ISSN 1516-5388

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

v. 2 - n. 2 - 2000

educ

SUMÁRIO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA v. 2 - n. 2

Impressão de miolo e acabamento:

Gráfica da PUC-SP
Rua Ministro Godói, 965 – Perdizes – SP
Tel.: 3670-8366

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

Correspondência:

Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Rua Marquês de Paranaguá, 111 – CEP 01303-050 – Consolação – São Paulo – SP

Fone: (11) 3256-1622 ramal 202

Fax: (11) 3159-0189

E-mail: pegedmat@exatas.pucsp.br

Expediente: de segunda a sexta-feira das 10h30min às 12h e das 13h30min às 17h30min

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática
puc-sp

ISSN 1516-5388

Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 2, n. 2, pp. 1-70, 2000

educ
2000

Catalogação na fonte - Biblioteca Reitora Nadir Gouvêa Kfouri / PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós - Graduados em Educação Matemática / Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - n.1 (março de 1999) - São Paulo : EDUC, 1999 - semestral
ISSN 1516-5388

1. Educação Matemática Pesquisa - periódicos. I. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

EDUC – Editora da PUC-SP

Direção
Maria Eliza Mazzilli Pereira

Coordenação Editorial
Sonia Montone
Magali Oliveira Fernandes

Revisão
Sonia Rangel

Revisão de Inglês
Carolina Muniz Ventura Siqueira

Editoração Eletrônica
Elaine Cristine Fernandes da Silva

Capa
Sara Rosa

educ
Rua Ministro Godói, 1213
Cep 05015-001 - São Paulo - SP
Fone: (11) 3873-3359 / Fax: (11) 3873-6133
E-mail: educ@pucsp.br

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Associação Brasileira de Editores Científicos
ABEC

ABDR
EDITORA AFILIADA

Projeto Editorial

A revista *Educação Matemática Pesquisa*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, de regularidade semestral, constitui um espaço de divulgação de pesquisas científicas da área.

O projeto editorial da revista prioriza artigos científicos, inéditos no Brasil, da área de Educação Matemática. Mais particularmente, os relacionados às linhas de pesquisa do Programa: *A Matemática na estrutura curricular e formação de professores; História, Epistemologia e Didática da Matemática* e, também, *Tecnologias da Informação e Didática da Matemática.* A prioridade dada às linhas descritas não é extensiva aos referenciais teóricos, ao contrário, procura-se contemplar a diversidade.

Serão acolhidos, também, artigos que favoreçam o diálogo entre Educação Matemática e áreas afins, como a Matemática, a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História da Matemática e a História das Disciplinas, entre outras.

A seleção dos artigos faz-se mediante a aprovação de dois pareceristas do conselho editorial ou *ad hoc.* Os pareceres serão enviados aos autores.

Os artigos são apresentados sempre na versão original, com resumos bilíngües (português e inglês ou francês).

O projeto editorial prevê, ainda, que os volumes da revista contenham uma ou mais modalidades, como análises ou relatos de pesquisa, comunicações (ciclo de palestras, conferências...), entrevistas, depoimentos ou resenhas científicas.

Em cada número haverá indicações sucintas das dissertações e teses produzidas no Programa, no semestre de edição.

Os Editores

Editorial Project

The journal Educação Matemática Pesquisa *of the Post-Graduation Program in Mathematics Education of the Catholic University of São Paulo (PUC/SP) is published every semester with the aim of providing a space for disseminating scientific research in the area.*

The policy adopted by the editors is to prioritise scientific articles which have not been published in Brazil, related to Mathematics Education, particularly those addressing the lines of research of the program: Mathematics, curriculum structure and teacher training, History, Epistemology and Didactics of Mathematics and Information Technology and the Didactics of Mathematics. *The priority given to the described lines is not restricted to theoretical references; on the contrary, it is hoped that the journal will reflect the diversity that characterises research in Mathematics Education.*

The editors also encourage the submission of articles which open dialogues between Mathematics Education and related areas, such as Mathematics, Epistemology, Educational Psychology, Philosophy, History of Mathematics and its teaching, amongst others.

In order to be selected, articles should receive two favourable reviews. Referees will be chosen from the editorial committee or they will be ad hoc reviewers. Authors will receive copies of the reviews.

Articles will be presented always in the original language of the author along with abstracts in Portuguese and English or French.

The journal can also include works of various different types, such as: research reports, papers based on lectures or conferences, interviews, commentaries on issues pertaining to research, critiques of articles and books, literature reviews and theoretical analyses.

Each issue will also include brief descriptions of the dissertations and theses produced in the Program during the semester of the edition.

Editorial Committe

Sumário

Editorial

O leitor vai encontrar no volume 2, número 2, da revista *Educação Matemática Pesquisa,* três artigos, com temáticas diferentes e polêmicas. As problemáticas aqui abordadas são de interesse da área e nos é gratificante poder divulgar os textos que apresentamos a seguir.

No primeiro artigo, José Roberto Boettger Giardinetto põe em discussão o caráter "espontâneo" e "eficaz" atribuído por algumas pesquisas ao conhecimento matemático produzido fora da escola, nas atividades da vida cotidiana.

Antonio Carlos Brolezzi, no segundo artigo, procura mostrar o valor didático da história da Matemática, ressaltando a necessidade de uma abordagem mais profunda no que se refere à historia, numa utilização pedagógica.

No último artigo, Healy Lulu analisa a relação existente entre as evidências empíricas e os argumentos analíticos nas provas de matemática. Analisa, também, a elaboração de conexões entre diferentes aspectos dos processos de prova.

O resumo das dissertações defendidas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, no segundo semestre de 2000, completa este volume.

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Editora

Editorial

In this second volume of Educação Matemática Pesquisa *for the year 2000, the reader will find three articles with different themes and polemics. The issues raised by the authors are of interest to the area and we are pleased to be able to publish them.*

In the first article, José Roberto Boettger Giardinetto discusses the "spontaneous" and "effective" character attributed by some research studies to mathematical knowledge produced outside the school context during everyday activities.

Antonio Carloes Brolezzi, in the second paper, aims to show the didactic value of the history of mathematics, emphasising the need for a rigorous approach in relation to history in its pedagogic use.

In the last article, Lulu Healy analyses the relationships that exist between empirical evidence and analytic arguments in school mathematics proofs. She also analyses the making of connections between different aspects of the processes of proving.

A description of the dissertations defended in the Program of Post-Graduate Studies in Mathematics Education of PUC-SP in the second semester of 2000 completes the present volume.

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Editor

Reflexões ante as concepções de "espontaneidade" e de "eficácia" do saber matemático cotidiano presentes em algumas pesquisas na Educação Matemática

JOSÉ ROBERTO BOETTGER GIARDINETTO*

Resumo

O objetivo deste artigo é questionar o caráter "espontâneo" e "eficaz" freqüentemente atribuído, por algumas pesquisas, ao conhecimento matemático produzido fora da escola nas atividades da vida cotidiana, como que denotando-se aí algo vantajoso ante a forma do conhecimento escolar. Como fundamento deste questionamento, o autor apresenta algumas considerações sobre as especificidades da estrutura da vida cotidiana, do conhecimento matemático produzido no cotidiano e sobre as especificidades da relação desse conhecimento matemático cotidiano com o conhecimento matemático escolar no decorrer do trabalho docente.

Palavras-chave: saber cotidiano; matemática escolar e matemática da vida cotidiana; Educação Matemática.

Abstract

The purpose of this article is to discuss the "spontaneous" and "effective" feature often attributed by some research studies to the mathematics knowledge generated in daily life activities outside the school, as if it had advantages compared to its school configuration. The author presents, as the foundation for this discussion, some considerations about the specificities of the everyday life structure, of the mathematics knowledge generated in daily life and about the specificities of the relation of this daily mathematics knowledge to the school knowledge during the academic work.

Key-words: *daily knowledge; school mathematics and mathematics of everyday life; mathematics education.*

* Doutor em Educação – Unesp, Depto de Educação, Presidente Prudente, SP.

Introdução

No cenário das pesquisas em Educação Matemática, muito se tem apontado para a utilização do saber matemático cotidiano desenvolvido pelos indivíduos nas suas atividades da prática social (no trabalho, por exemplo).

Verifica-se que, muitas vezes, a defesa da utilização do saber matemático cotidiano se respalda numa interpretação desse saber como algo "espontâneo", "natural", "verdadeiro" e também "eficaz", como se tais atributos fossem algo vantajoso ante a apropriação do saber na sua versão escolar.

Embora se constate que a questão do aproveitamento da matemática da vida cotidiana é algo importante para o ensino desta ciência, verifica-se que a reflexão sobre o cotidiano e sua relação com o saber escolar tem sido frequentemente considerada de forma a-crítica, como uma obviedade não passível de reflexões para além da mera constatação do imediato. Não há uma reflexão específica, que deveria explicitar o que se está entendendo por cotidiano como esfera da vida humana (os condicionantes históricos e sociais, que determinam que a vida cotidiana hoje constituída seja desta forma e não de outra), bem como o que se está entendendo por conhecimento apropriado no cotidiano e como é entendida a relação entre o conhecimento matemático manifestado no cotidiano e o conhecimento matemático na prática escolar.

O objetivo deste artigo é questionar aqueles atributos alegados ao conhecimento matemático cotidiano, tão presente em pesquisas da Educação Matemática brasileira, de forma a evidenciar a necessidade de uma reflexão mais profunda sobre as especificidades do conhecimento produzido nesta esfera da vida social, e em conseqüência, refletir sobre a relação entre essa forma de conhecimento e o conhecimento escolar no decorrer do trabalho docente.

Nesse sentido, o presente artigo se compõe de quatro itens, a saber:

No primeiro item serão apresentadas algumas considerações teóricas referentes à concepção de cotidiano que se está aqui adotando (utiliza-se para isso o trabalho de Agnes Heller, 1977).

No segundo item explicitar-se-á a concepção de atividade escolar, entendida como uma atividade mediadora para a formação do indivíduo, do conhecimento cotidiano para o conhecimento escolar.

No terceiro item apresentar-se-á uma série de considerações que concebem o saber escolar como um processo de superação por incorporação do saber cotidiano.

Ante as reflexões apresentadas, o quarto e último item é dedicado a explicitar os argumentos pelos quais os conceitos de "espontaneidade" e "eficácia", comumente dados ao conhecimento matemático no cotidiano são aqui questionados, tendo em vista os subsídios apresentados nos itens anteriores. Nesse sentido, os três primeiros itens são fundamentais para o desenvolvimento da análise elaborada no quarto e último item.

Feita a apresentação da composição do artigo é possível iniciar a análise.

A concepção de cotidiano segundo Agnes Heller

O conceito de vida cotidiana aqui adotado é o conceito apresentado por Heller (in Giardinetto, 1999[1], p. 24). Segundo a autora, a vida cotidiana "é o conjunto de atividades que caracterizam a reprodução dos homens particulares, os quais, por sua vez, criam a possibilidade de reprodução social".

Na vida cotidiana, o indivíduo se apropria de um conjunto mínimo de objetivações[2] do gênero humano como o mínimo para que esse indivíduo possa se situar socialmente. Daí que o indivíduo se forma como um indivíduo social e, através dessa formação, esse indivíduo reproduz a sociedade.

---

1 Trata-se do livro publicado pela editora Autores Associados (Giardinetto, 1999), cuja origem é a tese de doutoramento do autor, defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos (Giardinetto, 1997). Existe uma versão modificada da tese, cadastrada junto à Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, em que se verifica uma total reformulação do capítulo III da tese (Giardinetto, 1998). O livro publicado, por exigências editoriais, apresenta muitos cortes ante a versão original e a versão modificada da tese de doutoramento.

2 As objetivações são os produtos decorrentes da transformação, promovida pelo trabalho humano, da realidade natural em uma realidade humanizada. Para maiores esclarecimentos, ver Giardinetto (1999, pp. 17-24).

Esse mínimo, próprio da vida cotidiana, compõe-se das objetivações genéricas em-si, isto é, as objetivações do gênero humano como os costumes, os objetos, a linguagem. O termo "em-si" denota a "genericidade que se efetiva sem que haja uma relação consciente dos homens para com ela" (Duarte, 1993, p. 135).

Dado o avanço da realidade humanizada, o conjunto das objetivações do gênero humano não se compõe apenas das objetivações em-si próprias da vida cotidiana. Na verdade, em decorrência desse avanço, passa a existir a esfera da vida não-cotidiana, isto é, o conjunto das objetivações para-si, como a ciência, a arte, a filosofia. Tais objetivações traduzem o grau de desenvolvimento histórico atingido pelo gênero humano, como tal, "o para-si constitui a encarnação da liberdade humana" (Heller, 1977, p. 233). As atividades não-cotidianas são aquelas voltadas para a reprodução da sociedade e contribuem, indiretamente, para a reprodução do indivíduo.

A vida cotidiana é o âmbito por excelência das objetivações em-si e o fundamento das objetivações para-si.

O que diferencia a apropriação das objetivações em-si das objetivações para-si é a relação existente entre o indivíduo e o modo de apropriação dessas objetivações. As objetivações em-si são apropriadas através de uma relação não-intencional, ao contrário da apropriação das objetivações para-si, que são apropriadas segundo uma relação intencional. Isso quer dizer que, no âmbito da vida cotidiana, as objetivações em-si são apropriadas de forma espontânea e pragmática.

Tais formas de apropriação revelam duas das características inelimináveis da estrutura da vida cotidiana: a espontaneidade (não-intencionalidade para com o objeto) e o pragmatismo aí inerente. Além dessas duas, cumpre destacar também o raciocínio probabilístico, a analogia, a imitação e a hipergeneralização.[3]

É importante observar que tais características não são um "defeito" da vida cotidiana. Muito pelo contrário, trata-se de algo que é próprio da estrutura da vida cotidiana. A vida de todo homem seria impossível se, para cada atitude, fosse exigida uma postura teórica, científica.

---

3 Para maiores esclarecimentos, vide Giardinetto (1997, pp. 49-54) ou a própria Heller (1977, pp. 293-316).

Na medida em que a vida cotidiana é pragmática e imediata, o pensamento a ela dirigido para a execução de uma determinada atividade responde a essa pragmaticidade e imediatismo. Como tal, essa lógica é economicista, pois impõe a tomada rápida e precisa de elementos estritamente necessários para a execução da atividade.

