ISSN 1516-5388

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

v.1 • n.2 - 1999

educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA v. 1 • n. 2 educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

Catalogação na fonte - Biblioteca Reitora Nadir Gouvêa Kfouri / PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós - Graduados em Educação Matemática / Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - n.1 (março de 1999)- São Paulo : EDUC, 1999 - semestral
ISSN 1516-5388

1. Educação Matemática Pesquisa - periódicos. I. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

---

EDUC - Editora da PUC-SP

Direção
Maria do Carmo Guedes
Maria Eliza Mazzilli Pereira

Coordenação Editorial
Sonia Montone

Revisão
Sonia Rangel

Revisão de Inglês
Carolina Penteado Siqueira

Editoração Eletrônica
Waldir Antonio Alves

Capa
Sara Rosa

educ
Rua Ministro Godói, 1213
Cep 05015-001 - São Paulo - SP
Fonefax: (11) 3873-3359 / 3672-6003
E-mail: educ@pucsp.br

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

ISSN 1516-5388

Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v.1, n.2, 1999

educ

1999

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 - CEP 01303-050 - Consolação - São Paulo - SP
fone: (11) 2562622 ramal 202 / fax: (11) 31590189
e-mail: pegedmat@exatas.pucsp.br
De segunda a sexta-feira das 10h30min às 12h e das 13h30min às 17h30min

Editorial

A iniciativa de uma nova revista científica é sem dúvida interessante para maior divulgação dos trabalhos desenvolvidos por uma área do conhecimento. É nessa direção que a revista *Educação Matemática Pesquisa*, do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, agora em seu segundo número, procura seguir.

O primeiro número foi organizado com a preocupação de escolher artigos que, de uma certa forma, se adequassem às linhas de pesquisa do Programa. Para este segundo, em função de retornos da comunidade sobre o primeiro, procuramos também privilegiar pesquisas brasileiras, buscando, com isso, contribuir com o enriquecimento do debate científico na área da Educação Matemática no Brasil.

Não deixamos de envidar esforços para desmitificar o estigma da revista número 1, ano 1. Este segundo número tem um lugar muito especial por isso e, desde já, agradecemos as valiosas colaborações recebidas, esperando firmar junto aos pesquisadores da área este espaço aberto.

É claro para o Conselho Editorial a importância do caráter plural da Revista como condição primeira para um espaço de debate.

Todos os artigos divulgados pela *Educação Matemática Pesquisa* são inéditos no país e foram avaliados por, pelo menos, dois pareceristas do Conselho Científico e/ou pareceristas *ad hoc*.

A Revista acolhe também análises ou relatos de pesquisa, artigos de publicação conjunta de professores e alunos de pós-graduação, apresentações (como ciclo de palestras, conferências...) na forma de resumos científicos e resenhas. Pretende ainda abrir espaço de divulgação de resumos das dissertações e teses dos diversos programas de pós-graduação em Educação Matemática do país.

Conselho Editorial

Editorial

The initiative of a new scientific journal undoubtedly is interesting for a greater dissemination of the works developed by an area of knowledge. It is in this direction that the journal Educação Matemática Pesquisa, *from the Post-Graduation Programme in Mathematical Education of PUC-SP, now in its second issue, intends to move.*

The first issue was organized with the concern of choosing articles that, in a certain way, fitted the Programme's research lines. In this second issue, due to the community's feed-back regarding the first one, we decided to give space also to Brazilian pieces of research, thus trying to contribute to the enrichment of the scientific debate in the area of Mathematical Education in Brazil.

A good deal of effort has gone into demythologizing the stigma of the first issue of the journal. This second issue is very special precisely because of this, and we would like to thank the authors for their valuable collaborations, hoping to establish this open space among the researchers in the area.

The Editorial Board clearly sees the importance of the plural nature of the Journal as a primary condition for a debate space.

All the articles appearing in Educação Matemática Pesquisa *have not been published elsewhere in the country and they were evaluated by at least two members of the Scientific Board.*

The Journal also accepts research analysis or reports, articles written jointly by professors and post-graduation students, presentations (lectures, conferences, etc) in the form of scientific abstracts and reviews. It also intends to publish abstracts of dissertations and theses from the various Post-Graduation Programmes in Mathematical Education in Brazil.

Editorial Board

Sumário

Apresentação *11*

Création d'un groupe de recherche sur l'écrit en 6ème:
quelles incidences sur les pratiques des enseignants? *13*
Criação de um grupo de pesquisa sobre produção escrita
no 3° ciclo do Ensino Fundamental (11-12 anos):
quais iniciativas sobre as práticas dos professores?
The creation of a research group on written production in the sixth grade of
Elementary School: which consequences to the teachers' practices?
Jean-Claude Rauscher

Procurando um equilíbrio entre o que se pode "ver"
e o que se pode "imaginar" 31
Searching for a balance between what one can "see"
and what one can "imagine"
Gilda de La Rocque Palis e Lynne Ipiña

A apropriação da ferramenta logaritmo a partir de situações
com exponenciais aliada ao uso da calculadora 47
The use of the logarithm as a tool in situations involving exponents
integrated with the use of calculators
Monica Karrer e Sandra Magina

A Matemática na formação clássico-literária, tornando-se
ensino de cultura geral 67
Mathematics in the classic-literary formation
becoming teaching of general culture
Wagner Rodrigues Valente

Dissertações apresentadas em 1999 *85*

Normas para publicação *89*

Apresentação

Formação de professores, informática na educação, processos de ensino-aprendizagem, epistemologia e história da matemática compõem os temas deste segundo número da Revista. Além deles, resumos da produção discente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP.

O trabalho de Rauscher, *Création d'un groupe de recherche sur l'écrit en 6ème: quelles incidences sur les pratiques des enseignants?*, traz-nos a temática importante da participação de professores em pesquisas como o diferencial dos bons professores de matemática.

O artigo de Palis e Ipiña, *Procurando um equilíbrio entre o que se pode "ver" e o que se pode "imaginar"*, discorre sobre o tema atualíssimo da informática na educação. Em particular, demonstra preocupação com as figuras obtidas em computador e o mascaramento que pode advir para o estudo dos gráficos.

Magina e Karrer, em *A apropriação da ferramenta logaritmo a partir de situações com exponenciais aliada ao uso da calculadora*, trazem uma contribuição valiosa para a formação do conceito de *logaritmo*, colocando em destaque a incorporação do uso da calculadora como uma ferramenta eficaz na seqüência didática elaborada.

O texto de Valente, *A matemática na formação clássico-literária, tornando-se ensino de cultura geral*, remete à compreensão histórica da mudança de *status* que a Matemática sofreu no Brasil: de nível técnico-aplicado para ensino de cultura geral. Tal tema permite aos educadores matemáticos melhor compreenderem os rumos tomados pela disciplina e as opções sedimentadas até hoje, por exemplo, no ensino da geometria elementar.

Por fim, as resenhas das dissertações produzidas no Programa em 1999 buscam um diálogo com as produções na área e intentam abreviar o trabalho de levantamento bibliográfico dos pesquisadores em Educação Matemática.

Conselho Editorial

Création d'un groupe de recherche sur l'écrit en 6ème: quelles incidences sur les pratiques des enseignants?

JEAN-CLAUDE RAUSCHER*

Résumé

Cette communication montre comment l'explotation des résultats des procédures qu'utilisent les éléves pour produire des écrits – notament en leur permettant d'etayer leurs apprentissages et de réorganiser leurs connaissances – a conduit les professeurs (lesquels participent a l'Irem de Strasbourg à un groupe de recherche sur les apprentissages numériques en début de collège) à introduire des inovations dans leurs pratiques pédagogiques. Elle décrit aussi comment ces innovations leur ont permis d'approfondir les connaissances des éléves quant aux modalités d'apprentissage des mathématiques (en particulier en tenant compte de leurs conceptions et représentations) et de prendre conscience de leurs pratiques initiales d'enseignement afin de les réaménager et les faire évoluer (et de donner aux activités la place qui leur est propre).

Mots-clés: *recherche-formation, écrits des éléves, epistemologie des professeurs, pratiques.*

Resumo

Neste artigo, veremos como a exploração dos procedimentos que levam os alunos a produções escritas – permitindo-lhes sustentar as aprendizagens e reorganizar seus conhecimentos – levou professores participantes, no IREM de Strasbourg, de um grupo de pesquisa sobre aprendizagens numéricas no início do "collège" (3° ciclo do Ensino Fundamental) a introduzirem inovações nas suas práticas e como estas inovações lhes permitiram aprofundar os conhecimentos quanto às modalidades de aprendizagem da Matemática pelos alunos (em particular considerar concepções e representações iniciais dos alunos) e de tomar consciência de suas práticas iniciais de ensino para reorganizá-las e fazê-las evoluir.

Palavras-chave: pesquisa-formação, produções escritas de alunos, epistemologia de professores, práticas (docentes).

Abstract

This article is concerned about the exploration of the procedures that lead students to written productions, allowing them to support their learning and reorganise their knowledge. The focus here is on how this exploration made teachers participating in a research group at Strasbourg's IREM on numeric learning at the beginning of "collège" (6th grade in Elementary School) introduce innovations in

* IREM et IUFM de Strasbourg.

their practice, and how these innovations allowed them to deepen their knowledge of the modalities of learning Mathematics by students (particularly considering students' initial conceptions and representations). Thus, the teachers became aware of their own initial teaching practices in order to reorganise them and make them evolve.
Key-words: *research-formation, students' written productions, epistemology of teachers, (teachers') practices.*

La problématique du développement des connaissances et des pratiques chez les enseignants, posée à l'occasion de la création d'un groupe de recherche à l'Irem de Strasbourg

Quels dispositifs et quelles pratiques de formation permettent de faire évoluer les connaissances initiales et les pratiques des enseignants ? Voilà la question qui m'apparaissait essentielle à la suite de ma recherche doctorale de 1993, il se révélait que la progression des élèves de début de collège pouvait en partie se rapporter à la capacité de leurs professeurs de mathématiques de discerner et de proposer un large éventail de traitements variés et progressifs quant aux contenus disciplinaires en jeu. Dans cette recherche, il apparaissait aussi que les professeurs les plus "performants" étaient ceux qui avaient participé au cours de leur carrière à des recherches-formations dans le cadre des Irem ou des Mafpen. On peut donc émettre l'hypothèse selon laquelle que tout autant que des formations présentant aux professeurs des références aux modèles confirmés issues de recherches en didactique (pratiques de situation problème, prise en compte des conceptions et des représentations des élèves, analyse des tâches par exemple), c'est la participation à des recherches qui permettra aussi aux professeurs d'évoluer dans leur épistémologie et leurs pratiques.

