teoría de las ideas de Platón se puede considerar como un intento para explicar la naturaleza aparentemente sintética de las matemáticas. Las propiedades de los objetos ideales nos son reveladas por actos de visión intuitiva y de este modo adquirimos un conocimiento de las cosas reales. La visión intuitiva de las ideas se considera como una fuente de conocimiento comparable a la observación de los objetos reales, pero superior a ella por el hecho de que revela propiedades "necesarias" de sus objetos. La observación sensorial no puede darnos la verdad infalible, pero la visión intuitiva sí. Por los "ojos de la mente" vemos que dados dos puntos, es posible dibujar una única recta. El hecho de que esta afirmación se nos presenta como una verdad infalible, no puede derivarse de observaciones empíricas, sino que nos es dado por un acto de visión intuitiva que podemos realizar aunque tengamos cerrados los ojos. Es importante remarcar que, para Platón, los actos de visión intuitiva pueden suministrar conocimiento sólo porque los objetos ideales existen con independencia de las personas. Esta manera de entender la existencia es indispensable para él.

Platón introduce un mundo trascendente de ideas platónicas que está fuera de la mente de las personas. Su existencia es independiente de las personas (consideradas individualmente y colectivamente). Esta manera de considerar la existencia es la esencia del platonismo actual. Según la concepción platonista actual, los objetos matemáticos son reales, y su existencia un hecho objetivo independiente por completo del conocimiento que de ellos tengamos. Su existencia se halla fuera del espacio y del tiempo de la existencia física. Toda cuestión provista de significado que pueda hacerse al respecto de un objeto matemático tiene respuesta definida, seamos o no capaces de determinarla. Para el platonismo, los matemáticos nada pueden inventar, porque todo está ya presente. Todo cuanto pueden hacer es descubrir. Según el platonismo tenemos una facultad mental que nos permite intuir ciertas verdades como evidentes y, a partir de ellas, siguiendo demostraciones rigurosas podemos llegar a resultados que, de entrada, permanecen ocultos.

Frege, Russel, Gödel, Thom, Penrose y muchos otros, en algún momento de su trayectoria intelectual han sido defensores de algún tipo de platonismo. En 1884, Frege publica *Fundamentos de Aritmética*, obra en la que distingue el mundo objetivo de los conceptos del mundo subjetivo que es perceptible por los sentidos:

> (...) el número es un objeto de la psicología o un resultado de procesos psíquicos tanto como lo pueda ser, digamos, el mar del Norte. La objetividad del mar del Norte no viene afectada por el hecho de que dependa de nuestro arbitrio qué parte de toda la superficie de agua en la tierra delimitemos y cubramos bajo el nombre de "mar del Norte". Éste no es motivo para querer estudiar este mar por vía psicológica. (Frege, 1998, p. 23)

En 1901, Russell escribía:

> El número 2 debe ser de todos modos una entidad, que tendría una entidad ontológica, aunque no esté en ningún espíritu (...) La aritmética debe ser descubierta en el mismo sentido que Colón descubrió las islas occidentales y nosotros no creamos los números ni él creó a los indios. (Apud Omnès 2000, p. 146)

Thom, en 1971, escribe:

> Habida cuenta de todo, los matemáticos deberían tener el valor de sostener sus convicciones más profundas y afirmar, por tanto, que las formas matemáticas tienen existencia independiente de la mente que las está contemplando... A pesar de ello, en un instante dado cualquiera, la visión que tienen los matemáticos de este mundo de ideas es tan solo incompleta y fragmentaria. (Apud Davis y Hersh 1988, p. 236)

Por su parte, Gödel, en sus ensayos inéditos, escribe:

> Por otro lado, la segunda alternativa, en la que existen proposiciones matemáticas absolutamente indecidibles, parece refutar la

> concepción de que la matemática (en cualquier sentido) es sólo nuestra propia creación. Pues el creador conoce necesariamente todas las propiedades de sus criaturas, ya que ellas no pueden tener más propiedades que aquellas que él les ha dado. Así, esta alternativa parece implicar que los objetos y hechos matemáticos, o al menos algo en ellos, existen objetiva e independientemente de nuestros actos mentales y decisiones, es decir supone alguna forma de platonismo o "realismo" respecto a los objetos matemáticos. (Gödel 1994, p. 156)

Penrose, en 1989, en *La mente del emperador* también aboga por un cierto de tipo de platonismo: "En este capítulo he argumentado que tales ideas 'infusas' tendrían algún tipo de existencia intemporal, independientes de las nuestras terrenales" (p. 135).

El platonismo entiende las matemáticas como una determinada manera de pensar sobre las cosas del mundo platónico. Las características de este modo de pensar son, entre otras: 1) los objetos producidos (descubiertos) en la actividad matemática son objetos intemporales, 2) las relaciones y propiedades de estos objetos son verdaderas ya que pueden ser demostradas por una prueba lógica a partir de unas verdades que se captan intuitivamente (axiomas). Desde esta perspectiva, el proceso de producción de los objetos matemáticos y su organización en teorías que tienen una evolución histórica no se considera muy relevante ya que, en definitiva, es un descubrimiento de objetos y propiedades preexistentes. Lo que realmente interesa es la demostración de la verdad de las proposiciones de las teorías matemáticas entendida como demostración lógica a partir de los axiomas.

La repercusión de este punto de vista sobre la enseñanza de las matemáticas es la siguiente: considera que se tienen que enseñar teorías acabadas organizadas deductivamente. Entre las muchas y diferentes implicaciones de este punto de vista destacan: 1) la separación de las teorías acabadas de los problemas que las originaron, los cuales no juegan ningún papel importante en su organización. 2) las representaciones ostensivas de los objetos matemáticos son secundarias y relativamente "neutras" ya que se consideran como diferentes significantes de objetos matemáticos ahistóricos. El efecto que producen las diferentes representaciones ostensivas en la producción de sentido es un tema que no preocupa en demasía a la concepción platónica, ya que este posible efecto corresponde al "contexto de descubrimiento" y no al "contexto de justificación". Desde un punto de vista didáctico, el platonismo tiende a minusvalorar la importancia de las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la producción de sentido (Font y Peraire 2001).

3) Se puede considerar el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" que sí depende de las "cosas" de nuestra experiencia como árboles, piedras, etc. En su versión fuerte o "empírica", dice que las matemáticas es una ciencia que depende de las "cosas" como los árboles, sillas, etc exactamente igual a como dependen de ellas las ciencias experimentales.

Los empiristas sostenían que todo conocimiento, exceptuando el conocimiento matemático, es consecuencia de la observación. Para resolver la paradoja de que por una parte las matemáticas se aplican a la realidad y por la otra sus resultados no parecen depender de la observación, optaron por diferentes soluciones. Según Davis y Hersh (1988), Locke consideraba el conocimiento matemático como absolutamente seguro, por ser sintético y, por lo tanto, lo distinguía del conocimiento empírico. Las proposiciones necesarias eran, según él, "fútiles" o "instructivas", distinción por medio de la cual, al parecer, anuncia la distinción kantiana entre proposiciones analíticas y sintéticas y que, si se interpreta de este modo, lo convertiría en partidario de la síntesis *a priori*. Si bien Locke acepta el principio de que todos los conceptos, aun los de las matemáticas y la lógica, se incorporan a nuestra mente a través de la experiencia; no está dispuesto a ampliarlo hacia la tesis de que todo conocimiento sintético adquiere su valor a partir de la experiencia. Ampliación que si llevó a cabo Mill al proponer una teoría empirista del conocimiento matemático que afirmaba que las matemáticas son una ciencia natural no diferente de las demás. Por ejemplo, sabemos que $6+3 = 9$, porque observamos que al reunir un montón de 6 manzanas con otro de tres obtenemos un montón de 9.

Hume no acepta la solución sugerida por Locke y sólo admite como sintético el conocimiento que depende de la experiencia. Para Hume las matemáticas y la lógica son analíticas ya que no dependen de la experiencia. Hume entiende que la "dependencia" quiere decir no sólo que los conceptos tienen su origen en la percepción sensible, sino también que la percepción sensible es la base de la validez de todo conocimiento no analítico. Para Hume, la adición suministrada al conocimiento empírico por la inteligencia es de naturaleza vacía. La solución de Hume de considerar que el pensamiento matemático no informa sobre las cosas de nuestra experiencia porqué son verdades analíticas que no dependen de ella, al no conocer aún las geometrías no-euclidianas, no podía explicar la doble naturaleza de la geometría de la época, tanto como producto de la razón como predictor de observaciones, por lo que su punto de vista tuvo que esperar al positivismo lógico del siglo XX para desarrollarse.

En *A System of Logic ratiocinative and inductive* publicada por primera vez en 1843, John Stuart Mill sostiene una concepción claramente empírica de la lógica y las matemáticas. Mill considera que las ciencias matemáticas no están fundadas completamente sobre verdades necesarias, sino solamente sobre hipótesis y sobre algunos axiomas que constituyen generalizaciones de la experiencia. Para Mill, las hipótesis son deformaciones de los objetos reales, en donde algunas circunstancias son omitidas o exageradas (por ejemplo, línea sin anchura, etc.); en cambio los axiomas (por ejemplo, "dos líneas rectas no pueden contener un espacio") son verdades inductivamente adquiridas sobre la base de la experiencia y mediante un paso al límite.

Los trabajos de Mill y en general lo que se llamó "psicologismo" fueron duramente criticados primero por Frege y después por Husserl, por lo que han tenido que esperar a la aparición del naturalismo en filosofía de la ciencia para ser debidamente valorados. Por psicologismo se entiende la teoría epistemológica que pretende explicar los resultados de las ciencias formales por las estructuras psicológicas de las personas, las cuales en última instancia son los resultados azarosos de un proceso evolutivo natural.

El punto de vista que propone Mill es que las matemáticas son el producto de una determinada manera de pensar sobre las cosas de nuestra experiencia que es la misma que tienen la física o la química. Su propósito era mostrar que las matemáticas eran una ciencia inductiva. El punto de vista de Mill presentaba muchos puntos débiles, el primero es que las ciencias experimentales no funcionan por el método inductivo; el segundo es que tampoco lo hacen las matemáticas, y el tercero es que sólo tiene en cuenta aspectos psicológicos y no considera aspectos sociales. A pesar del poco éxito que tuvo su propuesta, tiene aspectos interesantes. Uno de ellos es que, tal como remarca Bloor (1998), el enfoque de Mill está claramente relacionado con ideas educativas.

Según Bloor (ibid.), la idea fundamental de Mill es que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales. Algunas de esas experiencias caen bajo categorías que constituirán más tarde las distintas ciencias empíricas; así, por ejemplo, el hecho de que los metales se dilaten pertenece a la física. Paralelamente a este tipo de hechos referentes a ámbitos bastante estrechos, también tenemos conocimiento de hechos que se aplican indiferentemente a ámbitos muy amplios; por ejemplo, existen múltiples colecciones de objetos que pueden ser ordenados y clasificados, organizados según ciertas pautas o series, agrupados o separados, alineados o intercambiados entre si, etc. Es esta categoría de hechos la que Mill piensa que subyace a las matemáticas. El agrupamiento y la organización de objetos físicos suministran modelos para nuestros procesos mentales, de modo que cuando pensamos matemáticamente estamos apelando tácitamente a ese saber. Los procesos de razonamiento matemático no son sino pálidas sombras de las operaciones físicas con objetos, y ese carácter forzoso que tienen los pasos de una demostración y sus conclusiones reside en la necesidad propia de las operaciones físicas que subyacen como modelos. Si el campo de aplicación de los razonamientos aritméticos es tan vasto se debe a que podemos, con mayor o menor dificultad, asimilar a esos modelos una gran variedad de situaciones diferentes.

En Mill se encuentran ideas sobre la enseñanza de las matemáticas que hoy son ampliamente aceptadas. Mill consideraba que en la enseñanza de las matemáticas hay que rechazar la manipulación formal de símbolos escritos en beneficio de las experiencias físicas subyacentes que les correspondan. Sólo éstas pueden dar sentido a las manipulaciones simbólicas y proporcionar un significado intuitivo a las conclusiones que se obtengan. Sin duda la perspectiva de Mill apunta elementos interesantes. Los objetos físicos, las situaciones y las manipulaciones pueden funcionar claramente como modelos de las diversas operaciones matemáticas básicas. Las experiencias de tales operaciones físicas pueden plausiblemente presentarse como la base empírica del pensamiento matemático. Las ideas de Mill apuntan hacia una enseñanza de las matemáticas basada en la exploración del alumno.

4) La no-dependencia de las "cosas" de nuestra experiencia como los árboles, sillas, etc. se puede entender sin recurrir a un mundo platónico. La primera consiste en considerar que el pensamiento matemático no informa sobre este tipo de cosas porque son verdades analíticas que no dependen de la experiencia.

La crisis de fundamentos ocurrida en las matemáticas a finales del siglo pasado se intentó resolver primeramente por medio del programa logicista. Este programa fue iniciado por Frege en su intento de dotar a la aritmética de unos fundamentos seguros. Este objetivo estaba relacionado con la preocupación por el rigor en el análisis matemático surgida en el siglo XIX. La introducción por Cauchy del concepto de límite y la insistencia de Weierstrass en fundamentar el análisis en la teoría de los números reales fueron sólo los primeros pasos. Los números reales se definen en términos de sucesiones convergentes de números racionales y, puesto que los números racionales pueden definirse fácilmente en términos de números naturales, Frege se impuso la tarea de completar el proceso reductivo: definir los números naturales en términos puramente lógicos.

Frege considera que las verdades aritméticas son "analíticas" y *a priori*, y que serían a las de la lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría. Frege critica la idea de que los números son propiedades de las cosas externas ya que el número que adscribimos a las cosas depende de cómo las clasifiquemos previamente y esto depende de nuestros propósitos, y también critica la idea de que el número sea algo subjetivo. Frege en los *Fundamentos de Aritmética* define los números a partir de la relación de equinumerabilidad y considera que demuestra la tesis logicista, esto es: la reducción de la aritmética a la lógica, deduciendo los teoremas matemáticos por cálculo lógico.

Russell descubrió una paradoja lógica que afectaba profundamente la base de los *Fundamentos de Aritmética* de Frege. Russell y Whitehead intentaron completar el programa logicista iniciado por Frege, esto es probar que la matemática es una rama de la lógica porque toda ella puede derivarse de la lógica. Su obra *Principia Mathematica* empiezan como un tratado de lógica y progresa mediante operaciones lógicas y definiciones explícitas hasta dar todos los elementos fundamentales de las matemáticas sin que, en su opinión, sea posible señalar una línea de separación entre la lógica y las matemáticas que no sea totalmente arbitraria. Ello requiere dos reducciones: la primera es la definición de los términos matemáticos mediante términos lógicos y la segunda es la reducción de los teoremas matemáticos, mediante deducciones lógicas, a teoremas de la lógica. Las entidades primitivas en las que termina la reducción lógica, son las del cálculo proposicional, los cuantificadores y las variables del cálculo funcional. Los axiomas lógicos fundamentales para la reducción de los teoremas matemáticos son los axiomas del cálculo de predicados; dos reglas de inferencia lógica (sustitución y modus ponens) y los axiomas de infinitud, de selección y de reducibilidad.

El programa logicista se enfrentó a dificultades que muchos consideran insuperables. La primera tiene que ver con la tesis fundamental de su programa: "las matemáticas se pueden reducir a la lógica", mientras que la segunda tiene que ver con la suposición de que los axiomas de la lógica son evidentes para cualquier persona. Con relación a esta segunda dificultad hay que tener en cuenta que el logicismo, muy a su pesar, se vio obligado a aceptar unos axiomas que difícilmente encajan en esta versión. Por ejemplo, en relación al axioma de la reducibilidad los autores de los *Principia* en la introducción a la segunda edición dicen: "La justificación de este axioma es puramente pragmática: lleva a los resultados deseados y no a otros. Pero es claro que no es la clase de axioma del cual podamos quedar satisfechos" (apud Dou, 1970, p. 73). Con relación a la primera, hay diferentes objeciones. Una muy importante es que la teoría de los tipos o la reducción lógica del número natural suponen intuiciones previas que aunque se llamen lógicas son típicamente matemáticas.

Por otra parte, muchas personas consideran que el teorema de incompletitud de Gödel permite responder al desafió que formula Russell en el último capítulo de su *Introduction to Mathematical Philosophy* publicado en 1919:

> Si todavía hay quien no admita la identidad de la lógica y la matemática, podemos desafiarle a que nos muestre en qué punto de la cadena de definiciones y deducciones de los Principia Mathematica considera que concluye la lógica y comienza la matemática. Entonces quedaría patente que cualquier respuesta debe ser totalmente arbitraria. (Russell 1988, p. 171)

A partir de los teoremas de Gödel, parece razonable responder que la lógica no se extiende más allá de la teoría de la cuantificación.

Cuando se dice que la aritmética y, con ella, todos los llamados cálculos funcionales de orden superior, así como todas las versiones de la teoría de conjuntos, son esencialmente incompletos, se está admitiendo que esas teorías envuelven alguna noción, o más de una, de la que no cabe ofrecer una exhaustiva caracterización mediante el establecimiento de una serie de reglas de inferencia: y ésta parece constituir una buena razón para excluirlas del dominio de la lógica. Parece pues fuera de lugar afirmar la posibilidad de reducir toda la matemática a la lógica si, al mismo tiempo, hay que admitir que la lógica incluye dentro de si todos y cada uno de los diversos apartados de la matemática.

El segundo intento de superar la crisis de fundamentos fue el programa formalista iniciado por Hilbert. En esta concepción no hay objetos matemáticos (a diferencia del platonismo) solamente hay símbolos ostensivos. Para el formalismo extremo, lo único que hay son reglas mediante las cuales se pueden deducir fórmulas a partir de otras, pero las fórmulas no se refieren a nada; son nada más ristras de símbolos que no tienen significado, y tampoco tienen asignado valor de verdad. El primer objetivo del programa formalista es la "completa formalización" de un sistema deductivo. Esto implica la extracción de todo significado de las expresiones existentes dentro del sistema: se las debe considerar, simplemente, como signos vacíos. La forma en que se deben manipular y combinar estos signos ha de ser plasmada en un conjunto de reglas enunciadas con toda precisión. La finalidad de este procedimiento estriba en construir un sistema de signos (llamado un "cálculo") que no oculte nada y que solamente contenga lo que expresamente se haya puesto en él. Los postulados y los teoremas de un sistema completamente formalizado son "hileras" (o sucesiones de longitud finita) de signos carentes de significado construidas conforme a las reglas establecidas para combinar los signos elementales del sistema formar más amplios conjuntos. Además, cuando un sistema ha sido completamente formalizado, la derivación de teoremas a partir de los postulados se limita, simplemente, a la transformación (siguiendo la regla) de un conjunto de estas "hileras" en otro conjunto de "hileras". De esta manera se elimina el peligro de utilizar cualesquiera reglas no declaradas de razonamiento.

Una página entera cubierta con los signos "carentes de significado" de este tipo de matemáticas formalizadas permite formular declaraciones sobre su configuración y sobre sus relaciones. Puede uno decir que una "hilera" está compuesta de otras tres distintas, etc. Estas afirmaciones poseen, evidentemente, significado y pueden suministrar información importante acerca del sistema formal. Es preciso observar, no obstante, que tales declaraciones significativas acerca de un sistema matemático carente de significado (o formalizado) no pertenecen plenamente a dicho sistema. Pertenecen a lo que Hilbert denominó "metamatemáticas", o sea al lenguaje que se formula "acerca" de la matemáticas. Las declaraciones metamatemáticas son declaraciones acerca de los signos existentes dentro de un sistema matemático formalizado.

Un requisito esencial del programa formalista de Hilbert en su primitiva concepción era que las demostraciones de consistencia implicaran únicamente procedimientos que no hicieran referencia ni a un número infinito de propiedades estructurales de fórmulas ni a un número infinito de operaciones con fórmulas. Hilbert, al optar por admitir únicamente métodos finitistas en la metamatemática, en cierta manera acepta los planteamientos intuicionostas, pero en lugar de aplicarlos, como hacen estos, a las matemáticas, los reserva para la metamatemática.