Interessante verificar que tais características geram no indivíduo a interpretação imediata do real segundo uma concepção aparente e superficial. Daí que, na vida cotidiana,

> (...) a atividade e o modo de viver se transformam em um instintivo, subconsciente e inconsciente, irrefletido mecanismo de ação e de vida. As coisas, os homens, os movimentos, as ações, os objetos circundantes, o mundo, não são intuídos em sua originalidade e autenticidade, não se examinam nem se manifestam: simplesmente são; e como um inventário, como partes de um mundo conhecido são aceitos. A cotidianidade se manifesta como a noite da desatenção, da mecanicidade e da instintividade, ou então como mundo cujas dimensões e possibilidades são calculadas de modo proporcional às faculdades individuais ou às forças de cada um. Na cotidianidade tudo está ao alcance das mãos e as intenções de cada um são realizáveis. Por esta razão ela é o mundo da intimidade, da familiaridade e das ações banais. (Kosik, 1985, p. 69)

Ante os esclarecimentos dessa citação e as considerações aqui apresentadas, pode-se afirmar que as formas imediatas de manifestação do real determinam no indivíduo a pretensa idéia de que essa realidade imediata é a realidade mesma ("o mundo da pseudoconcreticidade", no dizer de Kosik, 1985, p. 11).

A superação do caráter natural e das formas imediatas de manifestação do real ocorre mediante a apropriação da objetivações para-si. Para que os indivíduos tenham acesso às objetivações para-si, eles precisam desenvolver uma relação não-espontânea e não-pragmática para com essas objetivações. Essa relação exige o desenvolvimento de formas de agir e de pensar para além das manifestações imediatas da realidade.

A prática educativa escolar revela-se como o espaço privilegiado para a execução de procedimentos que garantam aos indivíduos o desenvolvimento de tais formas de agir e pensar, necessário para a apropriação das objetivações genéricas para-si. Trata-se de considerações concernentes ao próximo item.

A educação escolar como uma atividade mediadora do cotidiano para o não-cotidiano

O trabalho educativo se constitui em uma atividade mediadora na formação do indivíduo, das objetivações em-si para o acesso às objetivações para-si, isto é, uma atividade mediadora na formação do indivíduo entre o cotidiano e o não-cotidiano (cf. Duarte, 1993, p. 31).

Importante esclarecer que atividade mediadora denota a possibilidade (trata-se efetivamente de uma possibilidade) de o indivíduo vir a atuar da forma mais intencional possível na prática social, mediante a aquisição de instrumentos específicos que viabilizem essa atuação e que, no caso da educação escolar, trata-se da apropriação do saber historicamente acumulado.

Enquanto atividade mediadora, o trabalho educativo escolar apresenta uma dupla função (cf. Saviani, 1991, p. 21): por um lado, produz em cada indivíduo a história do gênero humano, na medida em que, pela apropriação dos conteúdos escolares, o indivíduo se forma como elemento do gênero humano; por outro lado, ao viabilizar essa formação, viabiliza-se a possibilidade da constante formação histórica do gênero humano como totalidade das relações sociais de objetivação presentes a cada momento histórico.

A concepção de trabalho educativo escolar denota os limites do conhecimento cotidiano. A realidade tornou-se tão complexa que a vida cotidiana não é mais suficiente na formação do indivíduo. Foi necessária a criação de um espaço próprio (isto é, a escola) para transmissão e apropriação do saber historicamente acumulado (cf. Saviani, 1991, p. 15 e pp. 96-100), isto é, o saber elaborado, sistematizado e não do saber espontâneo, não-intencional.

Importante ressaltar essa questão do saber sistematizado próprio da escola, em contraste como o saber não-intencional próprio da vida cotidiana.

Primeiramente, é preciso esclarecer que o conceito aqui utilizado, de saber escolar, é o mesmo conceito apresentado por Saviani (1991, p. 26) como um "saber dosado e sequenciado para efeitos de sua transmissão-assimilação".

A atividade escolar retrata um processo segundo o qual cabe à escola a garantia, para cada indivíduo, dos aspectos essenciais da produção do conhecimento humano. Na medida em que a escola objetiva a socialização do saber sistematizado, a atividade escolar tem que assegurar, igualmente, a transmissão de instrumentos que garantam o acesso a essa forma de saber. Tais instrumentos se apresentam segundo um processo que só pode ser deliberado, sistemático e intencional.

Tais considerações evidenciam algo fundamental: se, ao longo das diversas práticas sociais, o indivíduo produz um saber a-sistemático e espontâneo (não-intencional), na escola, a atividade aí implícita está na expressão elaborada do saber que surge na prática social. Daí a necessidade dos instrumentos que viabilizam essa elaboração e sistematização segundo um processo que só pode ser metódico, sequenciado e intencional. Trata-se de se diferenciar a apropriação de um determinado conceito na vida cotidiana da apropriação deste mesmo conceito em sua expressão elaborada, via atividade escolar. Em outras palavras, trata-se de diferenciar produção do conhecimento e elaboração do conhecimento. Nesse aspecto, Saviani (1991, pp. 81-82) é esclarecedor:

> Elaboração do saber não é sinônimo de produção do saber. A produção do saber é social, se dá no interior das relações sociais. A elaboração do saber implica em expressar de forma elaborada o saber que surge da prática social. Essa expressão elaborada supõe o domínio dos instrumentos de elaboração e sistematização. Daí a importância da escola: se a escola não permite o acesso a esses instrumentos, os trabalhadores ficam bloqueados e impedidos de ascenderem ao nível da elaboração do saber, embora continuem, pela sua atividade prática real, a contribuir para a produção do saber. O saber sistematizado continua a ser propriedade privada a serviço do grupo dominante.

A apropriação do saber escolar possibilita as condições efetivas para o rompimento dos limites dados por aqueles conhecimentos obtidos no nível prático-utilitário. Esses conhecimentos cotidianos, sem os instrumentos da sistematização e sem padronização, não apresentam condições de serem socializados. E, assim, ficam restritos à forma criada em cada manifestação do indivíduo.

Na medida em que a atividade escolar se pauta na necessária explicitação intencional, ordenada, articulada, deliberada, dos conceitos envolvidos, a lógica interna que dirige e instrumentaliza essa explicitação e conseqüente apropriação tem que responder adequadamente a essa ordenação, articulação, etc.

Cada conceito escolar trabalhado é um instrumento para elaboração de conceitos que virão posteriormente. Como tal, encarna em cada aspecto da aprendizagem um momento da sistematização atingida, reservando em sua estrutura um caráter de mediação para sistematização dos conceitos que o sucederão. Cada etapa atingida da apropriação dos conceitos escolares retrata aspectos essenciais de todo um processo de elaboração conceitual, verdadeiras sínteses, resultados de árduas elaborações que passaram a ser patamares para elaboração de novos conceitos, sem a necessidade freqüente de repetir todo o processo de elaboração para cada momento exigido.

Concomitante à efetiva possibilidade de apropriação dos conceitos escolares, a lógica da sistematização representa o acesso a níveis de abstração mais complexos que aqueles exigidos no decorrer das atividades cotidianas[4].

O conhecimento escolar possibilita alcançar níveis de desenvolvimento conceitual cada vez mais elaborados e, para isso, necessita de um processo de abstração, de um determinado método de pensamento que garanta atingir esses níveis cada vez mais profundos, distanciando-se daquele tipo de raciocínio mais atrelado ao que imediatamente se vê e que imediatamente se precisa.

O indivíduo, ao ter acesso ao conhecimento sistematizado historicamente acumulado, tem a possibilidade de apropriar-se desse conheci-

4 A denominação "formas mais complexas" não quer dizer que no cotidiano as formas de pensar não retratam uma complexidade. Trata-se, tão-somente, de entender que na esfera escolar o grau de complexidade é maior, devido ao necessário esforço metódico e intencional de apropriação de conhecimentos apresentados de forma sistemática.

mento como conteúdo e processo de pensamento, já que a apropriação do saber escolar implica necessariamente a apropriação de um pensamento complexo, que garanta a apropriação desse conteúdo que daí advém.

Na vida cotidiana, determinado conceito se manifesta na forma imediata, segundo parâmetros pragmáticos e utilitários. O indivíduo, ao não ultrapassar os raciocínios mais imediatos, não só não aprende o processo de pensamento mais complexo implícito na atividade escolar, como não se apropria do conteúdo que daí advém. Ele se apropria dos conceitos na forma imediata, na forma inerente à atividade cotidiana, não ultrapassando a lógica pragmática que dirige seu pensamento. De limitado avanço (pois na vida cotidiana o indivíduo "aprende"), o conhecimento adquirido em práticas não-escolares revela, diante dos raciocínios práticos-imediatos que aí se apresentam, dificuldades para efetiva apropriação dos conceitos escolares.

Portanto, na sociedade, o indivíduo executa uma série de procedimentos automatizados que, se são adequados do ponto de vista da resolução pragmática exigida, não são adequados do ponto de vista da apropriação do conhecimento elaborado na forma escolar, se não viabilizar esforços pela superação dessa forma a-sistemática para apropriação de um conhecimento mais profundo e abrangente. Da mesma forma que o conhecimento cotidiano fornece um impulso inicial, ele também limita o indivíduo, pois ele, por si só, não consegue sair dos limites do pragmatismo e do imediatismo.

É de fundamental importância para a atividade escolar a superação dos raciocínios pragmáticos-imediatos. Mas essa superação não significa uma apropriação do conhecimento escolar de forma justaposta à manifestação desse conhecimento na sua expressão cotidiana. Pelo contrário, o modo de pensamento processado no cotidiano lança possibilidades para se trabalharem os conceitos formais, pois apresenta gérmens para atitudes teorizadoras (cf. Duarte, 1995, p. 41). O conhecimento cotidiano lança gérmens para a apropriação do conhecimento não-cotidiano, assunto do próximo item.

O saber escolar entendido como um processo de superação por incorporação do saber cotidiano

O acesso às objetivações para-si, via escola, não se dá "do nada". O modo de pensamento processado no cotidiano lança elementos para se trabalhar os conceitos formais, isto é, o saber cotidiano fornece elementos para a apropriação do saber escolar. Em outras palavras, a manifestação cotidiana de determinado conceito matemático apresenta um "núcleo válido", que nada mais é que a feição pragmática do conceito escolar.

A apropriação dos conceitos escolares pela ascensão do conhecimento a-escolar, via núcleo válido, não se dá na forma de uma mera extensão ou mesmo substituição. Trata-se de se promover uma ação que não caia numa dicotomia dessa relação, mas que promova um processo de superação por incorporação do conhecimento que o aluno já domina por aquele conhecimento matemático escolar a ser dominado.

O saber que o aluno domina e o conhecimento escolar que ele precisa dominar formam, nas palavras de Gasparini (1990, p. 20), uma contradição dialética:

> Trata-se do seguinte: essas duas formas do conhecimento matemático, no processo pedagógico, se opõem e se completam mutuamente. Esses conhecimentos se opõem na medida em que o novo, ao ser assimilado pelo educando, supera o velho (conhecimento prévio do educando) e se completam na medida em que essa superação só se efetiva plenamente quando realiza a incorporação do velho ao novo, do que já era conhecido ao que não o era e passou a ser. A necessidade do novo conhecimento se faz sentir quando o já conhecido se mostra insuficiente para interpretar situações novas. Mas o novo conhecimento só será realmente assimilado, só será incorporado à consciência do educando, tornando-se um de seus instrumentos culturais se se relacionar substancial e organicamente com seu conhecimento ante-rior, de tal modo que o novo seja gerado no seio do antigo como produto do processo de superação por incorporação.

Através de uma série de exemplos,[5] Gasparini (1990), tendo como fio condutor o processo de superação por incorporação norteando a relação entre o saber escolar e o saber prévio do aluno, procurou apontar os limites e as insuficiências do raciocínio utilizado pelo aluno quanto ao seu conhecimento prévio, para ser superado a partir da caracterização do núcleo válido desse tipo de raciocínio. Trata-se, portanto, de um processo que não elimina o conhecimento prévio do aluno, pois este dirige o processo de aquisição do novo, e, mais ainda, determina o enriquecimento do velho conhecimento pela sua importância para captação do novo. Gasparini (1990, p. 160) afirma:

> As múltiplas relações existentes entre o novo e velho conhecimentos não são apreendidas claramente pelo educando no início do processo de aquisição cognoscitiva do novo. Mas, na medida em que o educando avança nesse processo ele vai identificando e reconhecendo cada vez mais claramente o velho conhecimento embasando, justificando e gerando o novo. Isto equivale a dizer que neste processo, o educando vai progressivamente resgatando para si a validade de seu conhecimento anterior ao mesmo tempo em que identifica cada vez mais claramente os limites de sua validade. Assim, o educando resgata, num nível mais elevado de complexidade e abrangência em relação ao seu conhecimento anterior, a validade e limites desse conhecimento incorporando-o a um conhecimento mais evoluído que o supera. Nesse momento o educando reafirma a validade de seu conhecimento anterior negando assim aquela sua primeira negação, é o momento da negação da negação, da apreensão concreta do novo conhecimento através daquele já dominado pelo educando.

O problema em muitas pesquisas na Educação Matemática está no fato de que, ao enfatizar a utilização do saber cotidiano, essa ênfase não promove (ou não chega nem a apontar) a superação do "velho" (conhecimento pré-existente) pelo "novo" (conhecimento escolar). Quando muito, promove-se a identificação e a caracterização do velho conheci-

---

5 Trata-se da resolução da fórmula de Baskara, do desenvolvimento das médias aritméticas simples e ponderada e, finalmente, de uma situação-problema envolvendo o cálculo da taxa média de juros.

mento (considerando como conhecimento passível de reflexão somente aquele que apresenta manifestação cotidiana), opondo-o ao novo existente e, muitas vezes, lançando a relação entre esses conhecimentos como uma mera escolha do que seria mais conveniente ao aluno ante os problemas de sua prática social (que real opção o aluno tem em decidir por escolher ou não aquilo a que, dada a marginalização cultural, ele não tem acesso?). O aluno não identifica, no novo conceito, o núcleo válido procedente do velho conceito. Não vê que o novo surgiu do velho. Procedendo dessa forma, a relação entre saber cotidiano e saber escolar fundamenta-se numa dicotomia lógico-formal.

Segundo Gasparini (1990, p. 144), as consequências dessa dicotomia lógico-formal são:

– a impossibilidade da ascensão dos conceitos prévios para além do nível prático-utilitário;

– o professor transmite o conhecimento escolar como algo justaposto ao conhecimento prévio (saber cotidiano) mediante uma aprendizagem mecânica e arbitrária;[6]

– o professor, mesmo proclamando a necessidade de se trabalhar com o conhecimento cotidiano do aluno, acaba, no ato pedagógico, trabalhando com o conhecimento escolar de forma a-relacional;

– o aluno passa a desvalorizar o conhecimento escolar, interpretando-o como algo válido nos restritos âmbitos da esfera escolar;

– o aluno elege duas formas de saber: o escolar (útil para as provas, exames) e o saber cotidiano, próprio para a vida;

– impossibilita-se o efetivo domínio do núcleo válido de determinado conhecimento prévio que apresenta uma relação mais imediata com o cotidiano, não possibilitando seu pleno domínio para situações prático-utilitárias diferentes daquelas que o originaram (não se promove uma ascensão desse conhecimento no nível "em si" para o nível de "instrumento cultural para si").

