ISSN 1516-5388

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

v. 2 - n. 1 - 2000

educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA v. 2 - n. 1
educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática
puc-sp

A ***Educação Matemática Pesquisa*** conta com o trabalho de pareceristas *ad hoc*.

Correspondência:

Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Rua Marquês de Paranaguá, 111 – CEP 01303-050 – Consolação – São Paulo – SP

Fone: (11) 3256-1622 ramal 202

Fax: (11) 3159-0189

E-mail: pegedmat@exatas.pucsp.br

Expediente: de segunda a sexta-feira das 10h30min às 12h e das 13h30min às 17h30min

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

ISSN 1516-5388

Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 2, n. 1, pp. 1-118, 2000

educ

2000

Catalogação na fonte - Biblioteca Reitora Nadir Gouvêa Kfouri / PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós - Graduados em Educação Matemática / Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - n.1 (março de 1999) - São Paulo : EDUC, 1999 - semestral
ISSN 1516-5388

1. Educação Matemática Pesquisa - periódicos. I. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

EDUC – Editora da PUC-SP

Direção
Maria Eliza Mazzilli Pereira

Coordenação Editorial
Magali Oliveira Fernandes
Sonia Montone

Revisão
Sonia Rangel

Revisão de Inglês
Carolina Muniz Ventura Siqueira

Editoração Eletrônica
Waldir Antonio Alves

Capa
Sara Rosa

educ
Rua Ministro Godói, 1213
Cep 05015-001 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3873-3359 / Fax: (11) 3873-6133
E-mail: educ@pucsp.br

Projeto Editorial

A revista *Educação Matemática Pesquisa*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, de regularidade semestral, constitui um espaço de divulgação de pesquisas científicas da área.

O projeto editorial da revista prioriza artigos científicos, inéditos no Brasil, da área de Educação Matemática. Mais particularmente os relacionados às linhas de pesquisa do Programa: *A Matemática na estrutura curricular e formação de professores; História, Epistemologia e Didática da Matemática* e, também, *Tecnologias da Informação e Didática da Matemática.* A prioridade dada às linhas descritas não é extensiva aos referenciais teóricos, ao contrário, procura-se contemplar a diversidade.

Serão acolhidos, também, artigos que favoreçam o diálogo entre Educação Matemática e áreas afins, como a Matemática, a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História da Matemática e a História das Disciplinas, entre outras.

A seleção dos artigos faz-se mediante a aprovação de dois pareceristas do conselho editorial ou *ad hoc.* Os pareceres serão enviados aos autores.

Os artigos são apresentados sempre na versão original, com resumos bilíngües (português e inglês ou francês).

O projeto editorial prevê, ainda, que os volumes da revista contenham uma ou mais modalidades, como análises ou relatos de pesquisa, comunicações (ciclo de palestras, conferências...), entrevistas, depoimentos ou resenhas científicas.

Em cada número haverá indicações sucintas das dissertações e teses produzidas no Programa, no semestre de edição.

Os Editores

Editorial Project

The journal Educação Matemática Pesquisa *of the Post-Graduation Program in Mathematics Education of the Catholic University of São Paulo (PUC/SP) is published every semester with the aim of providing a space for disseminating scientific research in the area.*

The policy adopted by the editors is to prioritise scientific articles which have not been published in Brazil, related to Mathematics Education, particularly those addressing the lines of research of the program: Mathematics, curriculum structure and teacher training, History, Epistemology and Didactics of Mathematics and Information Technology and the Didactics of Mathematics. *The priority given to the described lines is not restricted to theoretical references; on the contrary, it is hoped that the journal will reflect the diversity that characterises research in Mathematics Education.*

The editors also encourage the submission of articles which open dialogues between Mathematics Education and related areas, such as Mathematics, Epistemology, Educational Psychology, Philosophy, History of Mathematics and its teaching, amongst others.

In order to be selected, articles should receive two favourable reviews. Referees will be chosen from the editorial committee or they will be ad hoc reviewers. Authors will receive copies of the reviews.

Articles will be presented always in the original language of the author along with abstracts in Portuguese and English or French.

The journal can also include works of various different types, such as: research reports, papers based on lectures or conferences, interviews, commentaries on issues pertaining to research, critiques of articles and books, literature reviews and theoretical analyses.

Each issue will also include brief descriptions of the dissertations and theses produced in the Program during the semester of the edition.

Editorial Committe

Sumário

Editorial 11

Apresentação 15

A constituição de uma trajetória de investigação em sala de aula: múltiplos enfoques 19
(The formation of a trajectory of investigation in the classroom: multiple foci)
Anna Franchi

Environnements "calculatrice symbolique": necessité d'une socialisation des processus d'instrumentation evolution des comportements d'eleves au cours de ces processus 71
(Ambiente "calculadora simbólica": necessidade de uma socialização dos processos de instrumentalização na evolução dos comportamentos dos alunos ao longo desses processos)
Dominique Guin, Luc Trouche

Novas tecnologias computacionais e o ensino de Matemática 101
(New Computational Technologies and the Teaching of Mathematics)
Waldir L. Roque

Dissertações defendidas no primeiro semestre de 2000 115
(Dissertations completed in the Program in the first semester of 2000)

Normas para publicação 117

Editorial

Este número da *Educação Matemática Pesquisa* (volume 2, número 1) é o primeiro do ano de 2000, fortalecendo o ideal de continuidade da revista. Nossos esforços para que a revista torne-se um veículo respeitado pela área são constantes e têm sido recompensados, na medida em que o primeiro número de 1999 esgotou-se rapidamente e tem sido bastante procurado ainda.

Os artigos em apresentação bilingüe tratam de assuntos relevantes à Educação Matemática, atendendo nosso Projeto Editorial. Pesquisa em sala de aula e Novas tecnologias compõem os temas deste volume. Além dos artigos, apresentamos de forma suscinta a produção discente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, referentes ao primeiro semestre de 2000. A apresentação dos resumos das dissertações produzidas no Programa é uma forma de indicarmos as direções de pesquisa nele desenvolvidas, além de pretender, num diálogo com a área, contribuir com trabalhos de levantamento bibliográfico.

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Editora

Editorial

This issue of Educação Matemática Pesquisa *(volume 2, issue 1) is the first one of the year 2000, strengthening the journal's ideal of continuity. Our efforts so that the journal becomes a respected vehicle in the area are constant and have been rewarded, as the first issue of 1999 went quickly out of print but readers continue to ask for it.*

The bilingual articles deal with relevant matters in the area of Mathematics Education, in conformity with our Editorial Project. Research in the Classroom and New Technologies comprise the themes of this volume. Alongside the articles, the issue also includes brief descriptions of the work completed by the students of the Post-Graduate Studies in Mathematics Education Program, PUC/SP, during the first semester of 2000. The descriptions of the dissertations produced in the Program are included as an indication of the directions of research developed within the Program. In addition, they offer a contribution to surveys of a bibliographic nature.

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Editor

Apresentação

Pesquisa em sala de aula e Novas tecnologias compõem os temas deste volume. Além deles, é apresentada de forma sucinta a produção discente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, referente ao primeiro semestre de 2000.

O trabalho de Anna Franchi, *A constituição de uma trajetória de investigação em sala de aula: múltiplos enfoques,* primeiro artigo, tem aporte na pesquisa de campo e propõe discutir os fundamentos teóricos de uma pesquisa interpretativa em sala de aula.

O artigo de Dominique Guin e Luc Trouche, *Environnements «calculatrice symbolique»: necessité d'une socialisation des processus d'instrumentation evolution des comportements d'eleves au cours de ces processus*, explora os efeitos possíveis de um artefato para processos de conceitualização, utilizando calculadora simbólica. Apresenta, também, duas atividades experimentais.

O texto de Waldir L. Roque, *Novas tecnologias computacionais e o ensino de matemática,* apresenta a contribuição de um especialista em Ciência da Computação sobre o ensino de Matemática ante novas tecnologias computacionais.

A apresentação das dissertações produzidas no Programa é uma forma de indicar as direções de pesquisa nele desenvolvidas com as metas de diálogo com a área e de contribuição aos trabalhos de levantamento bibliográfico.

This Issue

Research in the Classroom and New Technologies comprise the themes of this volume. Alongside the articles, the issue also includes brief descriptions of the work completed by the students of the Post-Graduate Studies in Mathematics Education Program, PUC/SP, during the first semester of 2000.

The paper by Anna Franchi, A constituição de uma trajetória de investigação em sala de aula: múltiplos enfoques [The formation of a trajectory of investigation in the classroom: multiple foci], *concerns issues related to undertaking research in the field and discusses the theoretical bases of a classroom-based research study.*

The article by Dominique Guin and Luc Trouche, Environnements «calculatrice symbolique» : necessité d'une socialisation des processus d'instrumentation evolution des comportements d'eleves au cours de ces processus {"Symbolic calculator" environments: the necessity of a socialisation of the processes of instrumentalisation in the evolution of students' behaviours in the course of these processes} explores the possible effects of an artefact, in this case a symbolic calculator, on the conceptualisation process. Two experimental activities are also presented.

The text by Waldir L. Roque, Novas Tecnologias Computacionais e o Ensino de Matemática [New Computational Technologies and the Teaching of Mathematics], *presents the contribution of a specialist in Computer Science to the teaching of Mathematics, concerning the support that can be given by new computational technologies.*

The descriptions of the dissertations produced in the Program are included as an indication of the directions of research developed within the Program. In addition, they offer a contribution to surveys of a bibliographic nature.

A constituição de uma trajetória de investigação em sala de aula: múltiplos enfoques

ANNA FRANCHI*

Resumo

Este texto discute fundamentos teóricos de uma pesquisa interpretativa em sala de aula, centrando-se em aspectos que se referem à delimitação da problemática da pesquisa em campo. Descreve um processo em que as interrogações iniciais do pesquisador conjugam-se às exigências do planejamento curricular da escola, e em particular às do planejamento da classe, e em que se evidenciam conflitos advindos do confronto entre esse processo e aquele instaurado pelo delineamento quase-experimental de pesquisa. Pretende-se igualmente evidenciar como uma praxis prolongada em campo permite articular múltiplas dimensões de análise, tendo em vista a compreensão da compreensão dos alunos sobre situações multiplicativas elementares. Nessa articulação, fenômenos aparentemente de mesma natureza assumem uma especificidade própria, tanto no que concerne à origem das dificuldades dos alunos na resolução dessas situações, como no que concerne aos procedimentos de ensino para saneá-las.

Palavras-chave: situações multiplicativas, pesquisa em sala de aula, números naturais.

Abstrat

This paper discusses the theoretical bases of classroom research, focusing on aspects related to the constraints of undertaking field research. It describes a process by which the initial investigations of the researcher must become integrated with the school's curriculum demands and, in particular, the planning of the class, illustrating the conflicts that arise from the confrontation of this integration process with established processes of quasi-experimental research. It also aims to show how prolonged practice in the field can enable the articulation of multiple dimensions of analysis, concerning, in this case, the students' understanding of situations involving multiplication at elementary levels. In this articulation, phenomena of apparently the same nature assume a specificity of their own, both in relation to the origin of the difficulties students experience in resolving the situations and to the teaching procedures used to overcome these difficulties.

Key-words: *multiplicative situations, classroom research, natural numbers.*

* Doutora em Educação e Currículo pela PUC-SP. Professora do Programa de Estudos Pós–Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. E-mail: franchi@pucsp.br

Apresentação

Questões a respeito do ensino e da aprendizagem das operações com números naturais na escola elementar instigam-me, tendo se constituído em tema de investigação desde o início de minha carreira profissional. De onde provêm, afinal, as dificuldades de muitos alunos em efetuar cálculos, em estimar somas, diferenças, produtos, em relacionar as operações e resolver problemas com esses números? Alguns aspectos dessas questões foram estudados em minha dissertação de mestrado (Franchi, A. 1977). Suas contribuições constituem hoje uma parcela mínima da grande quantidade de dados obtidos sobre a resolução de problemas aditivos em pesquisas nacionais e internacionais. Faço uma rápida menção a esse estudo, situando de modo mais específico a origem de minhas preocupações na pesquisa que relato neste artigo e os dilemas enfrentados pela mudança de perspectiva sob a qual assumi a produção do conhecimento científico, nas condições de ensino na sala de aula.

Propus-me a avaliar a ocorrência de diferentes procedimentos na resolução, pelos alunos, de diferentes situações aditivas (situações interpretativas ou situações de base) (Vergnaud, 1981, 1990, Vergnaud e Duran, 1976), suas dificuldades iniciais em relacionar esses procedimentos e essas situações, e, de modo mais específico, a interferência dessas dificuldades na resolução de problemas aditivos verbais rotineiros. Abordei essa questão, segundo o método "quase experimental" (Campbell e Stanley, 1963, p. 34), controlando as condições de introdução da subtração no ensino regular da 1°série do ensino fundamental.

A pesquisa desenvolveu-se na "Escola Experimental da Lapa",[1] cidade de São Paulo, em quatro classes da referida série. Conforme o método supramencionado, foram considerados dois grupos de estudo, cada um composto de duas classes de cerca de 30 alunos, comparáveis no ponto de partida, segundo critérios bem definidos. Um dos grupos, grupo "controle", recebeu um tratamento convencional, centrado na interpretação do símbolo "menos" como "tirar". O grupo experimental desenvolveu atividades interpretando diferentes situações aditivas a partir do esquema *parte-todo*, ou seja, baseadas na separação de objetos em duas

1 Escola Estadual Dr. Edmundo de Carvalho, na qual eu integrava, a equipe de orientação da área de Matemática, tendo assumido anteriormente a função de docência.

classes disjuntas, identificação do número total de objetos e do número de objetos em cada uma das partes. Observe-se que, nessa interpretação, as igualdades eram formuladas quer na forma $a + b = c$, $c - b = a$, quer como $c = a + b$, $a = c - b$ (aplicação da propriedade simétrica da igualdade) e o sinal de subtração lido sempre como "menos". Essas escolhas visavam não reforçar inicialmente o significado corrente de *tirar* (gastar, perder) atribuído informalmente à subtração, evitando-se igualmente atribuir ao sinal = (é igual a) a conotação de uma resposta que finaliza uma ação. É importante observar que a formação desses grupos específicos não teve como objetivo central a comparação da eficiência dos diferentes procedimentos pedagógicos neles desenvolvidos, mas avaliar em que medida os pressupostos sobre a interferência das diferentes situações interpretativas nos procedimentos de resolução dessas situações ocorre independentemente de procedimentos pedagógicos que as reforçam ou as minimizam.

Realizamos inicialmente um teste de avaliação do desempenho dos alunos em habilidades consideradas como "pré-requisitos" para a aprendizagem da subtração e, a seguir, duas observações básicas: pré teste e pós teste, com as mesmas questões. Estas foram selecionadas em função de critérios relativos à interpretação de situações aditivas em diferentes modos de representação, ou seja, representações icônicas, linguagem verbal, igualdades matemáticas. Além disso, foi introduzido um teste final para avaliação da hipótese da pesquisa no que se refere aos procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de "problemas verbais" na forma textual rotineira. Esse teste incluiu problemas que descrevem uma ação que se desenrola no tempo e em que há uma situação anterior à qual corresponde um número "*a*" e uma situação posterior, à qual corresponde um número "*b*", "*b*" podendo ser menor, maior ou igual ao número "*a*". Trata-se de situações caracterizadas por Vergnaud e Duran (1976) e Vergnaud (1981) como descrevendo uma composição do tipo *"estado – transformação – estado"* e em que se deve determinar o "estado inicial", a "transformação" ou "o estado final". É importante observar que essa forma de atividade de resolução de problemas não foi anteriormente desenvolvida em nenhum dos grupos estudados, ou seja, quer no grupo experimental, quer no grupo controle.

As análises estatísticas realizadas indicam que as diferenças entre os comportamentos dos alunos desses grupos, enquanto indicativas de maior eficiência de desempenho, medida pelo número de acertos e erros nos instrumentos de avaliação da pesquisa, não foram significativas. Entretanto, no que se refere à ocorrência de determinados fenômenos em função dos diferentes procedimentos de ensino, a pesquisa permitiu a confirmação de hipóteses de natureza qualitativa e o avanço de suposições teóricas para compreendê-las. Entre elas:

Existe uma correspondência, em geral, bastante evidente entre uma determinada situação-problema e sua representação em linguagem matemática, com uma ocorrência em freqüências consideráveis de procedimentos não canônicos, ou seja, possíveis de ser expressos por $a + x = b$; $x + a = b$; $b - x = a$; $x - a = b$. Essas ocorrências melhor se constatam quando as situações problemas são propostas exclusivamente em linguagem verbal.

As hipóteses explicativas para esses fatos, expostas em Franchi, A. (1977, pp. 117-132), consideram: a) a importância das experiências informais vividas pelas crianças e as condições de uso da linguagem na produção de uma associação entre os significados dos termos "*mais*" e juntar, acrescentar, "*menos*" e tirar; b) dificuldades para as crianças em estabelecer relações que permitem intercambiar, em termos de ação concreta, as diferentes situações (por exemplo, substituir "*se tinha x, ganhei b e fiquei com c* (b, c números naturais e $c > b$) por *então tinha c menos a quantidade que foi ganha*). Tais situações são pensadas como ações ordenadas no tempo e, conseqüentemente, irreversíveis; por outro lado, dificuldades de operar com a relação de antonímia que se estabelece entre pares de expressões da linguagem corrente, tais como tirar/ganhar, descer/subir, ganhar/perder.

Ainda, no que se refere às fórmulas não canônicas e aos procedimentos de cálculo que lhes são associados, constatam-se dificuldades para o estabelecimento de relações de equivalência entre diferentes fórmulas aditivas equivalentes (garantidas pela aplicação de propriedades da adição e de sua relação com a subtração).[2]

2 Observe-se que em Vergnaud (1976, 1981, 1990, 1994, 1995) a interpretação dos procedimentos de resolução dos problemas é feita em termos de cálculo relacional; estados e transformações são interpretados matematicamente como medidas associa-

Uma articulação entre essas suposições explicaria como as dificuldades de resolução dos problemas aditivos se associam ao modo peculiar de tradução em linguagem matemática das situações-problema, à incidência na resolução de problemas aditivos de procedimentos não canônicos, bem como às maiores dificuldades encontradas na resolução de situações que mobilizam tais procedimentos. A realização de um teste de correlação de postos ou de Spearman (coeficiente igual a 0,60) indicou a não rejeição da hipótese relativa à existência de uma correlação entre acertos na resolução dos problemas verbais rotineiros do tipo proposto e acertos nas atividades de manipulação de expressões aditivas (como as acima mencionadas) obtendo expressões equivalentes.

Com essas e diversas outras observações pudemos esclarecer importantes aspectos das dificuldades das tarefas de natureza cognitiva envolvidas na resolução, pelo aluno, de problemas aditivos.

Entretanto, a análise centrada em categorias codificadas de erros, considerando exclusivamente igualdades matemáticas e algoritmos aditivos ou subtrativos produzidos pelo aluno, desconsiderando seu discurso ao realizar suas ações, desconsiderando suas razões, suas perspectivas próprias, foram desde então percebidas como limitações ao aprofundamento de algumas das inferências acima colocadas. Ainda, fazendo presentemente uma releitura das análises, redecifrando códigos de categorias de erros e acertos, procurei inutilmente indícios para compreender questões, ainda hoje polêmicas, indiretamente abordadas na definição dos diferentes tratamentos pedagógicos. Por exemplo, como os alunos do grupo experimental perceberam-se diante do ensino a eles proposto? Que racioci-

---

das a números positivos (estados), positivos ou negativos (transformações). Em minha pesquisa, esses procedimentos foram analisados à luz da interferência entre significados da linguagem natural e da linguagem matemática tomados com planos simbólicos distintos. Nessa perspectiva, foram introduzidos na análise aspectos relativos à dimensão temporal, ou seja, à dificuldade de inversão de ações compreendidas como ordenadas no tempo e *à natureza antônima das expressões em linguagem natural* associadas aos sinais mais ou ao sinal menos. A importância dessa relação na análise das dificuldades de problemas aditivos, do tipo composição de transformações, foi mais recente considerada na pesquisa de Damm (1992), sob a perspectiva da teoria de registros de representação, de R. Duval.

nios mobilizaram? Como interpretaram as igualdades entre expressões aritméticas? Como os professores que aplicaram as diferentes seqüências pedagógicas as avaliaram? Os professores participantes da pesquisa deram constantemente depoimentos sobre o desenvolvimento da seqüência de aprendizagem em suas classes. Onde estão esses julgamentos? Por que não foram considerados?

Nessa mesma direção pude perceber, a partir do conhecimento da escola, dos professores e dos alunos envolvidos na pesquisa, a influência de variáveis não controladas nos resultados da experiência desenvolvida como, por exemplo, a atuação do professor (certamente importante), o tempo dedicado ao ensino da subtração. Esse foi insuficiente para trazer elementos mais consistentes de avaliação sobre a influência dos diferentes enfoques, o do grupo experimental e o do grupo controle, nos procedimentos mobilizados pelos alunos na resolução de problemas aditivos, conforme um dos objetivos da formação desses grupos.[3]

A partir de considerações como as acima formuladas, pude, desde então, estabelecer um confronto entre o rigor definido pelo estabelecimento de certas condições de controle e pelas análises estatísticas, e o imperativo das condições inerentes ao ensino em sala de aula e à organização escolar.

Os questionamentos acima incidem sobre aspectos essenciais que diferenciam métodos experimentais de pesquisa de métodos interpretativos, tendo se constituído em fortes razões de minha opção por esses últimos, na continuidade de minhas pesquisas.

Refiro-me, de modo geral, a métodos que buscam trazer para o contexto de sala de aula os posicionamentos, os objetivos, as indagações dos métodos interpretativos empregados no trabalho de campo. Esses podem se pensados, conforme Erickson (1989, p. 200), entre outros, em termos: de considerá-la como um meio social e culturalmente organizado para a aprendizagem, ou seja, em sua estrutura e ambiente específicos; dos significados atribuídos às interações entre professor e aluno no pro-

---

3 A maior facilidade dos alunos do grupo controle (91% e 86%) em resolver situações subtrativas do tipo "tirar" foi estatisticamente não significativa. O mesmo para a maior ocorrência de procedimentos canônicos ($a - b = x$), pelos alunos do grupo experimental na resolução de problemas do tipo: tinha x e comprou a, tinha a e comprou x.

cesso de ensino; das relações entre o que sucede na sala de aula (como um todo) com o estabelecimento escolar, com o sistema escolar, com a família dos alunos.

Essa densidade e essa complexidade presentes no ambiente da sala de aula exige, conforme Erickson (1989, p. 211), uma reconceitualização da noção de causa, de modo a ultrapassar as implícitas nas metáforas que orientaram a maior parte da investigação educacional desde a década de 1950 até o final da década de 1970: a metáfora da sala de aula vista como algo similar a uma caixa de Skinner e a metáfora dos sistemas escolares e sociedade mais ampla como algo semelhante às engrenagens de uma grande máquina internamente diferenciada. Em contraposição, a investigação interpretativa considera a perspectiva fenomenológica das pessoas que manifestam as condutas observadas como ingrediente fundamental para a compreensão das questões focalizadas em um determinado meio social: como os participantes encaram essas questões, quais os diferentes pontos de vista, que significados os atores sociais atribuem às ações recíprocas que se estabelecem nesse meio ou, mais genericamente, qual o dinamismo interno das situações e como esse dinamismo interfere nos referidos significados (Ludke e André, 1986, p. 12). Seu objeto de estudo não é, conforme Erickson (1989, p. 198), a "conduta" do indivíduo – ato físico, conduta física – mas o *comportamento* do indivíduo visto como sua conduta e o significado simbólico que lhe é adjunto.[4]

Dessas e de outras considerações sobre a natureza do conhecimento e seu modo de apreensão resultam métodos de obtenção de dados e procedimentos de análise obviamente diversos daqueles utilizados em métodos experimentais. Além disso, é importante ressaltar que essas concepções direcionam o projeto de investigação para *questões de natureza diferente* daquelas a que esses métodos experimentais se propõem a responder.

A pesquisa que trago, parcialmente, à discussão, neste texto, consubstancia um retorno, com outros olhos, ao tema das *operações aritméticas* elementares, um enraizamento e compromisso consolidado em minha atividade profissional. Um retorno em que a flexibilidade na busca de

4 Erikson (1989) utiliza o termo ação, em vez de comportamento.

caminhos deixada ao pesquisador pela metodologia interpretativa permitiu tomar minha experiência profissional como um dos importantes alicerces da pesquisa.

Estudando um tema específico em uma instância singular da prática educativa – uma classe de 4ª série de uma escola pública da cidade de São Paulo –, assumi um posto de observação panorâmico em que busquei compreender o fenômeno educativo em sua densidade e complexidade, situando-o no ambiente da sala de aula. Em outros termos, como decorrente de uma práxis, em que as relações estabelecidas se configuram em cortes multidimensionais de uma complexa rede de significados.

Neste texto, proponho-me fazer uma reflexão sobre minha trajetória no desenvolvimento dessa investigação, evidenciando como uma observação reflexiva e de longo prazo em campo foi apontando esses diferentes traçados. Em particular, evidencio, pela análise de alguns episódios, como a prática do cotidiano escolar – como prática de vida – escapa em sua configuração aos limites rígidos de um processo mecânico e de uma análise determinística, manifestando-se em procedimentos de caráter hermenêutico e interpretativo e permitindo a instauração de uma perspectiva em que o rigor assume uma característica própria.