Les conditions d'une mise à l'épreuve d'une telle hypothèse ont pu être analysées récemment dans une équipe de professeurs de collège à l'Irem de Strasbourg dans le cadre d'une recherche portant sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres en début de collège. Les huit professeurs qui accepté de participer à ce groupe de recherche n'avaient à deux exceptions près jamais participé à des recherches à l'Irem ou à la Mafpen. D'autre part, si le coordinateur du groupe que j'étais était convaincu de l'apport des recherches en didactique des mathématiques dans nos pratiques, en revanche les autres membres du groupe n'étaient pas, au-delà des recommandations des programmes, familiers des concepts et des pratiques issues des recherches en didactiques des mathématiques.

Le travail de cette équipe a comporté deux phases différentes. Dans un premier temps de travail s'est référé aux modèles établis par les recherches en didactique des mathématiques. Dans une deuxième phase, un objet de recherche plus neuf, ne se référant plus directement aux concepts établis de la didactique des mathématiques s'est ajouté à la perspective de recherche initiale : dans le cadre d'une recherche Adirem/ INRP sur le rôle de l'écrit au collège, la recherche était alors aussi consacrée à l'exploration de procédures qui amènent les élèves à produire des écrits leur permettant d'étayer les apprentissages et de réorganiser leurs connaissances.

La succession de ces deux phases dans le travail de l'équipe permet d'envisager la question des conditions d'intégration et de développement de connaissances didactiques chez les enseignants participants. Dans la première phase de travail, l'hétérogénéité du groupe quant à ses conceptions de l'enseignement s'est plutôt figée. Les modèles issus de la didactique des mathématiques n'ont pas été intégrés et ont suscité scepticisme et parfois rejet. A partir de la deuxième phase de travail, l'équipe s'est donnée le moyen d'expliciter à plusieurs reprises individuellement les bénéfices et les limites personnels de la recherche. Nous pouvons donc apporter quelques éléments d'observation quant à l'évolution de la conception des pratiques chez les participants et ainsi donner quelques éléments de réponse la question des conditions d'intégration et de développement de connaissances didactiques. Dans la deuxième phase de travail, si les concepts développés par les recherches en didactique des mathématiques n'apparaissent pas non plus explicitement, les principes les justifiant sont évoqués comme des apports nouveaux dans les pratiques des participants. En effet, on voit à travers leurs évaluations comment l'introduction de cet objet de recherche a amené les participants à introduire des innovations dans leurs pratiques et comment ces innovations leur ont permis d'approfondir les connaissances quant aux modalités d'apprentissage des mathématiques chez les élèves (en particulier de tenir compte des conceptions et des représentations initiales des élèves) et de prendre conscience de leurs pratiques initiales d'enseignement pour les réaménager et les faire évoluer (en particulier de faire une place argumentée aux activités).

Présentons plus précisément les conditions d'observation et les observations réalisées.

Description du contexte de l'observation

Notre équipe était constituée de huit professeurs de mathématiques de 6ème. Cette équipe était au départ hétérogène tant du point de vue des environnements dans lesquels ses membres exerçaient que du point de vue des ses rapports à la didactique et à ses recherches.

En effet, d'une part les établissements et les classes dans lesquels nous travaillions correspondaient à des environnements sociaux variés. Ainsi certains professeurs exercent dans des établissements de zones résidentielles où les élèves ont aux évaluations nationales en début sixième des résultats bien au-dessus de la moyenne nationale. D'autres exercent dans des collèges type ZEP où les résultats de début d'année sont plus inquiétants. D'autres encore exercent dans des établissements où le public est très hétérogène et les résultats proches de ceux de l'échantillon national. Cette hétérogénéité là, loin d'être un obstacle pour entamer notre recherche était un atout car représentative de différentes conditions d'enseignement.

D'autre part, il y avait des différences entre les professeurs de l'équipe quant à leur rapport initial à la recherche. Si nous étions deux à avoir déjà participé à des équipes de travail à l'Irem, pour les six autres enseignants c'était là la première expérience dans ce domaine. De façon générale, la majorité des participants n'étaient pas familiers des recherches menées en didactique des mathématiques. Quatre de ces professeurs faisaient d'ailleurs partie de l'échantillons de professeurs observés à l'occasion de mon travail de thèse (JC Rauscher, 1993, "L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège").

Cette hétérogénéité de départ se retrouvait dans les idées et les références inspirant les pratiques. Dans les premières discussions de travail que nous avions eu dans le groupe, certains mettaient en avant l'importance de la mémoire et de l'apprentissage des algorithmes et exprimaient leur scepticisme quant aux options de ceux qui préconisaient des "activités" jugées trop «difficiles et complexes» pour démarrer des apprentissages.

En revanche, les participants du groupe se retrouvaient unis par leur souci d'améliorer l'efficacité de leur travail par une recherche pragmatique et ouverte à tous apports et évolutions.

Les objets de la recherche de l'équipe

Le contenu disciplinaire considéré

A l'Irem de Strasbourg, dans le cadre de cette recherche d'abord menée de façon locale à l'Irem de Strasbourg, puis en collaboration avec l'INRP et l'Adirem à propos de "L'écrit en mathématiques au collège", notre travail concernait plus spécialement **le rôle de l'écrit dans les travaux numériques au début du collège.** Tout particulièrement, nous avons abordé la recherche en considérant le problème des apprentissages relatifs aux nombres décimaux en début de collège.

Un premier volet de travail se référant aux modèles établis par les recherches en didactique des mathématiques

Dans un premier temps de la recherche nous nous sommes attelés essentiellement à deux tâches : l'analyse des difficultés rencontrées par les élèves en début de collège, puis l'élaboration d'activités mathématiques à développer avec les élèves pour leur permettre de les surmonter.

Pour élaborer et mettre à l'épreuve dans nos classes des activités pour développer les apprentissages numériques à faire en début de collège à propos des nombres et tout particulièrement des décimaux (écriture, lecture, calculs), nous avons d'abord analysé les productions des élèves dans le cadre des évaluations nationales de début sixième. Cette analyse montre qu'en l'occurrence l'écriture et la manipulation des nombres décimaux nécessitent la maîtrise d'un système d'écriture différent de celui des entiers, même si les éléments de base sont les mêmes (chiffres) et que dans un cas comme dans l'autre la disposition de deux chiffres consécutifs se rapporte à deux nombres dans un rapport 10. Le passage des entiers aux décimaux constitue donc un obstacle qui est loin d'être levé en début de collège. Il faut donc que les élèves arrivent à réorganiser un système acquis, celui de l'écriture et des traitements des entiers, pour y intégrer les décimaux: voilà la tâche des enseignants en début de collège. Mais comment aider les élèves dans cette réorganisation? Tel était le problème qui nous est apparu suite à notre analyse.

Pour l'élaboration d'activités mathématiques à développer pour favoriser cette réorganisation, nous avons été particulièrement attentifs à la diversité et la complexité des systèmes d'écriture (entiers, décimaux, fractions), des cadres (numérique, grandeurs) et des représentations (dimension 1 dans les graduations, dimension 2 avec les fractions d'aire) auxquels sont confrontés les élèves dans le domaine numérique. Cette diversité et cette complexité sont souvent considérées comme des sources de difficulté pour la compréhension. Mais en l'occurrence nous pensions qu'au contraire qu'elle permet aux élèves de dépasser une procédure purement algorithmique ou du moins de l'étayer et de la contrôler par des outils qui permettent de donner du sens aux traitements à effectuer. Nous avons donc élaboré et mené en classe de 6ème des activités au sujet des apprentissages dans le domaine numérique et plus précisément des calculs au programme avec les décimaux. Ces activités avaient pour but de faire dépasser aux élèves le simple traitement algorithmique des calculs et de redonner vie au développement de la conceptualisation des nombres décimaux. Pour les activités expérimentées qu'elles évoquent, les recherches effectuées par G. Brousseau, R. Douady et M. J. Perrin dans ce domaine nous ont inspirés.

On peut donc dire que ce premier temps de travail prend comme référence le modèle de travail bien connu développé par les recherches en didactique des mathématiques, à savoir l'ingénierie didactique où il s'agit après une analyse et une évaluation préalable d'élaborer des situations propices à l'appropriation des connaissances par les élèves. La notion de dialectique outil/objet et les notions de cadre et de registre précisées par les chercheurs en didactique des mathématiques (R. Douady, R. Duval) et la théorie des situations développées par G. Brousseau ont donc étayés nos travaux. Comme cela a déjà été souligné, les membres de l'équipe n'étaient pas a priori familier avec ces références : dans cette phase de travail, il y avait donc une forte composante d'initiation et de formation à l'utilisation de ces notions.

Un deuxième volet de travail de recherche plus innovant sans référence à des modèles déjà établis

Après un an de travail, un deuxième volet de travail est venu s'ajouter au précédent à partir de la nécessité d'évaluer les effets du travail d'enseignement mis en place à la suite du premier volet et aussi à partir de la stimulation engendrée par la confrontation avec d'autres groupes menant cette recherche INRP/Adirem lors des réunions annuelles à Paris qui nous a incité à développer un nouvel aspect de la prise en compte de l'écrit dans les apprentissages.

La première façon d'évaluer les effets d'une telle action est classique: il s'agissait en certaines occasions d'évaluation de reprendre certaines questions posées en début d'année.

La deuxième façon que nous avons eu d'évaluer les effets de notre enseignement est moins classique et c'est elle qui nous a ouvert de nouvelles perspectives relatives à la recherche sur l'écrit : elle sollicite en effet chez les élèves la production d'écrits inhabituels mais en relation avec les contenus enseignés. Il s'agissait de vérifier s'il y avait traces conscientes et restituables chez les élèves des procédures de médiation rencontrées aux cours de l'année. Par exemple en 94/95 sur le thème précis de la multiplication d'un entier par un décimal, nous avons demandé aux élèves de répondre aux questions suivantes:

$$7 \times 0{,}5$$

1 - Comment lis-tu cela?
2 - Quelle réponse proposes-tu?
3 - Peux-tu donner toutes les façons que tu connais pour illustrer ou effectuer ce calcul?
4 - Peux-tu donner l'énoncé d'un problème conduisant à cette opération?