---

6 Essa justaposição decorre do fato de que as diferentes manifestações da matemática, nas diversas atividades da prática social, são consideradas como "diferentes matemáticas" ante uma "outra" matemática constituída e "imposta", a matemática escolar (cf. Giardinetto,1999, pp. 105-110).

Esclarecido o que aqui se está entendendo por promover a apropriação dos conceitos escolares através da ascensão do núcleo válido presente no saber prévio do aluno, é preciso esclarecer o que se está entendendo por reelaboração dos conceitos escolares a partir dessa ascensão.

A questão da reelaboração dos conceitos escolares por parte dos alunos não significa fazer com o aluno toda a trajetória do processo histórico de elaboração do conhecimento. Não se pode fazer com que "cada criança volte à Idade da Pedra lascada para poder depois atingir, na idade adulta, o domínio do saber científico, tal como é formulado em nossa época", como afirma Saviani (1991, p. 82). É necessário que o aluno seja orientado a reelaborar os aspectos essenciais do processo histórico de elaboração do conhecimento matemático.

A reelaboração desses aspectos essenciais reflete o processo de superação por incorporação. Gasparini (1990, p. 153) afirma:

> O processo de superação por incorporação que inclui por relacionamento o conhecimento anterior subjaz a evolução histórica de todo conhecimento matemático, e se encontra, portanto, imbricado em sua própria lógica interna. Assim, o processo de assimilação de conteúdos desse conhecimento, a apreensão de sua lógica interna, subentende a reelaboração de suas etapas evolutivas essenciais [o termo mais correto é aspectos essenciais, em vez de etapas essencias – JRBG[7]] pelo sujeito cognoscente, e subentende, consequentemente, a reelaboração do processo de superação por incorporação, agora, na atividade de assimilação desse conhecimento já constituído.

---

7 A utilização do termo "etapas essenciais" aparece, na verdade, na dissertação de mestrado de Duarte (1987), co-orientador da dissertação de mestrado de Gasparini (1990). Ocorre que o próprio Duarte (1993), posteriormente, em sua tese de doutorado, veio a fazer a crítica a esse termo. O erro na utilização de "etapas essenciais" está no fato de significar uma necessidade de elaboração de uma seqüência de procedimentos que reproduza *uma seqüência* histórica, no sentido da *reprodução das fases históricas do desenvolvimento do conceito.* O problema é que tal fato não ocorre *necessariamente.* Por exemplo, no caso da aritmética elementar, tal fato é possível, como evidenciou Duarte (1987), porém, não é possível no caso do ensino da geometria analítica, como se verificou na dissertação de mestrado de Jardinetti (1991). O termo "aspectos essenciais" é mais correto porque a seqüência de ensino-aprendizagem, ao reproduzir os aspectos essenciais do desenvolvimento histórico, estaria reproduzindo a *essência* do processo histórico, isto é, "a apropriação da lógica, do significado de um produto da

Para captar a essência do processo lógico de desenvolvimento de determinado conceito é preciso promover mediações ao longo da história, isto é, depurações com vista a determinar os aspectos essenciais para a compreensão da lógica dos conceitos e fundamentais para a elaboração e execução de procedimentos de ensino coerentes com essa lógica.[8]

Em síntese, a possibilidade de reelaboração do conhecimento prévio do aluno se dá pela ascensão ao conhecimento sistematizado via núcleo válido presente nesse conhecimento prévio. Esse conhecimento prévio encarna traços do processo de produção da matemática ao longo da história. Esses traços chegam ao aluno pelas exigências da vida cotidiana. São conhecimentos obtidos de forma pragmática e não-inten-cional. Com a apropriação dos conceitos escolares sintetizados em seus aspectos históricos essenciais determina-se uma influência na compreensão (até então a-sistemática) desses manifestações conceituais pré-vias e instrumentaliza-se, dada a intencionalidade implícita à prática pedagógica, o aluno para novas exigências.

As considerações até o momento apresentadas possibilitam, agora, tecer considerações acerca da adjetivações frequentemente utilizadas na Educação Matemática para o saber cotidiano. Quais sejam: a pretensa "eficácia" e "espontaneidade" do conhecimento cotidiano.

Sobre o caráter "espontâneo" e "eficaz" do conhecimento matemático cotidiano

No primeiro item do presente artigo foi afirmado que as objetivações em-si são apropriadas através de uma relação não-intencional, ao contrário da apropriação das objetivações para-si, que são apropriadas segundo uma relação intencional. No âmbito da vida cotidiana, as objetivações em-si são apropriadas de forma espontânea e pragmática.

---

história, sem que necessariamente essa apropriação se realize por uma seqüência que reproduza de forma condensada a seqüência histórica" (Duarte, 1993, p. 45)

8 Uma dessas mediações é a dialética da relação entre o lógico e o histórico. Para maiores esclarecimentos sobre as implicações dessa relação para o ensino da matemática, ver Giardinetto (2000, pp. 136-142).

O conceito aqui utilizado de espontâneo significa algo não-intencional. Não denota algo que surgiria de forma natural, pura, sem intervenções externas como assim faz crer as citações abaixo:[9]

> Foram realizadas entrevistas com os responsáveis pelas crianças para elaborar um pequeno histórico de cada uma, que poderá ser de grande valia para se ter uma idéia do **conhecimento original** de matemática, ou etnomatemática, que ela apresenta. Essas entrevistas com os responsáveis servirão como referencial da obtenção desse **conhecimento original**, uma vez que este é resultado da própria atividade do sujeito. Buriasco (1988, p. 14)

> A Etnomatemática lança mão dos diversos meios de que as culturas se utilizam para encontrar explicações para a sua realidade e vencer as dificuldades que surjam no seu dia-a-dia. Em todas as culturas, porém, nessa busca de entendimento, acaba-se tendo necessidade de quantificar, comparar, classificar, medir, o que faz surgir a Matemática, **espontaneamente**. É próprio do ser humano, ao pegar dois objetos, por exemplo, imediatamente tentar compará-los, dar-lhes qualidade – como peso, forma, tamanho, cor –, organizá-los de alguma maneira. Se tem uma coisa só, o homem também tenta explorá-la, examiná-la, classificá-la. (D'Ambrósio in Vadiga,1993, pp. 10-11)

---

9 Importante esclarecer que os conceitos de "espontâneo" e de "eficácia" a serem aqui evidenciados retratam partes de um problema pedagógico que o autor deste artigo denomina "supervalorização do conhecimento matemático cotidiano em algumas pesquisas da Educação Matemática" (Giardinetto, 1997, 1998, 1999). As citações aqui selecionadas visam destacar trechos de obras em que os autores citados promovem essa "supervalorização" quando do emprego de uma concepção imediata e a-crítica de "espontâneo" e de "eficácia". Como tal, a idéia aqui é retratar tal forma de concepção empregada em algumas obras. Isso não significa que os autores citados tenham corrigidos tais conceitos em outras obras. Não é aqui objeto de análise verificar o rompimento de certos conceitos antes utilizados pelos autores, se de fato esse rompimento veio a ocorrer. Não se trata de promover uma análise de obras ou de linhas de pesquisas de determinados autores. Trata-se de promover uma reflexão sobre o tipo de concepção de "espontâneo" e "eficácia" mais frequentemente empregada em trabalhos no cenário da Educação Matemática brasileira. A seleção das citações aqui apresentadas justifica-se no restrito sentido de buscar retratar esse tipo de concepção aqui evidenciado para análise.

> Qualquer cidadão possui uma matemática espontânea que lhe permite sobreviver em sociedade apesar da escola. Quando você corta caminho para ir à padaria, por exemplo, está resolvendo uma questão geométrica. E qualquer criança sabe manejar dinheiro – o que não é fácil no Brasil, onde existem várias moedas ao mesmo tempo. (D'Ambrósio, in Stegemann, 1994, p. 48)

> Dentro desse contexto, o fracasso escolar aparece como um fracasso da escola, fracasso este localizado: a) na incapacidade de aferir a real capacidade da criança; b) no desconhecimento dos processos naturais que levam a criança a adquirir o conhecimento; c) na incapacidade de estabelecer uma ponte entre o conhecimento formal que deseja transmitir e o conhecimento prático do qual a criança, pelo menos em parte dispõe. (Carraher, 1990, p. 42)

Ora, a idéia implícita nessas citações é uma idéia incompatível com o referencial teórico aqui utilizado, referencial apoiado numa concepção histórico-social de indivíduo, conhecimento e realidade. Não existe apropriação da realidade sem as mediações de ordem histórico-sociais. Mesmo as mediações aparentemente "naturais" e, como tais, pretensamente "originais", "autênticas" apresentam mediações.

Um bom exemplo, para melhor esclarecer o que se entende aqui por mediações de ordem histórico-sociais, é o caso da linguagem oral e da linguagem escrita. A linguagem oral apresenta mediações. Tratam-se de mediações não-intencionais, por procedimentos informais, pois nenhum indivíduo aprende a falar por procedimentos lógico-metodológicos específicos que garantiriam intencionalmente a apropriação da fala. A fala se dá através da relação da criança com seus pais, com o meio familiar. Mas, mesmo assim, não se trata de algo que "brota" do indivíduo. É espontâneo no sentido de não-intencional. Já a linguagem escrita, ao contrário da linguagem oral, requer procedimentos lógico-metodológicos eficazes para a garantia de tal apropriação. Trata-se de um processo intencional através de uma aprendizagem sistematizada e, como tal, de um processo não-espontâneo.

O que difere a apropriação espontânea (não-intencional) da apropriação intencional (não-espontânea) não são as mediações de ordem histórico-social, pois ambas as apropriações são mediatizadas. O que as diferem é como se dão tais mediações. Na apropriação espontânea, as mediações se dão sem intencionalidade, numa relação no reino do em-si. Ao contrário, na apropriação não-espontânea, a relação é para-si, requer intencionalidade.

Quando o que se entende por cotidiano e por conhecimento cotidiano decorre de uma percepção restrita no nível da mera constatação dos dados imediatos da existência humana, acaba-se por entender que as formas de atividade e de pensamento cotidianos são formas oriundas de processos "naturais", como se fossem puramente indivi-duais, sem intervenções externas e que, como tal, existem no próprio ser do indivíduo desde seu nascimento. Com isso, as especificidades do conhecimento cotidiano e a sua condição de elemento determinado pela estrutura social não chegam nem a ser percebidas. Apenas constata-se a existência do cotidiano nas suas manifestações mais imediatamente perceptíveis, sem poder considerar-se os múltiplos condicionantes (não imediatamente visíveis) que, imperceptivelmente a geram, a determinam e a dirigem. Consequentemente, a ausência da compreensão dessas múltiplas determinações (não imediatamente perceptíveis) limita-se a considerações sobre o cotidiano, restritas ao nível de denúncia e constatação de sua existência e da necessidade de seu aproveitamento na prática escolar, tomando-o como algo já dado, como algo que está aí, algo já bastante conhecido, como algo óbvio.

O que se nota nas citações aqui selecionadas, é que os autores querem chamar a atenção para o fato de que o conhecimento escolar não tem levado em consideração, no trabalho pedagógico, o conhecimento a-escolar de matemática produzido na vida cotidiana.

Ocorre que, embora essa ausência de utilização do conhecimento matemático cotidiano apontada pelas citações seja uma crítica pertinente e necessária para o ensino da matemática, o nível de análise do cotidiano (e da interpretação do conhecimento matemático aí produzido) aí implícito não ultrapassa o nível mais empírico de como esse cotidiano imediatamente se manifesta, o qual é tomado como "a realidade" mesma, elevando-o a *status* de originalidade. Com isso, não se promove uma análise mais detalhada quanto aos mecanismos que regem o conhecimento manifestado no cotidiano, suas características como manifestação do conhecimento em uma esfera específica (a esfera da vida cotidiana) da prática social.

É preciso entender que se trata de um conhecimento que responde às necessidades de ordem prática-utilitária e, como tal, é regido por uma lógica prático-utilitária inerente a essa atividade, dentro de determinado contexto social e que serve a determinado objetivo específico.

Por exemplo, quando se constata a matemática "criada" pela criança feirante ao fazer o troco,[10] não se percebe que aquela manifestação da matemática é algo restrito à praticidade e imediaticidade aí inerente e que reflete, inclusive, todo um processo social injusto pelo qual o indivíduo é obrigado a dar a resposta certa na medida em que serve a determinado objetivo específico imposto pelas circunstâncias de trabalho, ao indivíduo. Responde à necessidade de uma lógica pela qual o indivíduo não a utiliza de forma consciente e intencional e que garante a atividade que desenvolve.

Além disso, e é muito importante também estar atendo a isto, a matemática pretensamente considerada "criada" de forma tão "original" e "espontânea" na vida cotidiana, é um produto da relação do indivíduo com o mundo já construído pela atividade social e histórica dos homens, relação mediatizada tanto pelas relações sociais quanto pelos demais produtos dessa atividade. É preciso notar que dado o estágio hodierno do desenvolvimento do gênero humano, o indivíduo, nas suas atividades cotidianas, produz aquilo que o gênero humano já produziu historicamente. Trata-se da reprodução de um sistema mínimo para o indivíduo se situar em sociedade, isto é, aspectos de um saber já sistematizado que é apropriado de forma fragmentária e empírica. O indivíduo não gera algo novo, mas reproduz sob diferentes matizes (é justamente nesses matizes que reside a riqueza e a criatividade do indivíduo), aquilo que o gênero humano verdadeiramente já produziu.[11]

---

10 Aqui trata-se da referência à pesquisa de Carraher (1990).

11 O conceito de reprodução aqui utilizado não denota algo reproduzido de forma passiva. Trata-se do conceito de reprodução utilizado nas obras de Marx, assunto que merece uma pesquisa específica quanto às implicações para o ensino da matemática (uma dessas implicações é perceber que as diferentes matemáticas produzidas em diferentes contextos culturais não são diferentes matemáticas mas diferentes manifestações DA matemática, assim entendida como uma objetivação do gênero humano).

Enquanto atividade da vida cotidiana, a matemática apropriada no cotidiano apresenta características próprias do processo de apro-priação do conhecimento cotidiano no nível das objetivações em-si, isto é, são objetivações apropriadas, pelo indivíduo, numa relação não-intencional.