Esclareço, ainda, que não é minha intenção proceder a uma análise comparativa dos diferentes desenhos de investigação em foco neste texto, nem abordar as várias dimensões da constituição do processo de investigação em campo. Pretendo priorizar, na reconstituição desse processo, o movimento em busca do dimensionamento do foco de investigação, estabelecendo os confrontos que permearam esse movimento.

A questão de estudo e seus fundamentos básicos

Tomado em suas características gerais, o tema da investigação tem como foco a *compreensão* de *situações multiplicativas elementares* manifestada por alunos de uma classe de 4ª série de uma escola pública da cidade de São Paulo,

Em função da proposta de trabalho da professora da classe, esse estudo priorizou, em suas primeiras etapas, os processos de resolução matemática de problemas verbais multiplicativos, utilizados pelos alunos, e suas dificuldades nessa tarefa. São considerados como problemas verbais multiplicativos os clássicos problemas escolares que requerem para sua resolução as operações de multiplicação ou de divisão.

Os episódios selecionados para análise focalizam as dificuldades dos alunos que apelam, de modo mais visível, para a influência das condições sociointerativas que constituem o ambiente de ensino e de aprendizagem, particularmente as regras implícitas que constituem o "contrato didático" estabelecido no ensino de problemas verbais multiplicativos rotineiros. Entretanto, a análise longitudinal do comportamento dos alunos, durante o ano letivo e nas diferentes fases da pesquisa, evidencia a articulação dessa dificuldade com aspectos situados na dimensão conceitual e, em particular, a interferência recíproca da linguagem corrente e da linguagem matemática nesses problemas.

Segundo Sierpinska,

> a partir de Bruner, muitos atos de compreensão caracterizam-se, não por representar o próprio objeto de compreensão mas, sobretudo, por "traduzir" uma representação em outra, sendo o objeto de compreensão, em si mesmo, uma representação mental.

Em direção análoga, Lubomirski considera que a generalização é um processo cognitivo conduzindo o sujeito cognoscente de uma situação matemática a uma outra. Por situação matemática o autor entende uma representação não puramente manipulativa[5], icônica ou simbólica do problema em questão, admitindo a possibilidade de que um trabalho matemático exija simultaneamente o emprego de muitos sistemas de representação complexos, suficientemente flexíveis para permitir a passagem de um con-junto de regras de representação a outro (apud Sierpinska, 1995, p. 54).

Nessa perspectiva e tendo em vista as características da classe observada bem como as dos problemas verbais multiplicativos rotineiros nela propostos, considero os comportamentos dos alunos mobilizados na resolução desses problemas como indicativos de sua compreensão sobre as operações matemáticas neles envolvidas. Em outros termos, no proces-

---

5 Refere-se a manipulação de objetos do mundo físico. No original énactive.

so de resolução, o aluno confronta-se com uma tarefa de converter, para a linguagem matemática, conceitos, relações, proposições expressas em um texto verbal tendo em vista um tratamento adequado das informações pertinentes. Tais relações incidem sobre expressões referentes a determinadas situações e domínios de experiência: traços pertinentes dessas situações integram, de algum modo, o significado das operações. Assim sendo, resolver problemas em diferentes contextos é uma das condições de ampliação desse significado, o que contribui para a sua descontextualização e generalização.

A questão dos significados matemáticos veiculados na sala de aula inclui, necessariamente, a da interferência da linguagem natural. Basta considerar que a aprendizagem em classe se dá sob a forma de atividades discursivas intrinsecamente relacionadas ao processo de constituição desses conhecimentos. Considere-se ainda que a dimensão pragmática da linguagem, ou seja, aquela relacionada às condições de produção do discurso,[6] particulariza-se ainda mais no processo de ensino e aprendizagem pela relação com o saber institucionalizado e pelas condições peculiares do quadro de interação didática em que os comportamento se manifestam, ou seja, o contrato didático.

Entre essas condições salienta-se uma cláusula do metacontrato (Chevallard, 1988, p. 60) que estabelece a não simetria dos parceiros – professores/alunos – não somente no interior do próprio contrato, mas também em relação à ação sobre o contrato. Essa assimetria revela-se na natureza do discurso escolar, cujo núcleo discursivo é, especialmente no caso do ensino de problemas rotineiros, formado de interrogações e respostas. Observe-se, porém, que o professor faz questões para as quais já conhece a resposta. Nessas condições do discurso escolar, como diz Geraldi (1991, p. 156), "invertem-se os papéis e as funções dos atos lingüísticos praticados", cria-se uma situação marcada pela dicotomia entre a perspectiva do "certo" – que o professor sabe e o aluno sabe que o professor sabe – e o perigo do "errado". Desse modo, amplia-se a possibilidade de

6 Condições relativas a todo um jogo complexo de fatores que constituem as condições de uso da linguagem ordenadas em relação ao sujeito, tais como associação a determinados estados de fato, a instâncias particulares e circunstanciadas em contextos específicos.

o diálogo assumir um feitio complexo e embrenhar-se em mal entendidos, conduzindo ao fracasso das "intenções" pré-fixadas.[7]

Ocupando uma parte significativa do ensino fundamental, os problemas verbais têm-se apresentado sob um contrato didático estável e pouco flexível, quer em uma perspectiva histórica da constituição do saber escolar, quer no transcorrer de todo um período da escolaridade. As cláusulas desse contrato condicionam, não só a estrutura textual do problema, como estabelecem algumas condições, em termo das quais: a) um problema possui uma e só uma solução; b) os dados apresentados são necessários e suficientes para a determinação dessa solução; c) um problema é um modo de aplicação de conhecimentos e procedimentos anteriormente ensinados.

Assim configurada, a tarefa delimita os procedimentos de busca e validação das soluções propostas. Esses limites estreitam-se pela força de certos aspectos, igualmente padronizados, da organização do ambiente da sala de aula: carteiras enfileiradas, comunicação aluno-aluno tomada como indisciplina, predominância do discurso oral na correção da tarefa, as tentativas de solução sendo desvalorizadas, os procedimentos uniformizados, as dificuldades escamoteadas.

Essa estabilidade das características dos problemas escolares como saber escolar situa uma primeira condição pela qual pude vislumbrar, nos contornos de um estudo local, uma possibilidade de se estabelecer ligações com o sistema de ensino tomado como um todo, ou seja, contribuir

7 Refiro-me aqui, intuitivamente, a fenômenos pragmáticos extensamente estudados. Um deles é a relevância, para a atividade discursiva, das imagens que os interlocutores fazem reciprocamente uns dos outros e, mesmo, buscam construir um para o outro, do "lugar" de onde se pensa que o outro fala: *Quem ele é? Quem ele acha que eu sou? Quem ele acha que eu acho que ele é? Quem eu acho que ele acha que eu acho que sou?* etc. Por outro lado, máximas conversacionais (obviamente violáveis) estabelecem certos compromissos entre os interlocutores nos diálogos "naturais": presume-se que se fala do que se conhece, tanto quanto se presume que o locutor não perguntará a respeito do que já sabe e sabe que o interlocutor sabe que o outro sabe. Uma pergunta como *Eu não estou aqui?* ou *Dois mais dois são quatro?* desencadeia um processo pragmático de inferências ("implicaturas"): a troco do que ele está perguntando a respeito do que ele sabe e sabe que eu sei que ele sabe? Pode-se, por aí, entender melhor a "ritualização" do discurso escolar em que esses compromissos são simplesmente suspensos (anotação de comentários informais de Carlos Franchi ao texto preliminar de minha tese de doutorado).

para o que Chevallard (1987, p. 307) chama de "dialética entre estudos locais e teorização". Ele discute a possibilidade de formular uma problemática de estudo globalmente, com a ajuda do conceito de "relação ao saber" por meio de duas questões-guia:

– "Quais são as condições assegurando a viabilidade didática de tal elemento do saber e tal relação a esse elemento? Quais são as restrições podendo impedir tais condições de serem satisfeitas?" (Chevallard, 1987, p. 309).

Nessa direção, o autor situa o interesse em, dado um elemento do saber, observar as regularidades pelas quais se estabelece no ensino a relação a esse saber. Dois aspectos podem ser, então, investigados:

- pode-se atestá-lo de maneira reprodutível e controlada?
- por que e como essa relação emerge?

As conclusões a que chega este meu estudo sobre a compreensão dos alunos das operações com números naturais poderão alcançar um grau de generalidade quando se analisa um processo rotineiro de resolução de problemas verbais – que mostra regularidades em sua estrutura e contextos de uso, sob um contrato didático bem definido – e se levanta uma série de fatores de sucesso e insucesso decorrentes não somente da própria forma da atividade e de seu ambiente, mas ainda de processos envolventes normalmente pouco considerados. Podem, ainda, generalizar-se quando se contrapõem às características da prática pedagógica acima referida, apontando para uma nova dinâmica da ação pedagógica.

Isto é possível, não somente dada a provável constatação de condições e instrumentos análogos no ensino das operações matemáticas fundamentais em outras microculturas escolares, como também pela interpretação dos resultados da pesquisa em termos de uma problemática teórica que os integre. De fato, a generalização de uma "prática" não se faz necessariamente em virtude da fixação de uma "classe indutiva de fenômenos" ou de "leis gerais explicativas" de sua ocorrência, mas porque se justificam concepções, pressupostos e atitudes que informem essa prática e possam informar outras práticas bem-sucedidas, que permitam uma adequação imaginativa e criativa às circunstâncias variáveis da situação e do contexto, ao perfil dos participantes, às peculiaridades do saber a ensinar. Exatamente porque se dá ênfase a esses aspectos singulares e aos aspectos sociais.

A pesquisa – o cenário institucional: delineamento

A pesquisa desenvolveu-se em uma quarta série de uma Escola Municipal de Primeiro Grau, do bairro da Casa Verde, Zona Norte de São Paulo. A escola se situa não longe da Marginal do Tietê, em direção à periferia. Atende a uma população estável, radicada no bairro e nele ambientada há bom tempo.

A integração da escola com a comunidade se fazia em duas instâncias: conselho da escola e reuniões bimestrais com pais de alunos. Essa integração favoreceu a colaboração dos pais com a pesquisa, convencendo-os a trazer seus filhos para horários extraclasse quando solicitados.

O funcionamento da escola se faz em quatro períodos: três diurnos e um noturno, atendendo aproximadamente mil e oitocentos alunos. As classes regulares atendem, em média, trinta e cinco alunos. Na formação dessas classes, havia a preocupação de manter nelas as características de heterogeneidade da população escolar quanto ao aproveitamento, a idade e aos problemas de disciplina.

A classe escolhida para a pesquisa tinha trinta e três (33) alunos, doze (12) meninos e vinte e uma (21) meninas. A idade variava de nove anos e seis meses a treze anos, sendo que a grande maioria (vinte e dois alunos) havia completado dez anos já no primeiro semestre e dois outros completariam dez anos no início do segundo semestre; acima dessa idade, sete alunos tinham onze anos (com uma ou duas retenções) e apenas um aluno, treze anos (com duas retenções).

Os alunos provinham de famílias modestas, em geral de pais assalariados; dentre as profissões dos pais, havia professores de primeiro grau, alfaiate, motorista de caminhão, faxineira, pequenos comerciantes e um desempregado.

Quanto às etapas e aos meios da pesquisa, ressalte-se que o período de seu desenvolvimento junto à escola prolongou-se de março a outubro de 1992, compreendendo uma fase de observação participativa (de 16 de março a 3 de maio), entrevistas individuais (de 5 a 15 de maio) e sessões especiais de estudos com os alunos que apresentavam maiores dificuldades no conteúdo desenvolvido (de 9 a 30 de junho e de 11 de agosto a 8 de outubro).

Trajetória no desenvolvimento da investigação: o dimensionamento do foco de investigação

Introduzo esse tópico com uma breve reflexão sobre o espaço do pesquisador e sua relação com os parceiros. Esse aspecto é de importância fundamental em uma pesquisa interpretativa, e de modo especial em uma pesquisa tendo como foco de reflexão o processo de ensino e de aprendizagem de um domínio da matemática, enquanto associado às atividades e à interação dos participantes em que esse processo se instancia e se contextualiza.

Algumas questões fundamentais referem-se à restrições de natureza concreta, tendo em vista as exigências e os limites institucionais e éticos nelas envolvidos: qual o espaço do pesquisador, que relações ele entretém com esse espaço, como deve se configurar a interferência do pesquisador como observador em campo; e na sala de aula; como conduzir as negociações para o acesso à escola e à classe, como definir o papel do professor da classe na pesquisa. Outras são colocadas por motivos de controle epistemológico das condições de produção do saber: para quem o pesquisador produz suas análises; como os interesses e as necessidades do público para o qual ele se destina vão interferir em sua problemática; o que ele poderá dizer e o que deverá calar.

Dado os limites e o foco deste texto, esclareço apenas alguns pontos que me situam como pesquisadora, mesmo que superficialmente, em um certo espaço de atuação na escola.

Durante o período de observação assisti às aulas de Matemática na classe selecionada, duas vezes por semana. Paralelamente, mantive contatos freqüentes com as orientadoras pedagógicas, orientadora educacional e a direção da escola. Freqüentava assiduamente a sala dos professores. Pude, assim, criar condições favoráveis para meu convívio na escola, conhecendo aspectos da interação social desses professores entre si e com os técnicos da escola, suas condições de trabalho, normas institucionais a que estavam sujeitos.

Em meus diálogos com a professora da classe, buscava inteirarme, no final da aula, sobre as atividades das aulas de Matemática subseqüentes, fazendo, então, sugestões, sem alterar substancialmente seu planejamento. Desse modo, pude avaliar o conhecimento dos alunos, sobre as operações com números naturais, em um ambiente próximo ao ambiente natural da classe.

Em uma dinâmica centrada na troca de experiências com a professora sobre nossa atuação profissional passada e presente, expondo minhas raízes de pesquisadora, pude, não só desconstruir a imagem de alguém interessado apenas em cumprir uma exigência acadêmica, como conhecer as expectativas da professora quanto ao rendimento de seu trabalho e obter evidências do significado que atribuía aos fenômenos observados em classe. Estas expectativas se manifestavam, principalmente, nas discussões sobre o aproveitamento dos alunos e sobre a grande disparidade desse aproveitamento, sobre questões relativas ao cumprimento de um "programa" ou o atendimento das necessidades dos mais fracos, sobre seu desencanto diante do que chamava a "queda" do ensino.

Tendo estabelecido com a responsável pela classe um clima de cooperação recíproca, pude, em momentos posteriores, sugerir novas abordagens para alguns conteúdos, desenvolvidos após o período da observação e participar de alguns momentos de discussão coletiva do planejamento de ensino dos professores daquele período escolar. No processo de investigação, a participação da professora foi de fundamental importância.

Os alunos, procurei conhecê-los enquanto os acompanhava individualmente – do mesmo modo que a professora – na realização das tarefas de classe. Atendia aos pedidos de auxílio em suas dificuldades, de socorro ante a iminência de chegar a sua vez de ir fazer a correção dos exercícios na lousa. E algumas vezes prejulguei com a professora, em desalento, a incapacidade de alguns resolverem enfim suas dificuldades de aprendizagem. Mas, em minha cumplicidade com as crianças, prevaleceu a crença de que todas podem aprender.

A configuração e delimitação do problema em campo

Embora o investigador identifique os aspectos conceituais de seu interesse antes de entrar no *locus* da investigação, é no desenrolar dos acontecimentos aí ocorridos que os aspectos específicos da indagação são configurados. É igualmente no transcorrer do trabalho de investigação e num constante ir e vir dos fundamentos teóricos aos acontecimentos observados que ocorre uma ressignificação das bases teóricas iniciais e a definição de aspectos teóricos mais específicos. Esses constituem-se em função da necessidade de compreensão das novas questões que se impõem no decorrer da investigação ao mesmo tempo em que se procede a uma reorganização dos fenômenos interpretados.

Ao eleger a quarta série como espaço da pesquisa, visei a obter elementos para desvelar aspectos das interrogações sobre a compreensão das operações multiplicativas em um tempo escolar[8] em que o aluno, tendo tido acesso à linguagem matemática de forma linear e ordenada nas séries anteriores, deve lidar com essa linguagem de maneira mais articulada e global.

Os elementos obtidos na já referida dissertação sobre as "operações aditivas" e na fundamentação teórica sobre o tema de estudo embasaram um primeiro elenco de questões: como o aluno interpreta em linguagem matemática diferentes tipos de problemas multiplicativos; que procedimentos utiliza; se o aluno estabelece uma ligação entre multiplicação e divisão, qual a influência do plano de representação nessas atividades.

Como avaliar esses aspectos?

Uma clara possibilidade – de antemão descartada devido aos fundamentos teórico-metodológicos assumidos – seria a aplicação de instrumentos nos moldes dos utilizados na pesquisa sobre as operações aditivas, seguidas de algumas entrevistas. Nesse caso, critérios de avaliação desses comportamentos poderiam ser rigorosamente definidos considerando-se os pressupostos teóricos advindos de pesquisas na área.

Outra alternativa seria desencadear um projeto de ação voltado, por exemplo, à implementação de uma proposta de ensino para uma série escolar ou, ainda, para uma classe, o que exigiria anteriormente aproximações e inserções no campo, como as acima descritas e outras, mais diretamente relacionadas à natureza da intervenção. Dado o cronograma de desenvolvimento da proposta curricular da escola e outros condicionantes políticos e conjunturais, decidi pela limitação da questão da pesquisa e definição de seus procedimentos a partir dos fenômenos observados nas aulas regulares da professora da classe.

---

8 Refere-se à organização do trabalho que se faz na escola segundo a divisão do tempo em períodos (época e duração). Estabelecidos tempos escolares (tempo de planejamento, de avaliação, etc.), é através deles que a prática pedagógica se firma e os processos são desenvolvidos (cf. Penin, 1989, p. 58).

Diante desse novo posicionamento, como descrevo no relatório de pesquisa (Franchi, 1995, p. 43):

> (...) as múltiplas perguntas, diante do tema a investigar, apresentaram-se de início, para mim, como alternativas excludentes: deveria responder a umas em detrimento das outras? Quais aspectos revelados pela reflexão teórica deveria privilegiar? Seriam estes apenas diferentes ângulos dirigindo meu olhar para um mesmo fenômeno que desejava abarcar em sua totalidade? E não são esses pontos de vista que instauram as significações? Seria, por exemplo, possível enfocar situações multiplicativas sem me ver atropelada pela necessidade de trabalhar os algoritmos das operações? Em que medida meu rumo seria imposto por deslocamentos inesperados do percurso frente à realidade da classe? Foi apenas ao inserir-me no ambiente escolar que pude perceber a possibilidade de imprimir outros recortes no questionamento inicial, que não os decorrentes de uma organização teórica prévia, mas em um movimento inverso: como resposta aos acontecimentos e à sua manifestação na sala de aula, recolocando e iluminando pressupostos e suposições.

Seguem alguns elementos para a materialização desses acontecimentos e desse movimento: um intervalo em que descrevo sinteticamente o conteúdo desenvolvido em classe nesse período e o contrato didático do professor, para o ensino desse conteúdo.

Primeiro intervalo: a prática pedagógica do professor – conteúdo desenvolvido e modos de abordagem

O conteúdo desenvolvido em classe centrava-se no ensino dos clássicos problemas verbais escolares sobre as operações com números naturais, predominando os de multiplicação ou de divisão. Em paralelo, eram propostos outros exercícios rotineiros sobre o sistema de numeração decimal, algoritmos das operações com números naturais, comparações e cálculo da diferença entre dados numéricos, apresentados em tabelas, exercícios de cálculo de expressões numéricas simples. Pela sua natureza rotineira, essas atividades complementares não foram incluídas como conteúdo de análise, embora tenham sido indiretamente consideradas no diagnóstico dos alunos e nos cálculos envolvidos nas questões das entrevistas.[9] Observe-se, entretanto, que provavelmente contribuíram para a ocorrência pouco significativa de erros na execução dos algoritmos correspondentes aos problemas dados em classe (que além disso exigiam cálculos simples), favorecendo o direcionamento da pesquisa para as questões de meu interesse.

As características dos problemas verbais constituem-se em uma das fontes informativas para a compreensão das dificuldades de aprendizado dos alunos. Entre essas características, ressalto a classe de "situação interpretativa".

Com exceção de dois, todos os problemas propostos caracterizavam-se por serem representativos de uma "situação multiplicativa trivial", (Fichbein et alii 1985, p. 6.), ou seja, multiplicação redutível a uma adição repetida, divisão por quota e divisão por repartição. Ainda, conforme critérios utilizado por Schwartz (1988, p. 43), os referentes dos valores numéricos do problema são vistos como uma "quantidade intensiva" (I) em que o referente é uma entidade simples, de uma dimensão (por exemplo 5 reais) ou uma "quantidade extensiva" (E) que envolve como referente duas dimensões (por exemplo 5 reais por objeto, 60 k/h). Os problemas que discutimos apresentam-se, nesse enfoque, como I x E= Et para a multiplicação, sendo as divisões correspondentes indicadas Et ÷ E = I (repartição) e por Et ÷ I = E. (quota). Essas identificações serão retomadas e ampliadas quando da análise dos comportamento dos alunos nas entrevistas. A esses critérios acrescentamos outros, que se manifestaram necessários no decurso da investigação. Descrevo no Quadro 1 os traços distintivos dos tipos de critério e indico os exemplos correspondentes transcritos no Quadro 2.

9 Maiores detalhes sobre essas atividades e as desenvolvidas durante as demais etapas do projeto, ver Franchi (1995 pp. 61-64). A influência, na resolução de problemas multiplicativos, do significado dado a "tabuada" de multiplicação, significado este aplicado na estimativa do quociente do algorítimo da divisão, foi discutida nessa obra no item 4.2.3, pp. 121-128, em que se analisa comparativamente procedimentos dos alunos em situações de divisão por quota e por repartição.

Quadro 1 – Critérios de classificação dos problemas

A - Tipos de situação multiplicativa

Multiplicação

1. Situação trivial – I x E= E_t (exemplos 1, 2, 3, 4 no Quadro III)

Divisão

1. Divisão repartição – E_t x E= I (exemplos 5, 6, 7)
2. Divisão por quota – E_t x I= E (exemplo 9)

B - Variáveis extramatemáticas no enredo do problema

1. Quantidades discretas (canetas, bolinhas, etc.; exemplos 1, 4, 5)
2. Valores em moeda nacional (preço, salário, etc.; exemplos 2, 3, 7)

C - Dependência ou independência entre os dados

1. Dados independentes para todas as operações (exemplo 9)
2. Dados independentes para multiplicação ou divisão (exemplo 4)
3. Dados dependentes (exemplo 6)

D - Ordenação dos dados na formulação do texto verbal

Multiplicação

1. Referência inicial às unidades simples E => I (exemplos 1, 2, 3, 4, 5)
2. Referência inicial às unidades compostas I => E (exemplo 9)

Divisão

1. Ordem direta: os dados numéricos se apresentam na ordem em que constam no algoritmo da divisão (dividendo, divisor); (exemplo 5,6)
2. Ordem inversa (o dado correspondente ao divisor é fornecido primeiro, exemplos 8, 9)

Quadro 2 – Exemplos ilustrativos de problemas e sua categorização (1995)

TEXTOS	OPERAÇÕES	CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO
1. Uma professora recebeu 4 caixas contendo 24 gizes em cada uma. Se ela já usou meia centena de gizes, quantos restavam?	Multiplicação Subtração	I x E q discreta dados indep. (2) Ordem: E --> I
2. Comprei 8 canetas por Cr$ 560,00 cada. Dei em pagamento Cr$ 10.000,00. Quanto recebi de troco?	Multiplicação Subtração	I x E = E_t Unidade monetária Dados indep. (2) Ordem: E --> I
3. Um vendedor ambulante vendeu 7 canetas por Cr$ 2.875,00 cada e 8 panelas por Cr$ 4.900,00 cada. Quanto recebeu?	Multiplicação Multiplicação Adição	I x E = Et I x E= Et Dados indep. (2) Ordem: E --> I
4. Um caminhão transportou 9 engradados contendo 22 frangos cada um. Se fez 9 viagens, quantos frangos transportou ao todo?	Multiplicação Multiplicação	I x E= Et; q. discretas dados dependentes na 2° opera/ Ordem E --> I
5. Lúcia recebeu 12 pacotes de 8 cadernos cada. Quer dá-los de presente para 3 amigos seus, sendo que todos receberam a mesma quantidade. Quanto recebeu cada um?	Multiplicação Divisão	I x E= Et ; div. Et x E = I q. discretas dados dependentes na 2° opera/ Ordem E --> I; direta

(continua)

5. Lúcia recebeu 12 pacotes de 8 cadernos cada. Quer dá-los de presente para 3 amigos seus, sendo que todos receberam a mesma quantidade. Quanto recebeu cada um?	Multiplicação Divisão	I x E= Et ; div. Et x E = I q. discretas dados dependentes na 2° opera/ Ordem E --> I; direta
6. Tenho 26 balas de morango, 38 de abacaxi e 1 centena de côco. Quero colocá-la igualmente em 8 saquinhos. Quantas colocará em cada saquinho?	Adição Divisão	Et x E= I (Repartição) q. discretas dados dependentes Ordem direta
7. Cr$ 12.960,00 é repartido igualmente entre 6 garotos. Um deles recebeu sua parte e gastou Cr$ 58,00. Com quanto ele ficou?	Divisão Subtração	Et x E= I Repartição Valores em cruzeiros Dados indep. (2) Ordem direta
8. Zeca é pedreiro. Recebe a mesma quantia de dinheiro por dia de trabalho. Se ele trabalhou durante 8 dias e no final lhe pagaram Cr$ 4.400,00, quanto ganhou por dia?	Divisão	Et x E= I Repartição Salário unitário Ordem indireta
9. Alexandre coleciona chaveiros. Ele amarra os chaveiros em grupos de 5. a) formando 8 grupos, quantos chaveiros ele terá? b) quantos grupos precisará para ter 50 chaveiros?	Multiplicação Divisão	Mult. I x E = Et div. IxE=E (quota) q. discreta dados indep. (1) Ordem inversa
10. Carlos comprou uma bicicleta de passeio, aro 26, em abril de 1989. O pagamento foi feito desta maneira: {SYMBOL 45 \f "Symbol" \s 9 \h} 1 entrada de Cr$ 20,00 {SYMBOL 45 \f "Symbol" \s 9 \h} 4 prestações de Cr$ 50,00 Encontrar o total que Carlos pagou pela bicicleta.	Multiplicação Adição	I x E = Et (prestação) Dados indep. Ordem: E --> I

Fonte: Franchi, A. (1995)
Nota: Problemas extraídos do caderno dos alunos.