La influencia del positivismo lógico fue determinante para el auge del formalismo en la filosofía de las matemáticas. El positivismo lógico abogaba por una ciencia unificada, codificada en un cálculo lógico formal y con un único método deductivo. Se sostenía que la formalización había de ser el objetivo a lograr en todas las ciencias. Formalizar significaba elegir un vocabulario de términos básicos, enunciar las leyes fundamentales mediante tales términos y desarrollar a partir de las leyes fundamentales una teoría por medio de la lógica. Por lo que toca a las propias matemáticas, éstas no son consideradas como una ciencia, sino como un lenguaje para las demás ciencias.

Hacia la mitad del siglo XX, el formalismo se convirtió en el punto de vista predominante en las instituciones universitarias. El formalismo contemporáneo, también llamado conjuntismo, es descendiente del formalismo hilbertiano, pero no es exactamente lo mismo. Este tipo de formalismo (Mosterin, 1980) considera que en la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas hay que considerar, como mínimo, tres estadios sucesivos, correspondientes a tres diferentes niveles de precisión y rigor en el concepto de prueba. En el primer estadio, llamado intuitivo o ingenuo, se prueban los enunciados de la teoría, pero no se dice ni de dónde parte la prueba ni cuáles son los procedimientos admisibles para probar. En el segundo estadio, llamado axiomático, se determina el punto de partida de la prueba, eligiendo ciertos enunciados de la teoría como axiomas y exigiendo que todos los demás sean probados a partir de ellos, aunque sigue sin explicitarse cuáles son los procedimientos o reglas o medios de prueba admisibles. En el tercer y último estadio, llamado formalizado, el concepto de prueba está completamente precisado y explicitado, tanto en lo que respecta al punto de partida de la prueba como a los medios de prueba permitidos.

A finales del siglo XIX se fundamenta toda la matemática sobre los números naturales y esta última sobre la teoría de conjuntos. La aparición de las paradojas lleva a la crisis de fundamentos de principios de siglo. Por un lado la matemática entera se fundamenta en la teoría de conjuntos y la lógica y por otro lado en la teoría intuitiva de conjuntos se descubren contradicciones que la hacen insostenible. Como respuesta a estas paradojas aparecen a principios de siglo tres respuestas diferentes: La respuesta de Brouwer que rechaza la lógica clásica y el infinito actual y postula una nueva lógica y una nueva matemática, dando lugar al intuicionismo. La respuesta de los *Principia* de Russell y Whitehead, que formula la teoría ramificada de los tipos, en la cual la eliminación de las contradicciones se obtiene al precio de una notable complicación técnica. Y la respuesta de Zermelo, consistente en axiomatizar la teoría de conjuntos con axiomas *ad hoc* que impidan la aparición de las contradicciones conocidas, conservando en lo posible la riqueza y agilidad de la teoría intuitiva de conjuntos. Aunque las dos primeras respuestas eliminan el peligro de caer en contradicciones de un modo mucho más seguro y radical, la corriente central de la matemática ha hecho suya la respuesta axiomática de Zermelo que hasta ahora no ha dado lugar a contradicciones.

La idea de Zermelo consiste en introducir un axioma que evita que puedan aparecer en la teoría conjuntos "demasiado grandes" (como el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos) que son los que pueden dar lugar a contradicciones. Además el sistema de Zermelo consta de otros 6 axiomas: el de extensionalidad, el del par, el de la gran unión, el del conjunto de las partes, el de elección y el de infinitud. Este sistema excluye, pues, los conjuntos peligrosos y garantiza al mismo tiempo la existencia de los conjuntos "inofensivos" necesarios al matemático: tanto el conjunto vacío como el de los números naturales existen, así como todos los que se puedan obtener a partir de ellos por formación sucesiva de la gran unión y el conjunto de las partes. De todos modos, pronto se descubrió que los 7 axiomas de Zermelo no bastaban para probar la existencia de algunos conjuntos deseables. Esta laguna fue rellenada por Fraenkel, que en 1922 introdujo el axioma del reemplazo (o "de sustitución"). El sistema resultante de añadir este nuevo axioma a los 7 de Zermelo se conoce desde entonces con el nombre de sistema ZF (Zermelo-Fraenkel). Además de esta axiomatización existen otras axiomatizaciones de la teoría de conjuntos como son las de NBG, Ackermann, Quine, Schoenflies, Tarski-Mostowski, etc.

Desde el punto de vista formalista, la pregunta por la verdad o la falsedad de los enunciados matemáticos no tiene sentido en el estadio axiomático, ya que lo más que podemos preguntar con sentido es por la consistencia o contradicción del sistema. En ninguna de las actuales axiomatizaciones de la teoría de conjuntos se han producido contradicciones; pero en ninguno de ellos ha podido probarse que no puedan producirse el día menos pensado.

En 1931, Gödel, en el artículo "Sobre sentencias formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines", muestra que no hay ningún sistema formal matemático con un número finito de axiomas del cual pueda desarrollarse la aritmética que sea completo; por el contrario, hay problemas relativamente simples de la aritmética de números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas y reglas. Para probarlo, lleva a cabo la aritmetización de la metamatemática partiendo de la asignación biunívoca de números naturales – números de Gödel – a los signos primitivos, sentencias y pruebas. De este modo, consiguió que unas proposiciones metamatemáticas acerca de un sistema formalizado de aritmética pudieran ser representadas por proposiciones aritméticas contenidas dentro del propio sistema. Este método le permitió construir una fórmula que resulta ser indecidible, puesto que ni la fórmula ni su negación son demostrables dentro del cálculo. Como quiera que una de estas dos fórmulas aritméticas debe codificar una verdad aritmética, ninguna de las cuales es, sin embargo, derivable de los axiomas, los axiomas son incompletos. La incompletitud es esencial en los sistemas formales que incluyan la aritmética, porque aunque se introduzca como axioma aquél que permita derivar la proposición indecidible surgirá otra proposición indecidible, y así sucesivamente. A este resultado se le suele denominar primer teorema de incompletitud. Gödel también muestra que es imposible obtener una prueba finitaria de consistencia para un sistema formal que pueda desarrollar la aritmética, que contenga formalizados todos los modos finitarios de prueba. A este resultado se le denomina el segundo teorema de incompletitud.

La repercusión del trabajo de Gödel dentro del área de la fundamentación matemática es difícil de exagerar aunque su impacto ha sido mayor sobre las cuestiones conceptuales que tienen que ver con los computadores y la mecanización, cuestiones que son una preocupación central en la tecnología actual. La incidencia del resultado de Gödel sobre las "escuelas" de filosofía de la matemática fue la siguiente: 1) El teorema de incompletitud significó para el logicismo de Russell y Whitehead el fracaso de su intento de construir un sistema lógico que permita incluir la aritmética. 2) Respecto al formalismo cabe destacar que Gödel demostró los límites internos de los sistemas formales al demostrar que la matemática es inagotable desde cualquier sistema formal: siempre contendrán verdades matemáticas indecidibles,

Desde el punto de vista filosófico, la herencia de Frege, Russell, el primer Wittgenstein y el positivismo lógico ha sido una escuela de filosofía analítica que sostiene que el problema central de la filosofía es el análisis referencial del significado y que el instrumento esencial para efectuarlo es la lógica. Este punto de vista considera que la filosofía de las matemáticas tiene por objetivo el estudio de las teorías formalizadas. Desde esta perspectiva sólo interesa lo que se llamó "contexto de justificación" y se relega a otras disciplinas el "contexto de descubrimiento".

Desde el punto de vista educativo la herencia del formalismo ha sido las matemáticas modernas, tanto en la enseñanza universitaria como no universitaria. A principios de los años 70 aparecen en España los nuevos programas de enseñanza primaria y secundaria que incorporan las matemáticas "modernas". La idea que los inspiraba era que la enseñanza de las matemáticas tenía que estar de acuerdo con el espíritu de la época, que creía que las matemáticas servían para estructurar el pensamiento y que eran el lenguaje de la ciencia. Podemos encontrar matemáticas en todas partes, se decía, pero no cualquier clase de matemáticas, sino las matemáticas de hoy en día: la teoría de conjuntos, las estructuras matemáticas, la probabilidad, la estadística, el álgebra, la topología, etc; y cuanto más pronto los alumnos entren en contacto con estas matemáticas, mejor.

Como ejemplo de este interés por introducir lo más tempranamente posible las matemáticas modernas, tenemos la introducción de la teoría de conjuntos en la etapa infantil. Este intento de poner la enseñanza de las matemáticas al nivel de las matemáticas del siglo XX se consideraba especialmente necesario en los niveles primario y secundario, en los cuales se creía que se estaban enseñando contenidos obsoletos por no estar de acuerdo con el espíritu de las matemáticas modernas.

En la elaboración de los nuevos programas se procuró conseguir una coherencia interna desde el punto de vista de los contenidos matemáticos que se concretó en: 1) el desarrollo consecuente del punto de vista conjuntista y vectorial, 2) el desarrollo sistemático y coherente de la geometría a través del concepto de transformación y 3) el desarrollo de las estructuras algebraicas con aplicación inmediata a diferentes partes de la aritmética, del álgebra y de la geometría.

Los matemáticos profesionales partidarios de esta reforma creían que las dificultades que se producían en el aprendizaje de las matemáticas eran causadas, básicamente, por las presentaciones defectuosas de la matemática tradicional (definiciones poco precisas, conceptos no suficientemente generales, demostraciones poco rigurosas, etc.) que inducían en el alumno una concepción confusa de la matemática por la ausencia de una estructura deductiva rigurosa. Dicho en términos constructivistas actuales: consideraban que la matemática tradicional hacía una presentación confusa de las matemáticas y que, por lo tanto, no era potencialmente significativa para los alumnos.

Sin entrar en un análisis exhaustivo de las consecuencias del enfoque "moderno" de las matemáticas en la enseñanza no universitaria, podemos decir que los aspectos más perjudiciales de la aplicación concreta de esta reforma fueron (Núñez y Font 1995): a) Deductivismo exagerado: las matemáticas se presentaban como unos conocimientos terminados y organizados deductivamente. Esta presentación podía poner de manifiesto al alumno la ordenación lógica de la materia, pero, al presentar el producto terminado, impedía la acción, las conjeturas, la imaginación, etc; es decir, en la terminología de la época, "impedía hacer matemáticas". b) Definiciones formalizadas: se cayó en el error de identificar el concepto que se quería enseñar con su definición formalizada. Esta identificación llevó: 1) a presentar a los alumnos un exceso de simbolismo, 2) a hacerlos manipular mecánicamente estos símbolos, sin saber lo que estaban haciendo (formalismo prematuro) y 3) a olvidar que, para comprender un concepto matemático, son necesarias situaciones de referencia que le den sentido, al mismo tiempo que permiten descubrir las relaciones con otros conceptos. c) Exceso de generalización y, por tanto, falta de procesos de abstracción: los conceptos se presentaban de la manera más general posible, con lo cual se iba de lo más general a lo más particular y, por tanto, no se mostraban al alumno las situaciones concretas que permitían abstraer sus similitudes e ir de lo concreto a lo más general. d) Las matemáticas por las matemáticas: se presentaban unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias. Los textos didácticos ofrecían pocas situaciones no matemáticas que permitiesen a los alumnos conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, lo cual facilitaba preguntas del tipo "esto para qué sirve".

El estrepitoso fracaso de la aplicación concreta de las matemáticas modernas modificó la manera de enseñarlas en las instituciones no universitarias en diferentes direcciones. Una fue enseñar teorías acabadas, sin demostrarlas deductivamente, focalizando el trabajo en el aula en el dominio de las técnicas algorítmicas que se derivaban de la teoría. Los partidarios de este estilo docente asumían, en muchos casos implícitamente, el punto de vista conductista en psicología. La otra, si bien consideraba fundamental el aprendizaje de las estructuras matemáticas, inició tímidamente una línea de trabajo, que llamaremos "semántica" – entendiendo por semántica todo aquello que tiene que ver con la construcción de significado que hace el alumno –, que pretendía resolver una de las grandes dificultades del aprendizaje de las matemáticas: su nivel de abstracción y generalización. Esta forma de entender la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas consideraba imprescindible presentar contextos variados que diesen sentido al concepto; oponiéndose a las versiones más formalistas de la matemática moderna, las cuales pretendían presentarlos de la manera más general posible y separados de los contextos que les daban sentido, para así evitar las dificultades de comprensión que la presentación contextualizada pudiese producir.

En el inicio de esta tímida línea semántica, además de las ideas de Piaget, las ideas de Bruner y Dienes tuvieron mucha influencia. Bruner se preocupó de estudiar el concepto de representación cognitiva. Según Bruner hay tres tipos de representaciones: 1) La representación enactiva es un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada. Como ejemplo de representación enactiva tenemos el caso del niño que cuando deja caer un sonajero imita el movimiento del sonajero con la mano, indicando así que recuerda el objeto con relación a la acción que se realiza sobre el mismo. 2) La representación icónica consiste en recrear mentalmente una situación anterior; por ejemplo, si en un viaje hemos visitado un lugar que nos ha gustado, podemos recrear sus imágenes. 3) La representación simbólica: este tipo de representación va ligada a la competencia lingüística y permite representar las situaciones mediante símbolos.

Bruner propuso que los conceptos se enseñasen siguiendo estas tres fases:

> (...) Por tanto, la clave para la enseñanza parecía ser el presentar los conceptos de forma que respondiesen de manera directa a los modos hipotéticos de representación. La forma en que los seres humanos se representaban mentalmente los actos, los objetos y las ideas, se podía traducir a formas de presentar los conceptos en el aula. Y, aunque algunos estudiantes podían estar "preparados" para una representación puramente simbólica, parecía prudente, no obstante, presentar también por lo menos el modo icónico, de forma que los estudiantes dispusiesen de imágenes de reserva si les fallaban las manipulaciones simbólicas(...). (Resnick y Ford, 1990, p. 141)

Dienes se preocupó del aprendizaje de los conceptos matemáticos y diseñó una serie de secuencias didácticas regidas por los siguientes principios:

> 1) Principio dinámico: Deben incluirse actividades prácticas o mentales que provean de la necesaria experiencia fundamental.

> 2) Principio de constructividad: Esencialmente implica la inducción desde lo particular a lo general (en contraste con el análisis que va de lo general a lo particular). 3) Principio de variabilidad matemática: Debe variarse la estructura matemática a partir de la cual el nuevo concepto o proceso se desarrolla para permitir que se distingan claramente todas las características matemáticas implicadas. 4) Principio de variabilidad perceptiva: Debe variarse suficientemente el marco de experiencia a partir del cual se desarrollan ideas y procesos al objeto de prevenir su fijación en un conjunto o conjuntos particulares de experiencias, esto es, debe propiciarse la abstracción. (Macnab y Cummine, 1992, p. 52)

El principio de variabilidad perceptiva es importante porque si no se ponen ejemplos concretos variados de un concepto nos podemos encontrar con que los alumnos tomen como atributos relevantes del concepto aquellos que no lo son. Las variaciones matemáticas clarifican hasta qué punto se puede generalizar un concepto extendiéndolo a otros contextos. De acuerdo con este principio, por ejemplo, el aprendizaje-enseñanza del valor posicional no se ha de limitar al contexto de la base 10, sino que se ha de ampliar a otras bases, para que los alumnos comprendan que el valor posicional de una cifra no depende del hecho de trabajar en base diez, puesto que en otras bases las cifras también tienen un valor posicional.

Los partidarios de esta reforma decían que la enseñanza de las matemáticas debía de tener en cuenta el desarrollo de las capacidades intelectuales de los alumnos, y que se tenía que ir de la acción a la abstracción, de acuerdo con lo que postulaban Piaget, Lovell, Bruner, Dienes, etc. Todos estos autores coincidían en que, para poner de manifiesto las estructuras subyacentes de las matemáticas, el alumno tenía que pasar por tres fases: 1) Fase de manipulación: los conceptos tienen su origen en las acciones realizadas sobre los objetos. 2) Fase de representación: aquello que se ha comprendido se ha de poder explicar oralmente y se ha de saber representar icónicamente, y 3) Fase simbólica: esta etapa es la más reflexiva y la que posibilita el paso efectivo a la abstracción; aquello que se ha comprendido se ha de saber trabajar con símbolos sin un referente concreto.

Estas ideas se concretaron en la producción y utilización de diferentes materiales (los bloques lógicos y los bloques multibase de Dienes entre otros) que fueron muy importantes durante los años 75-80 y que aún son usados actualmente. Sin embargo, pronto aparecieron los críticos, entre los que hay que destacar a Freudenthal (1983), a este punto de vista. Su crítica consistía en poner en cuestión que la vía indicada fuese ir de las estructuras matemáticas a las situaciones que las ejemplifican. Frente a este punto de vista, Freudenthal desarrolla lo que conocemos por "fenomenología didáctica". Lo que una fenomenología didáctica permite es precisamente preparar y organizar el camino contrario: se parte de los "phenomena" que solicitan ser organizados y entonces la tarea consiste en enseñar al estudiante a manipular los medios de su organización. Los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los "phenomena" tanto del mundo real como del mundo imaginario. Así los números organizan el "phenomenon" de la cantidad, las figuras geométricas organizan el "phenomenon" del contorno, forma, etc.

5) Se puede considerar que el pensamiento matemático no informa de las cosas como los árboles, sillas, etc porque lo que hace es informar sobre aquello que nosotros ponemos (ya sabemos) en las cosas como los árboles, sillas, etc. Por ejemplo, los juicios sintéticos a priori basados en el apriorismo kantiano.

Kant intentó una síntesis entre las tradiciones racionalistas y las empiristas. Estaba de acuerdo con Hume y otros empiristas en la idea de que nuestro conocimiento de la naturaleza depende de la experiencia y que no se descubre razonando sobre nuestras ideas innatas. Ahora bien, consideró que el escepticismo de Hume era consecuencia inevitable de su adhesión al principio empirista, que intentaba extraer todo el conocimiento de la experiencia. Su solución consistió en dar la vuelta a la relación de las personas con el mundo real. En lugar de suponer que los objetos existen independientemente de nosotros, y preguntarnos después cómo podemos conocerlos, Kant sostenía que nuestras actividades cognitivas eran parcialmente constitutivas de los objetos de los cuales tenemos experiencia. Mantenía, además, que es precisamente nuestra propia participación en la construcción de los objetos de percepción lo que hace posible que conozcamos. Al explicar como nuestra actividad cognitiva es constitutiva de los fenómenos que experimentamos, Kant subscribió en parte el enfoque racionalista. Afirmaba que nuestra capacidad de percibir y de pensar sobre la naturaleza dependía de conceptos o categorías del entendimiento que nosotros aportamos a la experiencia, categorías que poseemos de manera innata. Estas categorías se han de aplicar al *input* sensorial que recibimos, para constituir nuestro mundo de experiencia. Para tener experiencia de un objeto, el intelecto ha de aplicar las categorías a nuestros *inputs* sensoriales.

Kant mantenía que los objetos que causan las experiencias sensoriales (que llama "cosas en si") son incognoscible para nosotros; por tanto, no tiene sentido investigar qué son. Por otra parte, los objetos de la experiencia fenoménica, los que se construyen aplicando las categorías a los estímulos sensoriales, están dentro de nuestro dominio de conocimientos. Debido a que estos objetos se han construido de acuerdo con nuestras categorías, podemos estar seguros que se adapten a ellas. Por ejemplo, debido a que construimos el mundo de manera que cada suceso tenga una causa, sabemos con certeza que todo suceso tiene una causa. Normalmente se utilizan los términos "noúmeno" para referirse a la "cosa en si" y "fenómeno" para referirse a la "cosa en mi". De la obra de Kant, nos interesa constatar que: 1) El mundo de los noúmenos queda despojado de las categorías, 2) Las categorías las aporta el sujeto, 3) Las categorías son innatas y 4) el mundo fenoménico deja de ser concebido como la representación pasiva de la realidad exterior y, en su lugar, es visto como una construcción activa, que es el resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus categorías) y sus experiencias sensoriales.