É sempre necessário enfatizar aqui que isso não é algo necessariamente negativo. É próprio da vida cotidiana, pois é necessário para o desenvolvimento das atividades heterogêneas da vida cotidiana que precisam de respostas imediatas, prático-utilitárias. O que torna negativo e, por isso, constitui um problema para o ensino da matemática, é utilizar essa mesma lógica no processo de apropriação da matemática escolar, já que a matemática escolar, dadas suas características, necessita ser apropriada através de um processo intencional por parte do indivíduo (o educando).

Além do caráter pretensamente "natural" e "espontâneo", é interessante verificar a interpretação que se dá à constatação da eficácia das respostas prático-utilitárias do conhecimento matemático gerado pelas atividades da vida cotidiana. Como se constata nas citações abaixo, verifica-se, em algumas pesquisas, uma certa perplexidade diante do fracasso da escola em lidar com determinados conteúdos matemáticos que já se apresentam de domínio dos alunos em atividades da vida cotidiana:

> Quando uma solução matemática é negociada na rua – numa venda na feira, numa aposta no jogo do bicho – ela reflete os rituais da cultura para a situação, não apenas as estruturas matemáticas subjacentes. Mas como é que os indivíduos aprendem esses rituais, cheios de lógica e matemática, sem os benefícios da instrução sistemática ministrada por um professor especialmente preparado para tal fim ? E que explicações teremos para o fracasso da criança em sala de aula se ela for bem sucedida nas tarefas cotidianas que envolvem estruturas lógico-matemáticas? Carraher (1990, p. 20)

> Quando você corta caminho para ir à padaria, por exemplo, está resolvendo uma questão geométrica. E qualquer criança sabe manejar dinheiro – o que não é fácil no Brasil, onde existem várias moedas ao mesmo tempo (...) A criança que antes não se confundia com o troco, chega na escola e é reprovada em aritmética. A balconista que corta um pedaço de papel para embrulhar uma

> caixa, desdobrando um objeto de três dimensões para o plano, é reprovada em geometria. D'Ambrósio (apud Stegemann, 1994, p. 48)

É preciso observar que a "eficácia" do conhecimento cotidiano é algo intrínseco a esta forma de apropriação do conhecimento, bem como aos limites de apropriação do conteúdo desse conhecimento. Não se trata de algo vantajoso em relação à aprendizagem escolar, como assim parece à primeira vista. A "eficácia" do conhecimento cotidiano responde, na verdade, a uma situação de busca a respostas prático-utilitárias sem necessidade da aprendizagem formal escolar. O conhecimento inerente às atividades cotidianas obedece a uma lógica que lhe é própria e que se diferencia do conhecimento escolar. A lógica exigida no troco, por exemplo, não é a mesma lógica exigida na apropriação dos algoritmos numéricos. No troco, a lógica exigida segue mecanismos prático-utilitários. Na apropriação dos algoritmos numéricos na escola, é imprescindível a apropriação intencional da lógica do sistema numérico posicional. O troco exige a execução de automatismos mais imediatos que não requerem a compreensão consciente da lógica operatória aí envolvida e dos conceitos matemáticos exigidos.

Da mesma forma, os raciocínios geométricos utilizados, seja para encurtar um determinado caminho ou para realizar o embrulho de uma caixa, dão-se no plano de uma lógica prática-utilitária intrínseca a um ato não-intencional, espontâneo. Muito diferente é a lógica necessária e exigida no ato pedagógico para a apropriação da geometria em sua versão sistematizada. Embora essa apropriação possa incorporar elementos presentes em ações não-intencionais, essa incorporação não se dá no nível de uma mera transferência, pois se trata de algo mais complexo e que, pela sua natureza e especificidade, não pode ser identificada e comparada no mesmo plano das atividades cotidianas.

A lógica que gera a eficácia é limitante, pois ela não permite uma relação consciente (intencional), não só com o conteúdo, mas também com o processo de construção do conteúdo na própria aprendizagem do aluno. A utilização dessa mesma lógica no nível das atividades não-cotidianas vai impedir a apropriação de um conhecimento num plano mais complexo, mais elaborado do que aquele no cotidiano. Se o objetivo da atividade cotidiana é garantir sua resposta prático-utilitária, a lógica interna que rege o raciocínio cotidiano elimina tudo aquilo que não permite essa resposta imediata. Conseqüentemente, transferir essa eficácia para a esfera escolar, que aqui é compreendida como uma instância mediadora entre o conhecimento cotidiano e o conhecimento não-cotidiano, significa limitar a função mediadora da escola porque transfere para essa instância os limites prático-utilitários da lógica do conceito cotidiano. Se a eficácia está limitada ao prático-utilitário do cotidiano, isto é, restrito aos objetivos das objetivações em-si, não se torna possível garantir ao indivíduo seu acesso às objetivações para-si, isto é, seu acesso ao acervo da humanidade (para além daquele em que ele vive), que é o objetivo básico da prática escolar como instância mediadora entre o cotidiano e o não-cotidiano.

Para o indivíduo poder galgar planos mais profundos do conhecimento matemático mais elaborado é preciso uma intencionalidade no processo de apreensão desse conhecimento, isto é, uma relação consciente com o processo de compreensão do conteúdo e com a forma de adquiri-lo (incluindo-se aí a lógica própria deste conteúdo mais elaborado), intencionalidade essa não possível de ser desenvolvida com os limites da lógica prático-utilitária do conhecimento cotidiano. Para a apropriação do conhecimento escolar, o indivíduo precisa romper com estes limites, sem o qual ele não avança e, portanto, permanece no nível do conhecimento em que ele já se encontra.

Em outras palavras, é necessário uma programação pedagógica adequada que explicite a estrutura lógica dessa aptidão espontânea (não-intencional), identificando seus limites e promovendo sua superação pela incorporação à estrutura lógica do conceito em sua versão escolar (como assim evidenciaram as considerações apresentadas no item anterior deste artigo).

Portanto, a aprendizagem escolar se traduz na possibilidade efetiva de a criança, o indivíduo, romper os limites da utilização de referenciais pragmáticos e utilitários. Se, por um lado, no início da aprendizagem, tais referenciais são importantes como ponto de partida, por outro lado, a apropriação dos conceitos matemáticos escolares é a garantia da superação da compreensão imediata inerente a essa pragmaticidade, o que vai garantir ao indivíduo a apropriação de novos conhecimentos necessários à sua vida como sujeito participante da sociedade em que vive.

Portanto, a constatação da "eficácia" do conhecimento cotidiano é algo intrínseco a esta forma de apropriação do conhecimento, bem como aos limites de apropriação do conteúdo desse conhecimento, não podendo, portanto, denotar algo vantajoso, ante a dificuldades de apropriação dos conceitos na versão escolar.

Conclusões finais

O presente artigo, ao refutar as concepções de eficácia e de espontaneidade do conhecimento matemático cotidiano, na forma como é apontada por algumas pesquisas da Educação Matemática, isto é, como que denotando aí algo vantajoso para a prática escolar, não buscou, com isso, defender a exclusão do conhecimento cotidiano no desenvolvimento da prática docente. Muito pelo contrário. Como se viu, a utilização do saber cotidiano é algo positivo e necessário para a apropriação dos conceitos escolares, assim entendida como uma possibilidade.[12] Porém, é preciso entender seus limites e suas especificidades no âmbito da relação com o saber escolar. O que se evidenciou é a frequência com que o cotidiano é tomado em sua obviedade em algumas pesquisas da Educação Matemática, e como essa obviedade acaba influenciando uma determinada concepção da relação entre o saber cotidiano e o saber escolar, que não ultrapassa o imediatamente verificado.

Referências

CARRAHER, T.; CARRAHER, D. e SCHLIEMANN, A. (1990). *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo, Cortez.

BURIASCO, R. L. C. (1988). *Matemática de fora e de dentro da escola: do bloqueio à transição.* Dissertação de mestrado. Rio Claro, Unesp/IBGE/Universidade Estadual Paulista.

---

12 É preciso não esquecer que pela própria especificidade da matemática, especificidade que permite à teoria matemática uma relativa autonomia ante os problemas da prática, muitas vezes, na atividade escolar, a apropriação dos conceitos se dá exclusivamente no âmbito da esfera escolar, com conceitos já elaborados anteriormente, não cabendo ao professor se achar sempre condicionado a trabalhar com conceitos oriundos da manifestação cotidiana do conceito. Trata-se, portanto, de uma possibilidade e, nesse caso, a discussão sobre o uso do cotidiano nem se coloca.

DUARTE, N. (1995). *O papel da educação escolar na formação do indivíduo.* Relatório Final de Pesquisa. Araraquara, FCL/Unesp.

_____(1993). *A individualidade para-si: contribuição a uma teoria histórico-social da formação do indivíduo.* Campinas, Autores Associados. (Col. Educação Contemporânea).

_____(1987). *A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar.* Dissertação de mestrado. São Carlos, UFSCar, Universidade Federal de São Carlos.

GASPARINI, J. B. (1990). *A lei dialética da negação da negação na busca de superação da dicotomia entre o conhecimento prévio do aluno e o saber escolar.* Dissertação de mestrado. São Carlos, UFSCar, Universidade Federal de São Carlos.

GIARDINETTO, J. R. B. (2000). Reflexões sobre o uso da história da matemática como contribuição para a melhoria do ensino da geometria analítica (nível 1° e 2° graus). *NUANCES:* Revista do Curso de Pedagogia, Departamento de Educação, Unesp, Campus de Presidente Prudente, v. 6, n. 6, pp. 136-142.

_____(1999). *Matemática escolar e matemática da vida cotidiana.* Campinas, Editora Autores Associados (Col. Polêmicas do Nosso Tempo, n. 65).

_____(1998). *Saber matemático escolar e saber matemático cotidiano: subsídios históricos e filosóficos para a superação do problema da supervalorização do saber cotidiano na Educação Matemática.* Rio de Janeiro, Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.

_____(1997). *O fenômeno da supervalorização do saber cotidiano em algumas pesquisas da Educação Matemática.* Tese de doutorado. São Carlos, UFSCar, Universidade Federal de São Carlos.

HELLER, A. (1977). *Sociologia de la vida cotidiana.* Barcelona, Península.

JARDINETTI, J. R. B.[13] (1991). *A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da geometria analítica a nível do 1° e 2° graus.* Dissertação de mestrado. São Carlos, UFSCar, Universidade Federal de São Carlos.

KOSIK, K. (1985). *Dialética do concreto.* Rio de Janeiro, Paz e Terra.

13 JARDINETTI, J. R. B. foi retificado para GIARDINETTO, J. R. B.

SAVIANI, D. (1991). *Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações*. São Paulo, Cortez/Autores Associados (Col. Polêmicas do Nosso Tempo, 40).

STEGEMANN, C. et alii (1994). A matemática está errada. *Globo Ciência,* pp. 47-51.

VADIGA, C. (1993). Etnomatemática. *Revista Nova Escola,* agosto, pp. 10-15.

Recebido em mar./2000; aprovado em jun./2000

O acesso à história da Matemática pelo professor de Matemática

ANTONIO CARLOS BROLEZZI*

Resumo

Nos últimos anos desenvolveu-se uma nova forma de acessar o conhecimento sobre a história da Matemática, através das páginas da rede mundial de computadores. O valor da história da Matemática para o ensino também foi mais debatido, acompanhando o desenvolvimento da pesquisa em Educação Matemática no país. Iremos, neste texto, tentar mostrar quais são as fontes tradicionais da história da Matemática, os principais livros de história da Matemática e de que modo o acesso à história da Matemática mudou bastante, principalmente após o desenvolvimento da Internet. Falaremos também sobre o valor didático da história da Matemática e como ainda é necessária uma abordagem mais profunda de sua utilização pedagógica.

Palavras-chave: história da matemática; educação matemética; Internet; currículo da licenciatura; didática da matemática.

Abstract

In recent years a new way to access knowledge about the History of Mathematics has been developed: through Internet web pages. The teaching value of the History of Mathematics has also been debated, following the research development of Mathematical Education in Brazil. In this paper we shall try to point out the traditional sources of History of Mathematics, the main books on History of Mathematics and in what ways the access to the History of Mathematics has changed, mainly after the Internet development. We shall also mention the didactical value of the History of Mathematics, and how a deeper approach of its pedagogical use is still needed.

Key-words: *history of mathematics, mathematics education, internet, teaching education curriculum, didactics of mathematics.*

---

* Doutor em Educação – Feusp, professor do Departamento de Matemática – Demat, Universidade Federal de Ouro Preto – Ufop.

Iniciaremos considerando que existe uma lacuna natural entre o conhecimento matemático e o conhecimento sobre história da Matemática. Esse distanciamento reforça a idéia de que a Matemática, considerada a ciência exata por excelência, está muitas vezes associada a um falso imobilismo, que nenhuma ciência de fato apresenta. Na verdade a Matemática está muito viva. Já alertava Cajori (1890, p. 236), há mais de um século: "É possível ao professor deixar claro para o aluno que a Matemática não é uma Ciência morta, mas uma Ciência viva na qual um progresso contínuo é realizado".

Uma Matemática viva, em progresso, ou seja, em construção, surge aos olhos dos alunos quando se recorre à história da Matemática. Mas faltam informações históricas adequadas ao ensino da Matemática elementar.

Façamos inicialmente uma brevíssima retrospectiva da transmissão de conhecimentos sobre história da Matemática, baseada na pesquisa de mestrado do autor (ver Brolezzi, 1991).

As fontes da história da matemática antiga e medieval

Os historiadores têm dificuldades especiais para construir a história da Matemática do período anterior aos gregos. O conhecimento da Matemática egípcia nos chegou apenas após os hieróglifos terem sido decifrados por Champollion, que publicou em 1842 seu *Dictionnaire Egyptien* (Gillings, 1972, p. 1) após obter a chave da escrita egípcia na inscrição trilingüe da Pedra de Rosetta, de 196 a.C. O mais famoso papiro egípcio sobre Matemática foi produzido pelo escriba Ahmes em 1650 a.C. e encontrado mais de 3000 anos depois, quando, em 1858, o antiquário escocês Henry Rhind o adquiriu. Somente em 1877 é que Eisenlohr conseguiu traduzi-lo. Não há, portanto, uma tradição linear ligando a nossa civilização à do Egito Antigo, e a pesquisa sobre sua Matemática tem que ser feita com base nesses achados arqueológicos.

Algo semelhante se dá com a Matemática dos povos da Mesopotâmia. Existem centenas de tabletas cuneiformes trazendo informação sobre a Matemática de quatro mil anos atrás. A tradução desse mate-rial só teve início em 1870, quando se descobriu uma inscrição também trilingüe, nas encostas do monte Behistun, narrando a vitória do rei Dario sobre Cambises. Somente em 1934 Otto Neugebauer decifrou, interpretou e publicou as tabletas matemáticas babilônias.