Como sugerem os exemplos do Quadro 2, os problemas propostos em classe apresentam as características essenciais dos problemas escolares rotineiros, conforme descritas no item 1 deste texto. Embora mantendo a estrutura lingüística padrão, apresentavam freqüentemente uma variante: colocavam-se no enredo duas ou mais questões independentes. O campo de aplicação das operações restringe-se a quantidades discretas e valores em moeda nacional. Os valores em moeda nacional eram tratados como números inteiros, sendo que os centavos não eram sequer mencionados.[10]

As divisões por quota versaram apenas sobre quantidades discretas, sob a justificativa de que os alunos não conheciam a técnica e divisão com números decimais. Por isso, esse tipo de divisão foi menos enfatizado, relativamente à divisão por repartição.

Do ponto de vista metodológico, uma questão surge naturalmente dessa análise: podem-se estudar problemas de estrutura multiplicativa a partir de textos envolvendo cadeias verbais de estrutura aditiva. E o rigor, como fica?

Em uma investigação experimental, essa característica poderia impedir o "experimento", a menos da introdução de novos mecanismos de controle. Entretanto, tais problemas apresentavam características textuais que favoreceram a delimitação da pesquisa nos limites desejados: em sua grande maioria, os dados a serem selecionados para a multiplicação e a divisão podiam ser diretamente localizados no texto; é o que se pode verificar pela classificação dos problemas do Quadro 2, conforme o critério C – dependência ou independência dos dados.

Os problemas em que os dados para a multiplicação ou a divisão deveriam ser inferidos a partir de outra operação limitaram-se a três e apresentaram-se em situações bastante simples.

Segundo intervalo: características da prática escolar

Assim como os textos dos problemas, o modo de ensiná-los conformava-se às normas culturalmente enraizadas: a professora escreve o

---

10 A moeda nacional foi expressa em cruzeiros até o final de 1992 – fase de aplicação da pesquisa, época em que se deu a implantação do plano real. Pelas razões expostas no texto, estendemos para problemas envolvendo dinheiro a análise da multiplicação incidindo sobre quantidades discretas. Conferir no item 4.

problema na lousa e os alunos o copiam e o resolvem individualmente; o tempo para a resolução dos problemas pela classe é limitado e sua duração, controlada pelo tempo "médio" gasto pela classe; a correção é feita por um aluno, chamado ao quadro negro para expor sua solução sob a constante intervenção da professora confirmando-a ou corrigindo-a. O processo interlocutivo desenrola-se em perguntas e respostas:

> P: *Por que você fez "vezes quatro"?*
> A: *Eram quatro caixas contendo 24 cada uma.*
> P: *Por que você subtraiu?*
> A: *Por que ele usou meia centena.*
> P: *O que ele quer saber?*
> A: *Quantas restaram.*

Quando o aluno erra ou não consegue resolver o problema, as questões da professora desenrolam-se em uma seqüência fixa que efetua tacitamente uma seleção dos dados a considerar, organizando-os segundo as operações que *devem* ser realizadas. O discurso, especialmente nos casos que envolvem duas ou mais operações, é diretivo e fragmentado. Essa fragmentação, melhor se vê quando, para "*dar a resposta*" do problema, o aluno atém-se à última frase – a pergunta – colocada sempre no fim do texto: o diálogo é improdutivo, como certas questões de "interpretação" do texto do problema que simplesmente o reproduzem.

O êxito do aluno deve ser obtido a qualquer preço: o professor coloca as questões que o aluno *deve* responder. Pelo modo de fazê-lo, interfere no significado dessas respostas. Colocando questões cada vez mais fáceis, esforça-se por "obter uma resposta certa", mesmo que alterando as condições da situação, e faz desaparecer completamente o significado do conhecimento a que visa (Brousseau, 1986, pp. 41-45).

Em algumas explicações, o aluno desliga-se do sistema fatual do problema e justifica-se com as expressões, "para juntar duas contas", "para achar o resultado", evidenciando uma preocupação dominante com a conta a ser feita.

Até que ponto tal forma de socializar o acerto avalia a compreensão do aluno? Até que ponto o conduz a engajar-se na tarefa de resolução de modo a criar nela uma relação entre conhecimento e produção?

Não é possível responder a essas questões sem uma reflexão sobre outras normas restritivas do contrato didático estabelecido no ensino de problemas. Essas incidem sobre aspectos fundamentais para o estabelecimento de processos de construção de significados, ou seja, a natureza de dificuldades específicas das tarefas cognitivas propostas, do repertório de procedimentos disponíveis e das representações possíveis.

Os procedimentos não canônicos eram ignorados ou corrigidos conforme os exemplos:

– para *achar o preço de 1 objeto, sabendo-se que 4 custam $1800,* dois alunos expressam-se por meio da igualdade 450 x 4 = 1800, ou seja, introduzem a incógnita, calculada mentalmente, como termo da operação.

– para *saber quanto ganha um operário por dia de trabalho, sabendo-se que trabalhou 8 dias e recebeu $ 4400,* Tomi procede assim: – *São 8 vezes... No meu pensamento são 500. Então faço* 500 x 8 = 4000.

E logo exclama: – *Eu acho que é 550!*

Confere, fazendo a multiplicação: *550 x 8 = 4400.*

E confirma: *está certo!*[11]

Usualmente, e estimulando o aluno a *pensar direito*, a professora corrigia esses procedimentos com a utilização de "muletas":

Se sei o preço de muitos, quando quero saber de um, que conta faço?

Qual a operação inversa da multiplicação?

A solução anterior era usualmente apagada, sem que suas possibilidades como matéria-prima para o direcionamento do ensino fossem exploradas: uma reflexão pelo aluno sobre seu modo de pensar, visando favorecer uma apropriação e uma expansão desse pensar, uma discussão, com a classe, sobre as diferentes soluções obtidas analisando e comparando os diferentes procedimentos, provocando a explicitação das estratégias, enfim, legitimando, naquele ambiente cultural, esses procedimentos e essas estratégias.

---

11 Anotações das soluções durante a realização individual da tarefa e entrevista realizada por mim com a aluna, em carteira.

Em um enfoque mais geral, a análise das ações discursivas, desenvolvidas nas tarefas de resolução de problemas por vias rotineiras, incorpora a cláusula relativa à natureza assimétrica do discurso escolar. Esse discurso assume, nas condições descritas nos eventos acima destacados, um propósito bem definido: o de mostrar como se procede na busca de uma solução correta. Isto orienta as ações discursivas, limitando ao mesmo tempo o domínio possível dos significados atribuídos e buscados no processo interlocutivo: a assimetria da relação se transforma em autoridade porque hipertrofiada, as contribuições dos alunos sendo constantemente desclassificadas; os limites se estreitam, não ensejando um confronto de diferentes percepções sobre o que é um problema, os diferentes modos de abordá-lo e as operações matemáticas envolvidas.

Os alunos não são indiferentes a esse processo. Captam os critérios porque é julgado seu desempenho e se ajustam à configuração da classe, definida a partir de sua presumível competência escolar. Sob as condições descritas, o ensino de problemas verbais produzia:

• a legitimação de certas manifestações do saber em detrimento de outras – heurísticas mobilizadas na produção desse saber e de sua avaliação, formas simbólicas de expressá-los;

• diferentes mecanismos que, paralelamente a aspectos relativos à transmissão do conteúdo escolar, delimitam os papéis e os lugares do professor e dos alunos no espaço escolar.

Desse modo, mantinha-se ou acentuava-se na configuração da classe sua heterogeneidade no que concerne ao desempenho dos alunos nas tarefas de matemática. Isto pode ser observado pela estabilidade na qualidade da produção dos alunos: alguns acertavam sistematicamente os problemas, outros apresentavam uma produção instável com alguma incidência em procedimentos não canônicos, e outros (cerca de um terço da classe) apresentavam soluções erradas e muitas vezes difíceis de ser interpretadas, maior fragilidade para defender-se das armadilhas do contrato didático e uma relação fortemente negativa com o conhecimento matemático. Assim, para o problema: *Tenho duas caixas de caneta. Na primeira há 9 dúzias. Na segunda 1 centena e meia. Queremos saber: a. quantas canetas há ao todo na primeira caixa? b. e na segunda caixa? c. quanto há ao todo nas duas caixas?*

Vania efetua: 150 x 9 = 1.350; 150 + 108 = 258; 1.350 + 258 = 1.608; 1.608 – 258 = 1.350.

Para este outro:

Taís tem 8 lápis vermelhos, 2 azuis, 7 verdes, 5 amarelos e 4 roxos. Célia tem 6 caixas com 8 lápis de cor cada uma.

a – Taís tem ______ lápis ao todo.b – Célia tem ______ lápis ao todo.

Cris procede assim:

C: – *8 x 2 = 16; 16 + 7 = 22; 22 x 5 = 110; 110 + 4 = 114.*

Pergunto-lhe:

E: – *Quantos lápis Taís tem? Faça cálculo mental* [Cris pensa].

E: – *Dá 114?*

C: – *Não.*

E: – *O que você fez na sua cabeça?*

C: – *De mais.*

Sob minha intervenção, a aluna faz uma estimativa do resultado e identifica a conta a ser feita

E: – *Por que você fez essas contas?*

C: – *Não sei.*

E: – *E só a primeira?*

C: – P*ensei que era de vezes.*

É bastante clara nessa entrevista, como em outras, transcritas em Franchi (1995), a ausência de um engajamento na atividade de resolução da tarefa e na validação da solução e, de modo específico, a negação do cálculo mental

A configuração e delimitação do problema em campo: entrevistas e sessões de estudo

As intervenções individuais realizadas com os alunos apresentando erros como os acima descritos, durante a observação em sala de aula e no limite de tempo entre a proposição do problema e sua correção coletiva, a constatação de erros análogos e recorrentes, a análise dos problemas multiplicativos formulados pelos alunos,[12] a observação da dinâmica da classe na execução e correção da tarefa em foco apontaram-me para dimensões da compreensão dos alunos sobre os problemas multiplicativos e na situação concreta da sala de aula não previstas inicialmente: a interferência da linguagem natural na interpretação dos problemas e a influência do contrato didático.

Além das questões colocadas por essas novas dimensões, intrigava-me uma interrogação persistente: porque alunos de uma 4ª série não conseguiam resolver um problema simples de determinação do preço de um caderno, sendo dado o preço de quatro cadernos? Trata-se da descrição de uma situação trivial, apresentando uma estrutura textual simples e envolvendo um léxico conhecido. Considerei essa dificuldade como intrinsecamente relacionada a fenômenos que caracterizam a "compreensão", tal como exposto nos fundamentos teóricos, ou seja, relacionada à natureza das tarefas cognitivas envolvidas na tradução de um problema em diferentes planos de representação.

Essas novas interrogações e o despontar de novas dimensões colocaram-me a necessidade de realizar entrevistas individuais e indicaram parâmetros para sua organização e seu desenvolvimento; por um lado, criava-se um outro espaço de diálogo em que se poderia estabelecer um outro contrato e uma situação discursiva com uma interação mais produtiva, que favorecesse a manifestação espontânea dos alunos e a elaboração reflexiva de seus pré-conceitos e procedimentos; por outro, algumas da suposições sobre as razões de suas dificuldades podiam submeter-se a uma avaliação mais cuidadosa e controlada. Adotando uma abordagem qualitativa tornava-se importante inserir-me diretamente em uma prática com os alunos, sem interferir na situação da sala de aula, fazendo aparecerem, em situações discursivas mais favoráveis, suas percepções, experiências e concepções.

Da mesma forma, estabeleceram-se os focos centrais da problemática de investigação: a avaliação da compreensão pela via dos problemas verbais rotineiros, ou seja, pela análise dos fenômenos ocorridos

---

12 Sugeridos por mim para obter um diagnóstico mais abrangente das dificuldades dos alunos. Os dados globais relativos a essa atividade não foram publicados na minha tese de doutorado; incluem elementos parciais na análise de dificuldades específicas dos textos multiplicativos manifestadas por alguns alunos.

na sua *tradução em diferentes planos de representação:* do texto verbal para a linguagem matemática, do texto verbal para o sistema fatual e deste para a linguagem matemática. Outro critério de avaliação referiu-se à tradução *de representações no interior de um mesmo plano de representação*, ou seja, ao estabelecimento de interligações entre a adição e multiplicação, entre multiplicação e divisão. Em outros termos, se o aluno utiliza procedimentos não canônicos, como os interpreta face aos elementos da situação descrita no texto, como opera com as fórmulas matemáticas em que se expressa.[13]

Manifestações de comportamentos relativos ao entendimento dos problemas e de seu processo de resolução, advindas das influências da negociação de significados instaurados no ensino dos problemas foram consideradas como se constituindo em elementos de uma dimensão da compreensão.

Para a seleção dos elementos constitutivos do texto verbal, consideramos como critérios as características predominantes daqueles propostos em classe; estrutura textual, situações interpretativas, domínio de experiência.

Além dessas configurações, que delimitam a abrangência do tema quanto ao seu conteúdo, consideramos que os números dos problemas, quando relacionados corretamente por meio de uma operação matemática, deveriam permitir a utilização de procedimentos não canônicos de resolução e, além disso, deveriam ser suficientemente grandes para impedir a determinação do produto ou do quociente pela memorização da tabuada.[14]

---

13 Tomando como referência Duval (1995), esses comportamentos de tradução são conceituados, respectivamente, como de conversão entre diferentes sistemas de representação e como de tratamento no interior de um mesmo sistema de representação.

14 A descrição mostra um processo asséptico e encadeado. Entretanto, houve idas e vindas no processo de seleção das questões. Continuei na expectativa de avaliar a compreensão da relação entre multiplicação e divisão, por meio de execícios de completar igualdades da forma .... x 12 = 180, como na pesquisa sobre problemas aditivos. Tive oportunidade de realizar esse desejo; entretanto, o instrumento não foi considerado válido para nosso objetivo, pois os alunos estavam, nesse momento, exercitando intensivamente tarefas análogas na determinação, por estimativa, do cociente no algoritmo de uma divisão.

Para as *entrevistas*, foram convidados dezesseis alunos, procurando-se manter uma heterogeneidade similar à da classe. Cuidei de incluir, entre eles, os que desenvolviam, ante os problemas dados em classe, raciocínios divergentes e apresentavam dificuldades específicas e erros sistemáticos e peculiares.

A análise das entrevistas, pelos critérios acima descritos, revelou uma grande heterogeneidade no desempenho dos alunos nos aspectos conceituais e na escolha dos procedimentos de cálculo.

As entrevistas comuns constavam de quatro questões, um problema sobre multiplicação, dois sobre divisão (divisão quota e divisão repartição) e um algoritmo de divisão tendo como divisor um número representado por dois algarismos (ainda não ensinado em classe). Esses instrumentos podem ser encontradas em anexo, designados com nomes para facilitar sua identificação em outras partes do texto.

Restringindo-me a considerações gerais sobre os dois primeiros problemas, que incidem sobre divisão, apresento, a seguir, alguns resultados que redimensionaram a continuidade da pesquisa, retomando-os oportunamente.

No primeiro caso – do "empacotamento de balas" –, todos os alunos lançaram-se de imediato a efetuar "uma conta", com a ocorrência de um número acentuado de erros na seleção da operação (multiplicação em vez de divisão) e conseqüentemente de respostas absurdas; essa opção pode ter sido influenciada pelo fato de a estrutura textual desse problema inverter a ordem usual de apresentação dos dados de um problema *de divisão por quota*, tornando-a próxima a da multiplicação (comparar com os enunciados 1 e 4 do Quadro 2). Os alunos realizaram a ação "concreta" solicitada no texto encontrando corretamente o número de saquinhos. Entretanto, em termos da função mediadora entre a linguagem verbal e a linguagem matemática, tal ação apresentou contornos específicos para diferentes alunos.

Na segunda questão – o cálculo do preço de um ioiô –, em confronto com a primeira questão, houve a ocorrência de cálculos orais com a mobilização de procedimentos ricos e diversificados, levando a um maior número de acertos, logo na resolução da primeira versão do problema. Lembre-se que esses procedimentos raramente ocorriam em sala de aula, sendo então desclassificados.

Convém ainda registrar que o ambiente, nas situações de entrevista, configurou-se como um espaço adequado para a instauração de um novo "contrato didático", com os propósitos acima descritos. Contribuiu para isso minha convivência anterior com os alunos, em que tornei-me cúmplice de suas queixas e de seus temores ante os erros nas tarefas escolares. Desse modo, estabeleceu-se uma relação de confiança e compromisso, essencial para a obtenção de dados confiáveis em entrevistas. Além disso, a informalidade do ambiente acentuou-se pela possibilidade dada ao aluno de empacotar balas, comprar ioiôs, manipular notas. Estive, porém, atenta para facilitar a "mudança das regras" sempre que hábitos prévios apareciam.

Uma intervenção planejada a partir da análise desses fenômenos certamente traria luzes para a sua compreensão. Além disso, achava-me profundamente sensibilizada com o avanço nulo ou quase nulo desses alunos em classe e fortemente compromissada com seu engajamento no processo de aprendizagem da matemática escolar.

Daí minha decisão por realizar um trabalho específico com os alunos apresentando acentuada defasagem no aproveitamento escolar. Essa decisão foi tomada conjuntamente com a professora da classe e a orientação pedagógica.[15]

As *sessões de estudo* foram desenvolvidas fora do horário escolar, com freqüência de duas sessões semanais de uma hora e meia cada uma, num total de aproximadamente trinta e duas horas, mantendo uma freqüência regular de dezesseis alunos[16]. Nelas, as atividades, conforme sua natureza, eram desenvolvidas em grupos de quatro alunos, em duplas ou individualmente. Elegi um grupo de oito alunos para uma observação mais sistemática.

---

15 Outra opção possível seria a realização de novas entrevistas que ampliassem as possibilidades de diagnóstico das dificuldades dos alunos, opção preferida pela orientação pedagógica, uma vez que uma recuperação extraclasse não era prevista no plano curricular da escola. Valorizava-se a recuperação paralela em sala de aula, o que efetivamente não ocorria.

16 No planejamento das atividades, colaboraram as professoras Antonieta Moreira Leite, Ana Maria de Carvalho Pinto Bueno e Maria Apparecida Wey: a primeira, uma interlocutora constante em projetos na área de Educação Matemática; as outras duas, como observadoras participantes das aulas na terceira etapa do projeto.

Em uma brevíssima síntese, desenvolvemos atividades – jogos, situações-problema envolvendo situações de formação de grupos com as próprias crianças, com objetos do mundo físico, com desenhos, situações de pesquisa de preço, compra e venda de objetos; estas incluíram interpretação em diferentes formas de representação, manipulação das relações entre as operações, produção de expressões simbólicas segundo procedimentos próprios aos alunos com ênfase na atividade discursiva mobilizada durante a atividade. Foram desenvolvidas de modo a permitir um diagnóstico mais abrangente das dificuldades dos alunos, em termos:

- das tarefas cognitivas específicas mobilizadas na resolução de situações multiplicativas, quer no interior de um mesmo plano de representação (passagem de uma adição reiterada para a multiplicação), quer na conversão de um plano de representação para outro, tendo em vista o progressivo domínio nesse campo.
- do repertório dos procedimentos de resolução disponíveis e da evolução desses procedimentos, dos contrastes e das interconexões entre as operações conceituais mobilizadas nesses procedimentos;
- da evolução das atitudes dos alunos no desenvolvimento do processo de busca e de controle das soluções dos problemas; em outros termos, da evolução da relação do aluno com o saber matemático em foco.

Paralelamente, durante esse período, a professora desenvolvia em suas aulas o conteúdo programático previsto para o semestre e que se constituiu basicamente de noções e problemas sobre números racionais na forma fracionária e decimal, cálculo do perímetro e de áreas de retângulos.

Essa etapa do projeto foi vivida com muita intensidade por mim, pelas observadoras, pelas crianças e seria impensável descrevê-la e analisá-la em poucas páginas. Aliás, não é este o objetivo deste artigo. O que se pretende é evidenciar como dados obtidos nas diferentes fases da investigação foram interpretados e articulados visando a compreensão da *compreensão dos alunos a respeito de aspectos envolvidos em situações multiplicativas elementares*; pretende-se, em particular, evidenciar como uma tarefa prolongada de obtenção de dados e de reflexão sobre esses dados, voltada a um processo progressivo de inter-relação e de busca de soluções de questões emergentes, incorporou novas dimensões de análise atribuindo a fenômenos, aparentemente de mesma natureza, uma especificidade própria, tanto no que concerne à origem das dificuldades como aos procedimentos para saneá-las.

É o que espero deixar evidente no item a seguir.

Análise comparativa: uma interpenetração de diferentes significados

Como anunciamos no início deste texto, seleciono para discussão episódios que revelam dificuldades dos alunos que apelam, de modo mais visível, para a influência das regras implícitas que constituem o "contrato didático" estabelecido no ensino de problemas verbais multiplicativos rotineiros. Entretanto, a análise longitudinal do comportamento dos alunos, durante o ano letivo e nas diferentes fases da pesquisa, torna evidente, como veremos, a articulação desse aspecto com outros, situados em outras dimensões.

Introduzo, sinteticamente, alguns aspectos específicos de fundamentação teórica, estritamente necessários para o desenvolvimento das reflexões que se seguem, esperando que elas tragam elementos para um entendimento dos aspectos básicos dessa fundamentação, os quais podem ser ampliados e aprofundados, entre outros, nos textos referidos.

Ao efetuar um corte na realidade, o texto de um problema faz dessa realidade uma primeira interpretação, descrevendo-a conforme Nesher (1988) em um gênero textual distinto. Com o objetivo de discernir os conhecimentos explícitos de alunos da "escola elementar" sobre a estrutura textual de problemas verbais multiplicativos e, em particular, evidenciar que traços verbais desse texto eles percebem quando decidem multiplicar, esse autor desenvolveu uma seqüência de estudos.[16] Neles constatou que as crianças que resolvem *problemas multiplicativos triviais* reconhecem, embora não explicitamente, as características das cadeias verbais que compõem a estrutura verbal de problemas dessa categoria e que tomam como traço característico desses textos a restrição *"número igual em cada grupo"*; conforme os protocolos parcialmente transcritos:

16 Na metodologia empregada nesses estudos incluiu uma amostra 196 alunos com idade entre 10 e 12 anos aos quais propos como tarefas: formular problemas verbais, um sobre adição e outro sobre multiplicação, explicar para outra criança como distinguí-los; selecionou ainda 10 desses alunos para entrevistas.

Eyal: (diante de dois desenhos de sacos com maçãs, um com igual número de maçãs em cada saco e outro com número desigual) –*"se não é igual tenho que somar; para a multiplicação tem que ser todos iguais.*

Efrat: (quando solicitado a formular um problema com termos sem sentido "zukzuks" e "bulbuls"): *Há 5"zukzuks". Cada "zukzuks" tem... hesita) 5 "bulbuls".*

Sob outro olhar, Brousseau (1986), ao discutir fenômenos decorrentes do jogo de argumentações, de restrições, de expectativas que se estabelecem entre professor e aluno no ensino e na aprendizagem de um dado conteúdo, considera a ocorrência de soluções dadas a problemas escolares, não por meio de um investimento ao problema, mas pelo reconhecimento de índices da resposta correta e/ou da desejada pelo professor.

A reprodução, nos problemas escolares, de procedimentos habituais de formulação de texto contribui para a formação de certos hábitos de uma leitura superficial voltada à procura de indicações didáticas da conta a ser feita. Tal hábito contribui para a ocorrência de respostas erradas e, muitas vezes, absurdas, dadas como solução de problemas.

Considere-se, entretanto, que a referência explícita às restrições textuais específicas de um texto multiplicativo padronizado não se constitui por si próprio em indício de um engajamento superficial no processo de resolução do problema. Contrariamente, pode ser indício, ainda que incompleto, da compreensão da estrutura lógica desse texto, o que favorece seu entendimento. Do mesmo modo, a explicação de um erro pelo uso inadequado dessas restrições não esclarece inteiramente as razões desse erro. Faz-se necessário um diagnóstico mais abrangente, considerando as relações conceituais que devem ser estabelecidas entre os elementos constitutivos do texto verbal e requeridas para a sua conversão em operações matemáticas pertinentes.