El punto de vista kantiano permite una alternativa ontológica al platonismo: "el constructivismo". Para Kant, las matemáticas son el resultado de una construcción *a priori*, que las personas imponemos a la realidad física, y algunos de sus resultados son sintéticos *a priori* (verdades necesarias no tautológicas). O sea, incluso antes de la experiencia, algunos juicios matemáticos nos permiten conocer como han de ser las cosas en la naturaleza. Para Kant, algunos axiomas de la geometría eran sintéticos *a priori*.

La aparición de las geometrías no euclídeas tiró por tierra la suposición que las categorías *a priori* del espacio que él consideraba eran necesarias. Este hecho tuvo diversas consecuencias. La primera fue abandonar el apriorismo kantiano del espacio, pero manteniendo el apriorismo temporal. Este fue el punto de vista adoptado por el intuicionismo de Brouwer:

> *Aunque la posición del intuicionismo parecía débil después de este período (siglo XIX) de desarrollo matemático, se ha recuperado abandonando el apriorismo kantiano del espacio, pero adhiriéndose más resueltamente al apriorismo del tiempo. Este neointuicionismo considera el desmembrarse de los momentos vitales en partes cualitativamente distintas – que solamente pueden ser reunidas si han sido previamente separadas por el tiempo – como el hecho primigenio del entendimiento humano; y considera el despojar este desmembramiento de todo contenido sentimental en orden a intuir la simple unidad de dos como hecho primigenio del pensar científico.* (Brouwer apud Dou, 1970, p. 116)

La matemática intuicionista parte de los números naturales, los cuales considera construidos a partir del apriorismo temporal del ser humano.

El principio de construcción o de constructibilidad, que es el principio básico del intuicionismo matemático, afirma que la matemática es el estudio de un cierto tipo de construcciones mentales. Una definición perfecta, sin ambigüedad, de qué es lo que constituye una construcción mental como construcción matemática, no se puede dar, pues la intuición de lo que es esa construcción matemática mental es irreducible a otros conceptos más primitivos. Estas construcciones mentales son verdaderas porque son lo que nosotros ponemos en las cosas, pero no implican verdad alguna sobre el mundo si lo consideramos independiente de la experiencia humana.

Según el intuicionismo, los números naturales se construyen inmediatamente en la mente del matemático y su verdad se basa directamente en la evidencia de la intuición. A partir de los números naturales los intuicionistas no tienen problemas para construir los racionales. Ahora bien, la necesidad de sujetarse a definiciones estrictamente constructivas excluye la posibilidad de manejar conjuntos infinitos como globalmente existentes en matemáticas, pues ello supondría una infinidad de construcciones parciales y totalmente acabadas en nuestra mente en un tiempo finito. Para el intuicionista existen únicamente conjuntos finitos, el infinito potencial o conjunto de los números naturales y aquellos que mediante una correspondencia biyectiva sean equinumerables con el conjunto de los naturales, lo cual excluye las definiciones de número real de Weierstrass, Dedekind y Cantor.

Para la mayoría de los matemáticos, el aspecto inaceptable del intuicionismo es la mutilación que realiza de la matemática. No obstante, el debate sobre algunos aspectos de la teoría de conjuntos – y en especial sobre el axioma de elección – está produciendo un renacido interés por las ideas constructivistas. Este interés ha sido impulsado en gran medida por Errett Bishop. El trabajo de E. Bishop pone en relieve que los métodos constructivistas pueden ser tan beneficiosos como los formalistas para el desarrollo de las matemáticas. La principal diferencia entre E. Bishop y Brouwer es que el primero no rechaza la teoría de conjuntos de Cantor, sino que intenta modificarla para dotarla de validez constructivista. Según esto, el axioma de elección, que fue el más criticado de la teoría de conjuntos de Cantor por Brouwer y sus seguidores, es ahora totalmente aceptado. Según E. Bishop, tan pronto se viesen claramente las ventajas de su programa, las matemáticas modernas dejarían de existir y pasarían a ser parte de las matemáticas constructivistas, y la razón es que, a fin de cuentas, en matemática aplicada lo importante es encontrar la solución a cierto problema y no sólo saber su existencia.

La principal repercusión del punto de vista constructivista, propuesto inicialmente por Kant y asumido posteriormente por el intuicionismo, es la aparición de una alternativa ontológica al platonismo. Los objetos matemáticos son construcciones y no existen en un mundo intemporal, sólo son construcciones mentales materializadas en signos. Otra repercusión importante es la constatación de que el mundo fenoménico es una construcción activa, que es el resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus categorías) y sus experiencias sensoriales. Cómo se realiza esta construcción se convierte en una sugerente agenda de investigación, tanto para la psicología como para la didáctica de las matemáticas.

Respuestas actuales

6) Se puede buscar una síntesis entre el punto de vista que considera que las matemáticas son un modo de pensar que no depende de las cosas de nuestra experiencia y el punto de vista que considera que sí dependen de ellas. Estas síntesis excluyen recurrir a mundos platónicos.

7) La primera síntesis pone el acento en el punto de vista que considera que las matemáticas son un modo de pensar que depende de las cosas de nuestra experiencia y propone una alternativa más sofisticada de la que propuso Mill. En esta versión (débil), no se dice que las matemáticas dependen de las "cosas" de nuestra experiencia como los árboles, sillas, etc., como lo hacen las otras ciencias experimentales (versión fuerte), sino que las matemáticas es una ciencia que presenta las mismas características que las ciencias empíricas. Esta última tesis recibe el nombre de "cuasi-empirismo" o falibilismo y se debe a Lakatos.

Lakatos considera que el problema de los fundamentos de las matemáticas de finales del siglo XIX y principios del siglo XX es un capítulo del problema del fundamento del conocimiento en general; por consiguiente, es desde esta perspectiva que tiene que examinarse. Las dos posturas dadas al problema del conocimiento son: 1) el dogmatismo que defiende la posibilidad del conocimiento y cuya tarea consiste en encontrar un fundamento "infalible" sobre el cual construir con certeza todas las verdades; 2) el escepticismo que considera imposible el conocimiento porque no puede evitarse el regreso al infinito. De estas dos posturas, Lakatos considera que el escepticismo ha ido ganando terreno en las ciencias empíricas; pero que no ha podido penetrar en el área de la matemática, que permanece como baluarte del dogmatismo. Siempre que el dogmatismo matemático de la época entraba en "crisis", una nueva versión suministraba de nuevo genuino rigor y fundamentos últimos, restaurando con ello la imagen autoritaria, infalible e irrefutable de las matemáticas. Las filosofías logicista y formalista de las matemáticas, dice Lakatos, constituyen los últimos eslabones de la larga cadena de filosofías dogmáticas de las matemáticas. Uno de los objetivos de la obra de Lakatos es poner fin al refugio matemático del dogmatismo.

Los dos teoremas de Gödel, para Lakatos, significan el fracaso del ideal de infalibilidad de la matemática que persiguen tanto el logicismo como el formalismo. Para no caer en el escepticismo, Lakatos se propone seguir a Popper:

> El falibilismo crítico de Popper toma en serio el regreso infinito en las pruebas y definiciones; no se hace ilusiones acerca de su "detención"; acepta la crítica escéptica de toda inyección de verdad infalible. En su planteamiento no hay fundamentos del conocimiento,

> ni en la cúspide ni en la base de las teorías, pero puede haber inyecciones de verdad tentativas e inyecciones de significado tentativas en cualquier punto. (Lakatos 1981, pp. 23-24.)

Pero, a diferencia de Popper, que no era falibilista en matemáticas y lógica, Lakatos se propone aplicarlo a la matemática.

Según el nivel en el que se inyecta el valor de verdad y el significado de los términos, las teorías pueden ser, según Lakatos, euclídeas o empiristas. Mientras que el Programa Euclídeo los pone en la cúspide, el Programa Empirista los pone en la base. De estos dos, al primero lo denomina Programa de Trivialización del Conocimiento, en cuanto que las teorías están formadas por axiomas infalibles que constan de términos primitivos perfectamente conocidos, y el tipo de prueba que emplea para demostrar los teoremas garantiza la verdad y la transmite de arriba-abajo:

> Puesto que el Programa Euclídeo implica que todo conocimiento puede deducirse de una conjunción de proposiciones trivialmente verdaderas que constan sólo de términos cargados de significado trivial, lo llamaré el Programa de la Trivialización del Conocimiento. (Id., ibid., p. 17)

Dos tipos de Programas Euclídeos o de Programas de la Trivialización del Conocimiento son: el programa "logicista" y el programa "formalista" de la matemática. Su fin es fundamentar la matemática frente a la crítica escéptica. La pretensión de verdad infalible la realizan a costa de la trivialización del contenido. Ahora bien, este intento choca con los dos teoremas de Gödel, que ponen de manifiesto, según Lakatos, que el regreso al infinito en pruebas y definiciones no puede detenerse.

Una vez admitida la derrota del dogmatismo Lakatos se pregunta, ¿no conduce esto a la derrota escéptica? y su respuesta es: "Pero ello no lleva necesariamente al escepticismo matemático: sólo obliga a admitir la falibilidad de una especulación audaz" (Lakatos, 1981, p. 39). Su propósito es mostrar que la matemática es conjetural, pero sin que signifique necesariamente abandonar la razón por completo. La matemática no puede seguir sosteniendo su certeza sobre la trivialidad de su contenido, como ha pretendido el Positivismo Lógico, sino que consiste en conjeturas audaces y profundas, a costa de su falibilidad. Puesto que el regreso al infinito imposibilita la fundamentación de la matemática, Lakatos propone sustituir esta tarea fundamentalista por el problema del avance del conocimiento. Pero ¿Cómo sabemos que avanzamos? Afirma: lo conjeturamos.

Lakatos considera que los dos teoremas de Gödel propiciaron un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática. En el "nuevo campo falibilista", Lakatos incluye a Russell, que en 1924 dice que la lógica y matemática son aceptadas, igual que la electrodinámica de Maxwell, por sus consecuencias observadas; a Church, que en 1939 sostiene la imposibilidad de tener fiabilidad de la consistencia del sistema formal de Russell o Zermelo; a Gödel, que en 1944 dice que la crítica de fundamentos lleva al abandono de su certeza absoluta; a Carnap, que en 1958 encuentra una cierta semejanza entre la física y la matemática en cuanto a su falta de certeza absoluta; a Quine, que en 1958 constata el carácter evaluativo de los datos empíricos también en las matemáticas; a Rosser, que en 1953 se une a Gödel, manifestando nuestra inseguridad de que un sistema formal esté libre de contradicciones; Weyl, que en 1949 propone el parangón de la matemática con la física; Mostowski, que en 1955 toma el teorema de Gödel como corroborador de la caracterización de la matemática como una ciencia natural más, con el mismo método que ésta, la experiencia; Kalmar, que en 1967 afirma que la matemática tiene que ser, como el resto de las ciencias, contrastada en la práctica. Para Lakatos queda invalidada la demarcación logicista de las ciencias sostenida por el Positivismo Lógico entre las ciencias naturales – a posteriori, empíricas y falibles – y la matemática – *a priori*, tautológica e infalible.

En su libro *Pruebas y refutaciones* Lakatos (1978) presenta un choque de opiniones, razonamientos y refutaciones entre un profesor y sus alumnos. En lugar de presentar el producto de la actividad matemática, presenta el desarrollo de la actividad matemática a partir de un problema y una conjetura. En *Pruebas y refutaciones* Lakatos se vale de la historia para intentar convencer al lector de que las matemáticas, lo mismo que las ciencias naturales, son falibles y no indubitables; que también crecen gracias a la crítica y a la corrección de teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades y en las que siempre cabe la posibilidad de error o de omisión. Se parte de un problema o una conjetura, y se buscan simultáneamente demostraciones y contraejemplos. Las nuevas demostraciones explican los contraejemplos viejos, los contraejemplos nuevos minan y socavan las demostraciones anteriores. Para Lakatos, en este contexto de matemática informal, "demostración" no significa un procedimiento mecánico que lleve a la verdad desde las hipótesis a las conclusiones en irrompible encadenamiento. Significa más bien explicaciones, justificaciones, elaboraciones que hacen la conjetura más plausible, más convincente, al tiempo que va adquiriendo mayor detalle y precisión bajo la presión de los contraejemplos. Cada paso de la demostración es por sí mismo materia criticable, crítica que puede ser mero escepticismo o puede consistir en la producción de un contraejemplo a un razonamiento particular. Lakatos llama "contraejemplos locales" a los ejemplos que ponen en tela de juicio pasos concretos del razonamiento; los ejemplos que contradicen no el razonamiento, sino sus conclusiones, son contraejemplos globales.

Lakatos aplicó su análisis epistemológico no a las matemáticas formalizadas, sino a las matemáticas "informales", las matemáticas en proceso de crecimiento y de descubrimiento, que es, obviamente, lo que matemáticos y estudiantes de matemáticas conocen por matemáticas. Lakatos señala que su teoría es cuasi-empirista (no pura y simplemente empirista) porque los falsadores potenciales y los enunciados básicos de las matemáticas, a diferencia de los de la ciencia natural, no son, ciertamente, enunciados singulares espacio-temporales. Para Lakatos los falsadores potenciales de las teorías matemáticas formalizadas son teorías informales. Dicho con otras palabras, ante la cuestión de si aceptar o rechazar un sistema de axiomas que se nos proponga para la teoría de conjuntos tomaremos nuestra decisión dependiendo de la medida en que el sistema formal reproduzca o se conforme a la teoría matemática que inicialmente tuviéramos en mente. Evidentemente, Lakatos tiene plena conciencia de que podemos también optar por modificar nuestra teoría informal, y que la decisión de cuál haya de ser el camino a tomar puede ser cuestión compleja y controvertida. Llegados a este punto, Lakatos se encuentra cara a cara con el problema principal, ¿Cuáles son los "objetos" de las teorías matemáticas "informales"? Cuando hablamos de triángulos, números, etc., sin referencia a ningún sistema de definiciones y axiomas, ¿de qué clases de entidades estamos hablando? Tal como señalan Davis y Hersh (1988) Lakatos deja sin responder a esta pregunta.

La principal repercusión del punto de vista de Lakatos en la enseñanza de las matemáticas fue poner en primer plano la resolución de problemas. Tal como hemos comentado en el punto anterior la aplicación concreta de las matemáticas modernas como reforma didáctica fue un fracaso. Como alternativa al formalismo en que había degenerado la introducción de las matemáticas modernas, surgieron, tanto en España como en otros países, diferentes grupos de renovación que profundizaron en la línea semántica. Estos grupos proponían una alternativa basada en: 1) enseñar las matemáticas a partir de la resolución de problemas y 2) hacer ver a los alumnos que las matemáticas se podían aplicar a situaciones de la vida real. Para estos grupos, la obra de Lakatos era la justificación teórica de algo que habían constatado en su práctica: la necesidad de pasar de enseñar teorías matemáticas acabadas a enseñar a "hacer matemáticas". Desde esta perspectiva, en la enseñanza de las matemáticas escolares se debía poner el enfoque en la resolución de problemas.

Si bien la obra de Lakatos fue uno de los principales referentes epistemológicos del punto de vista que considera que la esencia de las matemáticas es la resolución de problemas, otros autores ayudaron a desarrollarlo. Entre estos autores destaca Polya. Para Polya (1965), la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.

Los trabajos de Polya, se pueden considerar como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal. Ahora bien ¿Por qué es tan difícil, para la mayoría de los humanos, la resolución de problemas en matemáticas? Los trabajos de Schoenfeld (1985) tienen por objetivo explicar la conducta real de los resolutores reales de problemas. Schoenfeld propone un marco con cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: 1) Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor, 2) Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles, 3) Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles y 4) Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella.

Cada uno de estos cuatro componentes explica las limitaciones, y por lo tanto, el poco éxito en la resolución de problemas de los resolutores reales. Así, cuando a pesar de conocer las heurísticas, no se sabe cuál utilizar o cómo utilizarla, se señala la ausencia de un buen control o gestor de los recursos disponibles. Pero las heurísticas y un buen control no son suficientes, pues puede que el resolutor no conozca un hecho, algoritmo o procedimiento específico del dominio matemático del problema en cuestión. En este caso se señala la carencia de recursos cognitivos como explicación al intento fallido en la resolución. Por otro lado, puede que todo lo anterior esté presente en la mente del resolutor, pero sus creencias de lo que es resolver problemas en matemáticas o de la propia concepción sobre la matemática hagan que no progrese en la resolución. La explicación para este fallo, la contempla Schoenfeld en el cuarto elemento del marco teórico, las creencias. Por último están las heurísticas. La mayor parte de las veces se carece de ellas. Se dispone de conocimientos específicos del tema o dominio matemático del problema, incluso de un buen control, pero falla el conocimiento de reglas para superar las dificultades en la tarea de resolución. Las heurísticas son las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas; son como reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al individuo o grupo a comprender mejor el problema y a hacer progresos hacia su solución. Existe una amplia, posiblemente incompleta, lista de heurísticas. Entre las más importantes cabría citar: 1) Buscar un problema relacionado, 2) Resolver un problema similar más sencillo, 3) Dividir el problema en partes, 4) Considerar un caso particular, 5) Hacer una tabla, 6) Buscar regularidades, 7) Empezar el problema desde atrás y 8) Variar las condiciones del problema.

Guzmán (1991), partiendo de las ideas de Polya y los trabajos de Mason, Burton y Stacey, (1988) y de los trabajos de Schoenfeld ha elaborado un modelo para la resolución de problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática, a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces. Consta de las fases siguientes: 1) Familiarízación con el problema, 2) Búsqueda de estrategias 3) Ejecución de la estrategia y 4) Revisión del proceso y extracción de consecuencias.

Los intentos prácticos de poner la resolución de problemas como eje de la enseñanza de las matemáticas escolares tuvieron que responder a la pregunta ¿Qué significa poner el enfoque en la resolución de problemas? Cabe al menos tres interpretaciones: 1) Enseñar para resolver problemas, 2) Enseñar sobre la resolución de problemas y 3) Enseñar vía la resolución de problemas.

De entrada, podemos considerar que enseñar para resolver problemas consiste en proponer al alumno la resolución de una serie de problemas, que tiene que resolver como resultado de su actividad. Los principales argumentos a favor de este tipo de enseñanza-aprendizaje son: 1) el alumno, resolviendo problemas aprende a "hacer" matemáticas y de esta manera las vive como un proceso más que como un producto terminado, 2) la resolución de problemas es una actividad que puede motivar más fácilmente a los alumnos que la clase expositiva tradicional y 3) la actividad de resolución de problemas es intrínsecamente gratificante para los alumnos. Las asignaturas que se plantean enseñar a resolver problemas por ósmosis están basadas en la suposición de que la forma fundamental de aprender a resolver problemas es resolver muchos problemas y que, al hacerlo, se aprenden las técnicas, los métodos o las herramientas heurísticas que están implícitas en ellos. La organización de la enseñanza consiste básicamente en la elaboración de una colección de problemas que contenga implícitamente lo que se quiere enseñar y en el establecimiento de una secuencia adecuada de presentación a los alumnos. Uno de los pocos resultados que están claros de la investigación de la resolución de problemas es que intentar resolver muchos problemas es esencial para poder resolver problemas.