Do mesmo modo, uma pessoa que queira conhecer a história da Matemática da China, da Índia ou do Japão deve recorrer aos originais antigos que, de algum modo, preservaram-se até hoje e a partir dos quais são escritas obras de história da Matemática dessas civilizações, como *The Development of Mathematics in China and Japan*, de Mikami (1913), e a incomparável obra em três volumes de Needham (1959), *Science and Civilization in China*. Existem muitas dificuldades, inclusive para saber a data de documentos antigos, pois as obras chinesas podem ter vários autores de épocas diferentes, enquanto algumas obras hindus apresentam datação considerada inverossímil, como dois milhões de anos.

Outra fonte sobre a história da Matemática primitiva, sobretudo a respeito do surgimento dos números (Brolezzi, 1997), é o estudo das linguagens indígenas, que muitas vezes remontam a épocas pré-históricas (Groza, 1968, p. 8), e o estudo das formação das palavras das línguas modernas.

Essa ausência de tradição linear, que liga a Matemática das civilizações pré-helênicas até hoje, pode ser um dos fatores que reforçam a idéia de que a Matemática é uma ciência que praticamente nasceu pronta. Essa idéia está muito presente em algumas concepções do ensino da Matemática, principalmente no nível elementar. A sistematização grega da Matemática é muitas vezes identificada como sua própria gênese, e poucos autores retrocedem para antes dos gregos ao estudar a história da Matemática. Piaget e Garcia (1987, p. 88), por exemplo, ao elaborarem sua obra *Psicogênese e História das Ciências*, iniciam o estudo histórico a partir dos gregos, justificando-se precisamente pela falta de uma ligação com a evolução anterior aos gregos.

De fato, as mais antigas histórias da Matemática são gregas e a primeira de que se tem notícia foi escrita por Eudemos de Rodes (Loria, 1946, p. 16), por volta de 320 a.C. Essa obra histórica de valor inestimável não sobreviveu à passagem dos anos. Nela, certamente, haveria muitos dados sobre a controvertida passagem das Matemáticas pré-helênicas, de caráter eminentemente prático, para os sistema mais teórico dos gregos. O papel de Tales de Mileto (624-548 a.C.) e de Pitágoras de Samos (580-500 a.C.) nessa construção inicial do pensamento matemático na Grécia também seria melhor elucidado. Mas do livro de Eudemos só nos restam referências esparsas em outras obras. O mesmo pode-se dizer da *Biografia de Pitágoras*, escrita pelo próprio Aristóteles (Boyer, 1974, p. 72), que também se perdeu.

O que mais se aproxima de uma narrativa verdadeiramente histórica da evolução da Matemática nesse período, e que se conservou, encontra-se num *Comentário* ao primeiro livro de *Os Elementos*, de Euclides, escrito pelo filósofo neoplatônico Proclus Diadochus (410-485 d.C.)[1]. Apesar do milênio que o separa da vida de Tales, é em Proclus que nos baseamos para afirmar quase tudo o que sabemos sobre Tales e Pitágoras, porque teria incorporado no seu *Comentário* um trecho resumido da *História da Matemática* de Eudemos.

Uma coleção de *Biografias de Matemáticos e Filósofos Gregos* é atribuída a Diógenes Laércio. Nessa obra se encontra, por exemplo, a narração de que Tales mediu a altura das pirâmides do Egito observando o comprimento das suas sombras no momento em que a sombra de um bastão vertical era igual à sua altura.

Parece muito provável que, em meio aos 750.000 volumes que supostamente continha a Biblioteca de Alexandria, haveria informação abundante sobre história da Matemática. Entretanto, entre o incêndio provocado por Júlio César no ano 47 a.C. e a queima quase total de 641 d.C., decretada pelo califa Omar, sucessor de Maomé no comando dos árabes, pouco sobrou para contar essa valiosa história.

Tornando-se Odoacro, o Hérulo, imperador romano em 476, já ocorre uma grande alteração nos cuidados oficiais com a cultura. Seu sucessor, Teodorico, o Ostrogodo, ainda mantém-se por algum tempo assessorado por um dos últimos senadores Romanos, Boécio (480-524), que será, na corte bárbara, como que um representante da cultura e ciência helênicas.

Enquanto os povos bárbaros se estabelecem na Europa, dos mosteiros sairão as obras com informações sobre a história da Matemática no período de 500 a 1200. Cassiodoro (480-575), discípulo de Boécio, escreveu diversas obras matemáticas que serviam de livro-texto nas escolas dos mosteiros.

---

1 Conforme, por exemplo, a tradução de Ivor Thomas, *Proclus Summary*, apud Midonick (1965).

Depois dele, Isidoro de Sevilha (570-636) escreveu uma enciclopédia em 20 volumes intitulada *Origens* ou *Etimologias* (1982, pp. 422-481). Os trabalhos do monge inglês Beda, o Venerável (673-735), sobre o cálculo do calendário contribuíram para que a arte de calcular sempre encontrasse algum lugar no currículo para a educação dos monges. Outro inglês será o responsável principal pelo desenvolvimento da Educação no Grande Império Franco: Alcuíno de York (735-804), um dos responsáveis pelo chamado Renascimento Carolíngio.

Quando, a partir do segundo milênio da nossa era, o surgimento das Universidades na Europa começou a atrair o interesse dos estudiosos latinos para os textos gregos, foi em grande parte a língua árabe que serviria como ponte de ligação entre o grego e o latim. Desde o início da era maometana, em 622, os árabes foram conquistando muitos dos centros culturais da Antiguidade, como Alexandria, em 641. No século VIII, funda-se a Casa da Sabedoria em Bagdá, no final do califado de Harum al-Raschid (786-809), famoso por figurar nas *Mil e uma Noites*. Bagdá torna-se então um grande centro cultural, onde se farão traduções de inúmeras obras gregas, as quais mais tarde foram por sua vez traduzidas para o latim.

Nesse recurso aos árabes, terá influência o monge francês Gerbert (950-1003), que em 999 foi feito papa com o nome de Silvestre II. A Gerbert se atribui uma forte contribuição para a introdução dos numerais indo-arábicos na Europa.

A partir do ano 1000, com os trabalhos de Gerbert e seus alunos, encontramos indícios de um interesse crescente pela pesquisa matemática, com um conseqüente resgate da cultura greco-latina através de manuscritos árabes e latinos. No século XII, a barreira entre os europeus e a cultura árabe foi superada pelas traduções. Uma das primeiras obras matemáticas clássicas a aparecer em tradução latina do árabe foi *Os Elementos*, de Euclides, a versão tendo sido feita em 1142 por Adelard de Bath (cerca de 1075-1160).

Dentre os tradutores da Espanha destaca-se Gerardo de Cremona (1114-1187), que em 1175 traduziu o *Almagesto* de Ptolomeu, obra fundamental de astronomia matemática. Entre as mais de 85 obras atribuídas a Gerardo encontra-se uma adaptação em latim da *Al-jabr wa'l Muqabalah*, de al-Khowarismi, de cujo título advém nosso termo *Álgebra*.

Desse modo, a ciência antiga pôde ser recuperada e preservada para as pesquisas dos séculos futuros. Obras de Filosofia e Lógica também foram sendo recuperadas.

Os livros de história da matemática

Após o século XII, com o surgimento das universidades européias, tem início o período no qual encontramos livros específicos de história da Matemática, de início manuscritos, mas logo impressos, tais como podem ser hoje encontrados nas bibliotecas. No século XIII, as universidades começaram a florescer em Bolonha, Pádua, Nápoles, Paris, Oxford e Cambridge. Pessoas que fizessem reproduções manuscritas de tratados eram intensivamente empregadas pelas universidades e, pela metade do século XV, seus produtos estavam sendo vendidos como os livros de hoje em dia. Tais métodos de difundir conhecimento foram aperfeiçoados em muito quando se deu início à distribuição de obras impressas. Conforme relata Archibald,

> (...) a publicação destas, com tipos móveis, começou por volta de 1450. Mais de duzentas obras matemáticas foram impressas, apenas na Itália, antes de 1500; mas esse número foi aumentado para 1527 no século seguinte. (1941, p. 26)

Com o desenvolvimento da utilização da imprensa, no século XVI, multiplicam-se as obras matemáticas e, nos séculos seguintes, encontramos as primeiras obras impressas específicas de história da Matemática. No século XVII surgem as cronologias de Giuseppe Biancani (apud Loria, 1946, p. 17) e Milliet Descharles (apud Loria, 1946, p. 17). No início do século XVIII, o abade Bernardino Baldi publica suas *Biografias de Matemáticos* (apud Loria, 1946, p. 18), com 365 biografias. A primeira obra com o título de *História da Matemática* foi escrita em 1742 por Johann Christoph Heilbronner (apud Smith, 1923, p. 539). Heilbronner inclui um valiosa relação de manuscritos que podiam ser obtidos na época, além de uma lista dos últimos livros impressos.

A primeira *verdadeira e própria História da Matemática*, segundo a expressão de Loria (1946, p. 20), é, sem dúvida, a *Histoire des Mathématics,* de Jean Étienne Montucla (1725-1799). Sua obra constitui-se num modelo de história da Matemática totalmente cronológica, incluindo não só Matemática pura e aplicada, mas também história da Geografia, da Música, da Gnomônica (construção do Relógio de Sol) e da Navegação.

No início do século XIX, uma abordagem diferente, visando a utilização didática da história da Matemática, irá surgir das mãos do Pe. Pietro Franchini (apud Loria, 1946, p. 24), que se dedicava, entre outras coisas, ao ensino da Matemática em diversas escolas secundárias da Itália. Sua obra histórica marca uma nova orientação da visão da história da Matemática, que é sua vinculação ao ensino da Matemática.

Seguindo o modelo clássico de Montucla, irá surgir a obra que, segundo Loria, assinala uma época na história da pesquisa sobre a evolução do pensamento matemático. Trata-se da colossal obra de Moritz Benedict Cantor, em quatro volumes, publicados entre 1880 e 1908. A obra segue um critério rigorosamente cronológico. Moritz Cantor é o mais notável escritor geral do século XIX sobre história da Matemática. Com Cantor, o sistema cronológico de narração fica claramente estabelecido. No início do século XX irão surgir, no entanto, outros tipos de tratamento da história da Matemática, além de outras edições de história da Matemática seguindo a cronologia.

Um dos autores mais importantes dessa época é, sem dúvida, Florian Cajori. Já em 1894 tinha surgido a primeira edição de *A History of Mathematics*, um clássico do gênero cronológico, em um só volume. Professor de História da Matemática da Universidade da Califórnia, Cajori admite, no prefácio à segunda edição, de 1919, que é uma tarefa difícil dar uma visão de relance adequada do desenvolvimento da Matemática, de seus mais antigos começos até o tempo presente.

Essa dificuldade apontada por Cajori foi de certo modo resolvida por David Eugene Smith, na sua *History of Mathematics* em dois volumes, publicados em 1923. Smith esclarece que um texto único cronológico não é didaticamente aconselhável, e resolve essa questão planejando uma história da Matemática com dupla visão, em dois volumes com tratamento distintos:

> O plano geral adotado na preparação deste trabalho é o de apresentar o assunto a partir de dois pontos de vista distintos, o pri-

> meiro, no volume I, levando a uma visão do crescimento da Matemática por períodos cronológicos, com as devidas considerações sobre as realizações étnicas; e o segundo, no volume II, levando a uma discussão da evolução de certos tópicos importantes. Tentar fundir essas duas características e assim apresentá-las foi muitas vezes pretendido. É o que caracteriza, por exemplo, o tratado monumental de Montucla e, em larga medida, o de Cantor. Para o professor, no entanto, esse plano não é satisfatório. (Smith, 1923, p. III)

Smith toma para si a tarefa de escrever um livro de história da Matemática voltado para o professor de Matemática, portanto, pautado no ponto de vista de sua aplicação didática. Sua obra foi escrita visando ser utilizada por professores e alunos. Em busca desse objetivo específico, Smith realizou uma verdadeira revolução nos moldes habituais de tratar a história da Matemática. Deixa claro que um livro meramente cronológico não é suficiente para o professor, sendo necessárias outras abordagens diferentes. Smith opta pela abordagem *por Assunto*, o que marca uma nova fase na produção de livros sobre história da Matemática.

Smith foi pioneiro em abrir o leque das várias abordagens alternativas. Irão depois surgir muitas obras tratando a história da Matemática segundo aspectos variados, fugindo da pretensão de esgotá-la na forma cronológica. Pareceu ficar claro para vários pesquisadores que era didaticamente mais interessante um livro sobre algum tópico específico ou sobre uma determinada nação ou época, ou ainda livros só de biografias.

Uma nova história da Matemática por assunto será elaborada por Vera Sanford, em 1930,.sob orientação do próprio Smith. Em 1937, surge o livro biográfico de Bell (1965) trazendo relatos sobre vida dos mais famosos matemáticos de todos os tempos. Após as descobertas arqueológicas expostas por Neugebauer e Sachs (1945) com a tradução das tabletas matemáticas da Mesopotâmia, irão surgir outros livros explorando a história da Matemática das civilizações antigas, como havia feito já em 1921 Sir Thomas Little Heath com a *História da Matemática Grega* (1981). É o caso de *Episódios da História Antiga da Matemática*, de Asger Aaboe (1984), e do monumental tratado sobre a Matemática da China de Joseph Needham (1959). Na mesma linha virá, mais recentemente, em 1972, Richard Gillings (1972), narrando a Matemática egípcia do tempo dos faraós. Depois Bartel Leenert van der Waerden publicará, em 1983 e em 1985, respectivamente, duas grandes obras, a primeira sobre a Geometria e a Álgebra nas civilizações antigas (1983) e a segunda sobre a História da Álgebra, de Al-Khowarismi a Emmy Noether (1985).

Não faltarão autores, no século XX, que se proporão, como Carl Benjamin Boyer em 1968, aderir mais estritamente a um arranjo cronológico na exposição da história da Matemática, procurando apresentá-la com fidelidade, não só para com a estrutura e exatidão matemáticas, mas também para com a perspectiva e os detalhes históricos.[2]

A história da Matemática de Boyer, bem como a que Howard Eves (1969) escreveu em 1964, são exemplos de história da Matemática cronológica do tipo clássico.