Quanto a esses aspectos, lembramos que os problemas propostos na pesquisa em foco se restringem aos chamados de *multiplicação trivial* e abordam temas que envolvem grandezas discretas e valores em moeda nacional, dados por números inteiros (cf. exemplos do Quadro 2).

Os valores numéricos de um problema multiplicativo dessa categoria têm como referentes quantidades de naturezas diferentes, ou seja, as variáveis utilizadas tomam seus valores em categorias distintas de universo. Na interpretação de uma situação multiplicativa, dá-se a constituição de um processo de *unitizing* (Lamon, 1994, pp. 92-94), ou seja, a constituição de *unidades compostas*, o qual envolve a partição de um "todo" em "partes iguais", ou seja, de uma quantidade em outras quantidades de valores iguais. A situação deve ser então reinterpretada em termos da configuração que assume nessa partição, o que implica em considerar, simultaneamente, elementos agregados e individuais que a integram [processo de *norming* conforme Freudhental (1983, p. 195), Lamon (1994, p. 92)].

Assim, na situação descrita por "ensacar 96 balas colocando 8 balas em cada saquinho":

- consideram-se 96 balas como 96 unidades;
- criam-se unidades de unidades, ou seja, unidades compostas cada uma consistindo de 8 unidades (Lamon,1994, p. 93);
- reinterpreta-se a situação como: 12 unidades de oito, portanto, 12 vezes 8.[17]

Nessa perspectiva, a constituição de um conteúdo objetivo próprio para a multiplicação envolve habilidades complexas e diversificadas e dá-se no decorrer de um longo e complexo processo, em que os procedimentos aditivos são ultrapassados e integrados, e em que se estabelecem os diferentes significados dos elementos constitutivos da multiplicação e de suas relações com as demais operações matemáticas elementares.

Além desses elementos teóricos devem ser consideradas, na análise dos protocolos, as influências das condições do ensino favorecendo exclusivamente a atribuição do significado de "adição repetida" para a multiplicação,[18] bem como fatores decorrentes do modo como os conhecimentos dos alunos se configuravam a partir das características de seu ensino, conforme menção em itens anteriores.

Com esses elementos, passo à análise da questão "*empacotamento de balas*".

---

17 Dados os limites deste artigo, deixo de explicitar o significado dessa reinterpretação em termos do estabelecimento de uma relação de proporcionalidade e dos procedimentos de resolução denominados escalares e funcionais. Remeto o leitor a Vergnaud (1990, 1994) Franchi (1995), Ermel (1997).

18 Em Franchi, A. (1995) apresento uma crítica à ênfase dada a esses procedimentos, no ensino, sem o uso de estratégias que enfatizem os valores e a natureza das diferentes variáveis de uma situação multiplicativa.

Conforme critérios de avaliação mencionados às páginas 45 e 46, esse problema foi proposto em duas versões.

Versão 1: Para a festa de seu aniversário Mônica resolveu servir saquinhos com 8 balas em cada um. Para ensacar 96 balas de quantos saquinhos precisará?

Versão 2: 4 balas em cada um. Ensacar 52 balas, de quantos saquinhos precisará?

Trata-se de um problema de divisão por quota e em que a ordem de enunciação das proposições do texto inverte a ordem de apresentação dos dados no algoritmo da divisão, em uma formulação pouco usual nos problemas dados em classe. Desse modo, em uma leitura superficial, o texto configura-se em uma estrutura próxima à de um texto verbal multiplicativo. Na análise da influência da marca verbal na interpretação do problema "empacotamento", o fator "ordem do enunciado" não pode ser desconsiderado. Conforme citado em Nesher (1988, p. 105):

> É muito importante o grau em que a formulação lingüística se correlaciona com a estrutura aritmética subjacente e com o grau em que esta estrutura está diretamente representada no texto.

Um primeiro exemplo de resolução desse problema, o da aluna Raquel, mostra uma utilização positiva das marcas verbais, na medida em que passa desses índices a uma reflexão produtiva que a auxilia na compreensão do problema e mesmo do significado da própria operação.

Raquel lê o problema em voz alta e vai falando: *em cada saquinho 8 balas* (pausa) *eu acho que a conta é 96 x 8*. Uma vez calculado o produto diz: *está errado*.

E: *Por quê?*

R: *Deu 768 e não é isso; é um número muito alto*.

Ao resolver a segunda versão do problema (52 balas em pacotes de 4) por meio de uma multiplicação, aceita o produto 208, dizendo: "*eu acho que está bom*". Mas corrige seu raciocínio ante uma nova leitura do problema e às perguntas usuais feitas por mim, como entrevistadora (*quantas balas Mônica tem, o que ela vai fazer*), dizendo: "*Não* (não está certo), *tem poucas balas para pôr em 208 saquinhos*".

Na análise dessa seqüência de respostas de Raquel evidencia-se, desde logo, a menção explícita à regra "*em cada saquinho 8 balas*" tomada, aparentemente, como critério para efetuar a multiplicação de *96 por 8.* A explicitação dessa regra não mobilizou um processo de estabelecimento de relações entre os dados do problema suficientemente eficaz para a reconfiguração da situação em termos das diferentes unidades que manipula: a aluna manifesta insegurança quanto à natureza dos dados do problema. Entretanto, remetendo-se ao texto, estabelece uma relação que de algum modo lhe permite afirmar que o número encontrado não representa uma quantidade conveniente de saquinhos: *"é um número muito alto; tem poucas balas para pôr em 208 saquinhos"*.

A hipótese acima é reforçada na seqüência do diálogo estabelecido na resolução da versão 2 do problema de ensacamento das balas ainda sem a intermediação do material manipulativo. Depois de algum desvio no curso de seu raciocínio, Raquel efetua a divisão (52 ÷ 4) e afirma: *"este número (13) é o que tem que pôr nos saquinho;* (repete) *"esse resultado é quantas balas vai pôr no saquinho"* (divisão por repartição). Lendo a pergunta do problema, corrige: *"precisará para pôr as balas, 13 saquinhos"*. A primeira resposta dada pela aluna pode ter sido provocada pelo uso corrente da expressão *"dividir por"* como *"repartir em partes iguais"*. De qualquer modo, a característica marcante do comportamento da aluna é o retorno ao texto a partir do qual avalia suas respostas.

A aluna manifesta, nesse processo de tradução, insegurança na apreensão dos diferentes significados dos elementos com os quais opera matematicamente, embora manifeste um certo nível de entendimento que lhe permite avaliar a solução que dá para o problema. Entretanto, ela procede com clareza quando se trata de operar no sistema fatual a partir desse texto, ou seja, na atividade de ensacamento de 52 balas. Nesse processo manifesta bastante segurança no confronto entre a ação física sobre os objetos e as operações matemáticas, identificando inclusive a incógnita do problema: "(13 saquinhos) *é o que a pessoa vai resolver"*. E continua: *"está certo"*.

Raquel, mesmo utilizando "quantidades iguais em cada grupo" como indicativo da solução do problema, tenta recuperar o significado dessa solução e a avalia remetendo-a ao texto.

Nas sessões de estudos, realizadas na 3ª etapa do projeto, ante a resolução de problemas verbais multiplicativos, a aluna mantinha o procedimento que consistia, primeiro, em multiplicar e, depois, avaliar o produto encontrado. Se verificasse a inadequação da resposta encontrada, alterava a operação feita para uma divisão interpretando-a corretamente. Tal comportamento apóia-se em pressupostos bastante enfatizados em pesquisas na área sobre essas operações: um deles afirma que, paralelamente às regras de composição dos fatores (ambos diferente de zero), para obter o produto e as regras correspondentes para a divisão, constituem-se novas regras, quais sejam: "a multiplicação torna maior e a divisão torna menor" (cf. Harel et alii, 1994).[20]

Como os demais procedimentos não canônicos de resolução, o procedimento de Raquel não encontrou espaço para manifestar-se e socializar-se em sala de aula. Entretanto, esse procedimento não se constituiu em obstáculo para o engajamento da aluna nas atividades da terceira etapa do projeto, tendo ela manifestado, em avaliações finais, compreensão da natureza das variáveis envolvidas em uma situação multiplicativa, distinguindo com clareza textos que requerem multiplicação dos que requerem divisão.

Um segundo caso toma como exemplo o comportamento de Cris, aluna que, como vimos no item anterior, apresentava sérias dificuldades na resolução de problemas verbais. A análise de sua entrevista indica que, em uma resposta mecânica, as marcas verbais podem levar o aluno a uma solução incorreta que, não sendo aceita pelo professor, produz tentativas aleatórias de solução.

Na resolução do problema do "empacotamento das balas", Cris efetua 96 x 8 = 768 e dá, em seguida, a resposta "*são 768 sacos*". Na versão 2, efetua igualmente 52 x 4 = 208 e explica-se: "*porque tem 4 balas em cada saquinho.*"

E: – *O que é 208?*

C: – *Quantos saquinhos preciso.*

E: – *Então me escreva a resposta inteira do problema. Cris completa a resposta por escrito:*

Cris: – "Precisará de 208 saquinhos para colocar 52 balas".

E: – *Leia a resposta. Você acha que está certo? (Lê silenciosamente)*

C: – *Não.*

---

20 Essa discussão é feita por Harel, Behr, Post e Lesh (1994), por Fischbein, Deri, Nelo e Marino (1985), por Bell, Fischbein e Greer (1984), entre outros, a partir do pressuposto de que a adição repetida é o modelo associado intuitivamente à multiplicação e analisando as conseqüências desse modelo na extensão do contexto de multiplicação em outros campos numéricos. Por ultrapassar o âmbito de minha investigação, não abordo esses pontos na constituição das regras derivadas.

A aluna justifica claramente a seleção da operação de multiplicar a partir da restrição *"4 balas em cada saquinho"* e explicita a solução do problema, sem avaliá-la. Cris manifesta uma atitude passiva ante o problema, comportando-se conforme as suposições que assimilou no jogo do contrato didático: faz uma conta e propõe uma resposta em que o número de saquinhos é maior que o número de balas. Apenas quando solicitada, reconhece seu erro.

A partir desse reconhecimento, altera a solução.

E: – *Então, como é?*

C: – *52 tira 4.* (Faz mentalmente)

E: – *Vai precisar de 48 saquinhos?* A aluna confirma sua resposta. É possível que, pelo pressuposto discutido na entrevista anterior, Cris procurasse, pela subtração, encontrar um número menor que 52.

E: – *Vai precisar de 48 saquinhos para 52 balas*

C: – *Não.*

Na tarefa de ensacamento, Cris vacila em fazer grupos de 4 balas. Faz apenas 4 deles, interrompe sua ação, continua estimulada pelas questões que lhe são colocadas, interrompe novamente o processo. A aluna manifesta claramente dificuldade em recompor a situação considerando o número total de objetos e a partição efetuada. Com minha ajuda, como entrevistadora, completa 13 saquinhos com 4 balas em cada um. A seqüência da entrevista evidencia que a aluna parece não estabelecer correspondência entre as "operações" realizadas nos dois planos de representação, o do sistema fatual e o texto verbal. Por essa razão ou por força do contrato didático estabelecido no ensino dos problemas na classe, Cris necessita fazer uma conta para dar a resposta do problema.

E: E agora dá para dizer quantos pacotes Monica fez?

C: *Dá (....) 52:4.* Escreve a divisão no papel. Só depois de ter encontrado o cociente (13), consegue avaliar sua resposta.

C: *Está* (boa a resposta). *Aqui tem 13 saquinhos.*

Entretanto, na continuidade da entrevista afasta-se novamente da significado das ações que executou. Pergunto-lhe por três vezes consecutivas:

E: *Quanto são 13 x 4,* obtendo sucessivamente as respostas: (são) *4; 12* (corresponde ao produto de 3 por 4); *52*

Observa-se claramente, nessa entrevista, como as dificuldades conceituais da aluna vinculam-se à submissão que manifesta às regras do contrato didático, que estabelecem a necessidade de fazer uma "conta" sem engajar-se na situação proposta e dar uma resposta qualquer, como pudemos confirmar nas etapas anteriores e posteriores às entrevistas.

Na segunda entrevista, Cris manifestou igualmente dificuldades conceituais significativas, que incluíram a de determinar o preço de um objeto pela manipulação do dinheiro mimeografado.

Nas aulas regulares a aluna manifestava insegurança e bloqueio nas tarefas de matemática, solicitando-me freqüentemente à sua carteira.

No "Jogo dos feijões" (atividade das sessões de estudo em anexo). Cris expressa a distribuição de 45 grãos em 5 pratinhos como $9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$.

E: – *Existe outra maneira de fazer?*

C: – $9 + 5$.

Observe-se a falta de uma diferenciação entre a natureza das variáveis envolvidas na situação.

E: – *Por quê?*

C: – *Não! É 9 x 5.*

E: – *Por quê?*

C: – *São 5 pratinhos com 9 grãos em cada pratinho. Após algumas sessões de estudo, e de acordo com avaliação feita pela equipe participante da terceira etapa do projeto, Cris não mais incidiu em erros como acima descrito (9+5 ao invés de 9 x 5). Evidentemente, essa foi apenas uma etapa vencida em sua trajetória nas sessões de estudo.*

Meu último exemplo, de entrevistas muito ricas com André, aponta para fenômenos situados na conjugação de várias dimensões de análise e em que a expressão "quantidades iguais" joga um importante papel.

Na resolução do problema do empacotamento de balas, o aluno fez $96 \times 8 = 768$ e explica-se:

A: – *Para a festa vai embalar 8 pacotes de balas em cada um. Cada pacote de bala vai 8 balas, então eu peguei e multipliquei 8 vezes 96.*

E: – *E deu?*

A: – *Deu 768.*

E: – *Então o que quer dizer isso? Vai precisar do quê?*

A: – *Monica vai precisar de 768 saquinhos.*

A partir de algumas intervenções para a identificação pelo aluno do número total de balas pergunto-lhe:

E: – *Para ensacar 96 balas você vai precisar de 768 saquinhos? Você acha que está bom?*

A: – *São 8 balas em cada um, então cada um tem 8 balas, são 8 balas aqui, 8 balas aqui, 8 balas aqui... Então eu multipliquei por 96.*

O aluno procede de maneira análoga, resolvendo a versão 52 balas e 4 saquinhos: "*eu pego 4 e multiplico por 52*".

A seleção incorreta da operação de multiplicar é, como nos casos anteriores, claramente justificada por André a partir da restrição: "quantidades iguais de objetos em cada grupo". Decidindo-se pela multiplicação, considera um dos fatores como referindo-se a quantidades iguais de balas, o outro número fornecido no texto (96) é tomado como o segundo fator, não havendo menção explícita a seu referente: "*são 8 balas em cada um... então eu multipliquei por 96*". Ou seja, ao tomar em uma leitura superficial do texto a expressão "*8 balas em cada um*" como critério para decidir a operação a ser realizada, o aluno afasta-se do significado da situação que lhe é proposta, ignorando inteiramente o significado do número 96 e, além disso, não avaliando a solução do problema. Observe-se que esse afastamento do texto como um todo persiste, mesmo diante da explicitação verbal da resposta do problema pelo entrevistador.

Comparando a solução apresentada na primeira versão com a apresentada na segunda versão, observa-se que, ao proceder ao ensacamento, o aluno separa 52 balas, contando-as uma a uma. A seguir, começa a fazer grupos de 4 até esgotar o total separado. O aluno explica-se:

A: – *Eu peguei 52 balas para ensacar 4 balas em cada saquinho: 1, 2, 3, 4, – 4 balas num saquinho, 4 tem esse, 4 tem esse...* (pausa)

E: – *O que você está pensando?*

A: – *É de dividir!! Estou pensando que é de dividir porque, olha, dividi 4 pra cá, 4 pra cá, 4 pra cá... então eu estou repartindo... é de divisão!*

Apesar da riqueza da fala do aluno e da clareza com que manifesta seu pensamento, nada assegura que a alteração da solução inicial de multiplicar para dividir seja indicativa da compreensão do problema. Essa alteração pode ter sido provocada pela associação da operação de dividir à ação de "repartir igualmente". Uma evidência disso é que o aluno efetua a divisão (52 : 4) não prevendo o quociente e não fazendo nenhum comentário sobre a coincidência desse quociente com o número de saquinhos já encontrado.

André manifesta uma grande facilidade em expressar seu pensamento, mas a interação verbal desenvolvida nessa entrevista é influenciada pelos pressupostos estabelecidos em sala de aula: marcas verbais do texto tomadas como critério para decidir a operação realizada, afastamento do significado do texto, não validação da resposta ante esse texto.

É importante observar que, para esse aluno, essa influência da marca verbal se apresenta como *estreitamente articulada à descrição inadequada que faz de uma situação de partição eqüitativa de objetos*. Já nessa entrevista pode-se observar o emprego do termo dividir: *"dividi quatro prá cá, quatro pra cá..."*. Tal emprego foi constante nas descrições de atividades de agrupamento, realizadas na terceira etapa do projeto. Por exemplo, no "Jogo dos Feijões" o aluno distribuiu 50 feijões em 10 pratos, colocando 5 em cada prato. Descreveu essa situação como: *"distribuí 5 feijões em cada prato"* com o mesmo verbo *distribuir* que, em outras ocasiões, servira para justificar a divisão.

Tal dificuldade persistiu até as atividades finais, sobre "distribuição de uma quantidade de dinheiro em partes iguais". De modo sintético, essas atividades consistiam na distribuição eqüitativa, entre os alunos de um grupo, de um montante de dinheiro, dado em notas mimeografadas de diferentes valores, e formulação de problemas sobre essa situação, considerando que um dos elementos deveria ser representado pela incógnita. O grupo de André recebeu $ 1.035,00 repartido igualmente por 3 meninos. André formulou: *"tenho $ 345,00 para dividir por 3 pessoas"*. Não pude dialogar com ele sobre o erro, pois Felipe prontamente corrigiu a resposta de André: *"tenho $ 1.035,00 para dividir ..."*.

Ao descrever a atividade realizada na forma *"dividi R$345,00 por 3 pessoas"*, o aluno quer dizer: *"dividi, dando R$345,00 para cada uma das 3 pessoas"*. Analogamente, na ação de repartir 52 balas, dividir 4 pra cá, 4 pra cá, significa formar grupos de 4. Não há, em nenhum dos casos, referência ao número total de objetos a serem distribuídos. Ou seja, ao pensar na formação de grupos com n elementos como *"dividi n em cada grupo"*, o significado da multiplicação e da divisão se confundem. A coerência entre o significado atribuído por André à expressão "dividir" nas descrições em linguagem natural das atividades de partição eqüitativa que realiza e seu comportamento na resolução do problema "empacotamento", reforça a possibilidade de que esse comportamento seja direcionado pela marca verbal "quantidades iguais por grupos".

Observe-se, entretanto, a possibilidade de a ocorrência ser menos um equívoco relativo à natureza da operação em jogo – multiplicação por divisão –, mas uma imprecisão de linguagem, que interfere na elaboração conceitual dessas operações. O item lexical "dividir" é utilizado comumente pelas crianças para indicar duas distintas orientações ou operações concretas de um mesmo evento: tanto pode interpretar-se como repartir uma quantidade total em diferentes grupos (iguais ou não) para diferentes destinatários (próximo ao sentido técnico de "dividir"), como distribuir grupos de objetos para um certo número de indivíduos (no sentido técnico de "multiplicar"). Sabe-se, aliás, que é fato comum, na linguagem infantil, o uso de um verbo por outro (geralmente o "positivo") para pares de ações ou processos conversos: acender/apagar, tirar/pôr, dar banho/tomar banho.[20]

Essa dificuldade de André mostrou-se persistente e arraigada. Apesar de lhe serem proporcionadas diferentes ocasiões para descrição oral de situações de partição e do favorecimento do diálogo entre os alunos nas atividades em equipe, somente no final do ano letivo, com uma atenção dirigida de minha parte para sanear essa dificuldade, o menino formulou corretamente um problema verbal multiplicativo, em que relata compras efetuadas em uma feirinha criteriosamente planejada e realizada na sala de aula.

Paula comprou 16 pulseiras e cada pulseira tem 8 bolinhas e depois comprou 8 saquinhos surpresa e cada saquinho surpresa tem 9 brinquedinhos. Quantos objetos Paula comprou? (André, 26/10)

Note-se que o uso de proposições ambíguas para descrever uma situação, quer de multiplicação, quer de divisão, foi utilizada em diferentes ocasiões por três outros alunos, conforme o exemplo:

Peguei 16 cadernos para empacotar em 8 caixas... (Cris para 16 x 8, em 26/10)

Do ponto de vista da metodologia da pesquisa, é importante registrar que a ocorrência dessas formulações foram consideradas como fenômenos relevantes a serem integrados na análise apenas na terceira etapa do projeto, quando o erro de André tornou-se visível. Foi necessário ler e reler as notas do diário de classe, ler e reler a teoria requerida.

20 O fato é descrito em inúmeros trabalhos de aquisição da linguagem. Franchi, E. P. (1988, pp.78-79) mostra ocorrências e remete a trabalhos de Attié-Figueira (1982).

A discussão sobre essa dificuldade subjaz a uma questão mais global e ampla: a da interferência recíproca da linguagem matemática e da linguagem natural no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, notadamente nas primeiras séries do ensino fundamental. Ressalta, entretanto, um aspecto mais específico dessa questão, em que termos da linguagem natural assumem significados diferentes quando inseridos no plano da linguagem matemática. As dificuldades de formulação de situações de partição por André mostram um entrelaçamento entre esses níveis de linguagem com a ocorrência de contradições e mal-entendidos.

Considerando-se que na aprendizagem em classe as atividades discursivas estão intrinsecamente relacionadas ao processo de produção desses conhecimentos, impõe-se a necessidade de estabelecer um confronto e uma disjunção entre os significados nessas diferentes linguagens, uma vez que elas se interpretam em diferentes sistemas conceituais. Em outros termos:

> é natural supor que dificuldades de formulação possam conduzir o locutor a modificar sua análise da situação, das referências em jogo (...). No interior de uma situação dialógica, não há evidentemente isomorfismo total entre a construção do sentido e sua reconstrução. (Laborde, 1981)

As respostas iniciais desses três alunos, na resolução do problema de "ensacamento das balas" pelos meios usuais – leitura e realização das operações – apontam para uma mesma direção de análise, ou seja, referência explícita a presença da *marca verbal "8 balas em cada saquinho"* como indicativo da solução. Entretanto, essa direção logo se diversifica pela introdução, na continuidade da tarefa, de um novo plano de representação a partir de que se evidenciam diferenças conceituais características em cada um desses casos. Esse diagnóstico adquire consistência pela observação do comportamento dos alunos nas atividades de classe e nas sessões especiais de estudo, ou seja em diferentes circunstâncias e por meio de diferentes instrumentos. Raquel avalia a pertinência da operação selecionada para resolver problemas multiplicativos por meio de uma avaliação dos resultados obtidos, em confronto com os dados que lhe foram fornecidos. Esta reflexão, constantemente realizada, permite-lhe chegar a distinção entre a operação de multiplicação e de divisão. André e Cris manifestam dificuldades conceituais de natureza diferentes: grande facilidade em expor e analisar seu pensamento no caso de André, em que uma imprecisão de linguagem interfere na elaboração conceitual; no caso de Cris submissão ao contrato didático não só por uma leitura superficial que faz dos textos do problema como pela passividade com que admite suas soluções erradas.

Em síntese, o fenômeno "influência das marcas verbais" não pode ser tomado isoladamente como um fator explicativo do comportamento do aluno, mas visto conjugado com outros para uma compreensão mais global dos fenômenos de ensino e aprendizagem. Há um movimento multidirecional entre as informações obtidas tornando a análise rigorosa e consistente. Pudemos, assim, perceber como a suscetibilidade desses alunos às influências do contrato didático na resolução dos problemas aritméticos rotineiros condiciona o desenvolvimento de uma certa relação do aluno a esse saber e inter-relaciona-se dialeticamente às deficiências em aspectos conceituais da multiplicação.

Considerações finais

Compus uma trajetória que representa apenas uma das possibilidade de constituição de um projeto de pesquisa em sala de aula. Em seu bojo, pude penetrar na complexidade dos fenômenos de ensino e aprendizagem escolar, observando fenômenos em condições diversificadas. Desse modo, eles se mostraram na permanência de determinados comportamentos, independentemente de alterações de condições da situação ou ainda mostraram-se na influência decisiva e marcante de uma dada situação, já teorizada de modo consistente.

Privilegiei, na análise apresentada neste texto, as especificidades que foram se impondo à busca de uma compreensão eficiente das dificuldades dos alunos, muitas das quais triviais e amplamente observadas na prática escolar, embora ignoradas pelos professores em suas conseqüências pedagógicas. Elas tornaram-se insólitas quando à luz da teoria. Outras observações, foi preciso persegui-las, contorná-las em atividades estreitamente dirigidas. Uma vez detectado um fenômeno particular, um retorno, com outros olhos, quer à teoria, quer ao registro de eventos passados revelou fenômenos análogos que abriram novas possibilidades no horizontes das interpretações possíveis: um projeto criativo em que o pesquisador experiente aprende e constrói para além do já posto, abrindo espaços para novas pesquisas.