Et dans une évaluation finale nous avons proposé aux élèves de répondre au questionnaire suivant pour voir dans quelle mesure après cette année scolaire ils étaient capables de formuler les connaissances ou les activités rencontrées.

1) Qu'est-ce que tu as vu de neuf cette année en mathématiques?
2) Dans tout ce que qu'on a fait qu'est-ce que tu as préféré?
3) Qu'est-ce que tu as le moins aimé?
4) Y a t il des choses qui te semblaient difficiles et que tu as maintenant comprises?
5) Y a t il des choses que tu n'as pas comprises?
6) Cette année, as-tu appris quelques choses de neuf sur:

> *a) Les nombres*
> *b) L'addition et la soustraction*
> *c) La multiplication*
> *d) La division*

Relativement à ce dernier questionnaire, l'analyse des productions des élèves nous montrait alors que majoritairement et tout particulièrement les élèves faibles ne formulent pas ou peu les connaissances rencontrées : "rien" ou juste une rubrique "les fractions". Mais l'on perçoit souvent l'importance d'événements personnels au cours de l'année : "le jour où j'ai compris la division par 0,1.." ou "que multiplier par un nombre c'était pas forcément plus grand".

Ces résultats, apparemment un peu maigres nous ont rendu attentifs aux possibilités offertes par ces écrits un peu inhabituels. Plutôt que de demander de telles productions écrites en fin d'année et de façon exceptionnelle, ne serait-il pas utile pour l'intégration des connaissances et le développement de capacités langagières de solliciter plus régulièrement les élèves ainsi ? Ces écrits ne pouvaient-ils pas avoir un rôle dans les processus d'apprentissage des élèves. Nous nous référions là aux travaux de M.J. Perrin ("Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles", p 5 à 119, RDM, 1993) qui montrent que les élèves qui réussissent sont ceux qui réinvestissent les expériences acquises dans les activités dans la suite. Il est alors important de donner l'occasion aux élèves de se construire des représentations mentales par un retour réflexif sur l'action. En l'occurrence, c'est au moyen de productions écrites, individuelles, que nous avons voulu favoriser dans la suite de la recherche ce retour réflexif.

Un deuxième volet de type exploratoire s'est donc ouvert dans cette recherche : il s'agissait d'élaborer et de mettre à l'épreuve différentes procédures permettant aux élèves grâce à des productions écrites de réaliser des retours réflexifs sur leurs connaissances. L'hypothèse était que ces écrits pourraient servir d'appui efficaces pour les apprentissages considérés.

Dans la suite de notre travail, pour amorcer une activité, favoriser un retour réflexif sur les travaux ou renforcer les habitudes de contrôle, nous avons demandé à nos élèves de produire individuellement des écrits qui selon les moments où ils étaient sollicités avaient des modalités et des fonctions différentes. Nous avons exploré trois types différents de production. Nous distinguons:

- les écrits portant sur les représentations d'une notion avant son enseignement,

Voici un exemple de questionnaire proposé aux élèves avant qu'on aborde la multiplication de décimaux. Pour chacun des calculs les élèves doivent répondre à trois questions:

> *1) Comment lis-tu ce calcul? (si tu vois plusieurs façons de le lire écris-les)*
> *2) Quelle est la réponse que tu proposes?*
> *3) Trouve une ou des façons pour expliquer ou illustrer ce calcul à quelqu'un qui ne sait pas ce qu'il signifie.*
> *1er calcul:* 6 x 3 *2ème calcul:* 7 x 0,4
> *3ème calcul:* 7 x 0,5 *4ème calcul:* 0,2 x 0,3

- les écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités et permettant ainsi de contrôler ainsi des calculs préalablement effectués:

Les élèves sont invités à revenir sur leurs productions (après une interrogation écrite par exemple) et à expliciter les connaissances mises en œuvre ou les incertitudes qu'ils ont encore. Voici un questionnaire donné en janvier par rapport à une interrogation écrite qui reprenait des calculs de début d'année du type "Calculer 7,24 - 4,3":

En septembre:

> *1) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus faciles et dites pourquoi.*
> *2) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus difficiles et dites pourquoi.*

En janvier:

> *1) Corrigez les deux feuilles en expliquant chacune de vos erreurs.*
> *2) Y a t il des choses vues au premier trimestre qui vous ont permis de corriger?*

- les écrits sollicitant un retour libre sur les apprentissages (il s'agit pour les élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés).

Il s'agit pour les élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés comme par exemple par des questions du type suivant:

Dans les apprentissages numériques récents y a t il des faits qui vous ont surpris? Qu'avez-vous appris de neuf? Y a t il des erreurs que vous ne faites plus maintenant?

L'analyse des productions des élèves au cours de la progression en 6ème montre que les élèves dans leur ensemble progressent dans leurs performances sur les contenus considérés. Certaines erreurs typiques de début d'année comme par exemple «0,48-0,3=0,45»se raréfient considérablement. Mais surtout en fin d'année beaucoup d'élèves arrivent à analyser avec leurs mots, par écrit, les erreurs de début d'année, en l'occurrence par exemple que le chiffre 3 n'a pas la même valeur dans le nombre 0,3 que le chiffre 8 dans le nombre 0,48 *(«En début d'année, je faisais la faute de soustraire les dixièmes avec les centièmes»)* En revanche pour expliquer leurs progrès les élèves rappellent rarement les activités mises en place pour éclairer ces notions. Nous pensons qu'il n'est pas utile de préciser ici davantage les résultats observés chez les élèves.

Cette rapide esquisse du contenu de la recherche et de ses résultats auprès des élèves suffit pour préciser le contexte dans lequel nous avons observé des évolutions dans les pratiques des enseignants participant à la recherche.

Indications sur l'intégration et le développement de connaissances didactiques au sein de l'équipe

La procédure d'observation employée:

Notre groupe était donc constitué de professeurs de collège qui en majorité au départ n'étaient pas initiés aux recherches et aux résultats de la didactique des mathématiques. Mais soucieux d'améliorer l'efficacité de notre travail avec nos élèves, nous étions prêts à mettre en commun nos expériences et à entreprendre une recherche pragmatique et ouverte aux apports pouvant s'intégrer dans nos pratiques. Outre un aspect recherche, notre travail revêtait donc indéniablement un aspect formation. Dans notre recherche, il était donc de faire un bilan sur les répercussions de notre travail sur nos pratiques en classe. Un tel bilan ne s'est mis en place que dans la deuxième phase de notre travail de recherche (introduction et exploration de différentes modalités d'écrits chez les élèves). Quels sont les effets de la considération explicite de la place de l'écrit dans notre enseignement sur nos pratiques ? Pour répondre à cette question nous avons d'abord fait au bout de chacune des années de travail un bilan individuel et par écrit (il n'y avait pas de raison que nous échappions à l'objet de notre recherche...!).

A la fin de l'année 95/96 nous nous sommes soumis au questionnaire suivant:

1) Est-ce que cette recherche a modifié votre pratique d'enseignement en 6ème. En quoi?
2) Sur quels points envisagez vous d'accentuer encore cette évolution?
3) Décrivez ce qui mériterait d'être communiqué de notre recherche à des collègues de math qui enseignent en 6ème ou 5ème.
4) Qu'avez vous appris de neuf dans cette expérience:
a) sur les contenus enseignés?
b) sur les façons d'enseigner ces contenus?
c) sur les élèves?

A la fin de l'année 96/97 nous nous sommes en outre astreints à évoquer plus précisément des exemples de changements:

A la suite de notre travail, qu'est-ce qui a changé:
- du côté des «élèves»?
- du côtés des «enseignants»?
Donner chaque fois des exemples précis illustrant ces changements.

Le corpus recueilli rend compte non pas des pratiques réelles en classe mais des représentations que les participants se font de leurs pratiques et surtout de leurs évolutions. Il nous donne donc des indications sur l'intégration et le développement des connaissances didactiques chez les participants de cette recherche.

Les observations

Il nous faut distinguer la première phase de notre travail de recherche lors de laquelle nous ne nous sommes pas soumis à un bilan écrit et pour laquelle je ne peux faire état que de mes impressions «subjectives».

Le groupe de recherche constitué était donc très hétérogène. La pratique d'analyse de productions d'élèves relatives aux évaluations nationales de début $6^{ème}$ a permis rapidement une mise au point de références communes quant à l'analyse des difficultés rencontrées dans les apprentissages numériques au début du collège. En revanche, il y avait de forts clivages en ce qui concerne les pratiques à mettre en place pour permettre aux élèves de surmonter ces obstacles. Certains pratiquaient régulièrement des «activités» en classe, destinées, d'autres ne juraient que par les apprentissages par cœur et la répétition des règles de calcul comme préalables. Je pensais qu'un travail commun d'analyse des tâches et d'élaboration d'activités réduirait cette hétérogénéité initiale. En fait, la première année, le travail a piétiné de ce point de vue et les positions ont eu tendance à se figer. Il faut bien constater qu'à ce stade, la présence d'un ou deux animateurs apportant des suggestions issues des recherches confirmées de didactique des mathématiques n'entraîne pas l'adhésion à celles-ci.

C'est en fait le deuxième volet de la recherche, l'exploration de procédures qui amènent les élèves à produire des écrits leur permettant d'étayer les apprentissages et de réorganiser leurs connaissances, qui a eu à mon avis une influence déterminante sur les conceptions et les pratiques des enseignants du groupe. Dès lors les activités proposés ont été élaborées, acceptées et intégrées par les enseignants du groupe. Cette impression se confirme avec le bilan écrit sur les répercussions de notre travail sur nos pratiques en classe.

Les réponses des professeurs rendent en fait compte d'une évolution de leurs pratiques. Il apparaît que la recherche a été révélatrice de nouveaux moyens d'enseigner. D'après leurs réponses, leurs pratiques se sont enrichies ou ont confirmé de nouveaux gestes professionnels. Ces nouveaux gestes témoignent souvent d'une nouvelle vision cohérente du métier. Dans d'autres cas en revanche, ils sont reconnus mais apparaissent en concurrence avec des habitudes et des perspectives anciennes auxquelles on tient.