História da matemática na Internet

Do ponto de vista do professor de Matemática, que deseja buscar a história de determinado assunto, uma boa forma de aproveitar essa valiosa quantidade de informações contidas na obra de Boyer parece ser através do índice por temas que se oferece na página 475. É claro que isso toma tempo, mas é mais útil para o professor ou para quem esteja interessado num assunto específico. Apenas para ilustrar esse modo de utilização, basta ver que a seqüência de páginas indicadas para que se conheça a história do Número π é: 8, 13, 15, 28, 93, 104, 122, 125, 129, 144, 147, 153, 154, 157, 160, 162, 177, 222, 235, 280, 283, 297.

Como vemos, o uso didático da história da Matemática necessita de outros acessos à informação, transcendendo a linearidade dos textos.

O uso da história da Matemática encontra muitas barreiras, por estabelecer, como pano de fundo, um plano interdisciplinar que tem como característica um estreitamento de relações entre as áreas ditas exatas e as humanidades. Essa relação, buscada e evidenciada nas novas propostas, está longe dos professores em exercício, e também distante dos alunos de licenciatura, formados nas escolas em que a divisão do conhecimento impregnava a prática docente cotidiana.

2 Boyer (1974), Prefácio.

Nesse cenário surgem as novas tecnologias de informação, que estão a modelar novas concepções de ensino e aprendizagem e até mesmo diferentes concepções de inteligência. Ainda que mais distantes em um país dependente tecnologicamente, as novas tecnologias computacionais estão também distantes, especialmente, da classe docente em todo o mundo, como ficou demonstrado recentemente com o auda-cioso programa do governo americano para treinar os professores na utilização dos recursos computacionais. Assim, em todo o mundo faz-se necessário aproximar o professor das novas mídias, necessidade natural do crescimento e da universalização do acesso aos meios pela população, em todas as faixas etárias.

Parece, portanto, necessária uma nova formação para o professor em atuação, e também para o aluno de licenciatura, nos campos de uso de história da Matemática e de novas tecnologias. Tais conhecimentos estão já disponíveis, em parte na rede mundial de computadores, em diversas línguas,[3] mas também encontram-se na bibliografia produzida no Brasil ou traduzida para o português nos últimos cinco anos. O acesso às múltiplas relações que o hipertexto permite – mapas, figuras, jogos, testes, textos, som e imagem em movimento – compõe estruturas possíveis para o acesso à história. Mesmo com as barreiras de ordem tecnológica ou socioeconômica, os novos meios podem servir para democratizar acesso ao conhecimento, e não o contrário.

A Educação Matemática tem agora papel fundamental a desempenhar, por participar desse feixe interdisciplinar. É possível preparar, na linguagem do hipertexto, objetos didáticos que promovam o contato com a história da Matemática. Trata-se de dispor, em forma de hipertexto conhecimentos da construção histórica para uso do professor em sala de aula e para uso nas aulas dos cursos de licenciatura em Matemática.

O uso didático da história da matemática

O caminho pedagógico que defendemos parece advir da consideração da Matemática em sua fase de construção científica, e não da Mate-

---

3 Algumas páginas podem ser obtidas em:
<http://sites.uol.com.br/abrolezzi/historiadamatematica.html>

mática pronta e sistematizada de acordo com a lógica formal. A visão da Matemática em construção é, precisamente, a que obtemos pelo estudo da História da Matemática, a qual surge, assim, como a grande fonte para a apreensão da organização lógica mais adequada ao ensino da Matemática, principalmente no nível elementar, em que os padrões lógico-formais estão ainda mais distantes dos alunos. A forte relação da lógica com o ensino constitui, portanto, um componente decisivo para a avaliação do uso da história da Matemática como recurso pedagógico, revelando com muita profundidade seu valor didático.

Mas como fazer uso da história da Matemática neste nível? Alguns autores pretendem que a simples reprodução das etapas lógicas da construção histórica do conhecimento matemático seja suficiente para se obter um ensino logicamente adequado ao aluno. A referência à hipótese do paralelismo ontofilogenético é lugar-comum entre os pesquisadores e autores de livros de história da Matemática, mas essa hipótese situa-se no centro de uma controvérsia de não pequenas proporções. Mesmo Piaget e Garcia, por exemplo, ao escreverem sobre a psicogênese do conhecimento científico, são prudentes neste ponto:

> No devir histórico, os fatos não são, em geral, claros, nem os efeitos tão facilmente isoláveis. O progresso científico, a busca de determinadas formas de explicação, a aceitação ou a rejeição de conceitos e de teorias de um certo tipo respondem, no mais das vezes, a um jogo de interações complexas, em que os fatores sociais e as exigências internas do próprio sistema cognitivo são complementares e reforçam-se ou opõem-se e atenuam-se. (1987, p. 236)

Assim, diante de uma visão em bloco, tal como nos oferece um livro do tipo cronológico, fica realmente difícil discernir uma lógica adequada ao ensino de um tópico específico. Quanto à lógica de cada tópico, é mais fácil reconhecê-la nos livros por assunto. Esses livros possuem um valor didático muito distinto dos demais, porque o acesso ao seu conteúdo se dá através dos tópicos de Matemática. A sua própria organização interna permite sua utilização, seja qual for a seqüência curricular adotada. Não exigem que o leitor conheça História e Matemática a fundo para poder fazer uso deles, pois apresentam a evolução histórica de cada tópico em particular. E é aí que obtemos a lógica da Matemática em construção ou, melhor, da construção do assunto matemático específico que se quer ensinar, evitando generalizações excessivas.

Pode-se, assim, dosar a intensidade do recurso à história como instrumento de ensino de tal ou qual tópico. Utilizando um livro de história da Matemática por assunto, o professor pode aprofundar o quanto queira na história e fazer uso de toda essa informação junto aos alunos, que ficam sabendo quando e em que circunstâncias desenvolveu-se tal assunto. Essa digressão histórica pode ter uma certa duração. Mas pode também – e esse é, sem dúvida, o grande potencial didático desse tipo de livro –, simplesmente, captar na gênese histórica de um tópico específico o *modo*, a *metodologia*, a *lógica* que caracterizaram seu surgimento. A partir daí, procura-se reproduzir na sala de aula passos análogos aos da seqüência criadora do conhecimento que se quer transmitir. Não é necessário, nesse nível de utilização, *contar* a história propriamente dita de um assunto. Deixando de lado dados supérfluos, pode ser suficiente ater-se somente à seqüência lógica que levou à construção daquele conhecimento matemático pelos homens de outrora, depurando-a de pormenores desnecessários ou de desvios irrelevantes para os fins almejados.

Para isso, o conhecimento histórico requerido por parte do professor é muito mais profundo. Não basta saber alguns dados biográficos que possam ilustrar as aulas, nem saber localizar no espaço e no tempo o conteúdo do currículo. É necessário ir além, adentrando os processos de criação da Matemática, tal como nos apresenta a sua história. Esse mergulho na história da criação matemática leva à descoberta de uma infinidade de modos de se chegar a um resultado, desde que se respeite a lógica própria da construção do conhecimento, a qual permite uma ampla variedade de abordagens.

Seria preciso buscar na história, não somente o relato episódico, mas informações que definam estratégias de abordagem do conteúdo, de forma a revelar o significado do que se está pretendendo ensinar. Não se trata apenas de ilustrar as aulas de Matemática com histórias que divirtam, como biografias de matemáticos famosos. Nem, simplesmente, de acrescentar mais conteúdo ao currículo elementar de Matemática, para recheá-lo de referências históricas diretas que, de algum modo, ajudem a demonstrar a importância ou a beleza do assunto que se quer ensinar.

Existe o perigo de se ficar na superficialidade de uma utilização de fatos da história da Matemática como meras curiosidades, sem nenhuma implicação no tratamento dos conteúdos matemáticos em si. É necessária uma abordagem na qual *o próprio conteúdo* seja influenciado. Essa utilização mais profunda do recurso à história da Matemática parte da consideração da existência de um encadeamento lógico característico na construção do conhecimento científico e outro na sistematização, na formalização desse conhecimento. A nosso ver, a ordem lógica mais adequada para o ensino de Matemática não é a do conhecimento matemático sistematizado, mas, sim, aquela que revela a Matemática como ciência em construção. O recurso à história da Matemática tem, portanto, um papel decisivo na organização do conteúdo que se quer ensinar, iluminando-o, por assim dizer, com o modo de raciocinar próprio de um conhecimento que se quer construir.

Essa abordagem constitui-se no cerne do valor didático da história da Matemática. Chamamos essa abordagem de *Arte de Contar*, pois *contar*, em diversas línguas, aplica-se tanto a contar histórias quanto a contar objetos. Desse modo, queremos expressar nossa intenção de contribuir para que não se considerem o ensino da Matemática e a história da Matemática como compartimentos estanques, revelando a existência entre eles de uma relação intrínseca que une o conhecimento matemático construído na História e o reconstruído nas aulas de Matemática.

A abordagem mais profunda que descrevemos está presente em atuais propostas de ensino. Inicialmente no campo das universidades, com a consolidação da Educação Matemática, a abordagem histórica transcendeu o meio acadêmico estrito e passou aos textos dos livros didáticos que surgiram nos meados da década de 1990. O uso da História oficializou-se nas propostas nacionais, sendo relacionada como uma das competências a ser trabalhada no ensino médio, tendo em vista que saber relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade faz parte da contextualização sociocultural do conhecimento matemático.

Uma lição da história da Matemática, destacada por Boyer (1974, p. 344), pode servir-nos para reflexão: toda era se inclina a pensar em si mesma como sendo de revolução – um período de tremendas modificações.

Faz-se necessário muito empenho para que essas propostas não fiquem no papel, nem se desfaçam como modas passageiras.

Referências

AABOE, Asger (1984). *Episódios da História Antiga da Matemática*. Trad. de João Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática.

ARCHIBALD, Raymond Clare (1941). *Outline on the History of Mathematics*. Ohio, Mathematical Association of America.

BALDI, Bernardino (1707). *Cronaca de'matematic ovvero Epitome dell'istorie delle vite loro*. Urbino.

BELL, Eric Temple (1965). *Men of Mathematics*. New York, Simon and Schuster.

BIANCANI, Giuseppe (1615). *Aristotelis loca Mathematica ex Universis Operibus Collecta et Explicata*. Boloniae.

BOYER, Carl Benjamin (1974). *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher.

BRASIL. Ministério da Educação (1999). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação, Média e Tecnológica.

BROLEZZI, Antonio Carlos (1991). *A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática*. Dissertação de mestrado em Educação. Faculdade de Educação da USP, São Paulo. Disponível na Internet em: <http://br.geocities.com/abrolezzi/teseedissertacao.html>

BROLEZZI, Antonio Carlos (1997). *O discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática*. São Paulo, Faculdade de Educação da USP. Disponível na Internet em: <http://br.geocities.com/abrolezzi/teseedissertacao.html>

CAJORI, Florian (1919). *A History of Mathematics*. 2 ed. New York, The MacMillan Company.

CAJORI, Florian (1890/1919). "The Teaching and History of Mathematics in the United States". In: CAJORI, Florian. *A History of Mathematics*. New York, The MacMillan Company.

DESCHARLES, Milliet (1674). *Cursus Seo Mundus Mathematicus*. Lugd.

EVES, Howard (1969). *An Introduction to the History of Mathematics*. New York, Holt, Rinehart and Winston.

FRANCHINI, Pietro (1821). *Saggio sulla Storia delle matematiche corredato di scelte notizie biografiche ad uso della gioventù*. Lucca.

GILLINGS, Richard J. (1972). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York, Dover.

GROZA, Vivian Shaw (1968). *A Survey of Mathematical Elementary Concepts and their Historical Development*. New York, Holt, Rinehart and Winston.

HEATH, Thomas Litle (1981). *A History of Greek Mathematics*. 2 v. New York, Dover.

HEILBRONER, Johan Cristoph (1742). *Historia Matheseos Universae a mundo condito ad seculum post Chr. Nat. XVI*. Leipzig.

LORIA, Gino (1946). *Guida allo Studio della Storia delle Matematiche*. 2 ed. Milano, Ulrico Hoepli.

MIDONICK, Henrietta O. (ed.) (1965). *The Treasury of Mathematics*. New York, Philosofical Library.

MIKAMI, Yoshio (1913). *The Development of Mathematics in China and Japan*. New York, Chealsea.

MONTUCLA, Jean Étienne (1758). *Histoire des Mathématics*. 2 v. Paris, Jombert.

NEEDHAM, Joseph (1959). *Science and Civilization in China*. 3 v. Cambridge, University Press.

NEUGEBAUER, Otto e SACHS, A. (1945). *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven, Conn. Yale University Press.

PIAGET, Jean e GARCIA, Rolando (1987). *Psicogênese e História das Ciências*. Lisboa, Publicações Dom Quixote.

SANFORD, Vera (1930). *A Short History of Mathematics*. New York, Houghton Mifflin.

SEVILHA, Isidoro de (1982). *Etimologías*. Versão bilingue (latim/ espanhol) de José Oroz Reta e Manuel-A. Marcos Casquero. Madrid, Biblioteca de Autores Cristianos. Livro III (De Mathematica).

SMITH, David Eugene (1923). *History of Mathematics*. 2 v. Boston, Ginn and Co.

VAN DER WAERDEN, Bartel Leenert (1985). *A History of Algebra.* Berlin, Springer-Verlag.

_____ (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin, Springer-Verlag.

Algumas páginas podem ser obtidas em: http://sites.uol.com.br/abrolezzi/historiadamatematica.html

Recebido em abr./1999; aprovado em jul./2000

Blurring distinctions between the empirical and the theoretical? The roles of examples in the proving process*

LULU HEALY**

Resumo

Este artigo examina as diferentes formas pelas quais alunos utilizam evidências empíricas em suas tentativas na redação de provas matemáticas. Exemplos de construções de alunos relacionados com atividades de Álgebra e Geometria são apresentadas para ilustrar como tais evidências podem ter uma variedade de funções no processo de prova – por exemplo, como testes de uma conjectura, como exemplos genéricos em argumentos dedutivos e como casos especiais para enfatizar propriedades particulares quando argumentos de natureza mais indutiva são desenvolvidos. As análises sugerem que o envolvimento na construção de objetos matemáticos durante interações com o computador pode encorajar alunos a identificar estruturas gerais quando da manipulação de casos particulares.

Palavras-chaves: prova; computador na educação matemática.

Abstract

This paper considers the different ways in which students make use of empirical evidence as they attempt to write valid mathematical proofs. Examples of students' proof constructions related to both algebra and geometry activities are presented to illustrate how that type of evidence can play a variety of different roles in the proving process. For example, it can act as tests of a conjectured conditionality, as generic examples in deductive arguments and as special cases to highlight particular properties when more inductive arguments are developed. It is suggested that involvement in the construction of mathematical objects during computer interaction can encourage students to identify general structures when they manipulate particular cases.