Poderia ter optado por fazer, neste texto, uma reflexão sobre os procedimentos que me conduziram à organização dos fenômenos observados nas três dimensões de análise assumidas na pesquisa em foco. Teria assim, exposto em categorias mais gerais os fenômenos relativos ao ensino e à aprendizagem das situações multiplicativas. Considero, entretanto, que o estudo apresentado pode trazer, pelo estatuto e pela coerência dos dados obtidos, elementos de reflexão para o delineamento de pesquisas em sala de aula. Além disso, traz novas contribuições (embora modestas) para a discussão sobre o tema da interferência recíproca entre linguagem natural e linguagem matemática.

Uma incidência em interrogações já postas em pesquisa relatada na introdução deste texto e que, certamente, adquiriram significados não comparáveis.

Ao optar por uma pesquisa em campo imprimi um corte abrangente e singular em meu estudo. Um corte horizontal em que pude utilizar instrumentos teóricos que contemplam, além dos aspectos específicos relativos à formação dos conceitos multiplicativos de que trata esta pesquisa, outros, voltados quer para a dimensão sociocultural do ensino e aprendizagem em sala de aula (tais como os de contrato didático e relação ao saber), quer para a dimensão lingüística na análise de fenômenos relativos ao entendimento do texto dos problemas. Na singularidade e fertilidade desse corte vejo a maior contribuição de minha pesquisa em sala de aula.

Referências

ANDRÉ. M. E. (1995). *Etnografia da prática escolar*. Campinas, Papirus.

ARTIGUE, M. (1991). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 10, ns. 2-3, pp. 242-285.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 7, n. 2, pp. 33-115.

_____ (1987). Représentation et didactique de sens de la division. COLLOQUE DE SÉVRES. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Actes, pp. 47-64, mai.

_____ (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 9, n. 2, pp. 309-336.

CAMPBELL, D. T. e STANLEY, J. C. (1963). *Experimental and quasi experimental designs for reserch*. Chicago, Rand McNally Company.

CHEVALLARD, Y. (1987). La didactique entre étude locales et théorisation: le cas de l'algèbre dans l'enseignement du second degré. COLLOQUE DE SÉVRES. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Actes, pp. 305-324, mai.

_____ (1988). Sur l'analyse didactique: deux estudes sur les notions de contrat et de situation. *Publication de l'Irem* d'Aix Marseille, n. 14.

CHIZZOTTI, A. (1991). *Pesquisa em ciências humanas e sociais.* São Paulo, Cortez.

DAMM, R. (1992). *Apprentissage des problémes additives et compréhension de texte*. Thèse de docteur. Strasbourg, Publication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectiques outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 7, n. 2, pp. 5-32.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres semiotiques et apprentissages inttelectuels*. Paris, Peter Lang.

ERICKSON, F. (1989). "Metodos cualitativos de investigacion sobre la enseñanza". In: WITTROK, M. C. *La investigacion de la enseñanza, metodos cualitativos y de observacion.* Buenos Aires, Paidós.

E.R.M.E.L. (1997). *Apprentissages numériques*. Tome 3. Paris, Hatier.

FISCHBEIN, E.; DERI, M.; NELLO, M. S. e MARINO, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal of Recherche in Mathematics Education*, v. 16, n. 1, pp.1-17.

FORQUIN, J. C. (1993). *Escola e cultura: as bases sociais e epistemológicas do conhecimento escolar.* Porto Alegre, Artes Médicas.

FRANCHI, A. (1977). *O problema do ensino da subtração na 1ª série do I grau.* Dissertação de mestrado, PUC-SP.

_____ (1995). *Compreensão das situações multiplicativas elementares.* Tese de Doutoramento, PUC-SP.

FRANCHI, C. (1977). Linguagem – atividade constitutiva. *Almanaque Cadernos de Literatura e Ensaio,* n. 5, pp. 9-27. São Paulo, Brasiliense.

FRANCHI, E. P. (1988). *Pedagogia da alfabetização: da oralidade à escrita.* São Paulo, Cortez.

GERALDI, J. W. (1991). *Portos de passagem.* São Paulo, Martins Fontes.

HAREL, G. e CONFREY, J. (eds.) (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics.* Albany, University of New York Press.

HAREL, G.; BEHR, M.; POST, T. e LESH, R. (1994). *The impact of the number type on the solution of multiplication problems.* HAREL, G. e CONFREY, J. (eds.)

LABORDE, C. (1985). *Problèmes langagiers dans l'enseignement mathématique. Exposé à la III^ème^ école d'eté des ditactiques des mathématique et de l'informatique.* Grenoble, Imag, Université Joseph Fourier.

LAMON, S. (1994). "Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming". In: HAREL, G. e CONFREY, J. (eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics.* Albany, University of New York Press.

LÜDKE, M. e MEDIANO, Z. (1992). *Avaliação na escola de 1º grau: uma análise sociológica.* Campinas, Papirus.

LÜDKE, M. e ANDRÉ, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em Educação.* São Paulo, EPU.

NESHER, P. (1988). "Multiplicative School word problems: theorical approches and empirical findings". In:. BEHR, M. e HIEBERT, J. (eds.). *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston, National Council of Theachers of Mathematics.

NUNES, T.; SCHLIEMANN, A. L. e CARRAHER D. (1993). *Street Mathematics and school mathematics.* Cambridge, Cambridge University Press.

PENIN, S. (1989). *O cotidiano e a escola*. São Paulo, Cortez.

PERRIN, G. (1993). Question didactique souleveé à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles". *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 13, ns. 1-2, pp. 6-17.

PIAGET, J. (1959). *La formation du symbole chez l'enfant.* Neuchâtel, Delachaux.

RINTSCH, W. (1986). *Learning from text. Cognition and instruction*. V. 3, pp. 87-108.

SCHWARTZ, J. (1988). "Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations". In: BEHR, M. e HIEBERT, J. (eds.). *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston, National Council of Theachers of Mathematics.

SIERPINSKA, A. (1995). *La compréhension en Mathématiques*. Quebec, Modulo.

STEFFE, L. (1994). "Children's multiplying schemes". In: HAREL, G. e CONFREY, J. (eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics.* Albany, University of New York Press.

VERGNAUD, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la realité*. Berne, Peter Lang.

_____ (1990). La théorie des champs conceptuals. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 10, ns. 2-3, pp. 133-169.

_____ (1994). "Multiplicative conceptual field What and Why?" In: HAREL, G. e CONFREY, J. (eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics.*

_____ (1995). "Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. *Actes de la VIIIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. IREM de Clermont-FD, pp. 175-185.

VERGNAUD, G. e DURAN C. (1976). Structures additifs et complexité psychogénetiques. *Revue Française de Pedagogie*, n. 36, pp. 28-43.

VYGOTSKY, L. S. (1962). *Tought and language*. Cambridge, Mit Press.

Recebido em out./1999; aprovado em nov./1999

ANEXOS

Anexo 1 – Instrumentos

Questão 1: Empacotamento de balas

Versão 1: Para a festa de seu aniversário Mônica resolveu servir saquinhos com 8 balas em cada um. Para ensacar 96 balas de quantos saquinhos precisará?

Versão 2: Para a festa de seu aniversário Mônica resolveu servir saquinhos com 4 balas em cada um. Para ensacar 52 balas de quantos saquinhos precisará?

Condições de Aplicação

Cada versão de cada uma das questões foi escrita em uma ficha, sobre a mesa havia fichas e saquinhos.

Versão 1: O aluno lê o problema da primeira ficha silenciosamente e em voz alta e que a seguir o resolva. No decorrer da entrevista o aluno pode voltar ao texto, quando sentir necessidade. Em caso de dificuldade o entrevistador coloca questões relativas ao texto.

Versão 2: O aluno faz a leitura da versão 2 e é convidado a fazer o problema utilizando as balas e os saquinhos:

"Faça de conta que você é a Mônica e vai preparar a festa. Você não está na escola, está em sua casa e vai ensacar as balas."

O aluno pode colocar as balas nos saquinhos de plástico ou formar grupos de balas sem ensacá-las.

Questão 2: Preço unitário

Versão 1: Comprei 6 ioiôs. Paguei com Cr$ 1.000,00 e recebi de troco Cr$ 100,00. Quanto paguei por um ioiô?

Versão 2: 4 ioiôs. Paguei com Cr$ 500,00, troco Cr$ 20,00. Qual o preço de um ioiô?

Condições de aplicação

Versão 1: Leitura e resolução conforme instruções da 1ª questão.

Versão 2: Sobre a mesa encontram-se ioiôs e xerox de notas de 1.000, 100 e 50 cruzeiros.

O aluno recebe instruções para achar o preço de um ioiô usando dinheiro:

– em caso de acerto é solicitado a verificar os cálculos que fez utilizando as notas (verifique se as contas estão certas, faça com dinheiro o que fez no papel).

– em caso de dificuldade é estimulado a usar o dinheiro e os ioiôs para ver se consegue achar o preço de um, como quiser; não conseguindo, o entrevistador sugere a distribuição de notas pelos ioiôs, acompanhando a realização do aluno com *promptings*.

– quando a dificuldade surge na determinação Cr$ 900,00 como o preço de 6 ioiôs, entrevistador e aluno simulam uma situação de compra e pagamento pedindo-se que ao final o aluno registre: 6 ioiôs custam 900 cruzeiros.

Questão 3: Oferta de sabonetes

Em um anúncio de supermercado estava escrito:

Oferta da Semana

1 sabonete custa Cr$ 350,00 O que você acha dessa oferta?

Leve 6 por Cr$ 1.980,00

Condições de Aplicação

Leitura e realização das operações acompanhada de questões orais do entrevistador.

Anexo 2 – Jogo dos Restos

Descrição

Cada grupo de alunos recebeu o seguinte material:

– um recipiente com feijões;
– um dado cúbico;
– um conjunto de pequenos pratos;
– fichas de registro, uma para cada aluno.

Cada aluno pega um punhado de feijões, sem contá-los.

Um dos alunos do grupo joga o dado. O número que aparece na face superior do mesmo determina o número de pratos a serem separados. A seguir o jogador reparte os feijões do punhado que pegou nos pratos conforme as regras:

– todos os pratos devem ter o mesmo número de feijões;
– esse número é o maior possível.

Faz-se um rodízio entre os elementos do grupo, repetindo-se algumas vezes o jogo – quatro a cinco vezes.

Os alunos devem comparar a soma dos restos obtidos nas diferentes jogadas. Ganha o jogo aquele que obtiver a maior soma.

Os números que intervêm a cada jogada são:

– número obtido no dado ou, por correspondência, o número de pratinhos considerados;

– número de feijões colocados em cada pratinho e número de feijões que ficaram fora nessa distribuição;

– número de feijões do punhado inicialmente distribuído pelo aluno; esse número é desconhecido.

Após cada uma das rodadas o aluno registra os dados obtidos em uma ficha em que esses dados são pedidos e calcula o número total de grãos.

A soma dos restos registrados é efetuada no final do jogo, ou seja, depois do número convencionado de rodadas, determinando-se a partir disso o vencedor.

Environnements "calculatrice symbolique": necessité d'une socialisation des processus d'instrumentation evolution des comportements d'eleves au cours de ces processus*

DOMINIQUE GUIN, LUC TROUCHE**

Resumo

A apresentação deste texto será organizada em dois momentos. Num primeiro momento, mostraremos, a propósito das "calculadoras simbólicas", os possíveis efeitos de um artefato sobre os processos de *conceitualização*. Destacaremos o interesse de uma análise do artefato em termos de pré-estruturação da ação (mais que em termos de "potencialidade abstrata"). Aí, colocaremos em evidência elementos da transposição informática em termos condições/impositivos para o pensamento e a ação. Mostraremos que o controle desses efeitos necessita de uma intervenção explícita do profesor, levando-o a uma nova organização do espaço e do tempo de estudo, considerando a exigência de uma socialização dos processos de instrumentação. Num segundo momento, apresentaremos dois experimentos integrando calculadoras gráficas. Uma tipologia de comportamentos de

* Plusieurs ateliers seront associés à cet exposé et permettront de compléter cette présentation: Luc Trouche et des élèves d'une terminale S expérimentale: «Regards croisés sur un environnement TI 92» (cf. p. 213); Jacques Salles: «TI 92 rétroprojetée. Outil d'aide à l'introduction d'une notion, à la conjecture, à la découverte des propriétés,... à partir de figures de base» (cf. p. 227); René Bernard, Christian Faure, Maryse Noguès et Yvon Nouazé: «Représentation approchée, représentation symbolique des nombres, coexistence dans une calculatrice» (cf. p. 257); Jacques Delgoulet: «Introduction des fonctions en Seconde à l'aide de la TI 92" (cf. p. 267).

** ERES – Études et Recherches sur l'Enseignement Scientifique. Université Montpellier 2 (irem@math.univ_montp.fr).

alunos, construída a partir de relações combinadas com a atividade matemática geral e com instrumentos de cálculo, permite descrever a diversidade e evolução dos comportamentos de alunos ao longo do processo de instrumentação. Concluindo, apresentaremos alguns elementos para uma tomada de conciência institucional de ferramentas de cálculo no ensino da matemática.
Palavras-chave: calculadoras simbólicas, conceitualização, transposição informática.

Résumé

L'exposé sera organisé en deux temps. Dans un premier temps, nous montrerons, à propos des calculatrices symboliques, les effets possibles d'un artefact sur les processus de conceptualisation. Nous remarquerons l'intérêt d'une analyse de l'artefact en terme de pré-structuration de l'action (plus qu'en terme de «potentialité» abstraite). A cette occasion, nous mettrons en évidence des éléments de la transposition informatique en termes de contraintes pour la pensée et l'action. Nous montrerons que le contrôle de ces effets nécessite une intervention explicite de l'enseignant, débouchant sur une nouvelle organisation de l'espace et du temps de l'étude prenant en compte l'exigence d'une socialisation des processus d'instrumentation. Dans un deuxième temps, nous présenterons deux expérimentations intégrant des calculatrices symboliques. Une typologie de comportements d'élèves, construite à partir des rapports combinés à l'activité mathématique générale et aux instruments de calcul, permet de décrire la diversité et l'évolution des comportements d'élèves au cours du processus d'instrumentation. En conclusion, nous présenterons quelques éléments pour une prise en compte institutionnelle des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques.
Mots clées: *calculatrices symbolique, conceptualisation, transposition informatique.*

Effets négatifs d'une utilisation exclusivement privée sur les processus de conceptualisation

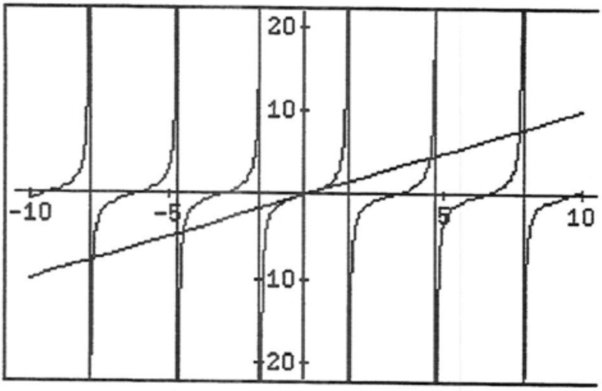
En France, toutes les calculatrices sont autorisées aux examens, cependant une faible minorité d'enseignants (15%) les prend en compte dans leur enseignement. La plupart des enseignants les ignore et ne consacre aucun temps à l'apprentissage de techniques élémentaires. Pourtant tous les élèves ont une calculatrice graphique dans les classes scientifiques et l'utilisent continuellement! Les élèves doivent donc acquérir par eux-mêmes ces techniques élémentaires, il n'y a pas de prise en charge par l'institution des processus d'instrumentation.

Quelles peuvent être les conséquences d'une utilisation exclusivement privée des calculatrices graphiques? Voici quelques exemples de comportements d'élèves face à des images produites par des écrans de calculatrices graphiques:

Comment les élèves interprètent les images-écrans?

Nombre de solutions de l'équation tan x = x sur R

Dans une classe de 32 élèves de 1ère scientifique (17 ans) ayant leur cours à disposition, seulement quatre élèves évoquent une infinité de solutions, en référence au cours. La représentation suivante produite par l'écran d'une calculatrice nous éclaire sur ce comportement qui peut paraître surprenant:

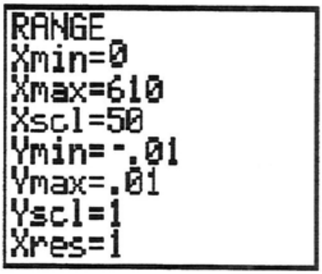


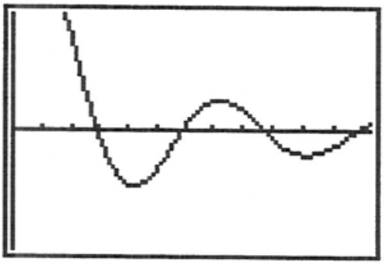
Les autres élèves mentionnent un nombre fini de solutions (correspondant à celles visibles sur leur écran). Fait encore plus remarquable, sept élèves prennent en compte les intersections de la droite avec les asymptotes : «les asymptotes font partie de la courbe, puisqu'elles apparaissent quand on demande le tracé...» alors que le tracé de ces asymptotes est simplement une conséquence de la modélisation, dans les outils technologiques, du continu par le discret.

Enfin, cinq élèves suggèrent une infinité de solutions au voisinage de 0, en s'appuyant sur la perception de proximité des représentations de tan x et x, alors qu'ils ont vu en cours quelle était la tangente en 0 à la représentation de tan x. L'on observe ici une conception de la représentation graphique d'une fonction qui est une transcription fidèle de ce qui est perçu par l'élève à l'écran.

Comment les élèves gèrent la contradiction des images-écrans?

Nombre de solutions de l'équation $\frac{\sin x}{x} = 0$ sur [0, 600].





Cette représentation devrait paraître étrange, puisqu'en principe cette fonction devrait s'annuler environ 200 fois sur l'intervalle considéré qui est [0, 610]. L'écart entre la courbe attendue et la courbe obtenue vient du fait que la machine[1] place environ 95 points et que l'amplitude de l'intervalle est 610, c'est-à-dire presque 95 * 2π.

Face à des productions d'écran (pourtant contradictoires) correspondant à des fenêtres différentes relatives à la même fonction $\frac{\sin x}{x}$, parmi quarante élèves en Terminale scientifique (18 ans) et des élèves de première année scientifique d'université (19 ans), seulement 10% répondent «à chaque fois que sin x s'annule» et ont conscience du fait que les graphiques sont erronés, même s'ils ne savent pas expliquer pourquoi. Pour les autres, certains graphiques sont justes alors qu'ils sont pourtant visiblement incompatibles et ils évaluent le nombre de solutions à partir de ceux-ci. Ce qui dénote une confiance très importante en la fiabilité de leur calculatrice, sans procédure quelconque de contrôle vis à vis de cet outil.

Un fait très significatif est à noter dans les explications des élèves qui perçoivent que certains graphiques sont erronés: les erreurs sont toujours imputées à l'utilisateur et ne remettent jamais en cause la machine, on retouve cette grande confiance en la fiabilité de l'outil.

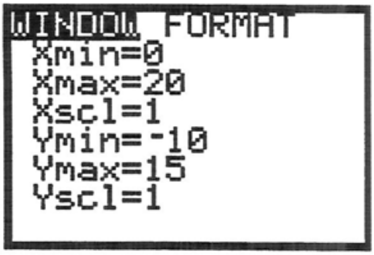
1 Il s'agit ici d'une calculatrice TI 82, le même phénomène pourrait être relevé sur toute autre calculatrice graphique.

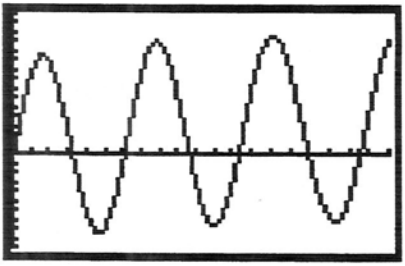
Quelle influence sur la conceptualisation des limites?

La quasi-totalité des élèves affirme qu'une calculatrice graphique permet de contrôler l'existence d'une limite nulle en l'infini, en Terminale Scientifique et même en première année d'université (où les étudiants ont pourtant vu la définition «formelle» avec quantificateurs). Cette conviction est confirmée par l'observation du comportement des élèves. Considérons l'exemple suivant:

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x + 10 \sin x)$$

Sans calculatrice, toutes les réponses des élèves sont correctes, mais l'on observe un effet sensible des calculatrices dû à un graphe très étonnant pour un «novice»:





Les procédures des élèves de niveaux comparables sont très différentes avec ou sans calculatrice. Sans calculatrice, les élèves se réfèrent à des comparaisons de fonctions, minorations ou factorisations et à leur cours. Avec calculatrice, leur premier geste est d'obtenir le graphe et de déduire du profil de la courbe par des zooms successifs le résultat, ils se réfèrent alors aux variations de fonctions. Cette prégnance de l'application graphique se traduit par des suites ordonnées de gestes, des régularités dans l'action qui doivent retenir notre attention.

En effet, l'idée fondamentale d'une relation entre le geste et la pensée mise en évidence dans Vygotski (1930/1985) est à la base de l'analyse des processus de conceptualisation Vergnaud (1996). G. Vergnaud souligne le rôle central des schèmes (organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations) dans les processus de conceptualisation. D'autre part, il met en évidence le rôle moteur des systèmes de représentation dans le développement conceptuel du fait que, contrairement au conceptuel, ces systèmes peuvent être transmis. Puisque l'individu construit des concepts à partir des représentations externes intériorisées (sous forme de représentations mentales), les représentations ont un rôle crucial dans les processus de conceptualisation.

De même, les automatismes qui se mettent en place risquent d'influer sur les processus de conceptualisation (Trouche e Guin, 1996). Nous émettons l'hypothèse qu'une utilisation exclusivement privée des calculatrices symboliques conduirait à des comportements similaires, cependant il n'est pas possible dans le contexte actuel de valider cette hypothèse, car les classes où tous les élèves disposent de ces calculatrices sont des classes expérimentales, ces outils sont donc intégrés dans l'enseignement.

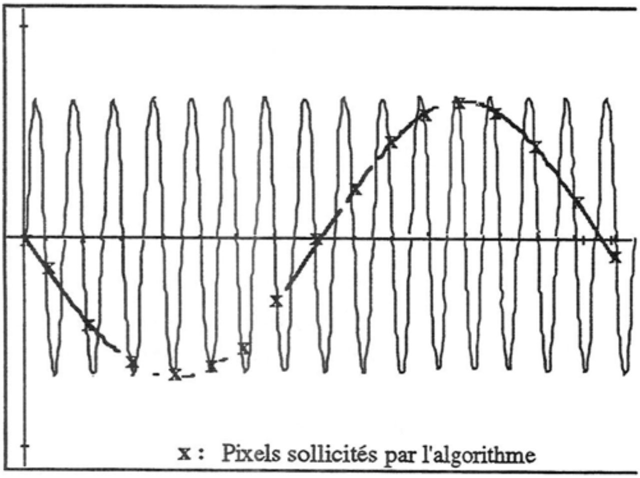
Eléments de la transposition informatique en termes de contraintes pour l'action et la pensée

La complexification du système d'enseignement en environnement informatique peut être analysée à la lumière de la transposition informatique (Balacheff, 1994) qui met en évidence la modification de la connaissance due aux spécifications de l'environnement (représentations et conception de l'enseignement) et à la mise en oeuvre du dipositif informatique. «Les caractéristiques de ces environnements façonnent et contraignent les possibilités d'interaction avec les objets mathématiques et conditionnent fortement les mathématiques qui peuvent être produites ou acquises» (Artigue, 1995).

Pour accéder à la transposition informatique de ces environnements, trois types de contraintes peuvent être distingués (Trouche, 1996): les contraintes internes (représentation et traitement), celles de commandes (choix implémentés) et celles d'organisation (accès et organisation). Les deux derniers types de contraintes sont liés à l'interface et préstructurent l'action. Voici quelques exemples de contraintes des applications graphique et formelle de la TI 92:

Contraintes internes

- Les phénomènes de discrétisation qui se produisent, par exemple, lors de la représentation à l'écran d'une fonction périodique, quand la distance entre les abscisses de deux points successifs calculés par la machine est proche de la période:



- La gestion dans l'application HOME du calcul exact est liée aux choix internes de simplification qui sont différents des nôtres dépendant du contexte : $\cos^2 x$ ou $\frac{\cos 2x+1}{2}$, $\frac{x+1}{x}$ ou $1+\frac{1}{x}$, ln (4) ou 2 ln(2). Obtenir à l'écran une forme équivalente d'une expression nécessite par conséquent un apprentissage et les choix internes des concepteurs peuvent induire des contradictions, par exemple l'expression $\frac{x^2-4}{x-2}$ et simplifiée en $x+2$, mais la valeur pour $x = 2$ n'existe pas. De même l'expression f (f (x)) ou f (x+1) n'est pas acceptée [2] : il y a un décalage inévitable entre le «discours» mathématique et celui de la calculatrice [Canet et alii 96].
- La touche ENTER induit une simplification qui peut être soit une factorisation, un développement ou une décomposition en éléments

simples : d'où la difficulté d'anticiper le résultat, souvent surprenant. Pour un novice, le calcul algébrique n'est pas si aisé, on ne peut donc espérer que la TI 92 soit immédiatement un instrument de validation.