Les gestes professionnels découverts ou renforcés

On peut distinguer quatre gestes majeurs explicités par les professeurs comme étant des effets du travail de recherche entrepris.

a. la concertation et de l'échange entre collègues

Ce premier geste peut se rapporter à la recherche indépendamment du contenu spécifique de celle-ci. Ainsi André écrit à propos de ce qu'il a appris sur les contenus enseignés et sur les façons de les enseigner : «*Le fait de mettre en commun, d'en discuter, permet souvent de détecter une subtilité ou une manière de faire à laquelle on n'avait pas songé. La critique est toujours constructive et les idées des collègues toujours positives et enrichissantes. Chacun a sa manière de présenter tel ou tel sujet, et le fait d'engager des réflexions en groupe, amène à parfaire la présentation et souvent à éclairer des thèmes sous des feux insoupçonnés auparavant. Les 'trucs' des uns peuvent servir aux autres, surtout s'ils 'marchent'.*»

A mon avis ce sont effectivement ces échanges qui constituent un moteur nécessaire mais pas suffisant pour l'évolution des connaissances et des pratiques des uns et des autres. C'est à partir du contenu proprement dit de la recherche que les pratiques des uns et des autres se sont ouvertes à trois autres gestes essentiels.

b. La prise en compte effective des élèves dans leurs progressions.

Edith écrit: «*J'ai davantage laissé s'exprimer les élèves, ce qui m'a permis de mieux cerner les difficultés*» André : «*Je suis davantage à l'écoute des enfants. On se prend plus le temps de vraiment faire le tour de la question, en insistant volontairement chez un élève plus faible*» et encore «*Il faut vérifier davantage si le texte lu est bien compris, car trop souvent, l'élève a tendance à lire les premiers mots et à s'imaginer la suite du texte*». «*J'ai appris qu'il faut être plus modeste dans les exigences tout en restant inflexible sur la qualité du travail*». "*Il est judicieux de faire formuler la question par l'élève avec son propre vocabulaire, afin de se rendre compte comment il a saisi la question*". Gilles écrit qu'à la suite de ce travail il «*laisse davantage le temps aux élèves pour s'approprier une notion (ce peut être une semaine, un mois, un an..)*» Agnès donne une indication sur ce qui permet cette prise en compte des élèves : «*Au travers de ces écrits, je comprends mieux les élèves, je vois mieux comment ils raisonnent, ce qu'ils ont* *retenus, ce qui les a marqué, ce que représente la notion pour eux»* Maxime précise que pour lui:» *La correction d'un exercice ce n'est plus la donnée de la solution, mais le point de départ d'une recherche de la cause des erreurs repérées».* Il essaie: *«de repérer rapidement 2 ou 3 erreurs significatives et demande aux élèves concernés de transcrire leur démarche au tableau».* Jean-Luc précise: *«J'ai appris qu'une erreur résulte rarement d'un comportement anarchique de l'élève; l'erreur est en général le résultat d'une mauvaise interprétation qu'il faut découvrir pour y remédier".*

c. La mise en activité des élèves.

Cette perspective s'exprime parfois indépendamment des contenus d'enseignement, pour des raisons non pas didactiques, mais pédagogiques pourrait-on dire. Ainsi Jean-Luc explique une nouveauté apparue dans sa pratique: *«Avoir recours à l'aspect ludique (découpages, coloriages, séances de constructions de figures, avec différents instruments puis les colorier..) Cela permet à un élève faible d'être mis en valeur et par-là raccrocher à la matière, car il se rend compte «qu'il n'est pas totalement nul en tout»*

Mais plus fréquemment, **c'est la prise en compte des contenus non pas de façon formelle mais dans une perspective d'activités qui font sens pour les élèves qui est évoquée** *"Je veille à donner plus de sens aux nombres décimaux, fractionnaires". "Mon but n'est plus que les élèves sachent faire par "bachotage" et répétitions d'exercices mais que les élèves sachent faire parce qu'ils ont compris ce qu'ils faisaient". "Avant cela représentait très souvent une technique, une règle de cuisine qui avait son fonctionnement propre sans avoir possibilité de recours à une vérification". "Ce n'est pas la quantité d'exercices qui est importante, mais la qualité: que ceux -ci prennent du sens, autant que possible" "Avec ce travail de recherche, les élèves semblent moins impatients d'avoir une "recette" à faire fonctionner. Ainsi, pour calculer 2:0,1 ou 6:0,2, l'interrogation "où placer la virgule dans le résultat" est moins fréquente ; elle est remplacée par "combien de fois 0,1 dans 2".* Dans cette dernière remarque on voit qu'une sensibilisation à l'analyse des contenus fait partie des découvertes explicitées par certains.

d. L'analyse des contenus (analyse des tâches).

Agnès donne un exemple: *«Je m'intéresse plus au sens des mots pour les élèves. Par exemple que signifie 'diviser'? Les élèves ont répondu 'partager'. Nous* *avons fait beaucoup de divisions avec la calculette (dans les cas où les diviseurs est inférieur à 1) et j'ai reposé la même question. Les élèves ont compris qu'on ne pouvait plus répondre 'partager'.»*

Ces gestes ont des répercussions effectives dans les pratiques, sur la gestion du temps par l'enseignant par exemple: *"Je me permets plus souvent de faire des exercices qui autrefois me semblaient être une perte de temps (vu le temps que cela prenait par rapport au profil tiré). Mais en fait avec le recul, je m'aperçois que ce temps est gagné par la suite. Exemple: lors de la présentation des nombres décimaux, questionnement par écrit toutes les façons possibles et imaginables qu'ils ont pour les représente et les expliquer. Ensuite faire présenter à chacun sa solution aux autres. Cela permet à la longue aux timides de prendre de l'assurance, de formuler clairement leurs idées et de mettre en place un esprit critique"* (Ne retrouve-t-on pas là un modèle du type «action, formulation, validation»?. Changements sur l'articulation entre les contenus aussi. Ainsi Gilles précise: *"Le travail de recherche a renforcé chez moi l'idée que l'acquisition d'une notion doit être étalée sur toute l'année et qu'il faut décloisonner les chapitres. Ainsi, la notion d'aire a commencé à être vue dans la multiplication et la division par 10, 100, 1000 puis dans la multiplication de 2 décimaux. Lorsque le chapitre "aires" apparaît, certains jalons importants sont déjà posés".* Chez Maxime, c'est la fonction du cahier chez les élèves qui a changé: maintenant les élèves ont le droit et même le devoir de revenir sur des choses déjà écrites, de rectifier, de signaler les erreurs etc.

Ainsi s'esquissent de nouvelles pratiques qui cohabitent parfois mal avec d'anciennes convictions. Ainsi Edith est partagée: *«J'ai privilégié cette année la réflexion, ce qui est beaucoup plus intéressant; mais est-ce bénéfique? En particulier pour les élèves en difficulté. Ne vaut-il pas mieux faire assimiler une technique (ce qui n'empêche en rien la compréhension au moins partielle d'une notion) et attendre qu'une certaine maturité leur permette de comprendre réellement?»* Elle fait aussi état comme d'autres de contraintes extérieures difficiles à respecter: « *Je ne suis pas sûre que ce travail est réellement payant pour les années ultérieures, parce que je n'arrive pas à boucler le programme.* Agnès aussi précise que ce qui a changé, c'est qu'avant elle terminait le programme et que maintenant elle est un peu mal à l'aise à cause de cela. Mais dans ces cas là, même s'ils ne s'intègrent pas encore dans une pratique stable et cohérente, les nouveaux gestes découverts permettront de développer petit à petit de développer de nouvelles pratiques.

En conclusion: le problème de la formation des professeurs de mathématiques

Dans sa recherche doctorale, J. Bolon (1996) analyse comment les enseignants tirent parti des recherches faites en didactique des mathématiques et montre combien il est difficile pour les professeurs d'intégrer des outils élaborés, séquences didactiques, issus de ces recherches dans leurs pratiques en dehors d'un contexte de formation. Pour leur part, C. Hache et A. Robert (1997), se demandent ce qu'il est possible d'enseigner comme éléments de didactique dans une formation et tout particulièrement dans une formation initiale: «Que devons-nous transmettre? Est-ce un savoir? Peut-il avoir une portée prescriptive, laquelle?» Ils signalent aussi les dangers de l'entreprise entre l'informatif qui peut être perçu et sollicité comme du prescriptif et se posent alors la question de l'origine des décalages qu'on peut observer dans les formations entre les discours qui y sont tenus et leur transfert effectif.

Dans notre cas, l'analyse des déclarations montre que les professeurs qui ont participé à la recherche sur la place de l'écrit en mathématiques perçoivent dans leurs pratiques non pas l'apparition d'un modèle prescriptif formel mais celle de gestes professionnels susceptibles de favoriser les apprentissages des élèves. Plutôt que les modèles formels avancés par les recherches de didactiques des mathématiques, nous retrouvons là leurs motivations initiales fondamentales: «La didactique des mathématiques se présente, a priori, comme la science des conditions spécifiques de l'acquisition provoquée des connaissances mathématiques» (G; Brousseau, 1994, p51). D'autre part, nous trouvons évoqués par les professeurs en grande partie les perspectives qui guident les recherches en didactique des telles que les évoque N. Balacheff (Bulletin A. P. M., n° 342, p. 94, 1984):

«La signification d'une notion mathématique n'est pas réductible au texte de l'une de ses définitions. Ce qui fait sens, c'est l'ensemble des classes de problèmes pour lesquelles cette notion constitue un outil fiable, économique de résolution». Nous retrouvons là l'idée exprimée par les professeurs de notre équipe d'une prise en compte des contenus non pas d'un point de vue formel mais dans une perspective d'activités qui font que les connaissances ont sens pour les élèves. N. Balacheff ajoute: «L'étude de la genèse d'une notion mathématique est l'un des moyens pour mettre en évidence ces classes de problèmes». Nous ne pouvons pas dire que cette dimension est évoquée par les professeurs, de façon stricte, mais comme nous l'avons vu ils évoquent l'analyse des contenus en jeu, analyse qui met les enseignants dans la possibilité de définir des activités qui ont sens pour les élèves, tout comme la prise en compte des représentations initiales des élèves également évoquées. C'est là une autre idée directrice rappelée par N. Balacheff que nous retrouvons ici chez les enseignants de l'équipe: «L'élève n'est pas un récepteur passif de la connaissance: il agit sur elle. Il la reconstruit, rejetant ou modifiant les conceptions qu'il a déjà formées et dont les situations-problèmes peuvent manifester la défaillance. Dans ce contexte, l'erreur n'est pas analysée comme une faute mais comme un symptôme.»