Key-words*: proof; computers in mathematics education.*

* Revisão de inglês: Lulu Healy.

** PUC-SP.

A consistent theme in research into proof in school mathematics is the relationship between empirical evidence and analytic argument. In general, this relationship has been seen as a problematic one, with the vast majority of students far from clear about the distinction between inductive and deductive reasoning. Some researchers have suggested that the cognitive gap between different modes of reasoning parallels a profound epistemological gap between ordinary argumentation (in which appeals to empirical evidence are accepted and commonplace) and mathematical proof (Balacheff, 1988; Duval, 1991). Rather than focussing on discontinuities, a number of recent studies, on the other hand, have stressed connections between different aspects of the proving process. Examples include Simon's idea of transformational reasoning (Simon, 1996), the cognitive unity of statement, proof and theory proposed by Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri and Garuti (1997), and the consideration of role of abductive reasoning in the construction of proofs by Arzarello, Micheletti, Olivero and Robutti (1998a).

This paper too concerns the building of connections between different aspects of the proving process. A number of examples of the kinds of the proof constructions produced by English and Welsh students[1] will be presented in order to consider the ways in which they co-ordinate (or not) empirical and theoretical modalities and how this co-ordination is shaped by different approaches to teaching proof.

1 The examples presented in this paper was are drawn from the research project, Justifying and Proving in School Mathematics funded by the ESRC, grant no. R000236178. The central role of Celia Hoyles in all aspects of the project is acknowledged. The author is also grateful for the financial support of FAPESP, Brazil (grant no. 1999/02659-0) whilst this article was being written and for the comments of the participants of the ICME working group on proof and proving in mathematics education on an earlier version.

First examples, then explanations

3 + 5 = 8 5 + 7 = 12
11 + 7 = 18 31 + 19 = 50

odd number = even no + 1

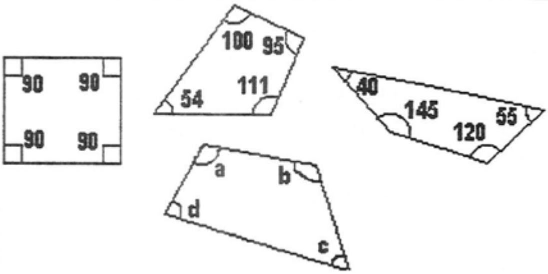
So when you add two odd numbers it is the same as adding two evens and 2 1's

odd + odd = even + even + 1 + 1

This makes an even number becuase it has already been proved that two evens make an even and two odds is even + even giving even + 2 which is even too.

So odd + odd = even

Figure 1: Explaining with reference to structure



a	b	c	d	a+b+c+d	
90	90	90	90	360	✓
100	95	111	54	360	✓
40	55	120	145	360	✓

By drawing some quadrilaterals and adding the interior angles, you can see that it is always 360°

a + b + c + d = 360°

Figure 2: Explaining with reference to action

Figure 1 presents an argument constructed to prove that the sum of two odd numbers is always even, while the argument in Figure 2 is an attempt to prove that the sum of the interior angles of a quadrilateral is always 360°.[2] There are some similarities between the structure of these two arguments, but also a rather important difference. Both arguments contain a set of examples which confirm the conjectured conditionality and which is followed by a written observation of why the given statement is true, but the nature of the respective observations indicates substantially different interpretations of what it means to explain. In the first, the explanation focuses on the mathematical properties underlying the examples, whereas the second explanation involves a description of the actions through which confirming evidence was produced.

Amongst the 2459 high-attaining mathematics students (14-15 years old) who attempted to construct proofs for these two statements, arguments with this structure – examples followed by observation – were the most common constructions produced (see Healy and Hoyles, 1998). This is not all that surprising since, in our mathematics curriculum, students are encouraged to approach proving in this way. Proof and justification activities are located largely in activities collectively known as "investigations" where data are to be generated, synthesised into the articulation of a general conjecture to be explained and, if possible, proved. As suggested within the hierarchy of levels by which our mathematics curriculum is organised (Department of Education, 1995), the different aspects of the proving process are interpreted as representative of ascending levels of reasoning, with inductive processes associated with lower levels than deductive ones. The result is that the former are introduced before, and usually independently from, the latter. A few students seem to be able traverse the implied developmental passage from the empirical to the theoretical for themselves and, when this happens (as can be seen in Figure 1), the arguments produced are meaningful and creative. In general, however, the generation of an appropriate set of examples does

2 These two questions appeared in a proof survey administered to students in England and Wales. For a complete description of the survey and its results see Healy and Hoyles (1998).

not necessarily motivate in students a need for deductive proof. We can say that there seems to be no natural progression from empirical and theoretical reasoning.

According to Duval (1998), any model of mathematics learning in which different ways of reasoning are organised according to a strict hierarchy is inappropriate. Rather than being representative of higher (or lower) levels of thinking, he argues that different kinds of cognitive activity have their own specific and independent development. This might suggest structuring activities to separately address specific types of thinking processes. Instead, we chose to develop computer-based situations so that students might face the empirical, the visual and the theoretical simultaneously.

We devised two teaching experiments (one using a Logo microworld and the other Cabri-Géomètre) during which students worked on activities with the following structure: first, mathematical objects are constructed on the computer; second, by attending to the construction procedure, the properties and relations underpinning these objects are to be identified and described; third, the computer resources are used to generate and test conjectures about further properties and to inform explanations as to why they must hold; fourth, the arguments generated during the computer activity are organised into logical deductive chains in the appropriate formal language.[3]

Before presenting examples of the students proof constructions formulated during the experiments, it is important to stress that, unlike the survey where students were given the conjectures to be proved, these activities involved students in both the processes of generating and proving conjectures. Boero, Garutti and Lemut's (1999) suggest that students' exploration during these two processes are similar in nature but differ in function. In their analysis of the different ways through which students' generate conditionalities, the central role played by empirical evidence is clear. The following sections present some of the ways in which evidence is used in the second process: the process of proving. These examples are

3 Details of the two teaching experiments can be found in Hoyles and Healy (1999).

by no means exhaustive, but have been selected to focus on different ways in which particular cases were incorporated in the construction of analytic arguments.

Generic Examples: Using a specific case to convey a general property

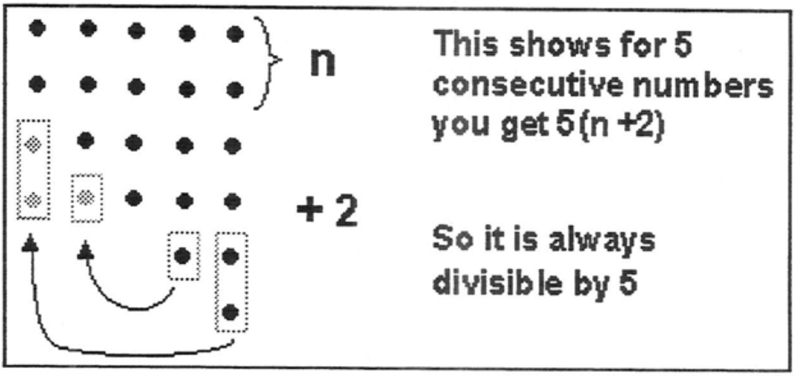


Figure 3: Manipulating to prove

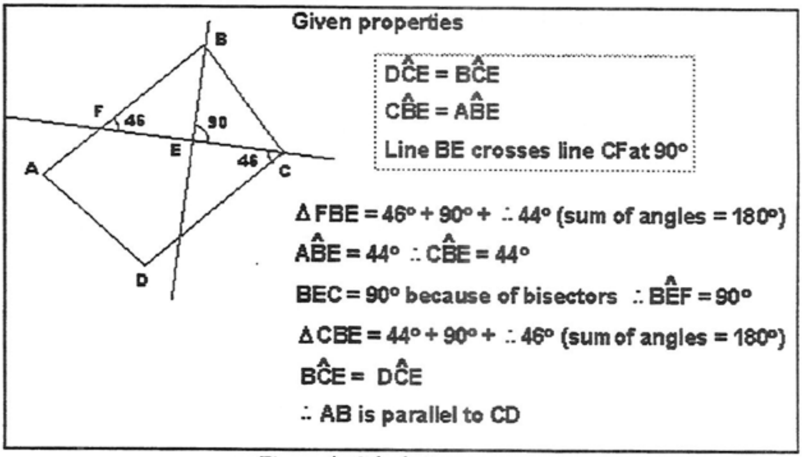


Figure 4: Calculating to prove

Figure 3 presents an attempt to prove that the sum of five consecutive numbers is always a multiple of five. It was written by a student who first constructed a variable Logo procedure to generate a column of n dots, and then used this to produce a visual representation of the five consecutive numbers 2, 3, 4, 5 and 6. The student manipulated the figure in such a way that the conjecture and its proof emerged simultaneously – in one moment the student identified both *that* and *why* the property holds. No more examples were deemed to be necessary as there was nothing special about the choice of 2 for the first number – or rather what was special about it was that it represented both the variable n and the first 2 dots in every column.

The argument presented in Figure 4 shows an attempt to prove that a quadrilateral in which two consecutive angle bisectors cross at right angles will have one set of parallel sides. In common with the previous argument, one specific case only is included and it was through manipulations performed on this example that the student managed to construct his proof. Like the consecutive numbers example, the student-generated conjecture (that segment AB is parallel to CD) emerged from the consideration of just one case. In contrast, the process of determining why was far from immediate and it was only after considerable computer exploration that the proof was attempted. During these investigations, a variety of configurations of the quadrilateral were created – in some the given properties were preserved and in others they were purposefully violated. The first critical moment in the construction of a proof occurred, ironically, when the general quadrilateral was turned into a specific case – that is when the measures for two carefully chosen (alternate) angles were obtained. From this point on, no further manipulations of the figure were made. The *calculation* of the value 3rd angle in the triangle FBE, a value which strictly speaking is unnecessary, provided the second vital step and the obtained value was used as the basis to deduce the parallel property.

In both these student proofs, the particular case is presented as a carrier of its underlying relationships, it serves as a representative for the class of possible examples. As such, they are both what have been termed *generic examples* (Pimm and Mason 1984; Balacheff 1988). Typically, generic examples have been presented as inferior to arguments formulated in more general terms (Balacheff, 1988; Harel and Sowder 1998), although Rowland (1998) has questioned recently whether this pejorative view is justified. He argues that generic examples provide a powerful and accessible means of for conviction and explanation and, at the very least, they might serve as a "half-way house" between empirical generalisation and generalised formal proof.

But – apart from the danger that this brings us back to the hierarchical model of learning that we wanted to leave behind – what does this mean in contexts where the distinction between the empirical and the theoretical is blurred? This is the case in both the microworlds we used: A Cabri figure is simultaneous a figure and a drawing; and working with general Logo procedures also enables students to experience simultaneously the general relationships and their specific manifestations. In some senses, this implies that every Cabri figure and every instantiation of a general Logo procedure is generic. The mathematical properties of any particular screen object are well-known to the student – they received explicit attention in the construction process. A specific example is hence one of the possible representations through which an object can be expressed. The construction process is another way of expressing of the same object – more tangible perhaps in the case of Logo, where its symbolic encoding is easily accessible, than in Cabri. From this perspective it makes little sense to consider a generic proof as inferior to a similar argument that happens to be presented using more general terms.

Constructing a justification from a special case

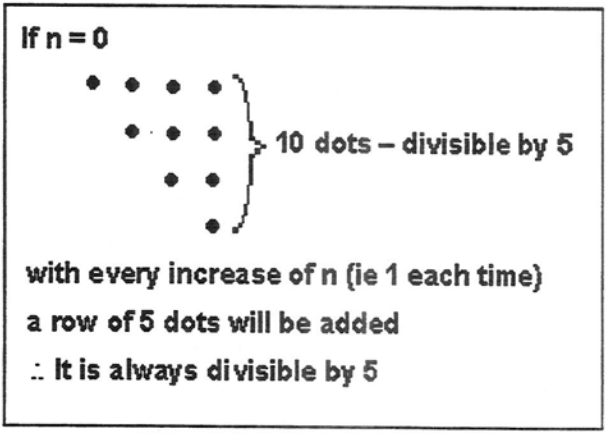


Figure 5: An inductive argument

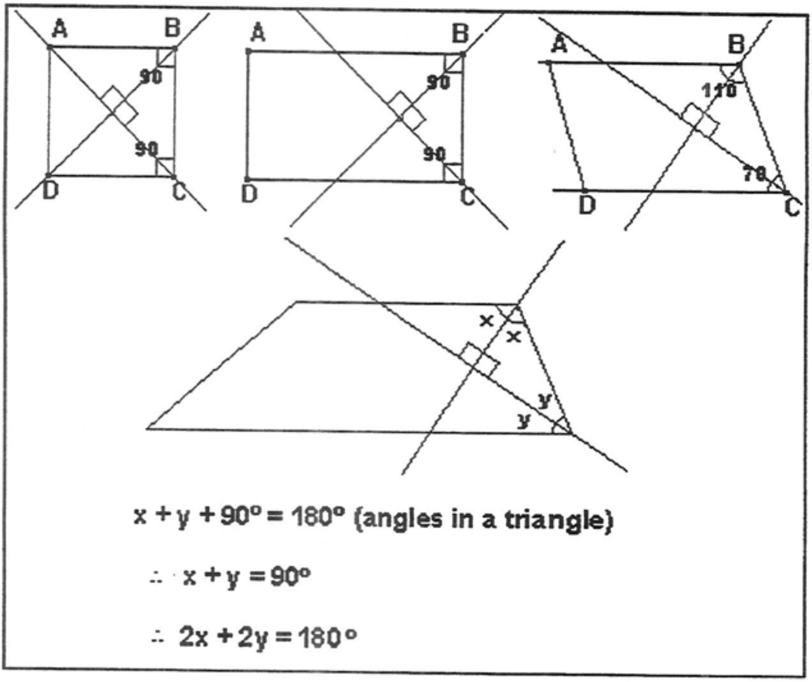


Figure 6: Special quadrilaterals

In contrast to generic examples chosen to be representative of their class, the examples presented in Figures 5 and 6 were chosen precisely because of their specific properties.

The argument in Figure 5 shows a another form of explaining why the sum of five consecutive number is always a multiple of five. This time, the conjecture was produced as a result of intensive empirical investigation in which various sets of five numbers were generated and re-arranged. In the visual view that emerged from these activities, the sum of five consecutive number was seen to consist of a rectangular block – of width 5 – and a triangular tail of dots. The proof was constructed using the reasoning that if the number of dots in the tail is a multiple of five, than the sum will be too. Testing this hypothesis involved producing a very particular case, when n = 0, and then explaining the relationship between this case and subsequent examples. The proof is hence a visually inspired example of inductive reasoning, but an inductive reasoning considerable more developed than that behind the argument in Figure 2[4].