- Autre exemple de contrainte interne : cos $\frac{\pi}{8}$ est connu de la TI 92 (mais pas cos $\frac{\pi}{16}$). Elle peut évidemment calculer cos $\frac{\pi}{16}$ par résolution de l'équation correspondante cos $\frac{\pi}{8}$ = 2 (cos $\frac{\pi}{16}$)^2 - 1), mais on ne peut espérer que la machine reconnaisse cos $\frac{\pi}{16}$! Cette contrainte pose donc le problème de la **gestion du vrai / faux** dans l'enseignement et l'on ne peut faire l'économie d'une réflexion sur ces dysfonctionnements.
- La nouvelle touche ∞ donne un nouveau statut de nombre à l'infini par la possibilité de calculer f (∞) pour toute fonction f. De plus l'infini peut être la valeur d'une fonction en mode exact (pour la fonction $\frac{1}{(x-2)^2}$, f (2) vaut l'infini en mode exact et undef en mode approché).

  Ces contraintes ont un impact sur les comportements des élèves, on assiste à une **standardisation** de l'infini: un élève dit par exemple, le point d'intersection de deux courbes est (2, + ∞)!

Plus généralement, la maîtrise des relations entre nombres réels et complexes, calcul exact et approché nécessite des connaissances mathématiques précises.

Contraintes de commande

- Le mode courant choisi reste affiché sur l'écran graphique, mais le calcul est toujours approché, ce qui entraîne des confusions des élèves entre un nombre et ses approximations dans l'interprétation des graphes. De plus, il faut quitter l'application graphique pour calculer en mode exact.

2 Ce problème n'existe plus sur les nouvelles TI 92 «plus».

- Les contraintes syntaxiques exigent une distinction entre variable, paramètre, fonction, équation, etc., ce qui induit des difficultés chez les élèves, même si l'on estime que cette rigueur comporte un aspect positif.
- Les effets des commandes peuvent conduire à des procédures de contournement : par exemple si l'on n'obtient pas de résultat pour la limite d'une fonction, il est parfois possible d'obtenir une valeur par prolongement. Plus généralement, la limitation des commandes conduit souvent à des résultats contradictoires, par conséquent la présence de calcul symbolique ne dispense pas de réflexion et ouvre des possibilités nouvelles pour un travail mathématique.

Contraintes d'organisation

Théoriquement, la TI 92 accorde une place privilégiée au calcul symbolique. En fait, dans l'étude d'une fonction, le graphe donne réalité à l'objet mathématique et le mode de référence n'est pas naturellement le mode exact, même s'il est privilégié par l'enseignant (le raccourci-clavier pour le mode approché est souvent plus rapide). De plus, les passerelles entre applications sont souvent problématiques (Home / éditeur de fonctions, Home / éditeur de suites) puisque dans certaines applications, le calcul exact n'est pas accessible et que certains objets ne sont pas reconnus si l'on repasse dans l'application Home (objet suite, par exemple). Ainsi, les mathématiques sont continuellement en jeu dans les manipulations et la gestion des graphes, du calcul exact et approché. C'est l'enseignant qui peut exploiter ces contraintes pour élaborer des situations intégrant la calculatrice et favorisant une réflexion mathématique.

Nécessité d'une socialisation des processus d'instrumentation

Voici la description du comportement d'un élève manipulant la TI 92 dans (Shoaf M., 1997): «Un processus au cours duquel l'élève converse silencieusement avec lui-même par l'intermédiaire de la calculatrice, se posant des questions tout en manipulant des images concrètes. Ceci le conduit à acquérir la connaissance pour conjecturer non seulement ce qui va se passer réellement à l'écran, mais aussi pourquoi cela se produit. L'utilisation des calculatrices conduit plus probablement les élèves à construire leur propre compréhension mathématique grâce à une réflexion consciente».

Ce comportement ne nous paraît pas naturel chez les élèves que nous avons observés, sans doute tout d'abord parce que les effets de la visualisation sont nettement plus complexes que ce que l'on imagine en général. Le comportement idéal décrit ci-dessus induisant un apport bénéfique des calculatrices nécessite que la visualisation des représentations des concepts mathématiques à l'écran devienne (ce qui n'est pas immédiat) un support pour la conjecture et la réflexion. La déformation inévitable des objets mathématiques à l'écran nécessite une analyse des caractéristiques de l'artefact utilisé pour anticiper les modifications induites dans l'environnement d'apprentissage et une intervention **explicite** des enseignants dans l'éducation à l'image qui suppose des conditions matérielles (dispositif de rétroprojection) et pédagogiques.

Les enseignants sont investis d'une responsabilité importante dans le choix des situations pour accompagner le processus individuel d'**instrumentation** qui transformera l'artefact en un instrument mathématique efficace. Ce processus complexe exige une combinaison et une gestion contrôlée des différentes sources d'information qui doit conduire à une construction mathématique personnelle.

L'intervention de l'enseignant dans le processus suppose des conditions **écologiques**, c'est à dire une **réorganisation** de l'espace et du temps de l'étude en phases de nature différente pour une articulation appropriée du travail papier / crayon et du travail avec la calculatrice (sans machine; machine guidée par le rétroprojecteur; utilisation temporaire en cours ou devoir surveillé; utilisation libre en TP). Dans cette nouvelle organisation de l'étude, les dfficultés mathématiques sont déplacées.

Au delà du choix des situations, le rôle de l'enseignant est fortement modifié, mais certainement pas plus simple: il doit souligner les contradictions non perçues, inciter à une réflexion pour trouver une cohérence mathématique, aider les élèves à accéder à cette cohérence, introduire les nouvelles connaissances mathématiques nécessaires et gérer les difficultés qui surgissent dans le nouvel environnement.

Objectifs d'une nouvelle organisation de l'espace et du temps de l'étude

L'introduction d'un artefact dans l'enseignement ne provoque pas nécessairement des réorganisations cognitives. Plusieurs recherches (Dorfler, 1993; Ruthven et Chaplin, 1997) ont montré que ces réorganisations ne sont pas si spontanées, même en environnement calculatrice. Comment peut-on favoriser un fonctionnement cognitif conscient des élèves (tel celui décrit dans (Shoaf, 1997) conduisant à un contrôle de leur propre travail et à une construction de leur propre compréhension mathématique et favoriser ainsi ces réorganisations cognitives?

Ce changement radical d'attitude vis à vis des mathématiques lié à la conscience du sujet de franchir un seuil, d'acquérir un pouvoir d'initiative et de contrôle, peut être atteint grâce au recours à des registres variés pour éviter la confusion entre représentation et objet mathématique représenté (Duval, 1996). En effet, l'observation des élèves révèle un travail essentiellement mono-registre (graphique, algébrique ou numérique) et des difficultés de conversion entre registres sémiotiques souvent sous-estimées par les enseignants.

De même que R. Duval préconise de favoriser une différentiation et une coordination des représentations externes des différents registres sémiotiques (Duval, 1994), nous essaierons d'organiser un travail analogue pour les différentes applications de la calculatrice en insistant sur les passerelles entre applications (dans les deux sens).

Les situations proposées visent à encourager un travail expérimental, une investigation et anticipation par des interactions entre observations graphiques, géométriques, calcul théorique, une interprétation, coordination et confrontation des informations pour surmonter les contradictions apparentes. Cette réorganisation du temps et de l'espace de l'étude peut être une motivation pour acquérir les connaissances mathématiques nécessaires visant à convertir l'artefact en un instrument mathématique efficace: le rôle de l'enseignant est vu comme le chef d'orchestre de la socialisation de ce processus d'instrumentation.

Un exemple de situation (niveau seconde)

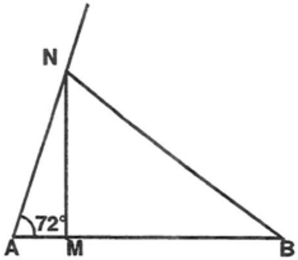
Il s'agit d'une situation d'introduction aux fonctions qui est décrite en détails dans l'atelier de J. Delgoulet (1996, p. 267), nous indiquerons essentiellement l'évolution dont cette situation a fait l'objet. Les élèves travaillent de manière autonome en groupe sur une seule approche, pour limiter la difficulté de manipulation en seconde. Trois approches différentes sont proposées à partir de la figure géométrique, la représentation graphique et l'expression algébrique afin d'appréhender l'objet mathématique à travers ses différentes représentations et leurs conversions.

Voici les principales leçons tirées d'une première expérimentation : les mathématiques en jeu disparaissent facilement devant les problèmes liés à la machine, d'où la nécessité d'une prise en main plus progressive de la calculatrice pour les élèves. De plus, l'introduction de plusieurs nouvelles fonctionnalités au cours d'une séance augmente de manière sensible les difficultés de gestion de la séquence par l'enseignant.

Dans un premier temps, nous avons introduit des activités plus centrées sur l'appropriation de la calculatrice, ce qui pose des problèmes vis à vis des élèves et de l'institution. Afin de centrer davantage l'activité proprement dite sur les mathématiques, les énoncés ont été nettement simplifiés, les nouvelles commandes ont été réduites et le contrat en ce qui concerne la configuration de la machine a été précisé.

Des situations, sans machine, préparatoires aux passerelles entre applications ont été introduites. Elles concernent essentiellement les conversions entre registres (signe d'une expression; inéquations; résolution graphique d'équations et inéquations), l'interprétation des graphes - calculatrices, les problèmes de fenêtrage et la trigonométrie (calcul exact, radicaux). Des situations préparatoires avec machine portaient sur la gestion du fenêtrage (pour les représentations connues, à savoir les droites). Nous avons donc cherché à ce que les aspects techniques ne masquent pas les mathématiques visées.

La situation proposée est une situation d'origine géométrique, il s'agit de la recherche du minimum d'une longueur ℓ (x) quand N décrit une droite donnée formant un angle de 72° avec un segment AB donné:



AM = x BN = ℓ (x)

L'approche géométrique est une approche productrice, grâce aux affichages numériques et à la possibilité d'animer la figure donnée, elle seule permet d'obtenir, en seconde, la valeur exacte du minimum cherché. L'approche algébrique est construite à partir de l'expression algébrique qui est donnée. L'approche graphique est construite à partir de la représentation graphique construite par la calculatrice.

Chaque approche comporte des phases avec calculatrice (⌨) mettant en jeu une seule application, des phases papier / crayon (✍) où l'articulation des différents registres est travaillée. Les phases sont clairement identifiées sur les fiches élèves par les logos correspondants. Par exemple, pour l'approche algébrique:

✍	recherche du domaine de définition,
⌨	programmation de l (x) donnée dans Home,
	tableau de valeurs,
✍	graphique,
✍	construction géométrique,
✍	calcul de BN pour retrouver l'expression de l(x),
✍ / ⌨	approximation de la solution,
✍	construction géométrique de la solution,
✍ / ⌨	recherche de la valeur exacte du minimum:
	contrôle et validation.

La phase de synthèse est fondamentale, puisqu'elle intègre la traduction dans chaque registre des résultats obtenus dans chaque approche. Elle est également l'occasion d'introduire le vocabulaire relatif aux fonctions. La documentation et l'analyse de cette situation peuvent être consultées dans (Guin e Delgoulet, 1996).

Le contexte expérimental

Deux expériences ont lieu à Montpellier: la première concerne une classe de seconde (élèves de 15/16 ans), la deuxième concerne une classe de terminale scientifique (élèves de 17/19 ans). Dans ces deux classes, tous les élèves sont pourvus d'une calculatrice TI-92, prêtée pour l'année (dans le cadre de contrats de recherche nationaux entre la DISTN et l'équipe ERES de l'université Montpellier II, ou locaux entre le CRDP et l'IREM de Montpellier). Nous nous intéresserons plus particulièrement ici au dispositif d'enseignement mis en place dans la classe de terminale scientifique.

Il repose sur une organisation particulière du temps et de l'espace de l'étude, à trois niveaux: le cours, les travaux pratiques (T.P.) et les problèmes pour un temps plus long.

Le cours

Le cours combine en permanence l'utilisation d'un tableau et d'un écran sur lequel est rétroprojetée une des calculatrices de la classe. Cette combinaison constitue un exemple de ce que les élèves sont censés faire sur leur table de travail: faire la part du travail «papier/crayon» et du travail avec calculatrice (cf. schéma 1 ci-dessous).

C'est un élève (à tour de rôle) qui manipule la calculatrice rétroprojetée ; appelé **élève sherpa**, il sert (à la fois pour le maître et pour la classe) de référence, de guide, d'auxiliaire, de médiateur. C'est une fonction centrale dans le dispositif de cours, qui bouleverse les rapports traditionnels dans la classe (entre l'ensemble des élèves et le maître). Ici les relations se complexifient: de nouvelles relations apparaissent entre les élèves de la classe et l'élève sherpa, entre cet élève et le maître, qui favorisent un débat dans la classe, une explicitation des démarches, indispensable pour contrebalancer le caractère nécessairement «intime» de l'observation des petits écrans des calculatrices.

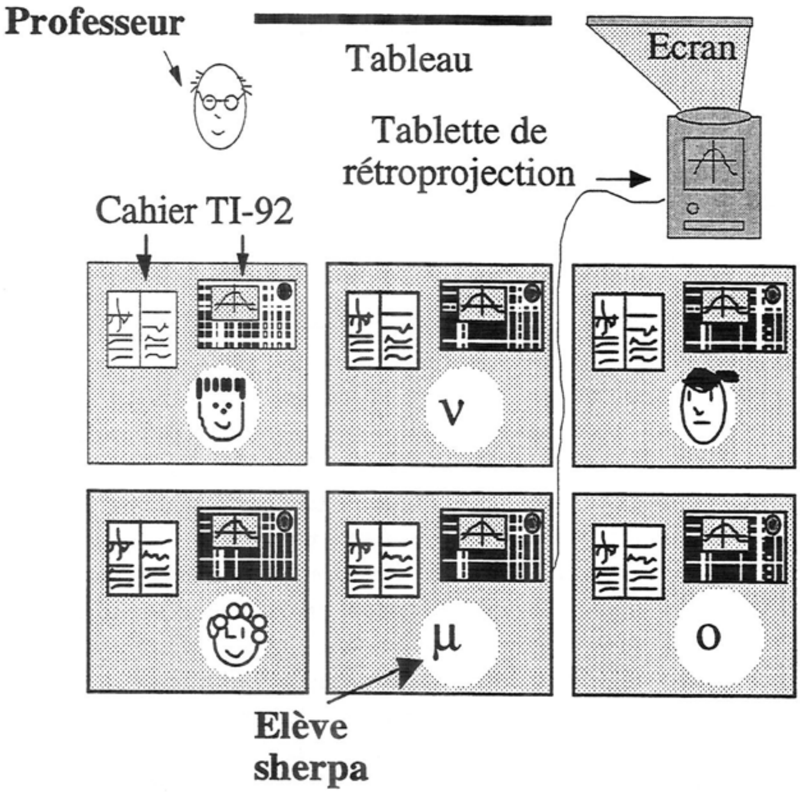


Schéma 1 Le dispositif de cours dans un environnement calculatrice:la combinaison du travail papier/crayon et du travail calculatrice, le rôle pivot de l'élève sherpa.

La gestion collective du travail avec instrument impose de distinguer des phases de nature différente : parfois les calculatrices sont fermées (et le rétroprojecteur éteint), parfois le travail est guidé strictement par l'élève sherpa (les élèves sont censés avoir sur leur écran exactement la même chose que sur le grand écran projeté), parfois le travail avec la calculatrice est libre pendant un temps donné (pour un exercice, une mise au point d'une conjecture, l'observation d'un nouvel objet, la mise à l'épreuve d'une nouvelle commande...). A tout moment, la nature du travail avec calculatrice (pas de calculatrice, calculatrice guidée ou calculatrice «libre») doit être claire pour tous les élèves de la classe.

Un tel dispositif entraîne une **nouvelle organisation du temps de l'étude**: les phases d'observation, de confrontation de différents résultats, de mises à l'épreuve de différentes stratégies proposées sont plus longues. Un exemple : l'introduction du cours sur les coniques s'est faite à partir de l'utilisation de l'application géométrique : un point F et une droite D étant donnés, comment construire l'ensemble des points M tels que $\frac{d(M,F)}{d(M,D)}$ soit égal à un nombre e donné ? Cela impose, en l'absence de commande spécifique, de revenir sur les lignes de niveau, l'utilisation de l'homothétie, cela permet une phase d'observation des variations de forme de l'ensemble en fonction des valeurs prises par e, une phase de conjecture sur la nature des différentes familles de courbe, une phase de mise en forme algébrique, d'observation des tracés dans l'application graphique, etc. On imagine bien que cela prend du temps, mais que ce n'est pas tout à fait du temps perdu.

Cela nécessite de la part du maître une bonne connaissance de l'outil de calcul et une prise en compte permanente de celui-ci, sur le plan de ses potentialités et de ses contraintes. Un exemple : pour l'introduction du calcul intégral, la proximité (géographique sur le clavier et syntaxique, par la forme des écritures) des commandes «somme» et «intégrale» permet d'évoquer les rapports entre phénomènes discrets et phénomènes continus. En même temps, le fait que, dans l'application graphique, il soit impossible de calculer une intégrale si les bornes «ne sont pas dans le bon sens» peut renforcer les idées souvent présentes chez les élèves d'identité entre intégrale et aire. Cette contrainte de l'instrument impose au maître d'être encore plus clair sur ce point.

Les travaux pratiques (T.P.)

Deuxième niveau de travail, les travaux pratiques sont **institués** comme tâche régulière, une fois par semaine pendant une heure. Les élèves sont regroupés par binôme (cf. schéma 2 ci-dessous).

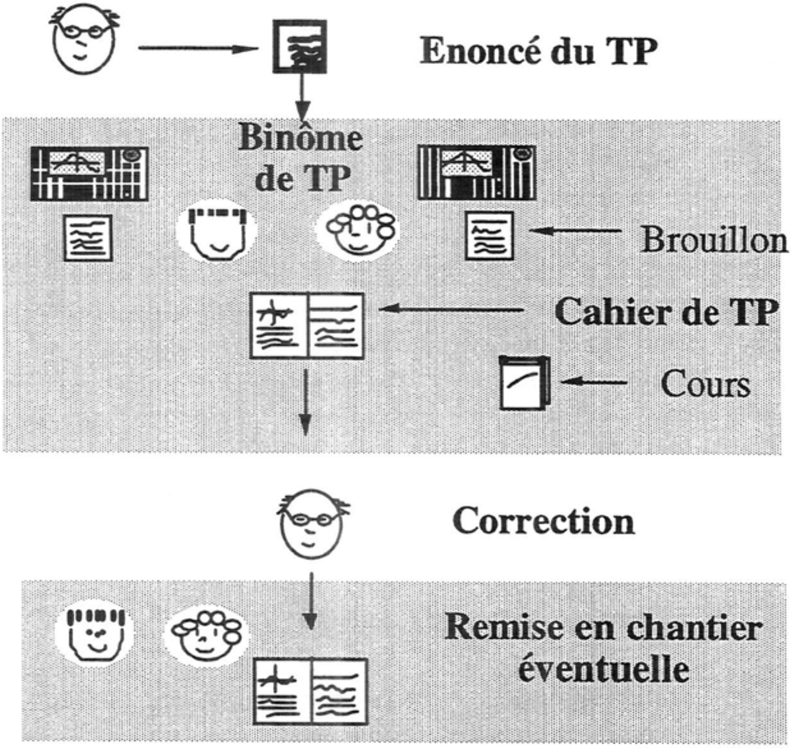


Schéma 2 Un TP, comme dispositif spécifique et comme processus

Il s'agit donc d'un travail d'équipe (ce qui pose des problèmes d'appariement et impose, pendant la séance, la non intervention du maître).

Un problème est proposé aux binômes. L'énoncé dépend bien sûr de la connaissance visée, des contraintes de l'outil, des applications mobilisables. Il favorise toujours la **mobilisation conjointe** des connaissances disponibles et de l'outil de calcul. Il s'agit d'une question assez ouverte qui se prête à des **phases d'observation, de conjectures, de preuves partielles, de réfutations.** Un exemple traité pendant l'année: l'étude des équations $e^x = x^{10n}$; combien y a-t-il de solutions, comment évoluent-elles quand n varie ? Comme on l'a vu dans l'étude des contraintes de la calculatrice, la première réponse donnée par le logiciel n'est pas forcément la bonne... Le recul réflexif est indispensable pour comprendre le phénomène.

Chaque binôme doit réaliser un rapport de recherche dans un cahier spécifique (un cahier pour deux, ce qui permet d'alterner le rôle de rédacteur. Ce cahier est essentiel pour l'élève (explicitation des démarches avec calculatrice ou «à la main», analyse à chaud des impasses éventuelles, évaluation de la pertinence des résultats). Il est essentiel aussi pour le maître (recueil d'information sur l'évolution des processus d'instrumentation et de conceptualisation).

Le T.P. est le moment crucial d'un processus de recherche institué comme enjeu de connaissance dans la classe. Il comporte une «question du jour» et des «questions du lendemain» qui permettent aux volontaires de remettre la question en chantier, d'approfondir la preuve, d'envisager une généralisation possible, de proposer d'autres pistes de recherche.

Des moments de recherche plus flous et plus longs

La combinaison d'un environnement de calculatrices complexes (qui suscite on l'a vu de nombreuses questions pas toujours prévues ni mêmes prévisibles par le maître) et d'un processus de recherche institué dans la classe peut faire émerger à l'occasion d'un TP, d'un cours, d'une lecture, une question plus vaste qui ne peut pas toujours être traitée dans le cadre de la classe et qui ne présente pas toujours un intérêt suffisant pour tous les élèves.

La question est alors posée de façon facultative comme «défi» à la classe, reprise au vol par des élèves, individuellement ou en petit groupe (cf. schéma 3 ci-dessous). Différentes propositions de résolution, globales ou partielles, sont proposées par leurs découvreurs à l'ensemble de la classe, le problème est alors relancé sous une autre forme... Cela nécessite un temps souvent long de maturation, de remise en forme, d'échange.

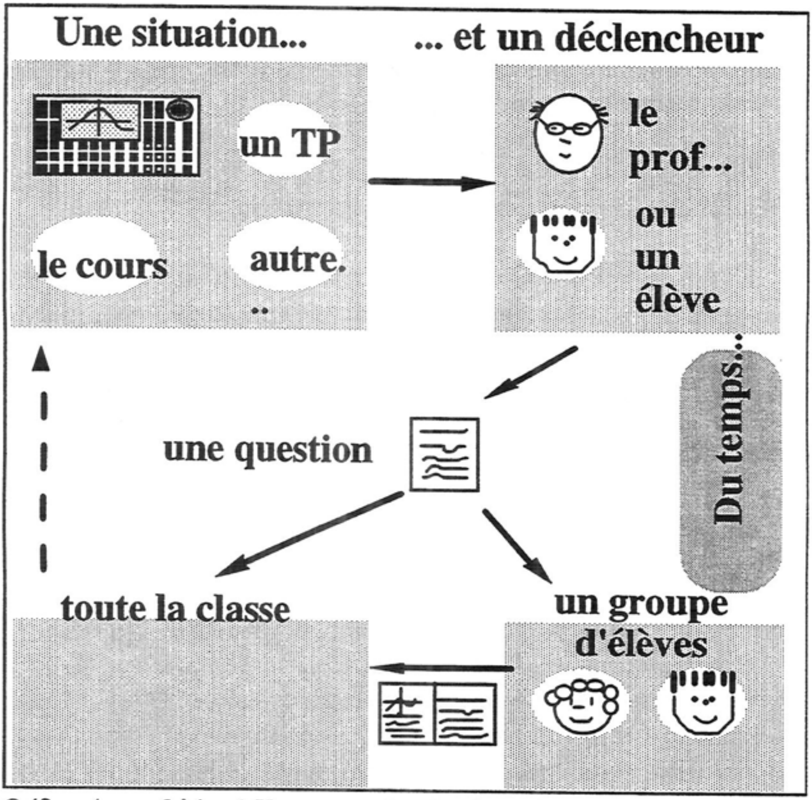


Gráfico número: Schéma 3 Un processus de recherche multiforme

Cela alimente le «climat» de recherche dans la classe, rend légitime le fait de poser des questions et d'oser des réponses, mêmes si celles-ci, dans un premier temps, ne sont pas assurées. Un exemple d'une telle recherche proposée à la classe: si l'on observe les valeurs prises par la suite «plus proche entier de $n+\sqrt{n}$, que remarque-t-on? L'étude fait assez vite émerger la conjecture que la suite prend toutes les valeurs entières successives, sauf les carrés. Il reste alors à valider cette conjecture, c'est-à-dire à rechercher les causes profondes du phénomène observé.

Voilà le décor de la classe expérimentale planté. On aura remarqué l'importance accordée à l'intervention **explicite du maître** dans le processus d'instrumentation (dans le cadre du cours), à la socialisation des **manoeuvres instrumentées** (via l'élève sherpa) à l'**explicitation des démarches** (dans les moments de recherche), à la **combinaison du travail avec la calculatrice** et du **travail papier/crayon**.

Évolution du comportement des élèves

L'importance accordée par le maître aux processus individuels d'instrumentation n'entraîne pas bien sûr que tous les élèves vont marcher d'un même pas. Suivre l'évolution des comportements nécessite de disposer de quelques points de repère.