La segunda interpretación considera que no basta con resolver problemas sino que hay que reflexionar sobre las heurísticas y destrezas que permiten resolver problemas. La diferencia con respecto al primer punto de vista es que el primero no contempla la resolución de problemas como algo específico, que para su desarrollo necesite de consideraciones especiales. La novedad del segundo punto de vista está en considerar que para conseguir que el alumno adquiera esta habilidad es necesario considerar como parte del currículum la reflexión sobre las técnicas que permiten resolver problemas. Desde este punto de vista, los problemas se eligen de manera que la aplicación a ellos de una herramienta heurística concreta resulte ser paradigma, tanto del modo de funcionamiento de la herramienta heurística en cuestión, como de los rasgos del problema que inducen a pensar en el uso de dicha herramienta heurística. La idea es situar al alumnado en presencia de un resolutor competente que explicita el proceso de resolución para que éste interiorice y aplique las técnicas heurísticas a nuevos problemas. Una de las funciones del profesorado en este modelo es la de actuar como modelo de resolutor de tres maneras distintas: recorriendo el proceso de resolución paso a paso de un problema preparado previamente, embarcándose en procesos de resolución a partir de ideas propuestas por los alumnos y alumnas, y resolviendo problemas cuya solución no se ha preparado previamente.

Una variante de esta segunda interpretación consiste en diseñar las actividades de manera que los alumnos no tengan que ser capaces simplemente de observar y analizar conductas competentes para intentar imitarlas, sino que deben de observar y analizar también la conducta de sus compañeros para cooperar con ellos.

Como síntesis de los dos puntos de vista anteriores se puede decir que el objetivo de que el alumno aprenda a resolver problemas solamente se podrá conseguir mediante una actividad autorreguladora de resolución de problemas, mediatizada por la relación con el profesor y los otros compañeros.

La tercera opción consiste en enseñar vía la resolución de problemas. Desde este punto de vista, hemos de entender los procesos de enseñanza como la presentación de secuencias de actividades que tienen por objetivo, en el tiempo y con los medios disponibles, la emergencia y organización de objetos matemáticos. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

Es importante remarcar que la opción que propone las bases psicopedagógicas del currículum del estado español (Coll 1989) ha resuelto en parte la polémica entre las tres interpretaciones anteriores al reconocer que aprender no consiste en acumular información ni tampoco únicamente en investigar y solucionar problemas. Un aprendizaje significativo y funcional requiere, al mismo tiempo, la adquisición de conceptos y de procedimientos. Por este motivo, la resolución de problemas se ha de incorporar como uno de los procedimientos que hay que enseñar a los alumnos. La opción constructivista considera que el alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje; él es quien construye el conocimiento y nadie lo puede sustituir en esta labor. Pero este protagonismo no se ha de interpretar tanto en términos de descubrimiento o de invención sino partiendo de la base que es el alumno quien construye significados, y da sentido a lo que aprende, y nadie, ni tan solo el profesor, lo puede sustituir en esta labor. Por lo tanto, la enseñanza basada en la resolución de problemas no es la única manera con la que un profesor puede conseguir un aprendizaje significativo. Por ejemplo, Ausubel ya hizo observar que el descubrimiento no era la única manera que tenía el profesor para conseguir la motivación de los alumnos, la seguridad en si mismos y el deseo de aprender, ya que una enseñanza expositiva bien hecha era igualmente capaz de interesar y de inspirar a los alumnos.

8) La segunda síntesis es la propuesta de Piaget. Ésta pone el acento en el punto de vista que considera el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" de nuestra experiencia, que no depende de las "cosas".

Para la epistemología genética, la esencia del pensamiento matemático es la universalidad y la necesidad, y cualquier sujeto, como resultado del proceso evolutivo de especie, está biológicamente preparado para desarrollar un pensamiento matemático universal y necesario. La epistemología genética de Piaget, igual que la filosofía kantiana, pretende ser una síntesis entre el empirismo y el racionalismo. Piaget considera que las proposiciones de las matemáticas son verdades necesarias, mientras que las de las ciencias de la naturaleza dependen de la experiencia. Ahora bien, Piaget pretende aportar la explicación psicológica adecuada para mostrar como las proposiciones lógico-matemáticas son adquiridas también a partir de la experiencia sin que esta génesis empírica comprometa su valor universal y necesario. Piaget considera que no es cierto que la actividad cognitiva del sujeto extraiga los universales de la experiencia a partir de la abstracción por comparación (punto de vista empirista) ni tampoco lo es que el conocimiento universal y necesario sea el resultado de la actividad constitutiva del sujeto en el acto de conocimiento en virtud de ideas innatas o bien de estructuras *a priori* presentes desde el principio en cualquier sujeto (punto de vista racionalista). Piaget considera que las estructuras de conocimiento que hacen que las proposiciones de las matemáticas sean verdades necesarias son el resultado de un proceso, que comienza con la etapa sensomotriz y acaba en la etapa del pensamiento formal, que tiene por objetivo la adaptación del sujeto al mundo que le rodea.

Piaget (1979) diferencia la construcción matemática del descubrimiento y de la invención, y dice que el conocimiento matemático es una construcción que no es una invención ni un descubrimiento. Pero que, en cierta manera, esta construcción tiene algo de descubrimiento, ya que, como resultado de un proceso evolutivo de la especie, todos estamos en condiciones de construir el mismo conocimiento; y también hay algo de invención porque las construcciones matemáticas pueden ir en direcciones muy diferentes.

Piaget fue uno de los psicólogos que más claramente puso de manifiesto las limitaciones del punto de vista que considera que generalizamos como resultado de un proceso de comparación. Piaget considera que la abstracción es la facultad que nos permite construir los conceptos, pero no considera que ésta construcción sea sólo el resultado de la comparación, sino que cree que nuestras acciones son muy importantes para abstraer los conceptos. En función de las experiencias que intervienen en la formación de un concepto, Piaget distingue la abstracción simple o empírica de la abstracción reflexiva o lógico-matemática. En la abstracción simple, todo lo que la persona hace es centrarse en una propiedad determinada del objeto, ignorando las otras; extrae la información de los propios objetos. Reconocer determinados atributos o propiedades supone abstraer de los objetos unas cualidades que los diferencien de los otros. La abstracción reflexiva extrae sus informaciones de la coordinación de las acciones que el sujeto realiza sobre el objeto. Ni las acciones ni la coordinación tienen su origen en el objeto, que tiene un papel de soporte. La abstracción reflexiva implica la construcción de relaciones entre los objetos. El resultado de esta abstracción se trata de una verdadera construcción de la mente más que de una centración en algo que ya existe en los objetos. En la abstracción reflexiva, aquello que se abstrae no es lo observable, aquello que ya existe en los objetos, sino que se descubren propiedades a partir, no de los objetos, sino de las acciones (reunir, separar, ordenar, etc.) que se efectúan con ellos. Estos dos tipos de abstracciones funcionan de manera coordinada en la mayoría de las situaciones en las que generalizamos, aunque de cara a su estudio y análisis conviene tratarlas separadamente. Piaget considera que el conocimiento lógico-matemático surge a partir de la abstracción reflexiva, mientras que el conocimiento físico o biológico surge de la abstracción empírica. Esta manera de entender el proceso de abstracción permite explicar la construcción de los objetos matemáticos. Las ideas de Piaget han tenido mucha influencia en los trabajos de Dubinsky (1991 y 1996) y Dörfler (1991) y en general sobre las investigaciones que estudian el pensamiento matemático avanzado.

Piaget considera que el aprendizaje es constructivo, para él comprender es inventar, es construcción realizada por uno mismo. Aunque podemos ayudar a los alumnos a adquirir conceptos matemáticos por medio de materiales didácticos y de preguntas y explicaciones de los profesores, sólo por su propio esfuerzo pueden comprender verdaderamente. Con este punto de vista coinciden muchos otros psicólogos y hoy en día podemos hablar de una concepción constructivista del proceso de enseñanza y aprendizaje que tiene a Piaget como uno de sus principales referentes. Este tipo de constructivismo psicológico no tiene en cuenta la especificidad del contenido a enseñar – sirve tanto para enseñar historia como para enseñar matemáticas – y en el que, a pesar de contemplar aspectos sociales e institucionales, prima la construcción individual del sujeto.

9) La tercera síntesis es la propuesta por la actual ciencia cognitiva de las matemáticas basada en el reconocimiento de la importancia que tiene nuestro cuerpo sobre nuestra mente y en el pensamiento metafórico. Esta también pone el acento en el punto de vista que considera el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" de nuestra experiencia, que no depende de las "cosas".

La nueva disciplina, llamada "Ciencia Cognitiva de la Matemática" (Lakoff y Núñez, 2000, Núñez 2000), tiene por objetivo estudiar, de manera empírica y multidisciplinar, las ideas matemáticas como una materia científica. El fondo teórico de esta nueva ciencia está basado en la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente, y en los relativamente recientes hallazgos en lingüística cognitiva. Su tesis afirma que el origen de las estructuras matemáticas de las personas hay que buscarlo en los mecanismos cognoscitivos cotidianos como son los esquemas de las imágenes y el pensamiento metafórico.

Según este punto de vista la naturaleza de las matemáticas hay que buscarla en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones ni en mundos trascendentes platónicos. Estas ideas surgen de los mecanismos cognitivos y corporales de las personas. Debido a su origen, común a todas las personas, las ideas matemáticas no son arbitrarias, no son el producto de convenciones completamente sociales y culturales (aunque las dimensiones socio-históricas juegan papeles importantes en la formación y desarrollo de estas ideas). Al igual que la teoría de Piaget, esta nueva ciencia afirma que las matemáticas son el resultado de la experiencia humana pero no es el resultado de puras convenciones sociales, ya que por razones de tipo evolutivo todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las ideas matemáticas.

Recientemente la ciencia cognitiva no dualista ha realizado importantes avances en la comprensión del funcionamiento de la mente y más en concreto sobre nuestra comprensión de las matemáticas. Estos son: 1) *La importancia que tiene el cuerpo sobre la mente*. La naturaleza y dinámica de nuestros cuerpos, nuestros cerebros, y nuestro funcionamiento de todos los días tiene una importancia fundamental en la estructura de la razón humana, la cual incluye el pensamiento matemático. 2) *El papel del conocimiento inconsciente*. La mayoría de los procesos cognitivos son inconscientes en el sentido de que no son accesibles a nuestra introspección consciente. Nosotros no podemos llegar directamente por medio de la introspección a nuestros sistemas conceptuales y a nuestros procesos cognitivos de nivel inferior. Esto incluye una gran parte del pensamiento matemático, y 3) *El pensamiento metafórico*. La mayor parte de los seres humanos conceptúan conceptos abstractos en términos concretos y usan la estructura inferencial y unos modos de razonar conectados con nuestro sistema motórico y sensorial. El mecanismo cognitivo que permite que lo abstracto se comprende en términos de lo concreto es la metáfora conceptual. El pensamiento matemático también hace uso de la metáfora conceptual, como cuando nosotros conceptuamos números como puntos en una línea, o espacio como conjunto de puntos.

Este punto de vista considera que la actual investigación en neuropsicología ha demostrado que todos los individuos de la especie Homo Sapiens nacen con la capacidad de distinguir entre un número muy pequeño de objetos y sucesos – por ejemplo la subitización es un proceso que nos permite ver que un conjunto tiene 3 o 4 elementos sin necesidad de contarlos – y con la de efectuar cálculos aritméticos muy simples con números muy pequeños. Estos hallazgos son importantes para la comprensión de los rudimentos biológicos de aritmética básica. Sin embargo, ellos nos dicen muy poco sobre la complejidad de las matemáticas ya que estas van mucho más allá de la aritmética y requieren un aparato cognitivo enorme que va más allá del de los bebés y animales, o de la que un adulto normal sin una instrucción específica puede hacer.

A la pregunta ¿Cuáles son las capacidades cognitivas, basadas en la importancia del cuerpo sobre la mente, que permiten a una persona pasar de las habilidades numéricas básicas innatas a un entender profundo y rico de, por ejemplo, las matemáticas de una licenciatura universitaria de una facultad de ciencias? Lakoff y Nuñez responden que éstas no son independientes del aparato cognitivo usado fuera de matemática. Según estos autores, la estructura cognitiva necesaria para la matemática avanzada usa el mismo aparato conceptual que el pensamiento cotidiano en las situaciones ordinarias no matemáticas, esto es: esquemas de la imagen, esquemas aspectuales, mezclas conceptuales y la metáfora conceptual. De ellos, es el pensamiento metafórico el más importante para la construcción de las matemáticas.

Este punto de vista es en cierta forma apriorístico ya que considera que la actividad constitutiva del sujeto en el acto de comprensión matemática lleva a verdades consideradas necesarias para cualquier sujeto normal. Por una parte, considera probado por la actual neuropsicología que todos los individuos de la especie Homo Sapiens nacen con la capacidad de distinguir entre un número muy pequeño de objetos y sucesos, y, por otra parte, considera que casi todos los sujetos tienen la capacidad de llegar a comprender las verdades matemáticas, puesto que estas se basan en unos procesos cognitivos básicos y comunes a todos los miembros de la especie. De todas maneras es un tipo de apriorismo relativamente débil.

En nuestra opinión, la principal aportación de este punto de vista a la educación matemática consiste en señalar la importancia que tiene el pensamiento metafórico en la construcción de las matemáticas. Desde que Lakoff y Johnson pusieron de manifiesto la importancia del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido (Lakoff y Johnson 1991), el papel del pensamiento metafórico en la formación de los conceptos matemáticos es un tema que cada vez tiene más relevancia en la investigación en didáctica de las matemáticas (v. g. English, 1997; Font 2000 y 2001; Acevedo, Font y Giménez, 2002; Lakoff y Núñez, 1998 y 2000; Núñez 2000; Núñez y Lakoff, 1998; Pimm, 1990; Van Dormolen, 1991).

Las metáforas se caracterizan por crear un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite la transfusión de propiedades del dominio de partida dentro del domino de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se transpongan una serie de características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Las investigaciones sobre el pensamiento metafórico han detectado diferentes clases de metáforas. Hay una primera clase de tipo extramatemático, por ejemplo "una función es una máquina", que sirven para explicar o interpretar situaciones matemáticas en términos de situaciones reales. Uno de los ejemplos más notables de este tipo es la del "contenedor", usada para estructurar la teoría de clases, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora inconsciente que tiene sus raíces en la vida cotidiana. En las aulas, además de las metáforas extramatemáticas, son frecuentes también las matemáticas, las cuales permiten estructurar partes del conocimiento matemático a partir de otras partes de las matemáticas que ya son conocidas. Ejemplos de este tipo son "los números reales son los puntos de una recta", "los números complejos son vectores", "las funciones de proporcionalidad son rectas que pasan por el origen de coordenadas", etc.

El uso de metáforas plantea algunas dificultades. En efecto, puede ocurrir, por ejemplo, que el alumno, en lugar de entender que una función se puede entender a partir de comprender el funcionamiento de una máquina, tome la expresión "una función es una máquina" de manera literal, es decir: que piense que una función realmente es una máquina. Dicho con otras palabras: la expresión anterior tiene un significado literal, pero también tiene un segundo significado, que es el que queremos que entienda el alumno; es decir, queremos que el alumno estructure su conocimiento sobre funciones a partir de su conocimiento sobre las máquinas, no que piense que una función es una máquina. Para que el alumno comprenda que no debe tomar la expresión "una función es una máquina" de manera literal, se ha de producir un conflicto entre el significado literal de la expresión y el contexto en el que se usa. La existencia de este conflicto es lo que hace que el alumno busque un significado diferente del literal. Esta dificultad es fácil que se produzca ya que el profesor en muchos casos usa metáforas sin ser consciente de que lo hace, es decir realiza un uso incontrolado de la metáfora. Ahora bien, las dificultades relacionadas con el pensamiento metafórico no se pueden reducir a la dificultad causada por el significado literal de la metáfora; ya que incluso cuando se hace un uso correcto de la metáfora y se estructura un campo de conocimiento en términos de otro ya conocido, se corre el peligro de trasladar relaciones que no son válidas.

10) La cuarta síntesis tiene un fuerte componente pragmático y pone el acento en el punto de vista que considera el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" de nuestra experiencia que sí depende de las "cosas", ya que postula que las matemáticas son un producto histórico que se consideran universales y necesarias porque han resultado útiles para organizar nuestro conocimiento de las "cosas" de nuestra experiencia.

Para algunos sociólogos, la idea de que las matemáticas puedan variar igual que varía la organización social no es admisible. Por ejemplo Stark (1963) considera que es evidente que no puede haber más que una ciencia de los números, idéntica por siempre a sí misma. Uno de los primeros sociólogos que se opuso a este punto de vista fue Splenger en el primer capítulo "El sentido de los números" de su obra *La decadencia de Occidente* publicada en 1918. En este capítulo Splenger expone tres ideas que, con el tiempo, han ido adquiriendo una gran importancia y que parece ser que tuvieron un gran impacto sobre Wittgenstein. La primera es la distinción entre la actividad matemática y su producto:

> Mas no debe confundirse la matemática considerada como la facultad de pensar prácticamente los números, con el concepto mucho más estrecho de la matemática como "teoría" de los números desarrollada en forma hablada o escrita. Ni la matemática escrita ni la filosofía explicada en libros teóricos representan todo el caudal de intuiciones y pensamientos matemáticos y filosóficos que atesora una cultura. (Spengler, 1958, pp. 92-93)

La segunda es el cuestionamiento de la división entre síntesis *a priori* y síntesis *a posteriori*. La tercera es que cada cultura genera su matemática:

> En vano aplicaremos nosotros, los occidentales, nuestro propio concepto científico del número, violentamente, al objeto de que se ocupaban los matemáticos de Atenas y Bagdad; es lo cierto que el tema, el propósito y el método de la ciencia que en estas ciudades llevaba el mismo nombre, eran muy diferentes de los de nuestra matemática. "No hay una matemática; hay muchas matemáticas". (Id., ibid., p. 96)

La obra de Splenger tuvo una fuerte influencia sobre Wittgenstein. Este filósofo en su trabajo *Observaciones sobre los Fundamentos de Matemática* (1987) sostiene que la actividad matemática consiste en juegos del lenguaje. Éstos no son juegos en el sentido trivial, sino prácticas sometidas a reglas. Wittgenstein defiende que nosotros seguimos a menudo reglas en el razonamiento matemático debido a la costumbre, no debido a necesidad lógica. Para Wittgenstein, la verdad, certeza o "necesidad" matemática no es más que el "estar de acuerdo" con el resultado de seguir una regla que forma parte de un juego de lenguaje que se pone en funcionamiento en determinadas prácticas sociales. No es un "acuerdo de opiniones" arbitrarias es un "acuerdo" de prácticas sometidas a reglas. La contribución de Wittgenstein es señalar que lo importante es lo que los matemáticos hacen en la práctica, y no los resultados de esta práctica.

La visión de las matemáticas de Wittgenstein se basa en una concepción pragmatista del significado. Para él, el significado es el uso y se opone a la visión referencial del significado. El punto de vista referencial se puede formular así: "algo" representa "algo". Desde este punto de vista un signo matemático representa un objeto matemático. Este punto de vista relega al usuario de las matemáticas y las contempla como "conocimiento sin sujeto cognoscente" ya que lo que interesa son los productos de la actividad matemática y no las prácticas de los matemáticos. Los estudios sobre la actividad matemática de tipo naturalista (v. g. Kitcher 1984; Kitcher y Aspray 1988) y los histórico-sociales (Wittgenstein 1987; Ernest 1998; Restivo 1992) desarrollados en los últimos años han desplazado el centro de interés desde las teorías matemáticas como productos acabados hacia la actividad matemática entendida como una práctica social en un doble sentido: por un lado, en cuanto es aprendida de otras personas, y por otro, porque está formada por reglas que se siguen habitualmente.