Nous retrouvons alors la perspective de formation des professeurs, telle que l'esquisse G Brousseau :»Une bonne formation mathématique des professeurs exige des connaissances mathématiques particulières, des présentations spécifiques des mathématiques qu'ils devront enseigner et aussi des connaissances des conditions didactiques de ces enseignements» (G; Brousseau, 1994, p. 56). Il ajoute: «A ce sujet, une première constatation assez désagréable s'impose: la connaissance approfondie des conditions d'existence et de diffusion d'une connaissance paraît toujours beaucoup plus complexe que cette connaissance elle-même». Or il semble que ce qu'expriment les enseignants relativement aux apports de leur recherche sur la place de l'écrit dans l'enseignement des mathématiques, c'est la découverte de gestes qui leur permettent d'aborder la question de cette connaissance approfondie des conditions d'existence et de diffusion des connaissances.

Bibliographie

BOLON, J. (1996). Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège. Thèse, Université René Descartes, Paris V, Sciences Humaines Sorbonne.

BROUSSEAU, G. (1994). Perspective pour la didactique des mathématiques, in Vingt ans de didactique des mathématiques en France. *RDM*, pp. 51-66.

DOUADY, R. e PERRIN, M. J. (1986). Liaison école-collège: nombres décimaux. *Irem* de Paris VII.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Représentations sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

HACHE, C. e ROBERT, A. (1997). Comment, en didactique des mathématiques, prendre en compte les pratiques effectives, en classe, des enseignants de mathématiques du lycée? *Cahier de Didirem.* Université Paris VII Denis Diderot.

PERRIN, M. J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles. *RDM*, pp. 5-119.

PLUVINAGE, F. (1977). *Difficultés des exercices scolaires.* Thèse d'Etat, Strasbourg.

RAUSCHER, J. C. (1993). *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège.* Thèse USHS, Irem de Strasbourg.

Procurando um equilíbrio entre o que se pode "ver" e o que se pode "imaginar"

GILDA DE LA ROCQUE PALIS*
LYNNE IPIÑA**

Resumo

Neste artigo manifestamos nossa preocupação com o equilíbrio entre os aspectos algébrico e gráfico do conteúdo matemático de nosso currículo. Alunos e professores com bom desempenho no que concerne às habilidades algébricas podem ser enganados pelo que "vêem" em um gráfico. Em nossa opinião, uma análise revitalizada de nosso currículo, fundamentada em um re-olhar para objetos e processos familiares provocado pela reflexão do trabalho com esses objetos ou processos empregando ferramentas computacionais pode ser bastante benéfica para alunos e professores.

Palavras-chave: currículo de matemática, computador na educação matemática, funções, visualização.

Abstract

Our concern is with the balance between the algebraic and graphical aspects of the mathematical content of our curriculum. Students and teachers, independently of their command of algebra, are easily fooled by what they "see" on a graph. In our opinion, the time is ripe for an "incorporation" of the lessons already learned from having computers in the classroom in a renewed analysis of our core curriculum.

Key-words: *mathematics curriculum, computer in mathematics education, functions, visualisation.*

* Departamento de Matemática, PUC-Rio.

** Department of Mathematics, University of Wyoming.

como ver bem à sua volta, sem admitir, ao lado,
por baixo ou por cima, "coisas invisíveis"?
Debray (1994)

Introdução

E impossível negar, no momento atual, o potencial dos computadores para mudar o mundo fora da sala de aula. Procedimentos bancários têm se modificado constantemente e mesmo cidadãos de algumas cidades remotas utilizam cartões e senhas para realizar suas transações bancárias. Laboratórios médicos, oficinas mecânicas e supermercados registram dados variados e totalizam despesas eletronicamente. Milhões de pessoas obtêm ou atualizam programas via Internet, jornais de grande circulação têm seus próprios *Web sites*.

Houve um tempo, no passado não muito distante, em que educadores se preocupavam em introduzir os alunos aos próprios computadores antes de lhes apresentar programas especializados. Um professor que pretendesse coordenar atividades empregando computadores já esperava falhas diversas nas máquinas e nos programas. Um professor que pretendesse propor algum estudo apoiado em computadores tinha que pensar em tudo, preparar-se para tudo, carregar pilhas de disquetes porque os programas já instalados eram raros, os disquetes apresentavam defeitos, os computadores disponíveis não liam alguns deles. Era necessário experimentar com antecedência as atividades a propor aos alunos nas próprias máquinas que seriam por eles utilizadas, pois o mesmo programa podia funcionar de maneiras bastante distintas em computadores diferentes. Os professores tinham também que inventar/redigir a maior parte do material de suporte a ser usado pelos alunos.

A boa notícia é que o aspecto relacionado à implementação de ensino-aprendizagem apoiado em computadores está ficando mais fácil para os professores. Os disquetes apresentam menos defeitos e os CDs parecem indestrutíveis. As máquinas freqüentemente têm memória suficiente para rodar nossos programas de matemática. Estudantes estão rapidamente se tornando familiarizados com o trabalho com arquivos, impressoras e a Internet. Existe quase sempre pelo menos um aluno capaz de ajudar com os problemas técnicos que aparecem em um Laboratório de Computação. Materiais instrucionais de qualidade estão disponíveis em maior volume e muitos podem ser obtidos via Internet. Os pacotes matemáticos são muito mais amigáveis, e como apresentam muitas características comuns a outros programas, os alunos descobrem como lidar com os novos *softwares* com certa rapidez.

Outra boa notícia é que o nível de aceitação do emprego de computadores no ensino tem aumentado. A instrução apoiada em computadores ainda está na sua infância e muitas escolas têm poucas ferramentas computacionais. No entanto, para muitos professores e administradores, a pergunta colocada, agora, com maior freqüência é "como" e não "se" deveriam utilizar computadores nas escolas.

Hoyles (1999) comenta que o conhecimento matemático de adultos e crianças parece estar freqüentemente em um estado de crise – uma crise de habilidades ou uma crise de criatividade. E que o desenho de um currículo equilibrado e globalmente efetivo com relação a esses aspectos é um desafio para a comunidade internacional de educadores matemáticos.

O foco deste artigo é também "equilíbrio", apesar de se tratar de um tipo diferente de equilíbrio. Estamos preocupados com o equilíbrio entre os aspectos algébrico e gráfico do conteúdo matemático de nosso currículo. Nossa discussão pressupõe um certo nível de uso de tecnologia, e nada do que dizemos deve ser interpretado como uma defesa do retorno a um currículo de matemática tradicional isento de tecnologia.

Artigos nos anos 80 falaram da ameaça que a tecnologia representava para os educadores matemáticos. Difundia-se que era necessário se adaptar e integrar a tecnologia, e as discussões que se iniciaram como respostas às ameaças proclamadas tomaram direções variadas. A mudança mais aparente até agora recaiu sobre o currículo. Nas salas de aula com ou sem computador, muitos professores usam livros didáticos com conteúdos diferentes. As complicadas manipulações algébricas presentes nos problemas resolvidos, ou necessárias para resolver os problemas propostos, são menos freqüentes; e os livros são repletos de figuras e gráficos.

É compreensível que, ao início, o maior desafio parecesse ser a tecnologia em si mesma. Havia também um otimismo exagerado em várias publicações relativo ao potencial de visualização de gráficos, e uma presença freqüente de "Olhemos o gráfico e nossos problemas estarão resolvidos". Durante algum tempo tem se defendido a utilização de gráficos num esforço para encorajar um outro ponto de vista sobre diversos conceitos e processos. No entanto, era mais difícil do que parecia à primeira vista obter bons gráficos de funções, em parte devido à própria tecnologia e em parte porque algumas questões novas surgiram, questões que nunca haviam sido tratadas enquanto realizávamos esboços de gráficos à mão e a partir de conhecimentos algébricos. Artigos apareceram chamando a atenção para o fato de que ao desenhar gráficos em escala, uma figura não poderia mostrar ao mesmo tempo comportamentos locais e globais. (ver, por exemplo, Dubinsky, 1995)

Muitos alunos não alcançaram o sucesso prometido com o trabalho com tecnologias variadas. Temos olhado de perto o que ocorre na interação de alunos e professores com o computador e calculadoras ao procurarem resolver problemas envolvendo gráficos de funções. A análise dessa interação tem apontado dificuldades na utilização da tecnologia por alunos e professores, em particular dificuldades relacionadas à *interpretação* de resultados obtidos graficamente (também de resultados numéricos e simbólicos) com as novas ferramentas.

Em experimentos que realizamos (ver Palis, 1991; Abrahão, 1998), foi possível constatar que as potencialidades do computador como suporte ao estudo das associações entre os contextos gráfico e algébrico no estudo de funções não se concretizaram com a maioria dos sujeitos envolvidos. Embora alunos e professores com bom desempenho no que concerne às habilidades algébricas possam ser enganados pelo que "vêem", os alunos que foram bem-sucedidos ao extrair informações de gráficos também possuíam habilidades algébricas bem desenvolvidas.

A partir das análises efetuadas podemos dizer que é possível que tanto licenciandos como professores em exercício (mais os últimos do que os primeiros) apresentam bastante dificuldade em conciliar o que a máquina parece mostrar e os conhecimentos teóricos, muitas vezes confiando mais na máquina do em seus conhecimentos matemáticos. Isto pode apontar para a necessidade de uma formação específica acerca das diferenças entre os gráficos à mão e os gráficos à máquina, e as limitações das diferentes ferramentas computacionais.