Une carte des métaconnaissances

A partir de résultats issus de l'intelligence artificielle {Pitrat 90], de la psychologie cognitive (Houdé, 1995), repris en didactique des mathématiques (Robert e Robinet, 1996), on peut distinguer des métaconnaissances en oeuvre dans le travail mathématique, en particulier en environnement calculatrice. Sont alors disponibles des outils de résolution de natures différentes (les références théoriques, le papier/crayon, la calculatrice, le voisinage). L'élève est censé savoir rechercher les informations pertinentes (investigation), savoir interpréter un résultat donné, savoir déduire logiquement un deuxième résultat d'un premier résultat (inférence), savoir coordonner, comparer les informations issues de sources différentes, savoir exprimer les résultats trouvés, savoir stocker les nouvelles informations (ce qui implique une réorganisation des anciennes). Ces métaconnaissances peuvent être mise en oeuvre de façon «mécanique» ou de façon contrôlée, ce qui permettra d'inhiber les schèmes non pertinents. Le contrôle a ainsi une place centrale (cf. schéma 4 ci-dessous).

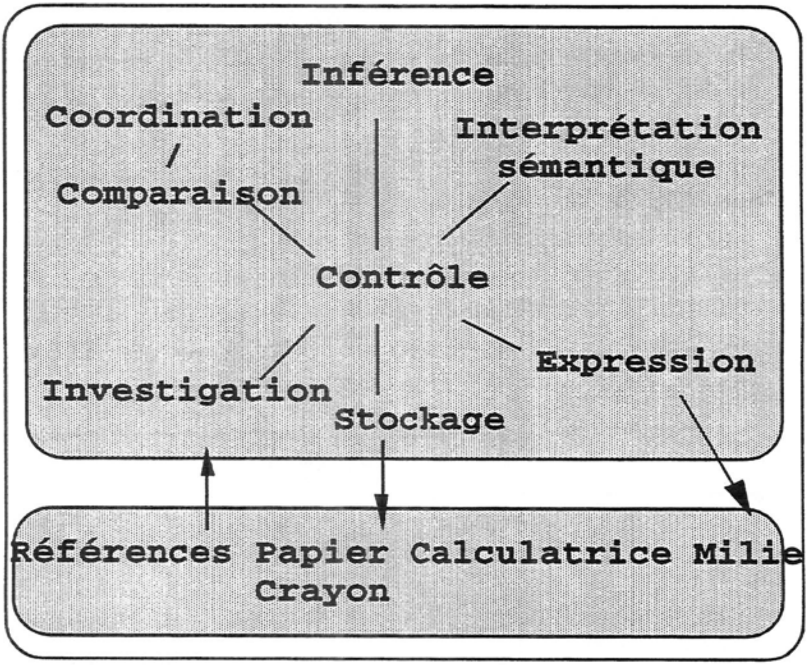


Schéma 4 Métaconnaissances actives et outils de travail en environnement calculatrice

Une typologie des comportements des élèves

Cette carte des métaconnaissances permet de distinguer des comportements extrêmes dans le travail mathématique (cf. schéma 5 ci-dessous):

- un comportement «rationnel», qui utilise surtout le travail papier/crayon, qui fonctionne par inférence. La méthode de preuve est alors la démonstration;
- un comportement «théorique», qui utilise surtout les références disponibles, qui fonctionne par interprétation des résultats. La méthode de preuve est alors l'analogie;
- un comportement «scolaire» [3], qui n'a pas d'outil privilégié, ou plutôt

3 Les étiquettes attribuées à chacun de ces comportements extrêmes sont évidemment sujettes à caution... Surgies des échanges dans l'équipe de suivi de l'expérimentation, elles sont en fait révélatrices des représentations de leurs auteurs!

qui a des difficultés à utiliser les différents outils à disposition et à mettre en oeuvre les différentes métaconnaissances. La méthode de preuve repose souvent sur le «copié-collé» de résultats antérieurs identifiés comme pertinents;

- un comportement «bricoleur», qui utilise surtout la calculatrice et procède par investigation. La méthode de preuve repose sur l'accumulation de résultats concordants;
- un comportement «expérimentateur», qui utilise tous les outils à disposition, procède par comparaison des différents résultats. La méthode de preuve repose alors sur la confrontation des différentes sources, sur la vérification de la cohérence de celles-ci.

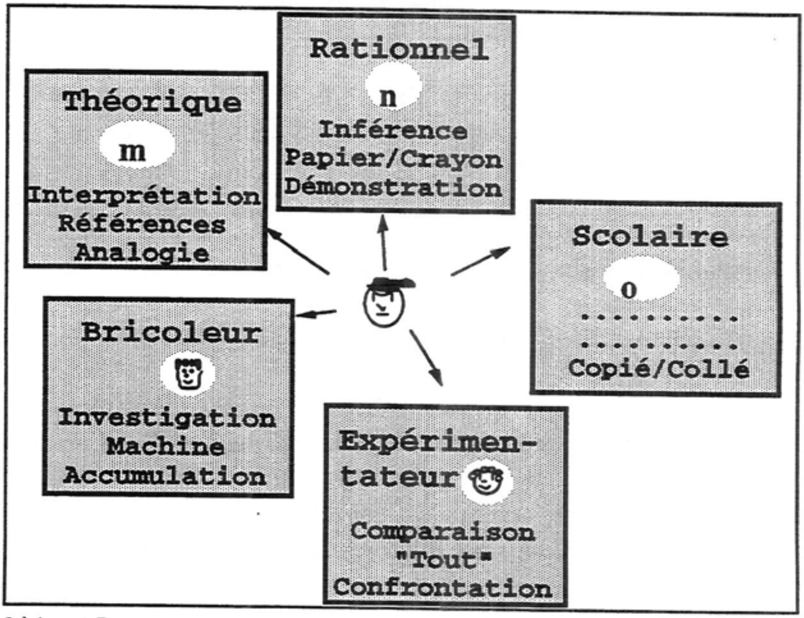


Schéma 5 Des caricatures qui permettent de construire une géographie de la classe

Cette typologie n'a pas un caractère rigide bien sûr. Elle permet de distinguer des points extrêmes dans la classe, de situer les élèves dans des situations intermédiaires, de repérer des évolutions.

L'adaptation naturelle à l'environnement TI 92

La genèse instrumentale (Rabardel, 1995) a un versant individuel et un versant social. Au début du processus (quand les calculatrices sont introduites dans la classe), on peut estimer que le versant individuel est le plus important. Ce sont les habitudes de travail des élèves, les comportements «naturels» qui vont constituer l'outil en instrument du travail mathématique. Ensuite, le travail collectif, l'intervention du maître dans le processus d'instrumentation, vont permettre une harmonisation relative des processus. Mais les comportements individuels installés au départ du processus vont perdurer et s'exprimer en particulier quand l'élève se retrouve «seul» avec sa calculatrice devant un travail à réaliser (par exemple en devoir surveillé). On observe alors:

- pour les comportements de type «rationnel», la calculatrice joue le rôle d'un **cahier de brouillon interactif**. La TI 92 transforme et enrichit le travail mathématique (conjectures, changements de registres, vérifications);
- pour les comportements de type «théorique», la calculatrice est une **boîte à problèmes**. La TI 92 renforce une tendance naturelle: désintérêt pour les calculs élémentaires (traités par la machine), fixation sur les problèmes théoriques généraux;
- pour les comportements de type «scolaire», la calculatrice est une **béquille**. Le travail mathématique est réduit à la traduction pour la machine des questions posées et à l'interprétation des résultats;
- pour les comportements de type «bricoleur», la calculatrice est une **lanterne magique**. La TI-92 renforce la tendance naturelle: investigations multiples, constructions d'itinéraires (par déformations successives) pour arriver au résultat proposé par la calculatrice;
- pour les comportements de type «expérimentateur», la calculatrice joue le rôle d'une **lunette panoramique**. La TI 92 accentue la tendance à rechercher, confronter les résultats issus des différentes applications.

On le voit, l'adaptation **«naturelle» des élèves à un environnement de calculatrices complexes ne réduit pas la dispersion des comportements**, elle peut augmenter celle-ci, enrichir le travail mathématique des «meilleurs», appauvrir le travail mathématique des élèves en difficulté. Cela n'en rend que plus nécessaire l'intervention explicite du maître dans l'organisation du milieu de l'étude.

L'évolution des comportements dans le cadre expérimental

On peut constater d'abord que le temps de travail avec calculatrice est à peu près le même pour tous les élèves (dans les environnements de calculatrices symboliques, ce qui constitue une différence notable par rapport aux environnements de calculatrices simplement graphiques (cf. Trouche, 1997). Cela traduit un certain équilibre entre les phases de travail papier/crayon et les phases de travail avec calculatrice [4].

Mais le travail à fournir pour s'adapter à une nouvelle syntaxe n'est pas le même:

- pour les comportements de type «rationnel», l'adaptation est relativement aisée (comme l'a été l'adaptation à la syntaxe mathématique);
- pour les comportements de type «théorique» ou «expérimentateur», l'adaptation est d'abord problématique (*«la machine me répond toujours syntax error!»*), mais ensuite l'effort d'adaptation s'accompagne d'un progrès dans la rigueur du travail en général;
- pour les comportements de type «scolaire», l'on observe une coupure entre deux groupes:
- ceux qui franchissent le barrage linguistique gagnent en assurance;
- ceux qui ne l'ont pas franchi gagnent en perplexité: «la machine me montre des erreurs que je ne comprends pas, elle m'énerve, elle me surprend par des messages bizarres, elle me fait perdre du temps»;
- pour les comportements de type «bricoleur», l'on distingue aussi une coupure entre deux groupes:
- ceux qui ont fait l'effort d'adaptation rationalisent une démarche d'anticipation/vérification;
- les autres transportent les résultats tels quels[5].

Cependant, l'on observe, pour la majorité des élèves, des effets induits par les processus d'instrumentation socialisés dans le cadre expérimental:

---

4 Cf. sur ce point les observations minutées réalisées par les élèves eux-mêmes lors de l'atelier 7A *«Regards croisés sur le travail en environnement calculatrices symboliques»*.

5 On peut parler à ce propos de schème de «transport automatique», cf. Trouche (1997).

- une diversification, un équilibrage du point de vue des différentes métaconnaissances mises en oeuvre dans l'activité mathématique;
- une modification de la conception des calculatrices et de leur utilisation:
- «je sais désormais qu'une utilisation sérieuse et appliquée de la calculatrice permet d'alléger le travail»;
- «avant cette année, une calculette me semblait inutile, je ne dirais pas que ma calculette m'est devenue indispensable, mais c'est un bon outil de vérification»;
- «la calculatrice permet de conjecturer»;
- «elles sont devenues pour moi de véritables outils utiles qui aident à la réflexion»;
- «c'est un outil utile et efficace, mais qui ne remplace pas une réflexion méthodique».
- l'on observe aussi une modification profonde de la conception des mathématiques et de leur enseignement:
- «le mélange théorie-pratique-calculatrice rend plus passionnantes les mathématiques»;
- «j'ai beaucoup aimé l'enseignement des mathématiques cette année: cela les a rendues vivantes et a éveillé la curiosité de tous et l'envie»;
- «en comparant cela à la musique, il ne s'agit plus seulement de gammes, mais d'applications intéressantes»;
- les maths apportent une rigueur méthodique que je ne soupçonnais pas aussi importante»;
- «les maths, c'est en fait une recherche (difficile) d'où on part de rien pour arriver à quelque chose. On ne connaît jamais les bases, les vraies relations entre les choses».

Le cadre d'étude mis en place dans la classe a permis ainsi un rapprochement des points de vue des différents élèves et un rééquilibrage des différents comportements dans la classe.

Des problèmes demeurent cependant, même au bout d'un an de travail dans le cadre de la classe expérimentale, en particulier chez certains élèves au comportement «scolaire»:

- «cette calculatrice compliquée à utiliser, lourde et dont les messages sont en anglais a aussi des caprices imprévisibles»;

- «cette calculette crée des fossés dans une classe, donne du travail en plus à certains élèves et en plus peut être le cas d'une grande confusion dans les esprits» (remarques extraites du bilan de l'année scolaire 97/98 (cf. Trouche, 1998).

Conclusion

De cette expérimentation, un certain nombre de leçons peuvent être tirées d'un point de vue institutionnel[6] :

- on ne peut espérer régler tous les problèmes par la mise en place du même dispositif concernant indifféremment tous les élèves. L'existence de problèmes spécifiques concernant quelques élèves (les comportements «scolaires» que nous venons d'évoquer) suggère la nécessité de mettre en place des dispositifs spécifiques de tutelle du type «TI 92 langue étrangère»[7];
- il est aussi possible de jouer sur la complémentarité des différents comportements, en associant dans les binômes de TP des élèves bien choisis. Une étude précise sur ce point reste à faire, mais les premières observations dans le cadre expérimental montre les potentialités de ce type de co-tutelle (cf. Trouche, 1996).

Plus généralement, l'enseignement des mathématiques dans un environnement de calculatrices symboliques met au centre du dispositif (ce qui est bien naturel) l'élève dans sa singularité (cf. ci-dessous schéma 6). Il impose de:

- **développer les structures de contrôle collectif** des gestes de travail avec instrument, du langage à travers lequel ces gestes s'expriment et des objets manipulés (les «images», les nombres);

6 Nous nous limiterons ici à l'institution «classe». Il est clair que l'intégration des calculatrices complexes requiert d'autres conditions, relatives aux programmes, aux instructions, aux relations entre disciplines, à l'organisation du temps et de l'espace de l'étude dans un établissement scolaire, etc. Cela sort du cadre de cette conférence...

7 Expression choisie par analogie avec les dispositifs spécifiques de tutelle mis en place pour les jeunes immigrés qui arrivent en France : ils ont droit à des cours de «Français langue étrangère» pour faciliter leur intégration.

- **développer des environnements de travail** qui nécessitent la sollicitation des différents outils (papier/crayon, calculatrice, références disponibles);
- **envisager une diversification des problèmes** qui permette une sollicitation différenciée des métaconnaissances (certains problèmes nécessitant davantage de mettre en oeuvre une coordination de différentes applications, d'autres nécessitant au contraire une utilisation raisonnée d'une seule application -voire d'une seule commande).

La métaphore du chef d'orchestre a déjà été utilisée pour décrire le rôle du maître dans une classe en environnement «calculatrices symboliques». Elle peut aussi se déplacer pour décrire le rôle de l'élève lui-même : ce n'est qu'en apparence qu'il ne dispose que d'un outil. Nous avons tenté de montrer dans cet article que cet outil se constituait en instrument au cours d'une genèse individuelle et collective.

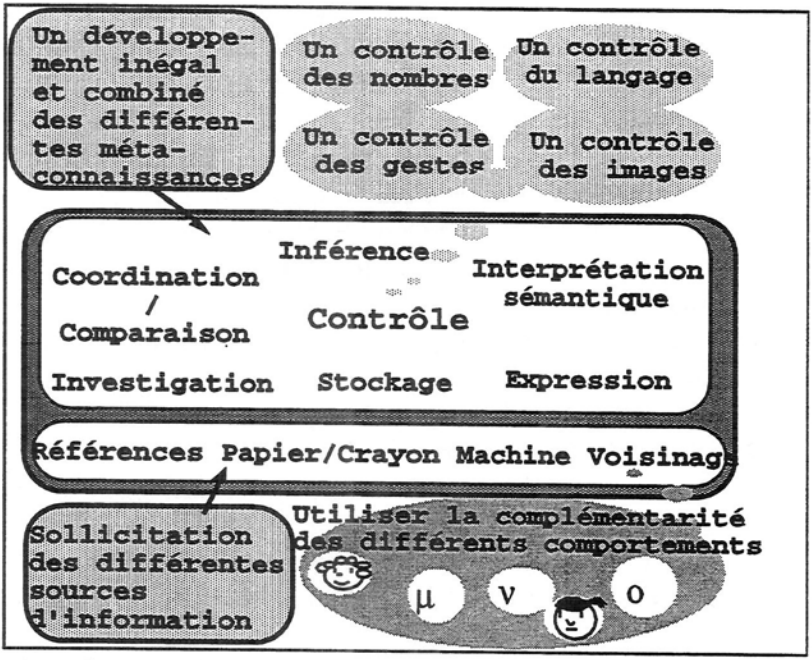


Schéma 6 La carte des métaconnaissances, comme repère pour l'organisation de l'étude dans la classe

A l'issue de cette genèse, l'élève doit avoir à la fois les capacités d'un homme orchestre, pouvant utiliser pertinemment telle ou telle partie de l'instrument en fonction du contexte (ce qui nécessite qu'il ait rencontré des contextes suffisamment variés faisant appel à des partitions différentes), mais aussi les capacités d'un musicien d'orchestre, pouvant s'intégrer dans un ensemble coordonné.

A calculatrices complexes, intégration complexe... Ce n'est qu'en se défaisant de l'illusion des environnements naturellement «mathématiquement producteurs» que l'on pourra obtenir des calculatrices symboliques un enrichissement du travail mathématique.

Bibliographie

ACTES de l'Université d'Été de Rennes. "Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques: quelles perspectives?". Ministère de l'Education Nationale, Diten B2.

ARTIGUE, M. (1995). Une approche didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement. In: COLLOQUE ENVIRONNEMENTS INTERACTIFS D'APPRENTISSAGE AVEC ORDINATEUR 95, pp. 17-28, *Actes*. Eyrolles, Paris.

BALACHEFF, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 14, ns. 1-2, pp. 9-42.

BERNARD, R.; FAURE, C.; NOGUÈS, M. e TROUCHE, L. (1997). *L'intégration des calculatrices dans la formation des maîtres*. Irem de Montpellier.

CANET, J.-F.; DELGOULET, J.; GUIN, D. e TROUCHE, L. (1996). *Un outil personnel puissant qui nécessite un apprentissage et ne dispense toujours pas de réfléchir*. Repères-Irem, v. 24, Topiques Editions.

DORFLER, W. (1993). *Computer use and views of the mind*. Learning From Computers: Mathematics Education and Technology, Nato Serie F, Springer-Verlag, 121,

DUVAL, R. (1994). *Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Editeur Irem de Strasbourg.

_____ (1996). Quel cognitif retenir en didactique? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 16, n. 3, pp. 349-382.

GUIN, D. e DELGOULET, J. (1996). *Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de Seconde.* Irem de Montpellier.

HOUDÉ, O. (1995). *Rationalité, développement et inhibition. Un nouveau cadre d'analyse.* Paris, PUF.

PITRAT, J. (1990). *Métaconnaissances, futur de l'intelligence artificielle.* Paris, Hermès.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris, Armand Colin.

ROBERT, A. et ROBINET, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 16, n. 2, pp. 145-176.

RUTHVEN, K. e CHAPLIN, D. (1997). The calculator as a cognitive tool: upper-primary pupils tackling a realistic number problem. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning* , n. 2, pp. 93-124.

SHOAF, M. M. (1997). Using the total Power of the TI 92! From Discovery Explorations to Complete Lab Reports. *The International Journal of Computer Algebra in Education,* v. 4, n. 3, pp. 295-299.

TROUCHE, L. (1996). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice: étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentalisation.* Thèse de doctorat. Université Montpellier II, Irem de Montpellier.

TROUCHE, L. (1997). *Calculatrices symboliques, un défi mathématique.* CRDP de Montpellier.

_____ (1996). *Enseigner les mathématiques en Terminale scientifique avec des calculatrices graphiques et formelles* (deux volumes). Irem de Montpellier.

_____ (1998). *Expérimenter et prouver, faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques; 38 variations sur un thème imposé.* Irem de Montpellier.

TROUCHE, L. et GUIN, D. (1996). *Seeing is reality: how graphic calculators may influence the conceptualisation of limits.* Proceedings, 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 4, pp. 323-333, Valencia.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 10, ns. 2-3, pp. 133-170.

_____ (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. *Actes de l'école d'été de didactique des Mathématique*. IREM, Clermont-Ferrand.

VYGOTSKI, L. S. (1930/1985). «La Méthode Instrumentale en Psychologie». *Vygotski aujourd'hui*. Neûchatel, Delachaux et Niestlé.

Recebido em jun./1999; aprovado em set./1999

Novas tecnologias computacionais e o ensino de Matemática

WALDIR L. ROQUE*

Resumo
Neste artigo apresentamos uma breve discussão sobre ensino de Matemática ante as novas tecnologias computacionais, chamando a atenção para os Sistemas de Computação Algébrica como uma importante ferramenta a ser introduzida e extensivamente explorada para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática, nos níveis superior e médio.
Palavras-chave: tecnologia, CAI, ensino de Matemática.

Abstract
In this paper we briefly discuss mathematics teaching with the support of Computer Algebra Systems, stressing their potentiality as a new and important tool to be introduced and extensively explored in order to improve the quality of mathematics teaching at the undergraduate and high school levels.
Key-words: *technology, CAI, Mathematics teaching.*

Introdução

Há alguns anos a presença do computador é sentida nas nossas ações do dia-a-dia, indo desde uma simples edição de texto ou uma transação bancária até a previsão do tempo com cálculos sofisticados.

O rápido desenvolvimento da ciência da computação, juntamente com novos métodos e técnicas nas áreas de ciências exatas, engenharias e, mais recentemente, biologia, requer uma resposta rápida na mudança da forma e do conteúdo dos programas de ensino, tanto no nível universitário quanto no nível médio.

* Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E-mail: roque@mat.ufrgs.br

Em muitas áreas, com particular atenção às ciências exatas, a computação alterou sensivelmente a forma da pesquisa e do ensino. Vários têm sido os benefícios da utilização dos computadores e sistemas computacionais nas investigações científicas e na melhoria da qualidade de ensino. O computador tornou-se um aliado tão importante que as palavras do Prof. Lynn A. Steen (1988) refletem essa importância: "Os computadores estão para a matemática como os telescópios e microscópios estão para ciências".[1]

Com esta frase, Steen deseja enfatizar que o computador está desempenhando, para a matemática, o mesmo papel que a invenção do telescópio e do microscópio desempenharam para o avanço da astronomia e da biologia, respectivamente.

Na verdade, o papel do computador vai muito além do desenvolvimento da matemática. O surgimento do computador, por si só, criou uma nova filosofia de vida, com implicações e desdobramentos nos mais diversos segmentos profissionais.

A presença do computador na indústria e nos serviços requer uma mudança na formação dos novos profissionais. Essas mudanças impõem uma reestruturação e uma redefinição das metodologias de ensino aplicadas em nossas universidades e instituições de ensino.

Em nossas universidades, o computador tem sido utilizado principalmente nos cursos de ciências exatas. Tradicionalmente, ele tem sido aplicado nos cursos de introdução à ciência da computação e cálculo numérico, nos quais se ensinam algumas linguagens e técnicas numéricas para soluções aproximadas, e de uma forma mais sistemática nos cursos de formação específica em Ciência da Computação.

No caso de escolas do ensino médio, o computador ainda não tem sido sistematicamente usado como uma ferramenta de ensino. Muitas escolas privadas já criaram laboratórios de informática, mas pouco o utilizam para o ensino de matemática. Nas escolas da rede pública a presença de computadores ainda está fundamentalmente restrita ao setor administrativo, o que evidencia uma certa inversão de valores.

Há vários anos o ensino tem seguido essencialmente um mesmo procedimento. No entanto, nas últimas duas décadas, houve uma evolução muito grande, tanto do potencial tecnológico quanto de cálculo dos

---

1 Tradução do autor.

computadores, deixando de ser centrais (plataformas) para se tornarem pessoais, como também surgiram novas técnicas e métodos, que possibilitaram o desenvolvimento de novos sistemas e linguagens computacionais.

Apesar da existência desses novos sistemas computacionais, os cursos de cálculo diferencial e integral e álgebra linear, básicos para a formação de profissionais em ciências exatas, pouco ou quase nada foram modificados para acompanhar essa evolução. Na verdade, esses cursos formam o alicerce para outras disciplinas e são de fundamental importância na formação matemática de vários cursos como Matemática, Física, Engenharias, Química, Biologia e até para Economia. Dessa forma, uma maior atenção deve ser destinada à modernização desses cursos.

No ensino médio, a utilização de ferramentas matemáticas computacionais facilita e enriquece o ensino de novos conceitos. No entanto, o que temos visto é a utilização do computador para edição de textos e uso da Internet, o que, embora importante e até necessário para a formação dos estudantes, não pode ficar restrito a um uso menor dentro de uma escola. É no ensino médio que os estudantes são expostos pela primeira vez a conceitos fundamentais de matemática, por isso a importância de serem bem ensinados e assimilados pelos alunos.

De uma maneira geral, os sistemas para matemática computacional podem ser rotulados em 3 categorias, a saber:

- *sistemas computacionais numéricos*, destinados à execução de cálculos através de técnicas numéricas;
- *sistemas computacionais gráficos*, destinados à execução de gráficos de alta resolução, processamento de imagens e animação;
- *sistemas computacionais* algébricos ou simbólicos, destinados ao processamento de cálculos de forma puramente simbólica.

No meio acadêmico, os sistemas de computação numérica eram os mais utilizados na pesquisa e no ensino. Com o surgimento dos sistemas de computação algébrica, integrados a sistemas gráficos e numéricos, aqueles passaram a ocupar um papel importante dentro do cenário da matemática computacional.

Sistemas de computação algébrica

Nas duas últimas décadas, sistemas computacionais simbólicos foram desenvolvidos visando a execução de cálculos matemáticos de forma semelhante à tradicionalmente executada por matemáticos, físicos, engenheiros, etc, com a utilização de lápis e papel. Esses sistemas, conhecidos como Sistemas de Computação Algébrica (SCA) (cf. Roque e Santos, 1988), são capazes de realizar desde cálculos matemáticos simples, envolvendo aritmética e álgebra, até cálculos avançados e sofisticados, de forma puramente simbólica.