Los estudios naturalistas y los histórico-sociales sobre las matemáticas han puesto de manifiesto que la significación no se agota en el plano semántico ya que hay que considerar al usuario. La contemplación del usuario conlleva la dimensión pragmática de la representación. Los orígenes de esta dimensión pragmática se pueden encontrar en la semiótica de Peirce, la cual estudia la relación entre un interpretante y los signos en el marco de una teoría comprehensiva de éstos. El punto de vista pragmático se puede formular así: "algo" representa "algo" para "alguien". Esto nos lleva a la dimensión intencional de la representación, ya que la producción o la interpretación de un signo como representante de un objeto se realiza por medio de un interpretante. El estudio del componente intencional requiere la introducción del sujeto como término irreducible de significación. Desde esta perspectiva, el significado no es inherente al objeto sino que se construye en el proceso de interpretación de manera no arbitraria ya que está vehiculado por la intersubjetividad. El hecho de considerar al interpretante permite postular una teoría de la significación de los objetos matemáticos compatible con la máxima pragmática de Peirce para captar el significado de las ideas que utilizamos: *"consideremos los efectos prácticos que creemos que podrían producirse por el objeto de nuestra concepción. La concepción de todos los efectos es la concepción completa del objeto (CP, 5.402)"* (apud Ibarra y Mormann, 1997, p. 277).

Esta manera de entender el significado se basa en la suposición que los sistemas matemáticos de signos ostensivos que se manipulan en el aula adquieren significado para los alumnos al ser usados en el aula. Desde este punto de vista, diremos que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión y el significado, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando usa el contenido matemático. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente, mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona. Dicho de otra manera: optar por una visión pragmática del significado implica focalizar el interés en las prácticas públicas y dejar en segundo plano el interés por los procesos mentales de las personas – que como mucho se pueden considerar prácticas privadas. Desde este punto de vista, la objetividad se entiende como la intersubjetividad que resulta de una construcción social. El conocimiento se entiende como un producto de las instituciones de la sociedad y, a pesar de la objetividad que lo caracteriza, no por eso adquiere un *status* ontológico diferente de la actividad humana que lo ha producido.

La interpretación pragmatista del significado choca con el problema de "la objetividad de la teoría". Si no se puede explicar desde un punto de vista pragmatista "la objetividad de la teoría", su interpretación del significado resulta ser muy limitada. La explicación desde un punto de vista pragmatista de "la objetividad de la teoría" es un tema complejo porque la objetividad (certeza o verdad necesaria) es un objetivo que las ciencias pretenden conseguir haciendo abstracción de los utilizadores. La aceptación de la explicación pragmatista de "la objetividad de la teoría" sólo es posible si previamente se ha puesto entre paréntesis como mínimo: 1) la suposición que la ciencia nos ofrece copias cada vez mejores de una realidad que tiene sus propias determinaciones, 2) la teoría referencial del significado y 3) la suposición que la actividad constitutiva del sujeto lleva a verdades necesarias. El cuestionamiento de estas tres suposiciones es el resultado de un largo proceso que ha producido un desplazamiento de los estudios sobre la ciencia desde el estudio de las teorías al análisis de las prácticas.

Este desplazamiento ha sido posible gracias a la superación de la división entre el "contexto de justificación" y "el contexto de descubrimiento", propuesta por el positivismo lógico. En la superación de esta división han tenido un papel destacado el libro de Kuhn *La estructura de las revoluciones científicas* publicado en 1962 (Kuhn, 1981) y el artículo de Quine

"Naturalización de la epistemología" publicado en 1969 (Quine 1974). El primero, que se puede considerar una de las bases del punto de vista llamado "socio-histórico" atrajo la atención de los filósofos de la ciencia sobre el desarrollo histórico de las teorías científicas, mientras que el segundo, que está en la base de lo que se ha venido llamar "naturalismo" en la filosofía de la ciencia, postula que no es posible disponer en filosofía de ninguna posición ventajosa desde la que puedan realizarse hallazgos *a priori*. Quine en 1950 (Quine 1986) consideró que no hay posible distinción entre verdades de hecho, susceptibles de ser demostradas por la experiencia y verdades de la lógica y de las matemáticas que, al no decir nada de los hechos, no tienen que ser verificadas por la observación. Los enunciados, tanto si son analíticos como si son sintéticos, forman parte de una teoría que debe ser confirmada globalmente por la experiencia.

Los planteamientos que presentan un fuerte componente pragmatista explican la producción y la evolución del conocimiento matemático a partir de las "cosas" de nuestra experiencia, no de una manera simple como la de Mill sino que intentan explicar esta dependencia de una manera más compleja en la que las instituciones sociales juegan un papel fundamental. Para ello es necesario ir más allá de un estudio de los resultados de la actividad matemática, tras los productos hay que estudiar los actos de producción. Una característica común a todos los partidarios de este punto de vista es la aceptación del falibilismo de las matemáticas.

Estos puntos de vista están de acuerdo con la visión falibilista de las matemáticas propuesta por Lakatos. Aunque no queda suficientemente explícito en sus *Pruebas y Refutaciones* (Lakatos 1978) que este autor considere que las matemáticas proceden por negociación, o que la heurística sea la esencia de las matemáticas en lugar de los resultados, estos autores así lo han considerado y han interpretado que Lakatos propone una visión de las matemáticas basada en la negociación y la aceptación. Están de acuerdo con él en que las matemáticas son falibles, pero no en que las matemáticas y el conocimiento científico en general evolucione por pruebas y refutaciones hacia la verdad tal como propone Popper.

Entre las contribuciones más recientes a este punto de vista destaca la propuesta de Kitcher. Un punto de vista intermedio entre Piaget y el pragmatismo es el de Kitcher. Este autor sostiene (Kitcher 1984) que los orígenes de las matemáticas son empíricos y pragmáticos, y propone una posición constructivista que afirma que las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar con relación a objetos cualesquiera. El *input* original es empírico y útil y, luego, la capacidad humana de realizar acciones operatorias hace las matemáticas herméticas a la influencia empírica o pragmática cotidiana. Para Kitcher, los nuevos resultados matemáticos obedecen a la necesidad de resolver problemas que se plantea la comunidad matemática del caso. Para Kitcher la materia última de las matemáticas es la forma en la cual los seres humanos estructuramos el mundo, realizando manipulaciones físicas o a través de las operaciones del pensamiento. Las matemáticas son como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual le atribuimos poderes de actuación que van más allá de los que tenemos – por ejemplo, recorrer la secuencia de los números naturales – con la esperanza de iluminar las habilidades que tenemos para estructurar el ambiente que nos rodea.

Este sujeto ideal es esencial para poder dar cuenta de gran parte de las matemáticas que se han producido. Ahora bien, la introducción de este sujeto ideal conlleva el peligro de hacer pensar que las matemáticas puedan desarrollarse a partir de estipulaciones arbitrarias de esos poderes y que, por tanto, generen conceptos matemáticos carentes de significado o de utilidad. Kitcher considera que este peligro se evita por la actuación conjunta de dos factores. Uno es la comunidad matemática y el otro es que las acciones nuevas que establecemos como realizables no son acciones arbitrarias sino aquellas que extienden acciones que en un nivel inferior nos habíamos visto capaces de realizar o que habíamos establecido que eran realizables. Kitcher considera por una parte que la matemática es la ciencia de las operaciones humanas, y por otra que su evolución y racionalidad solo se puede establecer de manera histórica a través de la evolución misma de las comunidades matemáticas, al igual que en las otras ciencias naturales. Para Kitcher la verdad en matemáticas es lo que establece en cada momento la evolución histórica.

Otro punto de vista que pone el acento en los aspectos sociales es el de Bloor (1998). Bloor parte del punto de vista propuesto por Mill y analiza la crítica que le hizo Frege. A continuación expone la teoría de

Mill modificada por factores sociales que él considera que superan la crítica de Frege. Para Bloor, la lógica de Mill aporta la idea fundamental de que las situaciones físicas sirven de modelos para los pasos que se dan en el razonamiento matemático (una idea desarrollada posteriormente por la didáctica de las matemáticas). Pero este análisis no da la sensación de ser correcto, hay algo que le falta. Las objeciones de Frege hacen ver cuál es ese ingrediente ausente: la teoría de Mill no hace justicia a la objetividad del conocimiento matemático, no da cuenta de la naturaleza ineluctable de sus deducciones, no explica por qué las conclusiones matemáticas dan esa sensación de no poder ser distintas de las que son. Para Bloor el componente sociológico explica cómo se dota de un aura de autoridad a las matemáticas.

Entre los enfoques que ofrecen una visión social de las matemáticas destaca el "constructivismo social". Ernest (1998) explica la actividad matemática a partir del constructivismo social. Este punto de vista filosófico aplicado a las matemáticas se basa en: 1) La lógica del descubrimiento matemático propuesta por Lakatos basada en la prueba y la refutación. Ernest interpreta que en *Pruebas y Refutaciones* (Lakatos 1978) este autor propone una visión de las matemáticas basada en la negociación y la aceptación. 2) Los trabajos de Wittgenstein (1983 y 1987). Ernest recoge de este autor la certeza y la necesidad de las matemáticas derivan de la aceptación de unas "reglas de juego" que se encuentran en una "forma de vida" socialmente preexistente. 3) La interpretación de la objetividad como intersubjetividad. El conocimiento objetivo se entiende como un conocimiento social, cultural, público y colectivo y no como un conocimiento personal, privado o construcción individual ni tampoco como un conocimiento externo, absoluto o trascendente. Dicho de otra manera, no se considera que la intervención constitutiva del sujeto en el acto de conocimiento lleve a verdades necesarias ni que la objetividad dependa de la adecuación isomórfica del conocimiento a un mundo trascendente. 4) La interpretación de las matemáticas como algo básicamente conversacional. El constructivismo social entiende las matemáticas como algo básicamente lingüístico, textual y semiótico, pero inmerso en el mundo social de la interacción humana.

El constructivismo social de Ernest no pone en cuestión la existencia del mundo de la vida (tanto el físico como el social) ya que presupone su existencia tal como nos lo sugiere nuestro sentido común. No necesita partir de un sujeto que experimenta estas dos esferas de la realidad sino que parte de una intersubjetividad histórica previa que ordena y da significado al mundo de la vida del sujeto. En cambio el constructivismo radical (Von Glasersfeld 1995) toma como punto de partida la experiencia del sujeto ya que sus dos principios básicos son: 1) el conocimiento es activamente construido por el sujeto y 2) la función de la cognición es organizar nuestro mundo de experiencias y no descubrir una realidad trascendente. El constructivismo radical, si bien propone un punto de vista de tipo constructivista-pragmático que puede llegar a ser compatible con el constructivismo social, corre el peligro de caer en el solipsismo tal como argumentan sus críticos.

Otra de las líneas de investigación que, a nuestro parecer, también se puede englobar en este paradigma pragmático-constructivista son los estudios de tipo antropológico que han puesto de manifiesto el hecho de que las diferentes sociedades han generado diferentes clases de matemáticas. Si al el cuestionamiento de la distinción analítico-sintético, ya apuntada por Splenger pero argumentada fundamentalmente por Quine, le sumamos que cada cultura genera su matemática, hay que matizar la suposición que considera que las matemáticas dependen de la experiencia de la manera siguiente: las diferentes sociedades han fundado sus respectivas matemáticas sobre la experiencia, pero en una experiencia que resulta de seleccionar ciertos hechos según criterios mudables, una experiencia a la que se dota de significados, conexiones y usos que también son variables.

Para Bishop (1999), existen seis actividades sociales esenciales que constituyen el fundamento para el desarrollo de las matemáticas propias de cada cultura: "todas las culturas han desarrollado necesariamente su propia tecnología simbólica de las matemáticas, como respuesta a las 'demandas' del entorno experimentadas a través de estas actividades" (p. 83).

Estas son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Bishop considera que, si bien todas las culturas han desarrollado necesariamente su propia tecnología simbólica de las matemáticas como respuesta a las demandas del entorno experimentadas a través de estas actividades, como resultado de ciertos desarrollos intraculturales y también de la interacción y el conflicto entre culturas diferentes, han surgido las "Matemáticas", la disciplina internacionalizada que conocemos hoy y que tiene su principal foco de crecimiento en la tecnología.

Para Bishop las Matemáticas, además de ser una clase determinada de tecnología simbólica, también es portadora, y al mismo tiempo producto, de unos valores determinados. Estos son: racionalismo, objetivismo, control, progreso, apertura y misterio. Este punto de vista antropológico ha mostrado interés en la investigación de los problemas que tienen las personas que aprenden matemáticas en situaciones de "conflicto cultural", es decir, donde su cultura propia difiere marcadamente de la cultura de la escuela. Por ejemplo, poblaciones indígenas que están en una situación minoritaria o bien inmigrantes recientes en sociedades occidentales europeas.

Los puntos de vista anteriormente comentados, al destacar el papel que la negociación de los significados juega en la construcción personal, han producido una ampliación (o desplazamiento) del punto de vista constructivista hacia consideraciones de tipo social e institucional. Los puntos de vista pragmático-constructivistas parten de una comunidad pre-dada en la que se forma el sujeto. El proceso de incorporación del sujeto a esta comunidad lo hace partícipe de una intersubjetividad. Una caracterización que puede ser aceptada, por su generalidad, por las diferentes variantes pragmático-constructivistas es la siguiente: *el sujeto, que se ha formado como sujeto dentro de una comunidad y que, por tanto, es partícipe de una intersubjetividad, a partir de sus acciones y operaciones sobre el medio físico y social (normalmente realizadas en instituciones), construye un objeto (sistema organizado de objetos) matemático personal, que se puede representar en el mundo material por diferentes sistemas de signos sujetos a unas determinadas reglas (sintácticas, semánticas y pragmáticas) vehiculadas por el lenguaje y consensuadas por la intersubjetividad (objeto institucional)*. Desde esta perspectiva la dialéctica personal-institucional se convierte en una cuestión central y el alumno pasa de ser un alumno a ser, parafraseando a Heidegger, un alumno-en-una-institución.

El paso de considerar el "alumno" a considerar " el "alumno-en-una-institución" obliga a distinguir entre objetos personales y objetos institucionales y a problematizar estas dos clases de objetos y la relación entre ellos. El constructivismo psicológico, y en general todas las investigaciones realizadas en el campo de la didáctica de las matemáticas desde el enfoque cognitivo, se han centrado en los objetos personales. En el otro extremo tenemos la antropología cognitiva propuesta por

Chevallard y sus colaboradores (Chevallard 1992 y 1999, Chevallard, Bosch y Gascón 1977) en la que prima el aspecto institucional y el sujeto se considera un simple "corte institucional":

> Lo que vemos como un individuo concreto no es más que "un corte institucional" de la persona, es decir aquello que la institución en la que nos situamos, y desde donde miramos a la persona en cuestión, nos permite percibir en un momento dado. (Bosch 1994, p. 10)

Entre estos dos extremos tenemos diferentes teorías que intentan explicar la dialéctica personal-institucional sin olvidar ninguno de los dos polos. Entre estas teorías destaca la teoría de los objetos personales e institucionales (Godino y Batanero, 1994; Font, 2000) la cual postula unas entidades mentales que no nos alejan de las prácticas que se observan en la interacción que se produce en el aula. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las descripciones y las representaciones a medida que se construyen en el curso de una interacción en el marco de una institución.

La crítica que se hace a los puntos de vista constructivistas-pragmatistas es que caen en un cierto relativismo ya sea éste social o histórico. Ahora bien, el énfasis en lo social les lleva a postular una aproximación a las matemáticas que obliga a superar los puntos de vista apriorísticos sobre las matemáticas.

Referencias

ACEVEDO, A.; FONT, V. y GIMÉNEZ, J. (en prensa). Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph of functions. *Proceedings CIEAEM54*.

BISHOP, A. (1999). *Enculturación matemática*. Barcelona, Paidós.

BLOOR, D. (1998). *Conocimiento e imaginario social*. Barcelona, Gedisa

BOSCH, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Barcelona, Universitat Autónoma de Barcelona.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 12, n. 1, pp. 73-112.

_____ (1999). Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 19, n. 2, pp. 221-266.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, ICE-Horsori.

COLL, C. (1989). *Marc curricular per a l'ensenyament obligatori*. Barcelona, Departament d'Ensenyament de la Generalitat.

DAVIS, P. y HERSH, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona, Labor-MEC.

DÖRFLER, W. (1991). "Forms and Means of Generalization in Mathematics". In: BISHOP, A. J.; MELLIN-OLSEN, S. y VAN DORMOLEN, J. (eds.). *Knowledge: its Growth Through Teaching*. Dordrecht, Kluwer A. P.

DOU, A. (1970). *Fundamentos de matemáticas*. Barcelona, Labor

DUBINSKY, E. (1991). "Reflective Abstracción in Advanced Mathematical Thinking". In: TALL, D. (ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, Kluwer A. P.

_____ (1996). Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, v. 8, n. 3, pp. 25-41.

ENGLISH, L. D. (ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*. Hillsdale, N. J., Erlbaum.

ERNEST, P. (1998). Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics. In: ALSINA, C. et alii (eds.). *ICME 8 (1996). Selected Lectures*. Sevilha, S.A.E.M. Thales.

FONT, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simboliques a partir de graphiques. Aplicacions a les derivades.* Tesis doctoral. Barcelona, Universitat de Barcelona.

_____ (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA*, v. 6, n. 2, pp. 180-200.

_____ (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, v. 7, n. 2, pp. 127-170.

FONT, V. y PERAIRE, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación Matemática*, v. 13, n. 2, pp. 55-67.

FREGE, G. (1998). *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Madrid, Tecnos.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of matehematical structures*. Dordrecht, Reidel.

GÖDEL, K. (1994). *Ensayos inéditos*. Barcelona, Mondadori.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 14, n. 3, pp. 325-355.

GUZMÁN, M. de (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona, Labor

HEIDEGGER, M. (1975). *La pregunta por la cosa*. Buenos Aires, Alfa

IBARRA, A. y MORMANN, T. (1997). *Representaciones en la ciencia. De la invariancia estructural a la significatividad pragmática*. Barcelona, Ediciones del bronce.

KITCHER, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford, Oxford University Press.

KITCHER, P. y ASPRAY, W. (eds) (1988). *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis, University of Minnesota Press.

KUHN, T. (1981). *La estructura de las revoluciones científicas*. Madrid, Fondo de Cultura Económica.

LAKATOS, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid, Alianza Editorial.

LAKATOS, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid, Alianza Editorial.

LAKOFF, G. e JOHNSON, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid, Cátedra.

LAKOFF, G. y NÚÑEZ, R. (1998). "Conceptual metaphor in mathematics". In: KOENIG, J. P. (ed.). *Discourse and Cognition: Bridging the Gap*. Stanford, CSLI/Cambridge.

______ (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, Basic Books.

MACNAB, D. S. y CUMMINE J. A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16*. Madrid, Visor.

MASON, J.; BURTON, L. y STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. M.E.C. Madrid, Labor.

MOSTERÍN, J. (1980). *Teoría axiomática de conjuntos*. Barcelona, Ariel

NÚÑEZ, J. M. y FONT, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las Matemáticas. Una aproximación histórica. *Revista de Educación*, n. 306, pp. 293-314.

NÚÑEZ, R. (2000). "Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics". In: NAKAORA, T. y KOYAMA, M. (eds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. V. 1, pp. 3-22. Hiroshima, Hiroshima University.

NÚÑEZ, R. y LAKOFF, G. (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and ξ-∂ continuity. *Mathematical Cognition,* v. 4, n. 2, pp. 85-101.

OMNÈS, R. (2000). *Filosofía de la ciencia contemporánea*. Barcelona, Idea Books.

PENROSE, R. (1989). *La nueva mente del emperador*. Barcelona, Grijalbo Mondadori.

PIAGET, J. (1979). "Los problemas principales de la epistemología de la matemática". In: PIAGET, J. (comp.). *Epistemología de la matemática*. Buenos Aires, Paidós.

PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid, MEC/Morata.

POLYA, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problema?*. México, Trillas.

QUINE, W. V. O. (1974). *La relatividad ontológica y otros ensayos*. Madrid, Revista de Occidente.

_____ (1986). *Los métodos de la lógica*. Barcelona, Planeta-De Agostini.

REICHENBACH, H. (1951). *The Rise of Scientific Philosophy*. Berkeley, University of California Press.

RESNICK, L. B. y FORD, W.W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona, Paidós/MEC.