Há diferenças e semelhanças entre os processos empregados e os resultados obtidos ao se utilizar computadores e quando se usa lápis e papel. E a transferência de esquemas de tratamento de gráficos no contexto lápis e papel, com suas convenções muitas vezes implícitas, para novos esquemas, agora em ambientes computacionais, precisa ser trabalhada para que a utilização do quadro gráfico se realize de forma produtiva. Em nossa opinião, uma análise revitalizada de nosso currículo, fundamentada em um re-olhar para objetos e processos familiares provocado pela reflexão do trabalho com esses objetos ou processos empregando ferramentas computacionais pode ser bastante benéfica para alunos e professores.

Estas observações nos remetem à nossa discussão sobre equilíbrio. Atualmente, a abordagem gráfica ganhou ampla aceitação, e, certamente, é o momento para enfatizar o que se desejou transmitir o tempo todo. Ou seja, é necessário e produtivo empregar uma variedade de ferramentas, dentre as quais ferramentas analíticas e gráficas para resolver problemas. Figuras obtidas em computador podem não fornecer uma visão completa, nem mesmo correta, da situação em estudo. Assim, é preciso buscar um equilíbrio entre o que se pode "ver" nos gráficos gerados em computador e o que se pode "imaginar" a partir de conhecimentos teóricos.

Esperamos que fique claro para o leitor que pretendemos enfocar aspectos relativamente simples desse re-olhar, tais como a natureza da reta numérica *versus* seu modelo computacional discreto. Também procuramos chamar a atenção para o poder de resultados matemáticos que foram esquecidos ou relegados a cursos mais avançados, e que podem complementar o estudo do comportamento de uma função usando computador. Nesse caso trata-se de um resultado no contexto de teoria de equações.

Antes de prosseguir, é preciso mencionar, mesmo que em linhas muito gerais, qual é o procedimento empregado pelas diversas tecnologias (calculadoras gráficas e *softwares* usados em computadores) para desenhar um gráfico de uma função $f : D \subset \Re \rightarrow \Re$ dada por uma expressão algébrica.

Inicialmente, são fornecidos pelo usuário a expressão da função e quatro números a, b, c e d satisfazendo $a < b$ e $c < d$. Estes números caracterizam o retângulo $[a, b] \times [c,d]$ denominado "janela gráfica". As coordenadas dos quatro vértices da região $[a, b] \times [c,d]$ do plano cartesiano $\Re^2$ são atribuídas aos vértices da tela gráfica. Isso, por sua vez, determina as unidades das escalas, nos eixos horizontal e vertical.

Um gráfico de f é gerado da seguinte forma: a tecnologia determina os valores da função f em um certo conjunto de números $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b$

e "marca" na tela os pontos $(x_i\, f(x_i))$, $0 \leq i \leq$, ligando-os sucessivamente para i crescente, por segmentos de reta.[1]

Vemos então que o que essas tecnologias fazem é desenhar gráficos pelo procedimento de marcar pontos e ligá-los por segmentos de reta. Com vantagens óbvias sobre o procedimento análogo com lápis e papel: não é necessário fazer os cálculos e o desenho, o número de pontos utilizado pode ser "grande", e o resultado é obtido quase que instantaneamente. Mas, assim como nem sempre se obtém um bom gráfico à mão por esse processo, também nem sempre se obtém um bom gráfico de uma função utilizando recursos computacionais. Para uma discussão mais detalhada ver Palis (1997).

A natureza discreta das telas dos computadores e os limites finitos das janelas gráficas são freqüentemente responsáveis pelos chamados "comportamentos escondidos" e pela impossibilidade de deduzir comportamentos assintóticos a partir de gráficos gerados em computadores como foi e tem sido feito com gráficos desenhados à mão.

Suponhamos, em um ambiente tradicional somente com lápis e papel, que dizemos que o gráfico de uma certa função $f : \Re \rightarrow \Re$ é o que se encontra na Figura 1. De fato, o que vemos é "uma parte" do gráfico de f já que o gráfico dessa função, definida para todo x real, se estenderia para a esquerda e para a direita indefinidamente.

Quando dizemos, nesse ambiente, que o gráfico de uma função f é o que consta da Figura 1 estamos implicitamente afirmando que nenhuma mudança de comportamento ocorre quando $x > 10$ ou $x < 10$. No sentido de que, por exemplo, para $x > 10$ a função é decrescente e sua concavidade para cima. Se houvesse mudanças nesses aspectos de comportamento estas deveriam constar do gráfico apresentado. Freqüentemente, também por convenção, inferimos a partir de um gráfico como este o comportamento assintótico da função, isto é, que seus limites quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$ são $-\infty$ e ∞ respectivamente. De forma análoga, quando pedimos a um aluno, em uma disciplina inicial de Cálculo, que esboce o gráfico de uma função f dada por uma expressão algébrica, o que é que esperamos que ele faça? Que ele determine o

1 A escolha dos pontos $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n$ e o tipo de curva que liga os pontos marcados na tela varia com a tecnologia empregada. No entanto, as observações que fazemos sobre os gráficos obtidos são válidas para as diversas tecnologias.

comportamento de f utilizando recursos algébricos diversos como cálculo e análise de derivadas, cálculo de limites, etc. e produza um gráfico consistente com as informações obtidas algebricamente. Se o aluno verificar que a função é decrescente, tem concavidade para baixo para $x < 0$ e para cima se $x > 0$, $f(0) = 0$ e os limites de f quando $x \to \infty$ e $x \to -\infty$ são $-\infty$ e ∞ respectivamente, esperamos que esse aluno produza um gráfico semelhante ao que está apresentado na Figura 1.

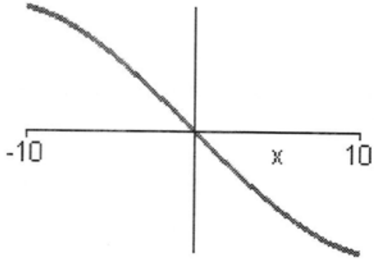


Figura 1

Por outro lado, quando dizemos que a Figura 1 é um gráfico gerado em computador de uma função $f : \Re \to \Re$, não podemos inferir, por exemplo, que a função é decrescente para $x > 0$ e que seu limite quando $x \to \infty$ é $-\infty$, fundamentando-nos somente em representações gráficas. [2]

A curva da Figura 1 é o gráfico gerado em computador de uma infinidade de funções, dentre elas a restrição do gráfico de

$$f(x) = \frac{x\,(x-20)\,(x+20)}{300}$$

e de

$$g(x) = \frac{-260x}{x^2 + 13^2} \text{ à janela } [-10, 10] \times [-10, 10].$$

Observe que essas funções têm comportamentos bastante distintos. Enquanto f tem três zeros e seus limites quando $x \to \infty$ e $x \to -\infty$ são iguais a ∞ e $-\infty$, a função g tem somente um zero e seus limites quando $x \to \infty$ e $-\infty$ são iguais a zero. Gráficos dessas funções f e g , em outras janelas, podem ser vistos nas Figuras 2 e 3, respectivamente.

2 Todos os gráficos desse texto foram desenhados usando o *software* Maple com seus parâmetros no modo *default* exceto quanto à atribuição de valores aos vértices da janela gráfica.

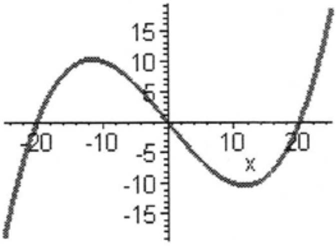


Figura 2

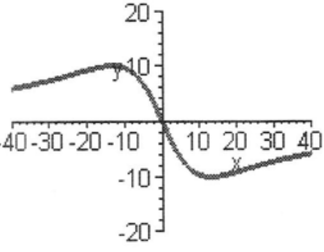


Figura 3

Nem todos os problemas se situam fora da janela gráfica. O gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 63{,}0001x^2 + 128x - 63{,}9936}{10x^2 - 20x + 10}$$

gerado na janela [–10, 10] × [–10, 10], e exibido na Figura 4, poderia ser interpretado por um estudante como "parabólico". No entanto, f tem uma assíntota vertical x = 1 e mais dois zeros, x = 0,99 e x = 1.01, não visíveis nesse desenho.

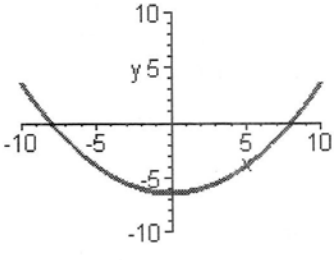


Figura 4

Esse desenho decorre do fato de o programa computacional empregado produzir o gráfico dessa função a partir da marcação dos pontos listados a seguir.

[[-10., 3.599997025], [-9.564056917, 2.747116011], [-9.184745171, 2.035952423], [-8.758169442, 1.270551863], [-8.328766092, .5368338446], [-7.901403621, -.1567818839], [-7.505183904,

-.7672203959], [-7.094921337, -1.366207037], [-6.670627204, -1.950269956], [-6.247693787, -2.496627483], [-5.812654783, -3.021297927], [-5.429472191, -3.452074823], [-4.998099350, -3.901889442], [-4.564955250, -4.316104421], [-4.147540650, -4.679772995], [-3.768488204, -4.979827765], [-3.317758183, -5.299219638], [-2.935930733, -5.537995322], [-2.491774637, -5.779058514], [-2.098621233, -5.959516821], [-1.667269637, -6.121935147], [-1.256520912, -6.241992930], [-.827947708, -6.331260774], [-.434383720, -6.380820933], [-.9871791e-2, -6.399362709], [.43107680, -6.379445720], [.81492384, -6.315099399], [1.22948916, -6.236970451], [1.65777570, -6.123762301], [2.07677053, -5.968187625], [2.48216956, -5.783620141], [2.93229608, -5.540015590], [3.33675477, -5.286509946], [3.76860075, -4.979699872], [4.15991740, -4.669461959], [4.58772985, -4.295240111], [4.99026803, -3.909697944], [5.41103641, -3.472050652], [5.82241442, -3.009936090], [6.25308906, -2.489878698], [6.66787993, -1.953931641], [7.09206351, -1.370259825], [7.51273463, -.7558800559], [7.89928770, -.1601250469], [8.34232114, .5594311626], [8.73857553, 1.236268165], [9.16106536, 1.992508861], [9.56544204, 2.749764394], [10., 3.599995555]]

Técnicas como ampliação de escalas [3] (*zoom in*) e redução de escalas (*zoom out*) têm sido freqüentemente ensinadas aos alunos como parte dos procedimentos possíveis para melhor visualizar o comportamento de funções. E algumas vezes é dito aos alunos, sem o cuidado necessário: "olhe os gráficos, é claro que...". No entanto, não é difícil apresentar exemplos para os quais esses procedimentos de *zoom in* e *zoom out* dão informações visuais conflitantes com resultados obtidos algebricamente.