The argument presented in Figure 6 was also developed from special rather than generic cases. The proof was constructed in response to the geometry problem described above, the investigation of properties of a quadrilateral in which two consecutive bisectors cross at right angles. It started from the (correct) hypothesis that a square would satisfy the given properties. Since the student already knew about various properties of a square, his next task was to identify which of these properties were shared by the other quadrilaterals which also satisfied the givens. He chose to focus on the sum of the two consecutive angles that had been bisected and, to help in his explorations, he decided to measure them. Then, he transformed his square into other well-known cases, a rectangle, a parallelogram and, finally, a trapezium. He conjectured that the properties shared by all these quadrilaterals was that the sum of the two angles is 180° and his subsequent proof was based on another very familiar construction, the right-angled triangle. The strategy employed in the production of this proof is very similar to that described by Arzarello, Micheletti, Olivero and Robutti (1998b) and, actually, both the Cabri-inspired proofs constructed presented in this paper involved what they describe as abductive as well as deductive reasoning.

The two examples in this section were intended to illustrate how special cases can form the basis of a logical argument. Both involve transformations of specific cases, but the nature of the final proofs was not the same. The first argument was driven by inductive concerns, a search for the difference between adjacent cases, while in the second, finally expressed in a deductive form, the focus was on identifying the

4 The arguments in both Figure 3 and Figure 5 could be criticised as restricted only to positive numbers. Undoubtedly, the majority of students who used the Logo microworld were thinking primarily of the positive cases (although we have some evidence of students mentally constructing visualisations of the negative cases that were impossible to construct using the microworld tools). But we can only be sure that this is not the case for students who use more general modes of representation if they make this explicit – it is quite possible, even likely, that most of them too consider mainly positive cases.

properties shared by the generated cases. Of course, it could be argued that in the geometry example, the student did not actually use any specific examples, but that the square, for example, was general – the (unknown) measures of the sides of the square were clearly irrelevant to the activity. This only goes to show that the distinction between the specific and the general in the geometry context is far from fixed.

Frameworks for proof?

Up to this point, proof constructions associated with two different teaching approaches have been considered. In the first approach, the approach prescribed in the statutory Mathematics Curriculum for England and Wales, students are expected to start by experimenting with data and identifying regularities and only later focus explicitly on mathematical properties (and later still on the relationships amongst properties). The second approach involved the use of computer microworlds in which students construct mathematical objects in order to provide the data from which they can abstract further regularities. It has been argued that the first approach can have the effect of confining students to empirically based reasoning, while in the second students engage simultaneously with specific configurations and general relationships. Even the limited examples included in this paper illustrate how interacting with the tools of the Cabri and Logo microworlds can provoke students to develop a variety of reasoning approaches and facilitate reflections upon the steps made in constructing and manipulating new objects. The student proofs presented above show too how the reflections could be successfully reorganised into coherent mathematical arguments. Not surprisingly this did not always happen. One situation in which all students experienced considerable difficulties was when the construction of a geometrical object did makes visible adequate information for a proof – that is when it was necessary for students to add further constructions to their figures. This leaves us with a question to consider: What activities might help the student who produced the argument presented in Figure 7 develop the necessary steps to complete the proof?

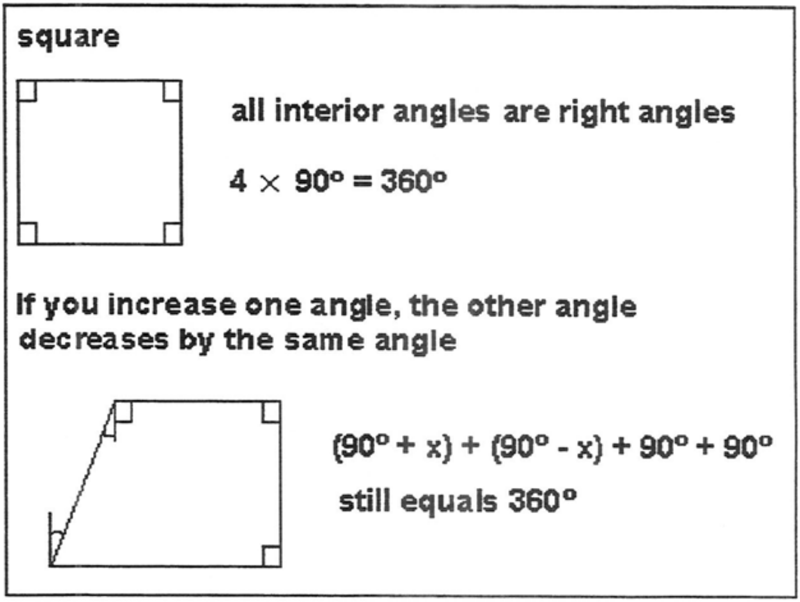


Figure 7: Where next?

References

ARZARELLO, F.; Micheletti, C.; Olivero, F. and Robutti, O. (1998a). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education* University of Stellenbosch, S. Africa, v. 2, pp. 24-31.

_____(1998b). Dragging in Cabri and Modalities of Transistion from Conjectures to Proofs in Geometry. *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education* University of Stellenbosch, S. Africa. v.2, pp. 32-39.

BALACHEFF, N. (1988). *Une Étude des Processus de Preuve en Mathématiques*. Thèse d'état, Grenoble.

BOERO, P.; Garuti, R. and Lemut, E (1999). About the Generation of Conditionality of Statements and its Links with Proving. *Proceedings of the Twenty-third International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Haifa, Isreal, v. 2, pp. 137-144.

DEPARTMENT FOR EDUCATION (1995). *Mathematics in the National Curriculum* London, HMSO.

DUVAL, R. (1991). Structure du Raisonnement Déductif et Apprentissage de la Démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, pp. 233-261.

_____(1998). Geometry from a cognitive point of view. In: MAMMANA, C. and VILLANI, V. (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, pp. 37-51.

HAREL, G. and Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes. In: E. DUBINSKY, A. Schoenfeld, and KAPUT, J. (eds.) *Research on Collegiate Mathematics Education*. USA, American Mathematical Society.

HEALY, L. e HOYLES, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics. *Technical report on the nationwide survey.* Institute of Education, Univ. London.

_____(1998). Technical Report on the Nationwide Survey: Justifying and Proving in School Mathematics. Institute of Education, University of London.

HOYLES, C. and HEALY, L. (1999). Linking Informal Argumentation with Formal Proof through Computer-Integrated Teaching Experiments. In: *Proceedings of the Twenty-third International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Haifa, Israel.

MARIOTTI, A.; BARTOLINI BUSSI, M.; BOERO, P.; FERRI, F. and GARUTI, R. (1997). Approaching Geometry Theorems in Context: From History and Epistemolgy to Cognition. *Proceedings of the Twenty-first International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Lahti, Finland v 1. pp 180-195.

MASON, J. and Pimm, D. (1984). Generic Examples: seeing the General in the Particular. *Educational Studies in Mathematics*, v. 15, pp. 277-289.

ROWLAND, T. (1998). Conviction, Explanation and Generic Examples. *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education* University of Stellenbosch, S. Africa, v. 4, pp. 65-72.

SIMON, M. A. (1996). Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search for a Sense of Knowing. *Educational Studies in Mathematics*, n. 30, pp. 197-210.

Recebido em fev./2000; aprovado em abr./2000

Dissertações apresentadas no segundo semestre 2000

CELESTINO, M. R. *Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90.* São Paulo, 2000. 123p. Dissertação PUC-SP.

É um trabalho que tem por alvo contribuir com o estudo da arte de pesquisas sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear. Apresenta coleta de pesquisas de autores brasileiros, realizadas na década de 1990. Como resultado, é apontado que, embora houvesse um pequeno número de obras brasileiras, elas apresentavam resultados compatíveis com os de pesquisas "internacionais" e até mesmo resultados inéditos.

Palavras-chave: estado da arte, Álgebra Linear, pesquisas brasileira.

FIGUEIREDO, A. C. *Probabilidade condicional: um enfoque de seu ensino.* São Paulo, 2000. 158p. Dissertação PUC-SP.

No trabalho é elaborada, aplicada e analisada uma seqüência de ensino, levando em consideração os princípios de uma Engenharia Didática sobre o conceito da Probabilidade Condicional em cursos de Estatística na Universidade. Na elaboração das questões, diferentes registros de representação foram articulados, tomando por base a teoria de R. Duval.

Palavras-chave: Probabilidade Condicional, Estocástica, Registros de Representação.

GOMES, G. H. *Um estudo de áreas com alunos da 6ª série do ensino fundamental.* São Paulo, 2000. 151p. Dissertação PUC-SP.

Nessa pesquisa foi estudada a evolução de conhecimentos alcançada por alunos da 6ª série do ensino fundamental a respeito do conceito de área ao se aplicar uma seqüência didática elaborada à luz do quadro teórico de Douady.

Palavras-chave: área, dialética ferramenta/objeto, ensino.

HARUNA, Nancy Cury Andraus. *Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. Dissertação de mestrado. Orientador: Dr. Saddo Ag Almouloud,

No trabalho de Nancy foi analisado como se processa a apreensão do conceito do teorema de Thales por alunos da 8ª série do ensino fundamental. Levantaram-se os obstáculos didáticos e epistemológicos, as variáveis de situação e verificou-se até que ponto o uso do computador favorece a superação dos obstáculos ou proporciona outros.

LINDEGGER, Luiz Roberto de Moura. *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos*. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Dra. Sandra Maria Pinto Magina.

No trabalho é apresentada uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, em que se pretendeu introduzir os conceitos das razões trigonométricas seno, co-seno e tangente a partir da manipulação de modelos.

MABUCHI, Setsuko Takara. *Transformações Geométricas - a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores*. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Dra. Célia Maria Carolino Pires.

No trabalho são analisados estudos e pesquisas sobre o ensino e aprendizagem das transformações geométricas no ensino fundamental e tem como finalidade contribuir para a reflexão de como este tema deve ser incorporado aos cursos de formação de professores de Matemática.

PINTO, Marco Antonio Di. *Ensino e aprendizagem da Geometria Analítica: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Dra. Silvia D. A. Machado.

O trabalho apresenta um panorama das pesquisas de autores brasileiros sobre o processo ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, realizadas na década de 1990. Para tanto foi feita uma análise de cada obra produzida nessa década enfocando os objetivos, referencial teórico e, principalmente, as contribuições das mesmas. A investigação sugere pistas para futuras pesquisas na área.

SARAIVA, Ronaldo Penna. *Novas tecnologias no ensino do conceito de limite de Função.* Dissertação de Mestrado. Orientadora: Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori,

A pesquisa avalia os ganhos pedagógicos que se pode obter no ensino do conceito de limite, quando utilizamos meios tecnológicos (computadores e/ou calculadoras gráficas) e as atividades de introdução do conceito de limite são relacionadas à evolução histórica desse conceito.

Normas para publicação

Pesquisadores interessados em contribuir com publicação nesta revista deverão preparar o texto e enviá-lo segundo as regras que se seguem.

Preparação para envio – uma cópia do texto **em disquete(s)** com os nomes dos autores e sem numeração de página. Outras quatro (4) cópias **impressas**, sendo que uma deve ser idêntica à(s) do(s) disquete(s) e as outras três (3) devem ter numeração de página e não trazer os nomes dos autores.

Versão – programa Word 6.0 for Windows, para ser lido em PC.

Formatação

Título – centralizado, em letras maiúsculas e em negrito.

Nomes dos autores – em uma só das vias impressas e no disquete, separar os nomes dos autores do título por um espaço simples entre linhas. Os dados de cada autor deverão ser colocados conforme exemplo, abaixo do título.

Ex: Maria Dolores da Silva
Mestre em Educação Matemática – PUC-SP
Professora do Curso de Matemática – PUC-SP
e-mail: dolores@pucsp.br

Resumo – em português e inglês ou francês, com, no máximo, 10 linhas, espaço duplo, mesma fonte do texto, em itálico, acompanhado de três palavras-chave.

Corpo do texto – Papel tamanho A4
Margem superior e inferior com 2,5 cm
Margem direita e esquerda com 3,0 cm
Fonte Times New Roman
Tamanho da letra 12 pontos
Espaçamento entre linhas 1,5 linha
Alinhamento justificado

Referências bibliográficas – de acordo com as normas da ABNT em vigor.

Exemplos:

- Livro

  GOMES, L. G. F. (1998). *Novela e sociedade no Brasil.* Niterói, EdUFF. (Coleção Antropologia e Ciência Política, 15).

- Tese

  BARCELOS, M. F. P. (1998). *Ensaio tecnológico, bioquímico e sensorial de Soja e guandu enlatados no estádio verde e maturação de colheita*. Tese de doutorado em Nutrição, Campinas, Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas.

- Artigo de revista

  GURGEL, C. (1997). Reforma do Estado e segurança pública. *Política e Administração*, Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, pp. 15-21, set.

Citações no texto – citações no texto devem vir acompanhadas de sobrenomes(s) do(s) autor(es) em corpo menor e entre parênteses, acrescido do ano de publicação e página.

Tabelas e gráficos – deverão ter como elementos: número, título, data de referência, fonte e nota.

Impressão – em jato de tinta ou em laser. Páginas impressas só numa face.

Os trabalhos devem ser enviados para:

Revista Educação Matemática Pesquisa
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 - Consolação - SP - CEP 01303-050
Fone: (11) 3256-1622 ramal 202
Fax: (11) 3159-0189
e-mail: pgedmat@exatas.pucsp.br

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

REVISTA DO PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa publica trabalhos voltados para as linhas de pesquisa: *A Matemática na estrutura curricular e a Formação de Professores; Epistemologia e Didática da Matemática; Tecnologias de Informação* e *Didática da Matemática.* Também está aberta para outros campos do conhecimento, que venham proporcionar um diálogo com a área, como a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História das Ciências e a História Disciplinar.

INFORMAÇÕES PARA AQUISIÇÃO

Assinatura 2000 – n[os] 1, 2 e Especial – R$ 40,00
Número avulso – R$ 15,00

. . . .

Anexo cópia do depósito em conta no **Banco Real**, agência 0384, c/c Educ/FCSP nº 3.704.722, para aquisição dos seguintes exemplares de *Educação Matemática Pesquisa:*

☐ nº 1 ☐ nº 2 ☐ nº Especial

Nome: ______________________________
Endereço: ______________________________
____
Cep: __________ Cidade: ______________ Estado: __
Telefone: ______________ Ocupação: ______________