RESTIVO, S. (1992). *Mathematics in Society and History*. Dordrecht, Kluwer.

RUSSELL, B. (1988). *Introducción a la filosofía matemática*. Barcelona, Paidós.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York, Academic Press.

SPENGLER, O. (1958). *La decadencia de Occidente*. Madrid, Espasa Calpe.

STARK, W. (1963). *Sociología del conocimiento: el pensamiento Sociológico en la Historia de las Ideas*. Madrid, Morata.

VAN DORMOLEN, J. (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics. In: BISHOP, A. J. y MELLING OLSEN, S. (eds.). *Knowledge: its Growth Through Teaching*. Dordrecht, Kluwer.

VON GLASERSFELD, E. (1995). *Radical Constrctivism. A Way of Knowing and Learning*. London, The Falmer Press.

WITTGENSTEIN, L. (1983). *Investigacions Filosòfiques*. Barcelona, Laia.

_____ (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid, Alianza Editorial.

Recebido em nov./2000; aprovado em fev./2001

Could the future taste purple? Reclaiming mind, body and cognition*

RAFAEL NÚÑEZ**

Resumo

Este artigo investiga a predominância da experiência corporal na compreensão da mente humana. Eu defendo a idéia de que peculiaridades da mente e do corpo do ser humano e as experiências corporais que as sustentam são ingredientes essenciais da produção de significados e sistemas conceituais do ser humano. Sistemas conceituais são criados, entendidos e continuamente atualizados através de mecanismos cognitivos específicos, fundamentados nas experiências corporais. Eles não possuem nenhuma lógica transcendental, independente da corporeidade específica da espécie humana. Para defender tal posição, vou focar um estudo de caso sobre o conceito fundamental de passagem do tempo. Usando ferramentas da lingüística cognitiva, vou analisar os fundamentos deste conceito, enquanto ele é manifestado espontaneamente. Através da linguagem cotidiana, vou mostrar que existe um mapeamento preciso, cuja estrutura inferencial – metáfora conceitual – dá conta de uma enorme variedade de expressões lingüísticas, conteúdos semânticos e gestos espontâneos inconscientes: Eventos no Tempo São Coisas no Espaço. Este mapeamento fundamenta seu domínio fonte (espaço) em experiências corporais específicas e projeta sua estrutura de inferência sobre o domínio alvo (tempo). Este mecanismo nos permite que, de modo inconsciente e sem grandes esforços, entendamos expressões tais como: "o ano 2000 está *chegando*" ou "os dias à *nossa frente*". A forma geral do mapeamento parece universal, a análise levanta questões importantes que demandam um aprofundamento e um enriquecimento da compreensão sobre cognição e mente: uma perspectiva que veja a mente *inteiramente corporificada*. De maneira a evitar o desentendimento com a noção de "corporeidade" geral e, de certo modo, vaga que vem se tornando moda na ciência cognitiva contemporânea, descrevo o que chamo de inteiramente corporificada: uma abordagem orientada-corpórea que tem um compromisso explícito com a cognição total, não apenas com aspectos de níveis primários da cognição, tais como atividades sensório-motoras ou locomoção. Eu assumo a corporeidade (*embodiment*) como um fenômeno vivo, no qual a primazia da experiência, fundamentada no corpo (p. e., movimento, intenção e emoção), é parte inerente do objeto de estudo da mente.

Palavras-chave: corporeidade; metáfora conceitual; cognição.

---

* Este artigo obteve licença cedida a Janete Bolite Frant por Anthony Freeman, editor do *Journal of Consciousness Studies*. ISBN 0 907845061; ISSN 1355 8250. Publicado anteriormente em 1999.

** University of California at San Diego. E-mail: rnunez@ucsd.edu

Abstract
This article examines the primacy of real-world bodily experience for understanding the human mind. I defend the idea that the peculiarities of the living human brain and body, and the bodily experiences they sustain, are essential ingredients of human sense-making and conceptual systems. Conceptual systems are created, brought forth, understood and sustained through very specific cognitive mechanisms ultimately grounded in bodily experience. They don't have a transcendental abstract logic independent of the species-specific bodily features. To defend this position, I focus on a case study: the fundamental concept of time flow. Using tools of cognitive linguistics, I analyse the foundations of this concept, as it is manifested naturally in everyday language. I show that there is a precise conceptual metaphor (mapping) whose inferential structure gives an account of a huge variety of linguistic expressions, semantic contents, and unconscious spontaneous gestures: Time Events Are Things In Space. I discuss various special cases of this conceptual metaphor. This mapping grounds its source domain (space) in specific spatial bodily experiences and projects its inferential structure onto a target domain (time) making inferences in that domain possible. This mechanism allows us to unconsciously, effortlessly, and precisely understand (and make inferences with) expressions such as 'the year 2000 is approaching' or 'the days ahead of us'. The general form of the mapping seems to be universal. The analysis raises important issues which demand a deeper and richer understanding of cognition and the mind: a view that sees the mind as fully embodied. In order to avoid misunderstandings with a general (and somewhat vague) notion of 'embodiment' which has become fashionable in contemporary cognitive science, I describe what I mean by full embodiment: an embodied-oriented approach that has an explicit commitment to all of cognition, not just to low-level aspects of cognition such as sensory-motor activity or locomotion (lower levels of commitment). I take embodiment to be a living phenomenon in which the primacy of bodily grounded experience (e.g., motion, intention, emotion) is inherently part of the very subject matter of the study of the mind.
Key-words: *embodiment; conceptual metaphor; cognition.*

The colleague who had a question for you ...

Let's say that you are a scientist. Your subject matter is the study of the mind, the human mind. More specifically, you study conceptual systems and how humans make basic effortless inferences in everyday life. One day a colleague comes in and tells you that she went out and did a field study. She observed people in everyday conversations, talking, making gestures, making jokes. She also observed TV commercials, scientists giving talks, and priests celebrating ceremonies, and studied how ideas are expressed in printed material such as technical books, newspapers, holy texts, and commercial advertisements. Among many things, your colleague observed that no matter what the field, and irrespective of whether it was oral or written English, people use expressions such as:

> Faster than ever we are approaching the end of the millennium; he finally left his sad past behind; the winter hasn't arrived yet; he is organizing a retrospective of Hitchcock's movies; the days ahead of us are promising; the concert took place the day before yesterday; Christmas is gone; it started all the way back in the thirties: the millennium bug will bother us well beyond the year 2000; so far we have been lucky. And so on.

Your colleague points out to you that these expressions, although making use of completely different words, being about different subjects, and being observed ín different contexts, do have something in common: they all serve to express ideas about time ín terms of objects, positions and movements in space (see Figure 1). What is interesting, your colleague adds, is that people seemed to use these expressions in an absolutely natural way, with no effort, and without even being aware of the fact that they were talking (or reading) about time events ín terms of objects in space. Listeners engaged ín conversations seemed to follow what was said ín an equally natural effortless manner. Moreover, and interestingly enough, people seemed to make quick, precise, and effortless inferences when expressions like those were made. People immediately understood that the days ahead referred to days in the future, that those days have not occurred yet; that those days will occur earlier than days that are even further ahead, and so on. People never seemed to be puzzled or confused with expressions such as 'we are approaching the end of the millennium'. Somehow, they implicitly understood that approaching implies that the given time (the end of the millennium) is a moment that has not occurred yet, and that it may occur sometime relatively soon. Completely intrigued with these observations, your colleague asks you a very direct and simple question: How is it that human beings understand so effortlessly and unconsciously ideas, experiences, and inferences about time, while talking about space? How can that be?

So, here you are – you the scientist – someone who is trying to understand the human mind, the conceptual systems, and the inferential mechanisms that human animals take for granted and that make the most basic details of our everyday life so unbelievably livable ... to the point that we don't even notice them! So, what do you say?

Figure 1

Serious business

My point with this little story is to make clear that these questions – although they may seem at first trivial and anecdotal – are far from being obvious, and that they should betaken very seriously ín the various fields of cognitive science[1] and the study of the mind. In fact, there are

1 By cognitive science, I simply mean the scientific study of cognition in a large sense (i.e., including various aspects of the mind). That is, it is the study of a particular subject matter– cognition (and the mind)-through the explicit use of the scientific methodology. From this perspective, nothing says that cognitive science is (or should be) about computation, or that it necessarily makes use of computer technology and computer-based concepts in studying the subject matter.

more interesting details that make these observations extremely relevant. When producing speech, people usually generate an impressive amount of spontaneous gestures, bodily postures, and facial expressions. More precisely, people produce – ín a perfectly synchronized manner – spontaneous gestures which somehow match the meaning, timing, and form of the oral expressions used (McNeill,1992; Iverson and Thelen, 1999). For instance, with a hand or a finger, people point towards something ín their backs at the very moment when they say 'all the way back in the thirties'. Or they show something in front of them when saying `the days ahead of us'. Therefore, bodily actions (i.e., spontaneous gestures) and speech, not only are coherent, but occur with an impressive synchronicity with speech. But there ís more. In everyday conversations, people make the most amazing inferences in a matter of milliseconds. For example, consider the following questions. What does it mean to say that 'Christmas is gone'? After all, Christmas is a social (and commercial) event. As such, it does not move anywhere. So, gone where? In what space did it move? From where to where? Going through what locations? Similarly, if two people are sitting in a pub drinking beer, why should they say 'faster than ever we are approaching the end of the millennium', if they are just there, simply sitting. statically, drinking beer? How can they approach anything at all – much less a 'moment' such as 'the end of the millennium'? From where are they approaching it? Faster than what? How is it that people simply go about in their everyday conversations deeply understanding all these expressions, with no effort at all, often not even being aware of them, and what is more, making quite sophisticated inferences about the structure of temporal experiences?

Human everyday language requires the capacity to make an impressive ammount of unconscious, effortless, and precise inferences in real time. For example, when looking at this cartoon, we 'naturally' understand the events in time in terms of things or locations in space. The cognitive mechanisms that make these everyday phenomena possible, are structured by fundamental bodily-grounded experiences. Their study reveals the embodied nature of the mind. (Reprinted with permission. KAL, Cartoonists & Writers Syndicate, 1999. www.cartoonists.com

Towards reclaiming cognition

In the following pages, I will analyse this intriguing phenomenon of human everyday conversations. Through the analysis of this time-space case study, I will try to give support to the main goal of the present volume. That is, to show that the scientific study of the mind needs to reconsider its very subject matter in a broader, deeper, and richer manner. I will argue that the questions above can be answered only in a limited manner from the perspective provided by traditional mainstream cognitive science. That is, when one approaches these questions with a dualistic and functionalistic view of cognition, where one sees cognition as a purely abstract rule-driven information-processing phenomenon, inherently separated from the nature of the body of the living human animal, and the bodily experiences it sustains (Freeman & Núnez, this volume). Through the time-space case study, I will defend the idea that cognition – and the study of the mind – needs to be reconsidered. It needs to be redefined, reclaimed in order to be understood in a more appropriate way than has been done by mainstream cognitive science and its various computer-metaphors for the mind.

In the rest of the article, I intend to accomplish several things. First, I will analyse the above time-space case through current work done in the emerging field of cognitive linguistics, focusing on the understanding of the notion of time flow. Second, this analysis will raise important issues which, I will argue, demand a deeper and richer understanding of cognition and the mind: a view that sees the mind as fully embodied. Third. I shall describe what I mean by (full) embodiment, and avoid misunderstandings with a general (and somewhat overused) notion of 'embodiment' which has become fashionable in contemporary cognitive science, I will take embodiment to be a living phenomenon in which the primacy of bodily grounded experience is inherently part of the very subject matter of the study of the mind. Finally, I will close defending the idea that in order to meet the foundational demands imposed by this view, we need to free ourselves from several taken-for-granted harmful dogmas that impede a clear understanding of important mental phenomena, and which have been at the core of much of mainstream cognitive science and philosophy of mind.

How do we conceptualize time events? A view from cognitive linguistics

In recent years, the emerging field of cognitive linguistics has made some interesting contributions. Among others, it has confirmed that an important amount of abstract thought is unconscious (i.e., it happens below the level of awareness and therefore is often beyond introspection), and it has shown that concepts are systematically organized through everyday cognitive mechanisms such as conceptual mappings. The most well known conceptual mappings are conceptual metaphors (Lakoff and Johnson, 1980; see Lakoff, 1993, for a general overview) and conceptual blends (Turner and Fauconnier, 1995; Fauconnier, 1997; Fauconnier and Turner, 1998). For the purpose of our case study, I will focus only on the first one.

A conceptual metaphor is a cognitive mechanism that allows us to make precise inferences in one domain of experience (target domain) based on the inferences that hold in another domain (source domain). Through this mechanism, the target domain is understood, often unconsciously, in terms of the inferential structure that holds in the source domain. One shouldn't get the idea that 'metaphor' here is a mere figure of speech used by poets or politicians to illustrate an idea for aesthetic or manipulative purposes (respectively). In fact, a conceptual metaphor, as understood in cognitive linguistics, does not belong to the realm of words but to the realm of thought. And this is very important to keep in mind: a conceptual metaphor is a cognitive mechanism, an inference-preserving cross-domain mapping.

A key concept in this theory is that the 'projections' from source to target domain are riot arbitrary, and that they can be studied empirically and stated precisely. They are not arbitrary, because they are motivated (in general) by our bodily grounded experience, which is biologically constrained. For example, underlying expressions like 'She greeted me warmly' or 'send her warm hellos', there is a conceptual metaphor which allows us to conceptualize Affection in terms of bodily grounded thermic experiences: Warmth. This mapping is not a mere arbitrary social convention. It is based on a (human) invariant, which is the shared experience of the correlation between the bodily sensation of warmth and affection from the most early days of our ontogeny.

Research in contemporary conceptual metaphor theory has shown that there is an extensive conventional system of conceptual metaphors in every human conceptual system. The empirical evidence comes from a variety of sources, including, among others, psycholinguistic experiments (Gibbs, 1994), generalizations over inference patterns (Lakoff, 1987), historical semantic change (Sweetser, 1990), and the study of spontaneous gestures (McNeill, 1992). When combined in an appropriate way, these conceptual mappings sustain even the most sophisticated forms of abstract thinking, such as the conceptual apparatus underlying the whole edifice of mathematics (Lakoff and Núnez, 1997; 2000; Núnez and Lakoff, 1998).

Among the hundreds of conceptual metaphors that have been studied in depth in the last decade, there is the one concerning our understanding of time in terms of motion in space, originally described as the Time Passing Is Motion metaphor (Lakoff, 1993). Today we know that there are different forms of this mapping. Particularly relevant is the distinction between time-based metaphors and ego-based metaphors. Both of them are present in our everyday language, but they work in rather different manners. The reason why they are called time – and ego-based is because the former works in terms of a metaphorical 'orientation' applied to events (or times), and the latter applied to a bodily orientation of the speaker or his/her audiencc. 3 For the purpose of this article, I will call Time Events Are Things In Space the general conceptual mapping under which time-based and ego-based metaphors can be classified. Let's analyse them in more detail.

Time-based metaphor

This is a relatively simple conceptual metaphor. Its structure is the following.

Nature: Time is understood in terms of things (objects in a sequence) and motion in space.

Background conditions:

- there is a sequence of objects which:
- may move horizontally (as a whole), and
- in the direction of one of its extremes.

Mapping:

SOURCE DOMAIN Space	TARGET DOMAIN Time
hin	Times
Sequence of objects	Chronological order of times
Horizontal movement of the entire sequence in one direction	Passing of tine
Things oriented with their fronts[4] in their direction of motion	Times oriented with their fronts in their direction of motion
An object A in front (behind) of an object 8 in the sequence	A time A occurs earlier (later) than a time B

Entailments:

- If time B follows time A (in the sequence), then time B occurs later than time A (it is in the future relative to time A).
- Transitivity properties applying to relative positions in the sequence in the source domain are preserved by the mapping so they are available in the target domain. For example, if event Cis behind (in the future relative to) an event B, and event B is behind (in the future relative to) A, then event C is behind (in the future relative to) event A.
- Since the sequence of objects is one-dimensional, time is one-dimensional.

This time-based conceptual metaphor accounts for a variety of linguistic expressions (and their semantic entailments) such as, In the preceding session...; in the days following next Wednesday...; the day before yesterday; Greenwich Mean Time is lagging behind the scientific standard.

Ego-based metaphor

This is a relatively complex conceptual metaphor which has two layers of encompassing inferential structure: a basic static one and a dynamic one. The complete dynamic mapping, in turn, manifests itself in two distinct forms depending on the nature of the moving entity. The basic (non-dynamic structure) is the following.

Ego-based metaphor: Basic static structure

Nature: Time is understood in terms of things (entities and locations) in space. Background conditions:

- There is a landscape, and a canonical observer. Mapping (basic static structure):

SOURCE DOMAIN Horizontal Uni-dimensional Space	TARGET DOMAIN Time
Things	> Times
Order of things in a horizontal, one-dimensional landscape	Chronological order of times
Things in front of the observer	Future time
Things behind the observer	-4 Past times
Things at the location of the observer	Present times

Entailments:

- Transitivity properties applying to relative positions in the source domain are preserved by the mapping so they are available in the target domain. For example, if event A is further away ahead relative to the observer's orientation (in the future) than event B, and event B is further away (in the future) than C, then event A is further away ahead (in the future) than event C.

The basic static structure of the conceptual metaphor provides a rather rich inferential structure based on relations between positions in space. This fundamental partial mapping (without motion) accounts for an important number of linguistic expressions and their semantic entailments:

> The end of the world is near; I'm looking ahead to the winter holidays; It occurred in the remote past; The days ahead of us...; Way back in the sixties; It will happen some day in the distant future; Election day is here. The wedding is still far away.

Ego-based metaphor: Additional dynamic structure

Nature: Time is understood in terms of things (entities and locations) and motion in space.

Background conditions:

- There is a landscape, and a canonical observer which may move.
- The observer and the thing(s) in the landscape don't move simultaneously.
- When one entity is moving (thing or observer), the other is stationary; the stationary entity is the deictic centre.

Mapping (additional dynamic structure):

SOURCE DOMAIN Horizontal Uni-dimensional Space	TARGET DOMAIN Time
Relative motion (of the things with respect to the observer) along a one-dimensional landscape	The passing of time

Entailments:

- Since motion is continuous and one-dimensional, the passage of time is continuous and one-dimensional.

When (relative) movement is incorporated into the general mapping, new precise inferential properties emerge. As indicated above, one of the background conditions of this conceptual mapping establishes that the canonical observer and the thing(s) in the landscape don't move simultaneously. Either the observer moves while things are stationary, or things move while the observer is static. These two possibilities sustain two specific forms of the more general conceptual mappings observed in everyday language. These special forms are the following:

Dynamic ego-based form 1: time passing is motion of an object

In this case, the observer is fixed and the times are entities moving with respect to the observer. These elements bring additional inferential structure to the general mapping.

SOUCE DOMAIN HorizontaL; Uni-dimensional Space	TARGET DOMAIN Time
Things moving horizontally with respect to the fixed observer (and with their fronts in their direction of motion)	Times

Entailments:

- The time passing the observer is the present time.
- Time has a velocity relative to the observer.
- If time B follows time A (in the movement towards the observer, or away from him/her), then time B occurs later than time A (time B is in the future relative to time A).

This form of the conceptual metaphor accounts for the linguistic form and the semantic entailments of expressions like:

> The time to take a decision has arrived ... ; The summer had long since gone when ... ; Christmas is corning up on us. Time is flying by. The time has passed when ... ; The end of the world is approaching. That time will never conic...

Dynamic ego-based form 2: time passing Is motion ver a landscape

In this case, times are fixed locations and the observer moves with respect to time.

SOURCE DOMAIN Horizontal Uni-dimensional Space	TARGET DOMAIN Time
Fixed objects (or locations) with respect to which the observer moves	Times

Entailments:

- Time has an extension, and can be measured.
- An extended time, like a spatial area, maybe conceived of as abounded region.