A computação algébrica compõe uma subárea da matemática com ativa pesquisa e desenvolvimento, e os SCA fazem parte de um contexto mais amplo de computação simbólica, que é hoje uma disciplina de extrema relevância para a criação de sistemas computacionais inteligentes.

Alguns exemplos simples da capacidade de execução de cálculos dos SCA são:

- cálculo exato com aritmética real ou complexa, ou com precisão arbitrária;
- expansão e ordenamento de polinômios e funções racionais;
- substituição e reconhecimento de padrões de expressões de diversas formas;
- simplificação, automática ou por determinação do usuário, de expressões e equações;
- fatoração em diversos níveis;
- solução de equações e sistemas algébricos lineares e não-lineares;
- solução de equações diferenciais ordinárias;
- declaração e cálculo simbólico de vetores e matrizes;
- cálculo de limites, séries e produtos;
- diferenciação e integração analítica ou numérica;
- álgebra Booleana;
- declaração de variáveis, domínios, funções e conjuntos;
- gerar gráficos de funções de uma ou mais variáveis, com rotação no espaço;
- estrutura de programação procedimental e funcional.

O conteúdo de conhecimento matemático dos SCA vai muito além do citado acima. A maioria dos SCA são ainda capazes de gerar códigos em outras linguagens e de se integrar a outros sistemas, até mesmo sofisticados sistemas de composição de textos de alta resolução, o que amplia enormemente o potencial de aplicabilidade. Sinteticamente, as principais virtudes dos SCA são a capacidade de manipulação simbólica, cálculo de forma exata e interface interativa.

Entre os SCA existentes, os mais popularmente conhecidos são:

- Derive
- Maple
- Mathematica
- Reduce.

Além desses sistemas, há vários outros, de bom nível, como Macsyma, Senac, Magma, Axiom e MuPAD. Todos esses são classificados como de múltiplos propósitos. Há ainda vários outros sistemas que foram desenvolvidos com objetivos específicos de cálculos em determinadas áreas. Na página do Computer Algebra Information Network (www.can.nl) o leitor poderá encontrar a mais completa e atualizada informação sobre computação algébrica e sobre os SCA ora existentes.

Entre os sistemas citados anteriormente, o Derive é, sem dúvida, um dos sistemas que apresenta o maior potencial como instrumento de ensino para cursos de graduação e ensino médio. Ele já vem sendo adotado ou recomendado por vários países como uma ferramenta para ensino de matemática (veja a página www.can.nl).

Um outro sistema interessante para ensino é o Mathpert. Esse sistema possui algumas facilidades de explanação dos métodos e caminhos adotados para obtenção dos resultados, levando em consideração o nível de conhecimento do estudante (modelo do estudante), o que é de fundamental importância no processo de aprendizado. No entanto, esse sistema só trata de conceitos de álgebra linear e de cálculo diferencial/integral elementar.

No ensino fundamental, um sistema bastante interessante é o Cabri-Géomètre, o qual utiliza a metodologia construtivista de ensino, mas não possui as facilidades dos sistemas de manipulação algébrica. Para esse nível de ensino, há vários outros sistemas seguindo metodologias semelhantes.

Apesar da existência de tais sistemas computacionais e da sensível redução dos custos associada às máquinas para executar tais sistemas, observamos que os mesmos ainda não estão sendo extensivamente utilizados em nossas instituições de ensino. Possivelmente, os motivos estejam ainda relacionados ao custo para a criação de laboratórios nas instituições, mas há também a falta de conhecimento por parte dos professores sobre a capacidade de tais sistemas como ferramenta de apoio ao ensino e/ou uma certa resistência em utilizá-los com tal finalidade.

O desenvolvimento de computadores pessoais, com uma grande capacidade de memória física e com processadores velozes, está permitindo uma nova realidade na forma de ensino, com a introdução de novas tecnologias. Não há como negarmos a existência de tais tecnologias ou nos omitirmos quanto à sua utilização, por isso devemos procurar tirar proveito das mesmas levando-as às nossas salas de aula.

Para se ter uma idéia da capacidade tecnológica atual, o sistema de computação algébrica Derive, cuja filosofia tem sido a sua portabilidade, já está disponível em pequenas calculadoras de bolso.[2] Com esse tipo de instrumento, parte do universo do conhecimento matemático torna-se acessível em suas mãos. A organização (*Teacher Teaching with Technology*, www.t.org),[3] presente em 25 países (o Brasil não está incluído), é dedicada a promover o uso de tecnologia, particularmente o uso de calculadoras na educação matemática, através da formação de professores.

Uma ferramenta poderosa

Os SCA estão sendo considerados importantes ferramentas de apoio ao ensino de matemática (cf. Kutzler, 1996). Experiências de sua utilização em salas de aula e laboratórios já vêm sendo desenvolvidas e relatadas há mais de dez anos em várias instituições de ensino superior e médio de diversos países (cf. Karian, 1992 e Berry et alii, 1997). A importância e utilização dos SCA na educação matemática podem ser observadas através do crescimento do número de projetos, jornais e conferências especializadas

2 As calculadoras de bolso atuais possuem uma capacidade de memória igual à dos PC's lançados há menos de uma década.

3 Excelentes artigos, apresentados nessas conferências, estão disponíveis gratuitamente na página do CAME.

nessa área. O CAME (*Computer Algebra in Matematics Education*, www.ltsn.mathstore.ac.uk/came) promove conferências internacionais e é responsável por uma revista nessa área.

A utilização de SCA como uma ferramenta de auxílio pode trazer grandes benefícios. Em particular, permitem:

- uma maior motivação por parte dos alunos para com a disciplina. Em particular nos cursos introdutórios de cálculo diferencial e integral, álgebra linear e análise numérica, no nível universitário;
- elevar o grau de riqueza dos problemas tratados como exemplos e exercícios, através da escolha de problemas mais realistas, em vez de puramente mecânicos;
- uma melhor ilustração dos conceitos com a utilização de facilidades gráficas;
- estimular nos alunos uma abordagem dos problemas através de algoritmos, o que é normalmente pouco explorado;
- encorajar os alunos a explorar mais profundamente os conceitos ensinados, utilizando o computador como uma espécie de laboratório para matemática experimental, testando hipóteses e construindo novas situações;
- acesso rápido a conceitos mais sofisticados de matemática;
- proporcionar uma melhoria no padrão dos profissionais formados, tendo em vista que eles tiveram acesso a novas tecnologias.

Ensino e aprendizagem

Ensino e aprendizado são conceitos distintos, mas de natureza indissociável. As técnicas de ensino/aprendizado estão balizadas por escolas de aprendizagem.

As três grandes escolas psicológicas que discutem formas distintas de aprendizado cognitivo são:

- *Comportamentalista:* considera o homem um organismo passivo, governado por estímulos que são fornecidos pelo ambiente externo.
- *Cognitivista:* preocupa-se com os processos de compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição, objetivando identificar padrões estruturados dessa transformação.

- *Humanística:* considera o homem a fonte de todos os atos. O homem é livre para fazer escolhas em cada situação.

As metodologias cognitivas de ensino mais amplamente aplicadas na educação matemática são:

- *Construtivista:* nesta metodologia, os agentes do aprendizado são ativos e não passivos. Para os construtivistas, o conhecimento é construído e não recebido.

Observações ? Conclusão

- *Dedutivista:* nesta metodologia, os agentes do aprendizado recebem a informação postulada, partindo-se de uma generalização (conceito geral) para uma especialização (conceito específico).

Premissas ? Conclusão

- *Indutivista:* nesta metodologia, os agentes do aprendizado recebem a informação postulada, partindo-se do conceito específico para a sua formulação geral.

Instâncias ? Conclusão

A importância das teorias de aprendizagem é que elas dão origem a métodos de ensino. A maior diferença entre as metodologias, quando aplicadas ao ensino, não está naquilo que está sendo ensinado, mas na forma como se está ensinando.

Um dos aspectos que merece que se chame a atenção é querer associar o construtivismo unicamente ou exclusivamente às obras de Jean Piaget. Sem dúvida, ele foi um dos maiores elaboradores do construtivismo, mas existem várias outras obras importantes sobre teorias cognitivas que seguem uma orientação construtivista, como as de David Ausubel, Joseph Novak, Lev Vygotsky e George Kelly.

Em geral, a educação matemática (cf. Kilpatrick, 1992) emprega as três metodologias, sendo o construtivismo (cf. Forman e Pufall, 1988) mais aplicado no ensino fundamental e médio. Alguns estudos sobre o construtivismo na era do computador podem ser vistos em Grouws (1992). Mais recentemente, alguns trabalhos de tese mostraram que uma completa integração dos SCA aos currículos, como uma ferramenta cognitiva no contexto construtivista, produz resultados positivos no aprendizado de matemática (cf. Mayes, 1997).

Ensino/aprendizado assistido por novas tecnologias

A existência de novas tecnologias não pode mais ser negada ou relegada. Apesar das escolas não disporem dessas tecnologias, não podemos nos omitir sobre a importância desses instrumentos como veículos para auxiliar professores e alunos nas suas tarefas normais e nas tarefas de ensino e aprendizado (cf. Kaput, 1992).

Uma visão da escola do futuro

O conceito de escola está mudando muito rapidamente com as novas tecnologias. O acesso à informação está cada vez mais facilitado, através de redes de computadores e dos dispositivos de multimídia.

A escola do futuro não será composta apenas pelos dois grandes agentes: professores e alunos. Passaremos a dispor de um suporte tecnológico, quando os laboratórios terão tutores inteligentes integrados a ambientes virtuais interligados à rede local e à Internet, permitindo acesso aos alunos, de qualquer ponto do planeta ou mesmo da estação espacial internacional, aos cursos oferecidos por tais tutores ou instrutores.

As aulas serão oferecidas via rede, como já está atualmente surgindo via Internet. Os alunos poderão permanecer em seus lares ou em seu trabalho e nos horários estabelecidos se conectar à rede para, simultaneamente, participar da aula a ser ministrada de forma interativa por computador. Como a integração multimídia, os alunos poderão ver e ouvir o professor ministrar a aula, ao mesmo tempo que poderão se comunicar com o professor e com os demais colegas.

O tradicional quadro-negro dará lugar ao quadro-eletrônico,[4] onde o professor escreverá normalmente, como sempre o fez durante as aulas.

4 Veja o projeto SmartBoard conduzido pelo Ars Electronica Center, em Linz, na Áustria (www.aec.at).

Fará uso da escrita manual e o que estiver sendo escrito passará, através de um mecanismo de reconhecimento de padrões, para uma janela que estará aberta no computador do aluno, para a sua prancheta-eletrônica[5] ou mesmo para o pequeno computador de mão (*palm-top*). As aulas poderão ser gravadas e reapresentadas posteriormente para novos estudantes ou mesmo para serem assistidas por alunos que não puderam participar da sessão interativa.

Com os novos avanços tecnológicos, os estudantes poderão transferir os arquivos dos cursos diretamente para diferentes dispositivos, como discos magnéticos, impressoras, CD ou mesmo para a prancheta-eletrônica. Atualmente, existem linguagens que possibilitam a composição de textos com apresentação gráfica de alta resolução, permitindo a visualização de objetos, imagens e, brevemente, também odores.

A filosofia dos livros didáticos deverá dar lugar aos livros eletrônicos, chamados de e-livros, os quais já estão surgindo para baixar via Internet em computadores de mão, sem contudo tirar o espaço dos livros na sua forma impressa. Os e-livros serão confeccionados pelos chamados papel-eletrônico (e-papel), dando uma maior portabilidade e possibilidade de reutilização pelo usuário.

No ensino de matemática, as equações matemáticas escritas no quadro-eletrônico serão tratadas por sistemas de computação simbólica e algébrica (projetos já estão em andamento nessa direção), facilitando as deduções e a ilustração gráfica dos conceitos. Com auxílio de técnicas de realidade virtual, os alunos poderão manipular figuras geométricas complicadas e até caminhar no meio delas.

Os critérios de acompanhamento e avaliação de desempenho dos estudantes certamente deverão mudar para se adequar à nova realidade. O lema será: quanto maiores as facilidades, mais complexas e bem elaboradas serão as avaliações. As exigências serão diferentes das atuais. A tendência natural é dar-se uma maior ênfase ao desenvolvimento de projetos do que à simples resolução de questões estéreis. Haverá mais tempo e necessidade de geração de idéias, em vez de procurarmos a resolução mecânica e tediosa de problemas.

5 A Microsoft está desenvolvendo um projeto para algo semelhante, chamado Eletronic Tablet.

Essa nova tecnologia está às nossas portas, pronta para entrar. É uma nova onda, que não há como evitar. Assim, o melhor é extrairmos o máximo do que ela nos poderá oferecer para melhorar a qualidade de ensino.

O futuro da escola

A escola do futuro certamente procurará integrar as novas tecnologias dentro dos conceitos clássicos de ensino e aprendizado. Mas, como tudo tem custos e benefícios, devemos nos questionar e refletir: será que toda essa nova tecnologia fará com que o aprendizado seja realmente mais eficiente, em toda a sua plenitude? Será que nossos alunos estarão aprendendo a ser mais criativos e ao mesmo tempo críticos? Será que a maioria dos alunos estará raciocinando mais e melhor ou apenas aprendendo a manipular a nova tecnologia?

A nova escola terá à sua disposição um grande instrumental que, por um lado, pode ser extremamente útil ao ensino, mas, por outro, pode levá-la a se perder no labirinto da tecnologia, passando a dar mais ênfase ao ensino do instrumental do que daquilo que é fundamental. Um exemplo da crescente utilização de tecnologias na direção do ensino é a criação de cursos para educação à distância via Internet. Embora possa ser um mecanismo auxiliar, não pode ser usado indiscriminadamente. Alguns cuidados devem ser mantidos, principalmente sobre a influência da massificação uniforme de um padrão de ensino, particularmente se esse tiver sido originado em instituições estrangeiras. Uma certa tendência nesse sentido pode ser discretamente observada com o surgimento de ofertas de cursos por universidades brasileiras sob convênios com instituições estrangeiras.

A escola do futuro deve ser pensada com cuidado. O estabelecimento de políticas públicas é importante para que a escola do futuro não fique à mercê apenas da força das novas tecnologias. É o próprio futuro da escola que está em jogo.

Conclusão e recomendações

Em vários países, programas de ensino com o auxílio de SCA e de recursos de multimídia já estão sendo executados, mostrando um sensível sucesso (cf. Berry et alii, 1997). No nível médio, a introdução de sistemas com características construtivistas e tutoriais já está sendo adotada como ferramenta para a melhoria da qualidade e a atualização do ensino.

No Brasil, os problemas são tantos e de ordem tão diversa que, mesmo havendo consciência das necessidades de mudanças no currículo e na estrutura de ensino, pouco tem sido feito. Apesar de tudo, há várias iniciativas por grupos de ensino de matemática nas universidades[6] brasileiras, que, embora isoladas, devem ser apoiadas. No entanto, não existe outro caminho a ser percorrido senão o de nos adequarmos à nova realidade da ciência moderna e às exigências impostas pelas inovações do mercado de trabalho.

O primeiro passo para nos adequarmos a essa realidade é a atualização (e conseqüente melhoria) do nosso ensino, preparando os professores (cf. Kulish, 1997), principais agentes de transmissão do conhecimento estruturado, para criar novos mecanismos de ensino com apoio das novas tecnologias.

Como sugestão para alcançarmos essas melhorias no ensino superior, os cursos introdutórios de cálculo numérico (cf. Roque, 2000), cálculo diferencial e integral, álgebra linear, geometria analítica e equações diferenciais, devem ser reestruturados levando-se em conta os SCA, pois esses cursos formam a base matemática e são o tronco comum da graduação em ciências exatas e nas engenharias. Uma forma de contribuirmos nessa direção é escrevermos novos textos didáticos e material de apoio para discussões em laboratórios (cf. Roque, 1996 e Banchoff et alii, 1997).

Obviamente, tais mudanças requerem um debate mais amplo, envolvendo professores e educadores para analisar algumas questões como: O que mudar? Como mudar? Onde mudar? Quando mudar? No caso da rede pública do ensino médio, muitas determinações e mudanças na estrutura curricular não podem ser realizadas em escolas isoladas, elas dependem de políticas públicas de ensino.

6 Veja educação matemática na página www.lite.fae.unicamp.br.

Da mesma forma que é hoje inconcebível a existência de cursos de medicina e biologia sem o uso do microscópio, ou da astronomia sem os modernos telescópios, a matemática ou, mais amplamente falando, as ciências exatas e engenharias prescindem hoje de sistemas computacionais. Uma coisa é definitiva: os sistemas de computação algébrica e as novas tecnologias são uma realidade e deverão permanecer. Assim, devemos o quanto antes procurar os nossos próprios caminhos para oferecermos uma melhor e mais moderna formação (e informação) para os nossos estudantes.

Referências

BERRY, J. et alii (eds.) (1997). *The state of computer algebra in Mathematics education*. England, Chartwell-Bratt.

BANCHOFF, T. F. et alii (eds.) (1997). *Laboratories in Mathematical experimentation: a bridge to higher Mathematics*. Mount Holyoke College, Springer-Verlag.

FORMAN, G. e PUFALL, P. B. (eds.) (1988). *Constructivism in the computer age*. USA, LEA Publishers.

GROUW, D. A. (ed.) (1992). *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. New York, MacMillan Publishing Company.

KAPUT, J. J. (1992). "Technology in Mathematics Education". In: GROUWS, D. A. (ed.). *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. New York, MacMillan Publishing Company.

KARIAN, Z. A. (1992). Symbolic computation in undergraduation Mathematics. Education. *Mathematics American Association Notes*, 24.

KILPATRICK, J. (1992). "A history of Mathematics education". In: GROUWS, D. A. (ed.). *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. New York, MacMillan Publishing Company.

KULISH, L. T. (1997). Attracting teachers to use computer algebra in the classroom: common strategies. In: BERRY, J. et alii (eds.). *The state of computer algebra in Mathematics education*. England, Chartwell-Bratt.

KUTZLER, B. (1996). *Improving Mathematics teaching with Derive*. England, Cartwell-Bratt.

MAYES, R. (1997). "Current state of research into CAS in Mathematics education". In: BERRY, J. et alii (eds.). *The state of computer algebra in Mathematics education*. England, Chartwell-Bratt.

ROQUE, W. L. e SANTOS, R. P. (1988). Computação algébrica: um assistente matemático. *Ciência e Cultura*, n. 40, pp. 843-852.

ROQUE, W. L. (1996). Laboratório de Matemática Experimental com SCA. Roque, W. L. (ed.). EIMCA'96 - Escola de Inverno de Matemática Aplicada e Computacional: coletânea das notas de aula. pp. 127-175,.

_____ (2000). *Introdução ao cálculo numérico: um texto integrado com Derive.* São Paulo, Editora Atlas.

STEEN, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, n. 29, pp. 611-616.

Recebido em nov./1999; aprovado em fev./2000

Dissertações defendidas no primeiro semestre de 2000

BASTIAN, I. V. *O teorema de Pitágoras*. São Paulo, 2000. 220p. Dissertação PUC-SP.

O trabalho enfoca o processo de ensino-aprendizagem do teorema de Pitágoras numa abordagem que enfatiza, inicialmente, o caráter necessário e suficiente do teorema, para posteriormente chegar à forma da igualdade pitagórica. É apresentado um estudo epistemológico na perspectiva histórica, paralelos entre livros didáticos entre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e uma seqüência didática.

Palavras-chave: teorema de Pítágoras, ensino-aprendizagem, análise cognitiva.

CURI, E. *Formação de professores de Matemática: realidade presente e perspectivas futuras*. São Paulo, 2000. 220p. Dissertação PUC-SP.

O estudo consiste em uma reflexão sobre as transformações necessárias nos cursos de Licenciatura em Matemática. Permite delinear o perfil de um número significativo de professores de Matemática, suas concepções sobre Matemática e seu ensino e suas competências profissionais. Mostra a necessidade de implementar mudanças na formação inicial e continuada dos professores, tanto no campo específico como no campo educacional.

Palavras-chave: formação de professores, professores de Matemática.

CAMPOS, C. R. *O ensino da Matemática e da Física numa perspectiva integracionista*. São Paulo, 2000. 139p. Dissertação. PUC-SP.

O trabalho apresenta um estudo sobre as relações Matemática/Física pertinentes aos processos de ensino/aprendizagem, referentes aos conteúdos específicos de cinemática escalar (Física) e de funções (Matemática), no nível médio escolar. Mostra que alguns fenômenos físicos, especificamente

da cinemática, podem ser abordados tomando por base suas relações matemáticas, admitindo que essas atuam como uma linguagem estruturante, que dá corpo ao conhecimento físico.
Palavras-chave: didática, função, cinemática.

DALL'ANESE, C. *Conceito de Derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem.* São Paulo, 2000. 143p. Dissertação. PUC-SP.
Trata-se de um trabalho de investigação sobre o ensino da derivada. Apresenta uma seqüência didática, com vistas a enfrentar dificuldades apresentadas pelos estudantes no processo de ensino/aprendizagem desse conceito. São descritos os procedimentos do desenvolvimento da seqüência, numa prática pedagógica que rompe com o contrato didático habitual, no que se refere à participação dos estudantes.
Palavras-chave: derivada, variação, reta tangente.

Normas para publicação

Pesquisadores interessados em contribuir com publicação nesta revista deverão preparar o texto e enviá-lo segundo as regras que se seguem.

Preparação para envio – uma cópia do texto **em disquete(s)** com os nomes dos autores e sem numeração de página. Outras quatro (4) cópias **impressas**, sendo que uma deve ser idêntica à(s) do(s) disquete(s) e as outras três (3) devem ter numeração de página e não trazer os nomes dos autores.

Versão – programa Word 6.0 for Windows, para ser lido em PC.

Formatação

Título – centralizado, em letras maiúsculas e em negrito.

Nomes dos autores – em uma só das vias impressas e no disquete, separar os nomes dos autores do título por um espaço simples entre linhas. Os dados de cada autor deverão ser colocados conforme exemplo, abaixo do título.

Ex: Maria Dolores da Silva
Mestre em Educação Matemática – PUC-SP
Professora do Curso de Matemática – PUC-SP
e-mail: dolores@pucsp.br

Resumo – em português e inglês ou francês, com, no máximo, 10 linhas, espaço duplo, mesma fonte do texto, em itálico, acompanhado de três palavras-chave.

Corpo do texto – Papel tamanho A4
Margem superior e inferior com 2,5 cm
Margem direita e esquerda com 3,0 cm
Fonte Times New Roman,
Tamanho da letra 12 pontos.
Espaçamento entre linhas 1,5 linha
Alinhamento justificado

Referências bibliográficas – de acordo com as normas da ABNT em vigor.

Exemplos:

- Livro

  GOMES, L. G. F. (1998). *Novela e sociedade no Brasil.* Niterói, EdUFF. (Coleção Antropologia e Ciência Política, 15).

- Tese

  BARCELOS, M. F. P. (1998). *Ensaio tecnológico, bioquímico e sensorial de Soja e guandu enlatados no estádio verde e maturação de colheita*. Tese de doutorado em Nutrição, Campinas, Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas.

- Artigo de revista

  GURGEL, C. (1997). Reforma do Estado e segurança pública. *Política e Administração*, Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, pp. 15-21, set.

Citações no texto – citações no texto devem vir acompanhadas de sobrenomes(s) do(s) autor(es) em corpo menor e entre parênteses, acrescido do ano de publicação e página.

Tabelas e gráficos – deverão ter como elementos: número, título, data de referência, fonte e nota.

Impressão – em jato de tinta ou em laser. Páginas impressas só numa face.

Os trabalhos devem ser enviados para:

Revista Educação Matemática Pesquisa
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 - Consolação - SP - CEP 01303-050
Fone: (11) 3256-1622 ramal 202
Fax: (11) 3159-0189
e-mail: pgedmat@exatas.pucsp.br

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

REVISTA DO PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa publica trabalhos voltados para as linhas de pesquisa: *A Matemática na estrutura curricular e a Formação de Professores; Epistemologia e Didática da Matemática; Tecnologias de Informação* e *Didática da Matemática.* Também está aberta para outros campos do conhecimento, que venham proporcionar um diálogo com a área, como a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História das Ciências e a História Disciplinar.

INFORMAÇÕES PARA AQUISIÇÃO

Assinatura 2000 – nºs 1, 2 e Especial – R$ 40,00
Número avulso – R$ 15,00

Anexo cópia do depósito em conta no **Banco Real**, agência 0384, c/c Educ/FCSP nº 3.704.722, para aquisição dos seguintes exemplares de *Educação Matemática Pesquisa:*

❑ nº 1 ❑ nº 2 ❑ nº Especial

Nome: ____

Endereço: ____

____

Cep: ______________ Cidade: ____________________ Estado: ___

Telefone: __________________ Ocupação: _______________

Impressão de miolo e acabamento:

Gráfica da PUC-SP
Rua Ministro Godói, 965 – Perdizes – SP
Tel.: 3670-8366

SUMÁRIO

Editorial

A constituição de uma trajetória de investigação em sala de aula: múltiplos enfoques
Anna Franchi

Environnements "calculatrice symbolique": necessité d'une socialisation des processus d'instrumentation evolution des comportements d'eleves au cours de ces processus
Dominique Guin, Luc Trouche

Novas tecnologias computacionais e o ensino de Matemática
Waldir L. Roque

educ EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA v. 2 - n. 1