Por exemplo, se tentarmos ver que $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = x - \frac{x^3}{6}$ são diferentes em uma vizinhança de 0, a aplicação de procedimentos de *zoom in* sugere exatamente o oposto (ver Figuras 4 e 5). Observe que as funções f e g têm derivada igual a 1 no ponto 0.

3 Mantendo a proporção entre as escalas adotadas nos dois eixos coordenados.

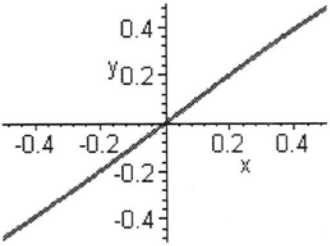


Figura 5: gráficos de f e g

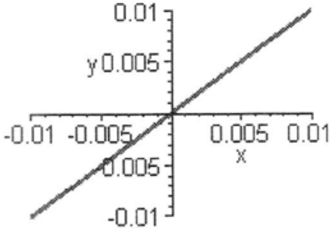


Figura 6: gráficos de f e g

Distinguir entre o comportamento assintótico de $f(x) = x + 0{,}9\, x\, sen(x)$ (cujo limite quando x tende a ∞ é ∞) e o de $g(x) = x + 1.1\, x\, sen(x)$ (que não tem limite quando x tende a ∞) por procedimentos de *zoom out* é uma tarefa interpretativa quase impossível (ver Figuras 7 e 8).

Os limites mencionados acima podem ser determinados da seguinte forma:

Como temos que $0{,}1\, x \leq x + 0{,}9\, x\, sen(x)$ para $x > 0$ temos que $0{,}1\, x \leq f(x)$para $x > 0$, logo o limite de f quando x tende a ∞ é ∞.

Com relação à função g, podemos verificar que a seqüência (a_n), onde $a_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, n = 0,1,2,........., é tal que $(g(a_n))$ tende a $-\infty$ quando n tende a ∞, pois nesse caso $(g(a_n)) = -0{,}1$ e (a_n) tende a ∞. E a seqüência (b_n) onde $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, n = 0,1,2,........., é tal que $(g(b_n))$ tende ∞ a quando n tende a ∞, pois nesse caso $(g(b_n)) = 2{,}1\, b_n$ e (b_n) tende a ∞. Assim podemos concluir que g não tem limite quando x tende a ∞.

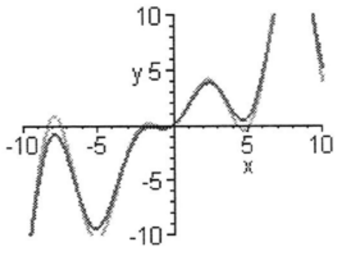


Figura 7 : gráficos de f e g

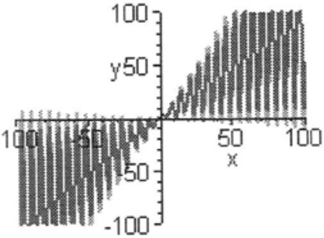


Figura 8: gráficos de f e g

Não podemos culpar as figuras por serem "distorcidas" (em relação às que faríamos à mão; de fato as figuras em computador são desenhadas respeitando as escalas escolhidas) nem por induzirem a respostas errôneas. Por outro lado, também não podemos criticar os alunos por não possuírem "intuições" e conhecimentos matemáticos que nos custaram anos de trabalho para dominar.

Em Harvey, J., Waits, B. e Demana, F. (1995) os autores descrevem uma estratégia para encontrar os zeros de

$f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 48x^2 + 36x - 9$, usando uma calculadora gráfica. Aqui apresentaremos a mesma estratégia usando figuras geradas com o Maple; os resultados são praticamente idênticos.

Inicialmente, no artigo acima mencionado, são apresentados gráficos de f nas janelas $[-3, 4] \times [-50, 50]$, Figura 9, e $[0, 2] \times [-2, 2]$, Figura 10. A partir desse último gráfico os autores dizem que se pode facilmente obter aproximações de dois zeros da função f (p. 85).

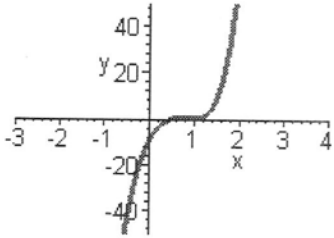


Figura 9

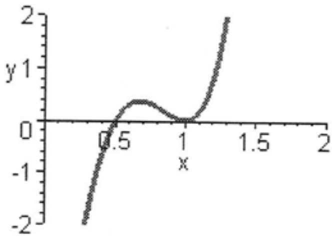


Figura 10

Mais adiante (pp. 101-102) os autores argumentam que é possível obter evidências de que f não tem outro zero real além dos que já foram descobertos: "se pudermos ver graficamente que $g[g(x) = x^3]$ limita f digamos para $x < 0$ e $x > 2$, então nós podemos ficar mais seguros de que todos os zeros de f estão no intervalo $[0, 2]$. Para ver que g limita f em $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$..é mostrado na Figura...". A afirmativa é validada exibindo os gráficos de f e g na janela $[-3, 3] \times [-20, 20]$ (ver Figura 11) e a diferença g f na janela $[-3, 3] \times [-50, 50]$ (ver Figura 12).

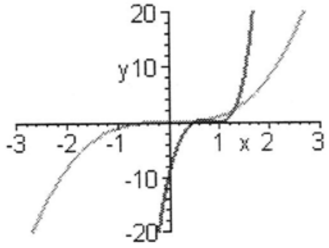


Figura 11 : gráficos de f e g

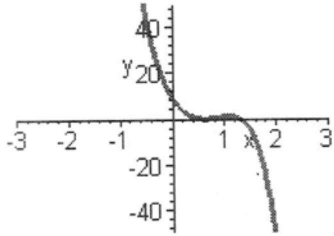


Figura 12: gráfico de g - f

Os autores são cuidadosos ao dizer que a esta altura somente evidências empíricas são disponíveis e que é necessário utilizar argumentos simbólicos e numéricos para provar o resultado.

Gostaríamos de apontar algumas questões relacionadas com a argumentação apresentada no artigo citado acima.

Inicialmente, quando os autores dizem que g limita f em $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$, eles estão nos pedindo para "ver" o comportamento assintótico de f e g em uma representação gráfica não apenas finita, como não poderia deixar de ser em se tratando de gráficos em computador, mas também utilizando números com valores absolutos tão pequenos que provavelmente nenhum aluno venha a tomar esse comportamento como evidência do comportamento da função para valores com módulo bem maior.

Por outro lado, a Figura 12 não fornece mais evidência empírica de que $g - f$ não tem zeros fora do intervalo $[-3, 3]$ do que a Figura 9 revela sobre a existência de zeros de f fora do intervalo $[-3, 4]$.

Além disso, se um aluno repetir a mesma estratégia para encontrar os zeros de $F(x) = \dfrac{(x-0{,}5)\,(x-1)^2\,(x-40)^2}{30}$ ele encontrará o mesmo tipo de evidências empíricas ao examinar as Figuras 13, 14 e 15. Só que nesse caso a mesma conclusão anterior é incorreta. Esta função tem três zeros: 1, ½ e 40.

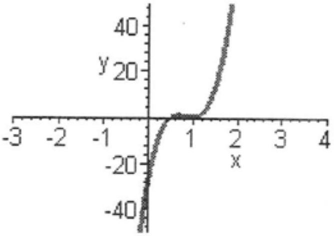


Figura 13: gráfico de F

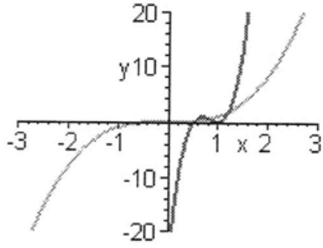


Figura 14: gráficos de F e de $g(x) = x^3$

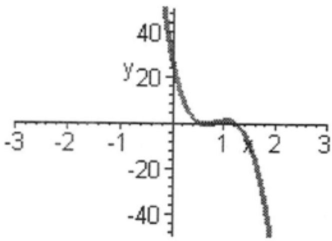


Figura 15: gráfico de g - F

Finalmente, existem critérios bastante simples para determinar um intervalo que contém todos os zeros de uma função polinomial. A seguir enunciamos e demonstramos um desses resultados.

Uma ferramenta analítica

Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.

Então os zeros de f pertencem ao intervalo $[-a-1, a+1]$, onde

$$a = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \right\}$$

Se aplicarmos esse critério a $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 48x^2 + 36x - 9$ obtemos que todos os zeros de f pertencem ao intervalo $[-9, 9]$.

<u>Demonstração:</u>

Podemos considerar $a_0 \neq 0$ porque nesse caso ou temos $f(x) = a_n x^n$, cujo único zero é 0, ou podemos reduzir o problema, fatorando, ao estudo de uma função polinomial com termo independente diferente de zero.

Seja

$$a = \max_{0 \le i \le n-1} \left\{ \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \right\}$$

Temos vários casos a considerar. O primeiro fornece a extremidade direita do intervalo [–a –1, a + 1]. Os casos (iii) a (vi) determinam sua extremidade esquerda.

i) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $a_n > 0$.

Inicialmente mostraremos que se $x > a + 1$, então $f(x) \neq 0$ porque $f(x) > 0$.

Podemos reescrever a expressão da função da seguinte maneira:

$$f(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_o}{a_n x^n} \right]$$

Seja $u = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_o}{a_n x^n}$. Assim $f(x) = a_n x^n [1 + u]$

Como $|u| \le \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \left|\frac{1}{x}\right| + ... + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| \left|\frac{1}{x^{n-1}}\right| + \left|\frac{a_o}{a_n}\right| \left|\frac{1}{x^n}\right| \le a \left|\frac{1}{x}\right| + ... + a \left|\frac{1}{x^n}\right|$, e se $x > 1 + a$, então $|x| > 1 + a > 1$, temos que $\frac{1}{|x^k|} < \frac{1}{(1+a)^k}$, $k = 1.......n$.