This form of the mapping accounts for another family of expressions:

> W e are getting closer to the end of the summer; Fortunately, we left that horrible story behind us; I will walk towards the future with optimism. He passed the time happily. We are approaching the year 2000. We are arriving at the end of the millennium.

The two forms of the ego-based metaphor have a quite different inferential structure. In fact, as Lakoff points out (1993), they are sometimes inconsistent with one another: the same words used in both special forms have inconsistent readings. For instance, the approaching of 'The end of the world is approaching' (Form 1), and 'We are approaching the year 2000' (Form 2) take different arguments. Both refer to temporal events, but the former takes a moving time as a first argument and the latter takes a moving observer as a first argument. The same holds for arrive in 'the time has arrived', and 'We are arriving at the end of the millennium'. But despite these differences, there is an important entailment that is shared by both forms.

Entailment common to both Dynamic Ego-based forms;

- If Time A approaches the observer (Form 1) or if the observer approaches Time A (Form 2), the metaphorical distance between Time A and the observer:
- gets shorter as the action 'approaching' takes place, and
- will he shorter after the action 'approaching' is over.

It is very important to keep in mind that this entailment does hold for both forms of the general dynamic mapping, but it is not what is empirically observed. In everyday conversations, we don't normally use expressions such as 'Christmas and ourselves are approaching each other'. It is simply an empirical fact, that these kinds of expressions are not observed. Therefore, from a cognitive perspective, it would be a mistake to consider the two forms of the ego-based metaphor as 'models' of a unique abstract truth about the distance between the observer and a specific time. As a scientist. one should focus on what one does observe empirically, that is, expressions involving time which are accounted for either by Form I or by Form 2 of the conceptual metaphor. It is this observation that can tell us about the basis of how the mind works, not an a posteriori logical analysis of reason. This paint is crucial. Ignoring it simply impedes us in understanding why and how reason is bodily grounded.

We the experts

One of the most striking things about everyday conversations is that we seem to be absolute experts in mastering the subtleties involved in the network of conceptual mappings. For instance, in what concerns our example, we use the different forms of the general mapping Time Events Are Things In Space, unconsciously 'knowing' when and how to operate in the appropriate sub-mappings, and drawing the appropriate inferences. Not only do we often do it unconsciously, but also we do it effortlessly, and with an astonishing speed and accuracy. Consider, for instance, the following two expressions in Spanish (in which language the above mappings also occur):

1) El estudiará to que acontecio con posterioridad a 1988.
2) El estudiará to que acontecio desde 1988 en adelante.

Expression (1) means 'he will study what happened after 1988 ('posterior to')', and expression (2) means 'he will study what happened from 1988 on ('frontward')'. Both expressions mean the same, 3 that is, that 'he will study what happened in the years following 1988': they refer to the years in the future relative to 1988. But notice that expression (2) refers to adelante (front), and expression (1) refers to posterior (back; rear). So how come we metaphorically mean the same thing using expressions which are referring to opposite orientations such as front and back? This sounds quite paradoxical indeed, But in fact, if we look closely at the underlying conceptual mappings, it is not. Expression (1) is based on the time-based mapping described above, whereas expression (2) is based on the ego-based mapping. The posterior (back, rear) of expression (1) applies to the back of '1988' as a particular metaphorical object (a year-thing) characterized by the background conditions of the time-based mapping, And the adelante (front) of expression (2) applies to the front relative to the bodily orientation of the observer characterized by the background conditions of the ego-based mapping. As we saw, these two conceptual mappings are very different, but sometimes the extensionality of the cases holding their entailments may coincide, resulting in expressions which mean the same while making reference to opposite orientations! However, we seem to be experts at keeping our mappings straight, so we don't make mistakes, and we don't have troubles maintaining conversations. In fact, it is really amazing that in our everyday conversations, these things don't seem paradoxical at all. We are (unconsciously) simply wonderful experts at operating in different mappings at once, and at making inferences within the exact appropriate mapping. And we are experts at dealing with these sophisticated situations under extremely demanding real-time and real-world constraints. The naturalness and speed at which we master these cognitive mechanisms is often striking, and go beyond pure speech or written language. Consider the following example in French:

> Pierre: Notre grand-mere est née en 1930, n'est-ce pas? (Our grandmother was born in 1930, right?)
> Natalie: Non! Elle est née bien avant! (No! She was born way before!).
> (And at the very same time, Natalie makes a gesture quickly moving her hand towards her hack, with the calm facing backwards.)

Here Natalie says 'avant' (meaning before, front), and her gesture indicates backwards. This maybe seen as a contradiction between gesture and speech, a 'contradiction' which, as speakers, we are not aware of (unlike when somebody says to us 'go left', while indicating to the right, which usually does bother us and we immediately become aware of). But there is no such thing here. What happens is that the oral expression makes use of the time-based metaphor in which the time when grandmother was born has occurred much earlier (in front, according to that mapping) than the time Pierre had in mind. And the gesture makes use of the sequence defined by the time-based metaphor, but oriented in the precise direction required by the source domain of the ego-based metaphor, that is, a sequence with their metaphorical fronts facing the observer. The result is that the time when the grandmother was born is in front (earlier) of the time suggested by Pierre (avant, meaning before) in the time-based metaphor, but also that that time has passed already and it is behind the observer in the ego-based metaphor. As active sense-makers, we seem to use basic everyday cognitive mechanisms to sustain these very sophisticated inference patterns in a precise, fast, and unambiguous manner.

Learning from the case study: the primacy of the living body

Now, let's step back for a moment, and reflect on what we have analysed so far, What we have done is to characterize just one among the thousands of conceptual mappings we use – often simultaneously, and combined in complex ways – in everyday conversations. We analysed a system of conceptual metaphors – the general mapping 'Time Events Are Things In Space. This mapping characterizes the conceptual structure that sustains the fundamental idea of time events and time flow, giving an account of hundreds of everyday linguistic expressions (like those listed above) and their semantic entailments. Because of its fundamental nature. this mapping provides some interesting insight into the nature of the human mind and human conceptual systems. Two aspects are especially relevant for this article: the universality of the use of unidimensional space as source domain of the mapping, and the primacy of the inherent bodily orientation.

Universality of space as a source domain of the mapping

What can we say about the universality of the basic mapping Time Events Are Things In Space? Do we find it in other languages and cultures as well? We now know that both conceptual metaphors for time and space – time-based and ego-based – have been observed not just in English, Spanish, or French, but also in many IndoEuropean languages, and even in non-Indo-European ones such as Chinese, Japanese, Korean, some African languages like Wolof in Senegal, and Hebrew, to name a few (Sweetser, 1999; Moore, 1999), These observations provide huge evidence in favour of the idea that the general mapping Time Events Are Things In Space is indeed a human universal. Of course, there are some details which may vary from culture to culture, and from language to language. For example, some languages may focus on dynamic aspects and others on static and positional aspects. Or some languages may differ in when they use Form I or Form 2 of the ego-based metaphor, and so on.

Sometimes the variation of the details of the mappings is in fact quite striking. For the last few years – in collaboration with some colleagues of Northern Chile – I have studied the structure of the general mapping Time Events Are Things In Space in native speakers of Aymara, an Amerindian language spoken in the highlands of the Andes mountains. We have found that besides a perfectly common time-based mapping, they use a form of the ego-based mapping which maps the front with the past, not with the future! We have observed this not only in purely linguistic expressions, but also in the manifestation of spontaneous gestures. For instance, when saying something like 'long time ago' they point towards the front of them. And when referring to some event that occurred even earlier than that, they point even further ahead (thus exhibiting the transitivity properties described earlier). The details of how this works in Aymara, how this situation is explained in bodily-grounded terms, and how all this relates to the Aymara culture are quite interesting, but go beyond the scope of this paper (see Núnez et al., in preparation). But beyond these very striking differences, what matters for our argument here is that, as far as we know, it is very safe to say that the general mapping Time Events Are Things In Space is universal (or at least extremely predominant).

The issue of universality also raises another question: Is it possible to observe cultures in which time events are conceived in terms other than objects in space, say, in terms of sweet-and-sour tastes, chromatic experiences, or blood pressure sensations? The answer is quite simple; there is no evidence that such a case exists. In all the languages studied so far – oral and written – time events are in one way or another conceived in terms of things (entities or locations) in space. We simply don't observe the conceptual structure of time flow based on domains of human experience such as tastes, flavours, or colours. Given this, the future can't taste purple.

It is worth mentioning that in all cultures studied so far, the mapping Time Events Are Things In Space is not taught deliberately and systematically at school or through any form of specific instruction. These observations suggest that such mappings are not mere social agreements or conventions. If that were the case, one would expect as many experiential modalities generating these conceptual mappings, as social and cultural environments one encounters. The stability and universality of these conceptual mappings supports the idea that they are shaped by non-arbitrary species-specific peculiarities of our brains and bodies. These fundamental specificity's allow individuals to use these mappings effortlessly, often unconsciously, and in an extremely fast, precise, unambiguous, and accurate manner. In sum, human beings, no matter the culture, organize chronological experience and its conceptual structure in terms o f a very specific family of experiences: the experience of things in space.

The primacy of the inherent bodily orientation in the mapping

Now, let us analyse what we can learn from the fact that an inherent bodily orientation structures the very core of the mapping Time Events Are Things In Space. At first glance, this issue may seem a superficial one, but it isn't. In fact, it has deep theoretical and philosophical implications. Consider, for instance, the following question.

Why should an abstract inferential mechanism such as the one we use to make inferences about time events require an implicit, precise, and unambiguous bodily orientation? After all, if the cognitive mechanism were really inherently abstract (as traditional mainstream cognitive science has postulated for decades), it shouldn't need anything concrete such as a bodily orientation! When you do your empirical observations, however, you observe that the inherent bodily orientation is everywhere. How can that be?

The mapping Time Events Are Things In Space under the ego-based metaphor, does make explicit reference to a bodily orientation.

To be more precise, both forms of that metaphor – Ego-Based Form 1: Time Passing Is Motion Of An Object and Ego-Based Form 2: Time Passing Is Motion Over A Landscape – explicitly state that:

- future times are in a specific orientation relative to the speaker's body, namely, in front of him/her (in our culture), and
- past times are in another specific orientation relative to the speaker's body, namely, behind him/her (in our culture).

Because of the way in which the source domain of the metaphor is structured (objects in space being in front/behind the observer, etc.), and because of the structure of the projections to the target domain (things in front of/behind the observer are future/past times, etc.), the mapping itself establishes a precise bodily orientation of the observer relative to the times. (One could argue that in our culture it is also possible to find situations in which the past is conceived as being on the left of the speaker, and the future as being on the right. Such is a specific case of the time-based metaphor, in which the times are ordered in a sequence before the eyes of the speaker (the speaker is outside the space of the sequence). In such a case, terms like 'before time t' apply to the front of time t, not to the front of the speaker. This specific case of the time-based mapping underlies more sophisticated conceptual domains such as graphics of functions in the Cartesian plane where time is the independent variable (LakoFf and Núnez, 2000).)

If we want to understand the subtleties of this phenomenon and its theoretical implications, seeing human reason as a purely abstract logical phenomenon does not help. Such a disembodied view wouldn't help us to answer the following questions: First, why is there a bodily orientation at all? And second, why do we observe a specific bodily orientation'? In fact, from a purely abstract point of view, you don't need a particular bodily orientation – say, with the future in front of us – in order to keep the inferential structure provided by the mapping. We could still keep the same rich inferential structure preserving, for example, order and transitivity if future times were, say, above one's head and past times under one's feet. In other words, if time-space cognition was a purely disembodied abstract logic phenomenon, one would expect different languages, cultures, or even individuals manifesting all kinds of different bodily orientations with respect to a one-dimensional landscape.

Any kind of bodily orientation would do it, even an orientation having, say, the past in the upper right front of the body and the future in the lower left rear. But empirical data show that this is not the case. There is one bodily orientation that is predominant in a wide range of human cultures, namely, the future as being ahead of us and the past as being behind. If we are really serious about studying the mind, we can't ignore this simple but important fact. This means that in explaining this (and any) human conceptual apparatus, we must propose a research programme that considers, in an essential way, the primacy of the peculiarities of the human body, bodily experiences and actions which underlie basic forms of human sense-making. Regarding the bodily orientation involved in our time-space case study, this means proposing an explanation that, among others, takes into account fundamental features of human movement. For instance, normally when we walk:

- we do it in one direction (we don't do it in two directions at a time, or spreading out over a surface),
- we do it in the direction of the orientation of our visual field (not, say, towards the auditive field of our left ear),
- we do it keeping our heads stable relative to the ground (unlike our hands or elbows, which are not) so we experience vision as being stable,
- we do it faster when we move frontally rather than laterally or backwards,
- our movements frontwards are more precise than those done backwards or sidewards,
- our movement frontwards requires less attention and coordination efforts than, say, moving backwards,
- our head is the part of the body which is the most distant from the ground (unlike when we sleep),
- we spend energy, and eventually get tired,
- we are erect and at any moment we can run (unlike when we are in our knees),
- and so on.

The moral

So. what have we learned from our time-space case study? We have learned that the resulting explanatory proposals of these sort of phenomena should be made in terms of basic cognitive mechanisms emerging from fundamental human experiences in a real environment as they are shaped by bodily properties and biological constraints. When explaining human conceptual systems, purely abstract, logical, and a priori considerations about time and space are secondary to these most fundamental species-specific peculiarities of the human body and brain. As Esther Thelen puts it, 'Even when adult cognition looks highly logical and propositional, it is actually relying on resources (such as metaphors of force, action, and motion) developed in real-time activity and based on bodily experience' (Thelen, 1995, p. 323). It would be a big mistake to consider the predominant bodily orientation in the mapping Time Events Are Things In Space as a an accident, as anecdotal data, or as a mere physical instantiation secondary to a purely abstract form of reason. A theory of mind and cognition must consider the primacy of the specific constraints of our bodily grounded experience shaped by the peculiarities of our brains and bodies. In sum, what we have learned from our case study is that in order to understand cognition and the mind, one must conceive them as filly embodied phenomena,

But, what do we mean exactly by 'embodiment'? At this point we have to be careful, because the term 'embodiment' Bas become very fashionable (and polysemous) in contemporary cognitive science and philosophy of mind. Therefore, we need to be much more specific and avoid misunderstandings.

What embodiment for reclaiming cognition?

In the last couple of decades, the study of the mind has experienced an interesting (and gradual) shift. There has been a tendency to move from a rational, abstract, culture-free, centralized, non-biological, a historical, unemotional, asocial, and disembodied view of the mind, towards a view which sees the mind as situated, decentralized, real-time constrained, everyday experience oriented, culture-dependent, contextualized, and closely related to biological principles– in one word, embodied (Núnez, 1995) This gradual shift has produced terms such as 'embodiment', 'embodied mind' or 'embodied cognition' (for details see Clark, 1997; Johnson, 1987; Lakoff, 1987; Varela et al., 1991). These terms, however, have not been used in a monolithic and coherent manner in the various disciplines of cognitive science and its various theoretical approaches. Moreover, with rare exceptions they often have lacked a precise operational characterization. As a result, we find several notions of embodiment which, while sharing a common core, differ on important theoretical points and philosophical implications. Let us see them in more detail.

Levels of commitment: trivial, material, and full embodiment

From a very general perspective, we can at least distinguish three major levels of understanding the term 'embodiment' which are directly related with the levels of commitment involved. I will call them trivial, material, and full embodiment.

Trivial embodiment: It affirms what today is obvious for many, that is, that cognition and the mind are directly related to the biological structures and processes that sustain them. Nowadays, few scholars (perhaps with the exception of orthodox cognitivists and transcendentalists) would disagree with this idea. This view holds not only that in order to think, speak, perceive, and feel, we need a brain – a properly functioning brain in a body – but also that in order to genuinely understand cognition and the mind, one can't ignore how the nervous system works. Compelling evidence coming from contemporary neuroscience and neuropsychology has made this view quite popular. As a result, this level of commitment regarding embodiment is today quite uncontroversial.

Material embodiment: This view not only claims that cognition (and the mind) is made possible by the underlying neurobiological and bodily processes. It also *explicitly* develops a paradigm (and a methodology) that has two main features. First, it sees cognition as a decentralized phenomenon, and second, it takes into account the constraints imposed by the complexity of real-time bodily actions performed by an agent in a real environment. These features depart in an essential way from more classical approaches to cognitive science. Material embodiment has, in general, oriented itself towards low-level cognitive tasks. As a result, it does not have to confront certain basic issues of high level cognition such as the nature of conceptual systems as such. One can endorse material embodiment to study, say, visual scanning or locomotion, without being constrained to make any particular commitment about how these bodily actions may ground the very nature of human concepts and logic. In material embodiment, you may thus implicitly assume the existence of concepts in an a priori way (e.g., square-root-of-two, the-future – ahead-of-us) without being constrained to say much about their nature and inferential structure. The commitment does not apply to all of cognition.

Full embodiment: It shares the basic tenets of trivial and material embodiment, but it goes further. It has a commitment to all of cognition: from the most basic perceptive activity to the most sophisticated form of poetry and abstract thinking. Full embodiment explicitly develops a paradigm to explain the objects created by the human mind themselves (i.e.. concepts, ideas, explanations, forms of logic, theories) in terms of the non-arbitrary bodily experiences sustained by the peculiarities of brains and bodies. An important feature of this view is that the very objects created by human conceptual structures and understanding (including scientific understanding) are not seen as existing in an absolute transcendental realm, but as being brought forth through specific human bodily grounded processes. Conceptual systems and forms of understanding are not considered a priori, but they become subject matters to be explained in real-time bodily grounded terns, From this perspective, not only are colour categories embodied and are not out there in the world, but so is the concept of democracy, the truth of Pythagorean' theorem, or the essence of any mathematical object (Lakoff and Núnez, 2000).

Needless to say, full embodiment is (still) way more controversial than trivial and material embodiment. However, our time-space case study-being about conceptual structure and high level cognition – clearly illustrates the necessity of endorsing full embodiment. If we treed to understand the primacy of the inherent bodily orientation which is at the core of the conceptual mapping Time Events Are Things In Space, trivial and material embodiment do not suffice, We must understand the conceptual structure involving elements such as future-being-in-the-front, past-being-in-the back, and so on, not as a priori transcendentally objective ideas, but throuh the peculiarities of our brains and bodies that make them possible. What is needed then is an embodied-oriented commitment to all of cognition, Full embodiment then becomes a must.

Choices of theoretical assumptions and methodologies

But beyond these three levels of commitment, there are more nuances we have to make regarding the term 'embodiment'. The gradual paradigm shift that I mentioned at the beginning of this section originated from a need to overcome the limitations of early cognitivism and the more recent connectionist approaches (for details, see Varela, 1989; Clark, 1997 and also in this volume; Freeman and Núnez, in this volume). Essential to this enterprise was to give form to approaches which would address a fundamental problem: the neglect of the body and the environment in which the cognizing organism exists, Although philosophers such as Edmund Husserl, and Maurice Merleau-Ponty, as well as ecological psychologists such as James Gibson, had seen already the centrality of body and environment for the understanding of the mind, cognitive science took a long time to make the first steps in this direction. Endorsing this new view meant to take seriously such domains as everyday life, the environment, bodily experiences, real-world and real-time action, and so on. As a result, an important group of new approaches, in various disciplines, proceeding with rather different methodologies, headed towards investigating cognition as a product of complex adaptive behaviour emerging from on-going action on the part of an agent which is always immersed in a real-world environment, and with physical and real-time constraints. This provided core properties for a new way of conceiving cognition.

The process, however, didn't produce a monolithic understanding of 'embodiment'. In fact, the heterogeneity of disciplines and methodologies generated a sort of polysemy of the term embodiment. Depending on what aspects of the core notion you privilege, you obtain a variety of different meanings with their own theoretical implications. For instance, taking the 'agent' to literally be any autonomous agent, natural or artificial, entails that fundamental properties of the organization of the living phenomenon are not taken as essential (e.g., morphogenesis, biochemistry of synapses, etc.). This gives you the notion of 'embodiment' used in modern cognitive robotics and autonomous agent theory (Brooks and Stein, 1993; Clark, 1997; Pfeifer and Scheier, 1999), which does not apply to the work by Maturana and Varela (1987) in theoretical biology, and Núnez (1995; 1997) in philosophy of mind. Similarly, taking as essential the explicit rejection of computationalism and representationalism in favour of the use of the tools of dynamical system theory, would give a notion of 'embodiment' that would apply to the work by Thelen (1995; see also Iverson and Thelen in this volume) in developmental psychology, and by Skarda and Freeman (1987; see also in this volume) in neuroscience, but not to the work by Mark Johnson (1987) in philosophy of mind, or to the one by Feldman and Regier in structured connectionism (Feldman et at., 1996; Regier. 1996).' Or taking the human bodily grounded experience as essential would give a notion of 'embodiment' that would apply to the work of Lakoff and Núnez in mathematical cognition (1997; 2000), and to that of Csordas (1994) and Lock (1993) in anthropology, but it wouldn't apply to real-world robotics. In sum, among scholars directly involved with embodiment, there are deep theoretical, methodological, and philosophical differences. For some scholars, the embodied mind is literally computational, for others, it is metaphorically computational, and for others, it is not computational at all; for some, it is inherently an emerging phenomenon proper to certain forms of living systems, and for others, it is not; for others, its study requires the use of certain methodologies such as the tools of dynamical systems theory, and for others, it does not; for some, the living phenomenological bodily experience is essential, and for others, it is not; and so on. Basically, the situation is as if you pick your favourite feature of the core properties, bring them to the foreground, add your own theoretical flavour, stir with your own vintage, and you get your 'embodiment' a la carte. So, what is the view of embodiment I endorse here? In a nutshell, a non-computational view that emphasizes the primacy of the organization of the living and the resulting bodily experience it sustains.

Conclusion

The time-space case study provides a wonderful opportunity to learn several essential dimensions of the human mind. Conceptual structures are not purely abstract logical entities merely instantiated in our bodies. but are stable and precise forms of sense-making that come out of the peculiarities of brains and bodies, and the bodily grounded experience they sustain. The analysis of the conceptual mapping Time Events Are Things In Space has shown this for the particular concept of time flow. That analysis has allowed us to see how the primacy of the bodily orientation and real-time bodily action is at the very core of the cognitive mechanisms that make the concept of time flow possible. From that, we have learned that in order to study cognition and the mind in an adequate way, one needs to reclaim the traditional notions of mind, body and cognition. One needs to understand cognition and the mind as fully embodied phenomena. This is an interesting, though not simple, challenge. It implies endorsing a view of embodiment with the following specific features:

- A level of commitment seeking to understand the fundamental human bodily experience that grounds all forms of sense-making, from basic motion, to everyday common sense, to scientific theories and formal logic.
- A choice of theoretical and methodological orientations that emphasize the dynamic biological (structural) co-definition that exists between living organisms and the medium in which they exist, from which bodily grounded experience and cognition result as real-time enactive processes.

But there is more. Reclaiming cognition from this perspective (i.e., an embodiment-oriented commitment to all of cognition) implies also something much deeper: the rejection of at least five harmful dogmas that lie at the very foundations of much of current cognitive science and philosophy of mind (for details, see Nunez, 1997):

(1) the a priori assumption that there is a pre-given objective reality independent of any human understanding (including conceptual systems);

(2) the idea that epistemology is absolutely subordinated to ontology;
(3) the idea that there is a strict objective-subjective dichotomy;
(4) the assumption that the body must be excluded from the study of the mind; and
(5) the idea that the mind can be reduced to the study of neurophysiological processes of individual brains alone.

The analysis of our time-space case study implies that in order to adequately address the questions involved, one needs to reject these dogmas. The reasons are straightforward. Adopting a pre-existing God's-eye view (dogma 1) of what time and space objectively and transcendentally are (e.g., assuming that space is Euclidean and three-dimensional) hides the very phenomenon we want to study. That is, how humans through everyday cognitive mechanisms bring forth, create, and conceptualize the idea of time flow. Besides, assuming that 'merely' epistemic issues cannot address pre-existing ontologies (dogma 2), impedes us in asking the very question of the nature and origin of the pre-existing God's-eye view: What kind of brain sustains God's-eye view? As a result, this dogma doesn't allow us to understand how human beings enact systematic forms of everyday sense-making to create stable abstract concepts such as time and space (including the very idea of God's-eye time and space!). Similarly, a strict objective-subjective dichotomy (dogma 3) impedes us in understanding the rich spaces of commonalities and inter-subjectivity that exist in human conversations, preventing us from understanding the amazing inter-individual inferential stability based on shared species-specific bodily grounded experiences. Then, there is the absence of the body. Not considering the primacy of the body in the study of the mind (dogma 4) simply leaves us without tools to understand, for example, why there is a bodily orientation at the core of the concepts of time flow, And finally, reducing the biological processes to strictly individual brains (dogma 5), impedes us in understanding our brains as organs of social action, and therefore in comprehending the biological basis of inter-subjectivity. In sum, in order to reclaim mind, body, and cognition, we must free ourselves of these dogmas. The time to develop a richer and deeper science of the mind 'has come'.

Acknowledgements

I would like to thank Elizabeth Beringer, Jean-Louis Dessalles, George Lakoff, Kevin Moore, Vicente Neumann, Eve Sweetser, Francisco Varela, and two anonymous reviewers for comments and suggestions.

References

BROOKS, R. and STEIN, L. (1993). Building Brains for Bodies. Memo 1439. *Artificial Intelligence Laboratory*, Massachusetts Institute of Technology.

CLARK, A. (1997). *Being There: Putting Brain, Body, and World Together Again*. Cambridge, MA, MIT Press.

CSORDAS, T. J. (1994). *Embodiment and Experience: The Existential Ground of Culture and Self*. Cambridge, Cambridge University Press.

DUNKEL, G. E. (1983). *-tpoaau Keel olttaam. Zeitschrif fir Vergleichende Spraehforschung*, v. 96, n. 1, pp. 66-87.

FAUCONNIER, G. (1997). *Mappings in Thought and Language*. Cambridge, Cambridge University Press.

FAUCONNIER, O. and TURNER, M. (1998). Conceptual integration networks, *Cognitive Science*, v. 22, n. 2, pp. 133-87.

FELDMAN, J.; LAKOFF, G.; BAILEY, D.; NARAYANAN, S.; REGIER, T. and STOLEKE, A. (1996). LO-The First five years of an automated language acquisition project. *Artificial Intelligence Review*, v. 10, n. 1.

GIBBS, R. (1994). *The Poetics of Mind: Figurative Thought, Language, and Understanding*. Cambridge, Cambridge University Press.

IVERSON, J. M. and THELEN, E. (1999). Hand, mouth and brain: The dynamic emergence of speech and gesture. *Journal of Consciousness Studies*, v. 6, n. 11-12, pp. 19-40.

JOHNSON, M. (1987). The Body in the Mind. The Bodily Basis of. *Meaning, Imagination, and Reason*. Chicago, University of Chicago Press.

LAKOFF, G. (1987). *Women, Fire, and Dangerous Things: What Categories Reveal About the Mind*. Chicago, University of Chicago Press.

LAKOFF, G. (1993). "The contemporary theory of metaphor". In: ORTONY, A. (ed.). *Metaphor and Thought*. Cambridge, Cambridge University Press.

LAKOFF, G. and JOHNSON, M. (1980). *Metaphors We Live By*. Chicago, University of Chicago Press.

LAKOFF, G. and NUNEZ, R. (1997). "The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics". In: ENGLISH, L. (ed.). *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*. Hillsdale, NJ, Erlbaum.

_____ (2000). *Where Mathematics Conies From: How the Embodied Mind Creates Mathematics*. New York, Basic Books.

LOCK, M. (1993). Cultivating the body: Anthropology and epistemologies of bodily practice and knowledge. *Annual Review of Anthropology*, n. 22, pp. 133-55.

JOHNSON, M. (1987). *The Body in the Mind. The Bodily Basis of ,Meaning, Imagination, and Reason*. Chicago, University of Chicago Press.

LAKOFF, G. (1987). *Women, Fire, and Dangerous Things: What Categories Reveal About the Mind*. Chicago, University of Chicago Press.

_____ (1993). "The contemporary theory of metaphor". In:. ORTONY, A. (ed.). *Metaphor and Thought*. Cambridge, Cambridge University Press.

LAKOFF, G. and JOHNSON, M. (1980). *Metaphors We Live By*. Chicago, University of Chicago Press.

LAKOFF, G. and NUNEZ, R. (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In: ENGLISH, L. (ed.). *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*. Hillsdale, NJ, Erlbaum.

_____ (2000). *Where Mathematics Conies From: How the Embodied Mind Creates Mathematics*. New York, Basic Books.

LOCK, M. (1993). Cultivating the body: Anthropology and epistemologies of bodily practice and knowledge. *Annual Review of Anthropology*, n. 22, pp. 133-55.

MATURANA, H. and VARELA, F. (1987). *The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding*. Boston, New Science Library.

MCNEILL, D. (1992). *Hand and Mind: What Gestures Reveal about Thought*. Chicago, University of Chicago Press.

MOORE, K. (1999). *Language, point of view and metaphorical mappings from spatial to temporal concepts in Wolor.* PhD Dissertation, Dept. of Linguistics. Berkeley, University of California.

NÚNEZ, R. (1995). What brain for God's-eye? Biological naturalism, ontological objectivism, and Searle. *Journal of Consciousness Studies*, v. 2, n. 2, pp. 149-166.

_____ (1997). Eating soup with chopsticks: Dogmas, difficulties, and alternatives in the study of conscious experience. *Journal of Consciousness Studies*, v. 4, n. 2, pp. 143-6b.

NUNEZ, R. and LAKOFF, G. (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and s-b continuity. *Mathematical Cognition*, v. 4, n. 2, pp. 85-101.

NÚNEZ, R.; NEUMANN, V. and MAMANI, M. (in preparation). *Time-space conceptual metaphors in the Aymara language: Evidence of an ego-based past-in- front mapping*.

PFEIFER, R. and SCHEIER, C. (1999). *Understanding Intelligence.* Cambridge, MA, MIT Press.

REGIER, T. (1996). *The Human Semantic Potential.* Cambridge, MA, MIT Press.

SKARDA, C. and FREEMAN, W. (1987). How brains make chaos in order to make sense of the world. *Behavioral and Brain Sciences*, n. 10, pp. 161-195.

SWEELSER, E. (1990). *From Etymology to Pragmatics. Metaphorical and Cultural Aspects of Semantic Structure.* Cambridge, Cambridge University Press.

_____ (1999). *Personal communication.* September. Berkeley, University of California.

THELEN, E. (1995). "Time-scale dynamics and the development of an embodied cognition, in Mind as Motion: Explorations in the Dynamics of Cognition". In: PORT, R. F. and VAN GELDER, T. (eds.). Cambridge, MA, MIT Press.

TURNER, M. and FAUCONNIER, G. (1995), Conceptual integration and formal expression. *Journal of Metaphor and Symbolic Activity*, v. 10, n. 3, pp. 183-204.

VARELA, F. (1989). *Connaltre les Sciences Cognitives: Tendances et Perspectives.* Paris, Seuil.

VARELA, F.; THOMPSON, E. and ROSCH, E. (1991). *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience.* Cambridge, MA, MIT Press.

Recebido em jun./2000; aprovado em ago./2000

Dissertações defendidas no segundo semestre de 2001*

BARRETO, I. M. A. *Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional: a diversidade de procedimentos de resolução.*
(*Multiplicative word problems of proportion: Diverse solution procedures*)
Palavras-chave: quarta proporcional; problemas verbais; procedimentos pré-multiplicativos.
Key-words: proportion; word problems; pre-multiplicative procedures.

BEZERRA, F. J. B. *Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações: uma abordagem criativa para a sala de aula.*
(*Introduction to the concept of fractional number and its representations: a creative approach for the classroom*)
Palavras-chave: número fracionário; aquisição de conceito; situação problema.
Key-words: fractional number; acquisition of concepts; problem situations.

CARDOSO, E. A. *Uma análise da perspectiva do professor sobre o currículo de Matemática na EJA.*
(*An analysis of teachers' perspectives related the Mathematics Curriculum for Adults and Adolescents*)
Palavras-chave: educação de jovens e adultos; ensino de matemática; plano de curso.
Key-words: Education of adolescents and adults; mathematics teaching, teaching programs.

FÁBREGA, E. P. *Espaço representativo: um estudo das habilidades de alunos da 4ª série.*
(*Representing space: a study of the abilities of students of the 4th grade*)
Palavras-chave: representação; espaço tridimensional; ensino fundamental.
Key-words: representation; three dimensional space; secondary school teaching.

---

* As dissertações completas estão divulgadas no site: *www.pucsp.br/pos/edmat*

MEGA, E. *Ensino/Aprendizagem da rotação na 5ª série.*
(*Teaching and learning Rotation in the 5th grade*)
Palavras-chave: isometria; estratégia de ensino; ensino fundamental.
Key-words: isometry; teaching strategy; secondary school teaching.

MESQUITA, M. M. B. *Pré-Escola: um estudo a respeito da sobrecontagem na resolução de problemas aditivos.*
(*Pre-school: a study of the counting in the solution of additive problems*)
Palavras-chave: sobrecontagem; problemas aditivos; pré-escola.
Key-words: counting; additive problems; pre-school.

PERROTTA, S. G. M. *Reflexões sobre simetria em dois contextos: Matemática e Física.*
(*Reflections on symmetry in two contexts: Mathematics and Physics*)
Palavras-chave: simetria axial; estratégias de ensino; ensino de matemática/física.
Key-words: axial symmetry; teaching strategies; teaching of mathematics and physics.

RIBEIRO, A. J. *Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do Saresp.*
(*Analysing the performance of school students in algebra, based on the Saresp data*)
Palavras-chave: procedimentos de resolução; álgebra elementar; ensino fundamental.
Key-words: Solution procedures; elementary algebra; school mathematics.

RODRIGUES, W. S. *Base dez: o grande tesouro matemático e sua aparente simplicidade.*
(*Base ten: the great mathematics treasure and its apparent simplicity*)
Palavras-chave: escrita numérica; ensino fundamental; proposta didática.
Key-words: written numbers; school mathematics; didactic proposal.

SILVEIRA, E. C. *Uma seqüência didática para aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função.*
(*A teaching sequence for the acquisition/construction of the notion of the average rate of change of a function*)
Palavras-chave: didática da Matemática; ensino de função; taxa de variação média.
Key-words: didactics of mathematics; teaching of functions; average rate of change.

CASTRO, S. C. *Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação.*
(*Vectors of the plane and space and representation registers*)
Palavras-chave: ensino/aprendizagem; geometria analítica; vetor; representação semiótica.
Key-words: teaching/learning; analytic geometry; vector; semiotic representation.

PEREIRA, M. R. O *A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.*
(*School Geometry: a analysis of studies about the abandonment of its teaching*)
Palavras-chave: ensino de geometria; níveis fundamental e médio.
Key-words: Geometry teaching; school mathematics.

PERROTTA, R. C. *O ensino de área e perímetro através de modelagem.*
(*The teaching of area and perimeter through modelling*)
Palavras-chave: seqüência de ensino; área e perímetro; materiais manipulativos.
Key-words: teaching sequence; area and perimeter; manipulative materials.

RODRIGUES, R. N. *Relação com o saber: um estudo sobre o sentido da matemática em escola pública.*
(*Relating to knowledge: a study about the meaning of mathematics in a public school*)
Palavras-chave: relação com o saber; sentido da aprendizagem em matemática; escola pública.
Key-words: Relating to knowledge; meaning of mathematics learning; public school.

Normas para publicação

Pesquisadores interessados em contribuir com publicação nesta revista deverão preparar o texto e enviá-lo segundo as regras que se seguem.

Preparação para envio – uma cópia do texto **em disquete(s)** com os nomes dos autores e sem numeração de página. Outras quatro (4) cópias **impressas**, sendo que uma deve ser idêntica à(s) do(s) disquete(s) e as outras três (3) devem ter numeração de página e não trazer os nomes dos autores.

Versão – programa Word 6.0 for Windows, para ser lido em PC.

Formatação

Título – centralizado, em letras maiúsculas e em negrito.

Nomes dos autores – em uma só das vias impressas e no disquete, separar os nomes dos autores do título por um espaço simples entre linhas. Os dados de cada autor deverão ser colocados conforme exemplo, abaixo do título.

Ex: Maria Dolores da Silva
Mestre em Educação Matemática – PUC-SP
Professora do Curso de Matemática – PUC-SP
e-mail: dolores@pucsp.br

Resumo – em português e inglês ou francês, com, no máximo, 10 linhas, espaço duplo, mesma fonte do texto, em itálico, acompanhado de três palavras-chave.

Corpo do texto – Papel tamanho A4
Margem superior e inferior com 2,5 cm
Margem direita e esquerda com 3,0 cm
Fonte Times New Roman,
Tamanho da letra 12 pontos.
Espaçamento entre linhas 1,5 linha
Alinhamento justificado

Referências bibliográficas – de acordo com as normas da ABNT em vigor.

Exemplos:

- Livro

  GOMES, L. G. F. (1998). *Novela e sociedade no Brasil.* Niterói, EdUFF. (Coleção Antropologia e Ciência Política, 15).

- Tese

  BARCELOS, M. F. P. (1998). *Ensaio tecnológico, bioquímico e sensorial de Soja e guandu enlatados no estádio verde e maturação de colheita*. Tese de doutorado em Nutrição, Campinas, Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas.

- Artigo de revista

  GURGEL, C. (1997). Reforma do Estado e segurança pública. *Política e Administração*, Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, pp. 15-21, set.

Citações no texto – citações no texto devem vir acompanhadas de sobrenomes(s) do(s) autor(es) em corpo menor e entre parênteses, acrescido do ano de publicação e página.

Tabelas e gráficos – deverão ter como elementos: número, título, data de referência, fonte e nota.

Impressão – em jato de tinta ou em laser. Páginas impressas só numa face.

Os trabalhos devem ser enviados para:

Revista Educação Matemática Pesquisa
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 - Consolação - SP - CEP 01303-050
Fone: (11) 3256-1622 ramal 202
Fax: (11) 3159-0189
e-mail: pgedmat@exatas.pucsp.br

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

REVISTA DO PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa publica trabalhos voltados para as linhas de pesquisa: *A Matemática na estrutura curricular e a Formação de Professores; Epistemologia e Didática da Matemática; Tecnologias de Informação* e *Didática da Matemática.* Também está aberta para outros campos do conhecimento, que venham proporcionar um diálogo com a área, como a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História das Ciências e a História Disciplinar.

INFORMAÇÕES PARA AQUISIÇÃO

Anexo cópia do depósito em conta no **Banco Bradesco**, agência 3227-1, c/c 1285-8, favorecido **Sonia B. C. Igliori**, para aquisição dos seguintes exemplares de *Educação Matemática Pesquisa:*

- ❑ v. 1 n. 1, ❑ v. 1 n. 2, ❑ v. 2 n. 1, ❑ v. 2 n. 2 — R$ 40,00
- ❑ v. 1 n. 1, ❑ v. 1 n. 2 — R$ 24,00
- ❑ v. 2 n. 1, ❑ v. 2 n. 2 — R$ 24,00
- ❑ v. 3 n. 1, ❑ v. 3 n. 2 — R$ 30,00

Número avulso: ______________________________ R$ 18,00 (cada)

Nome: ____

Endereço: ____

____

Cep: ______________ Cidade: __________________ Estado: __

Telefone: ___________ Fax: ___________ Ocupação: _________

Impressão de miolo e acabamento:

Gráfica da PUC-SP
Rua Ministro Godói, 965 – Perdizes – SP
Tel.: 3670-8366

SUMÁRIO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA v. 3 – n. 2

educ