Desta forma, uma estimativa de $|u|$ pode ser obtida através da soma de n termos de uma progressão geométrica:

$$|u| < \frac{a}{1+a} + ... + \frac{a}{(1+a)^n} = \left[1 - \left(\frac{1}{1+a}\right)^n \right]$$

Esta última expressão nos diz que $|u| < 1$ e $1 + u > 0$.

Quando $a_n > 0$ e $x > a + 1$, então $a_n x^n > 0$ e o primeiro caso está provado.

ii) A demonstração de que $f(x) \neq 0$ quando $a_n < 0$ difere da anterior somente no último passo: $f(x) < 0$ porque $a_n x^n < 0$

iii) Se n é par $a_n > 0$ e , então para $x < -1 - a$, $f(x) > 0$.

Seja $g(x) = f(-x)$. Então $g(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ e $a_n > 0$
Por i), se $x > 1 + a$, então $g(x) > 0$.
Portanto, se $x < -1 - a$, então $-x > 1 + a$ e $f(x) = g(-x) > 0$.

iv) Se n é impar $a_n > 0$ e, então para $x < -1 - a$ temos que $f(x) < 0$.

Seja $g(x) = f(-x)$. Então $g(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - ..... + a_0$ e $a_n > 0$
Logo, por ii), se $x < -1 - a$, então $-x > 1 + a$ e assim $f(x) = g(-x) < 0$.

v) Se n é par $a_n < 0$ e, então para $x < -1 - a$, $f(x) < 0$.
Seja $g(x) = f(x)$. Por iii), se $x < -1 - a$, então $-f(x) > 0$ e assim $f(x) < 0$.

vi) Se n é impar $a_n < 0$ e, então para $x < -1 - a$, $f(x) > 0$.
Seja $g(x) = -f(x)$. Por iv), se $x < -1 - a$, então $-f(x) > 0$ e assim $f(x) > 0$.

O resultado do teorema decorre da junção de todos esses casos. Um resultado similar é provado em Hirst e Macey (1997).

Referências bibliográficas

ABRAHÃO, A. M. C. (1998). *O comportamento de professores frente a alguns gráficos de funções* $f : D \subset \Re \to \Re$ *obtidos com novas tecnologias computacionais.* Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, PUC-Rio.

DEBRAY, R. (1994). *Vida e morte da imagem.* Rio de Janeiro, Editora Vozes.

DUBINSKY, E. (1995). Is Calculus Obsolet?. *The Mathematics Teacher,* 88 *(2),* pp. 146-148.

HARVEY, J. G., WAITS, B. K. e DEMANA, F. D. (1995). The Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, pp. 75-109.

HIRST, H. P. e Macey, W. T. (1997). Bounding the Roots of Polynomials. *The College Mathematics Journal,* 28 *(4),* pp. 292-295.

HOYLES, C. (1999). Steering between skills and creativity: a role for the computer? *Educação Matemática Pesquisa,* 1*(1)* pp. 109-117.

PALIS, G. L. R. (1991). Experiências com a utilização de um software gráfico na área de Matemática. In: II SEMINÁRIO NACIONAL DE INFORMÁTICA EDUCATIVA. *Anais...* Alagoas, Brasil.

PALIS, G. L. R. (1997). Gráficos de funções em calculadoras e com lápis e papel. *Educação e Matemática, 45*, APM de Portugal, pp. 37-40.

A apropriação da ferramenta logaritmo a partir de situações com exponenciais aliada ao uso da calculadora

MONICA KARRER*
SANDRA MAGINA**

Resumo

Este artigo descreve um estudo sobre o processo ensino-aprendizagem dos logaritmos com alunos da 1ª série do ensino médio. Primeiramente, será apresentado uma seqüência de ensino de tal conteúdo, baseada em situações-problema envolvendo equações exponenciais integradas ao uso da calculadora, nas quais o logaritmo assume o papel de ferramenta de resolução. Depois, serão relatados os principais resultados obtidos pelos alunos, a partir da análise de dois testes aplicados antes e depois do desenvolvimento da seqüência (pré e pós-testes). A análise levou em consideração quatro pontos de vista: o desempenho geral nos testes, o acerto por itens, por sujeito e o tipo de erro apresentado. O estudo conclui que a abordagem desenvolvida por nossa seqüência favoreceu a formação do conceito de logaritmo para esse grupo.

Palavras-chave: ensino-aprendizagem, matemática, formação de conceito, ensino médio.

Abstract

This paper describes a project concerning the process of learning logarithms carried out with 15-year-old students from the first year of High School. First we present a didactic sequence which was based on exponential problem-solving from the everyday life integrated with the use of calculators and in which logarithms appeared as a problem-solving tool. We go on to report the main results these students obtained in two diagnostic tests administered before and after the sequence (pre and post-tests). The analysis took into account four viewpoints: general performance in the tests, general performance on each item of the test, individual performance, and finally the nature of mistakes made by the students. The study concludes that the approach we chose (introducing this concept through the didactic sequence) favoured the formation of the concept of logarithm in this group of students.

Key-words: *teaching-learning, mathematics, concept formation, high school.*

* Mestra em Educação Matemática pela PUC-SP.

** PhD. em Educação Matemática, professora do Departamento de Matemática e do Mestrado em Educação Matemática e membro pesquisadora do Proem – Programas de Estudos e Pesquisas no Ensino da Matemática – PUC-SP.

Introdução

O objetivo desta pesquisa foi o de criar e testar uma nova abordagem para a formação do conceito de logaritmo. Nesse sentido, elaboramos uma seqüência de ensino que, aliada ao uso da calculadora, pudesse facilitar o processo ensino-aprendizagem desse conceito.

Historicamente, os logaritmos surgiram no início do século XVII para facilitar os enfadonhos cálculos numéricos exigidos pela astronomia e navegação. Atualmente, não faz sentido estudar tal conteúdo para este fim, porém, no ensino médio, podemos utilizar os logaritmos na resolução de problemas que envolvem aplicações financeiras, valorização e desvalorização de bens, crescimento populacional e várias outras situações que fazem parte da vida moderna e que podem ser conhecidas do aluno. Com isso, a seqüência de ensino elaborada – aliada ao uso da calculadora – procurou introduzir os logaritmos como uma necessidade de estudo para a resolução de problemas, partindo de questões reais e atuais.

Nosso ponto de partida teórico foi a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1983, 1987 e 1994), a qual afirma que a aquisição do conhecimento se dá por meio de situações e problemas já conhecidos, e que o conhecimento, portanto, tem características locais. Conseqüentemente, todos os conceitos têm um domínio de validade restrito, o qual varia de acordo com a experiência e com o desenvolvimento cognitivo do sujeito. Tal tese é confirmada no trabalho de Lester e Mau (1993). Este mostrou que trabalhar com situações-problema, além de favorecer o desenvolvimento cognitivo do estudante, favorece sua autoconfiança e autonomia para lidar com a matemática A Teoria dos Campos Conceituais defende ainda que, na perspectiva da resolução de problema, um conceito nunca vem sozinho, estando sempre relacionado a outros e é esta inter-relação entre os conceitos que forma o campo conceitual.

Outro pressuposto teórico que esteve presente durante todo o planejamento metodológico e na execução da pesquisa veio da Teoria Socioconstrutivista, de Lev Vygotsky. Tomamos emprestado de Vygotsky duas idéias: a noção de ferramenta – instrumento produzido culturalmente que se torna internalizado à medida que é apropriado pelo sujeito através de sua própria ação e que o torna mais poderoso intelectualmente (Vygotsky, 1991, 1993, 1997) – e a noção de conceito que, para ele, é muito mais do que a soma de conexões associativas formadas pela memória, é mais do que um hábito mental e não pode ser ensinado por treinamento. Para Vygotsky (1993), um conceito só aparece quando o sujeito, após abstrair as propriedades do objeto, for capaz de sintetizá-las novamente "e a síntese abstrata daí resultante torna-se o principal instrumento do pensamento" (p. 68). Este autor é categórico em afirmar que "o adolescente formará e utilizará um conceito com muito mais propriedade numa situação concreta, mas achará estranhamente difícil expressar esse conceito em palavras..." (p. 69). E quando ele consegue definir verbalmente o conceito, este, normalmente, é bem mais limitado do que poderíamos esperar considerando o modo como o adolescente usou o conceito em questão. Neste sentido, a palavra (linguagem) que exerce a função de ferramenta na formação de um conceito, ainda terá um longo caminho a percorrer na apropriação deste conceito. Para Vygotsky, o pensamento é organizado a partir da linguagem, portanto, de fora para dentro.

Das pesquisas atuais em Educação Matemática relacionadas diretamente com nosso tema, tivemos as contribuições de Confrey (1991; Confrey e Smith, 1995), que apresentou uma abordagem co-variacional para a construção das funções exponencial e logarítmica, baseada no isomorfismo entre os mundos da contagem e do seccionamento. Fazendo um paralelo com a história, podemos relacionar estes dois mundos com as progressões aritmética e geométrica, respectivamente. A abordagem co-variacional permite explorar a comparação entre os crescimentos desses dois mundos e obter padrões de comportamento entre os seus elementos, tais como "somar elementos de uma progressão aritmética corresponde a multiplicar elementos de uma progressão geométrica". A partir disso, o aluno constrói, através de interpolações, os conceitos de função exponencial e função logarítmica. Já o tratamento usual de funções, baseado na correspondência entre elementos de dois conjuntos, "oculta" a análise variacional conjunta, ou seja, o impacto que a variação dos elementos de um conjunto provoca nos elementos do outro.

Ainda, como adotamos o uso da calculadora durante todo o processo, pesquisamos os resultados dos estudos de Gracias e Borba (1998), que defendem o uso da tecnologia como ferramenta do processo de ensino-aprendizagem, desde que a abordagem adotada não privilegie apenas as técnicas de cálculo.

O estudo

A seqüência de ensino foi inicialmente desenvolvida com 16 alunos da primeira série do ensino médio de um colégio da rede particular do ABC paulista, organizados em duplas. Como um dos requisitos para considerar o aluno como sujeito de nossa pesquisa era que o mesmo estivesse presente em todos os encontros planejados, esse número ficou reduzido a 13 no final do estudo. Vale salientar que nenhum teve contato anterior com os logaritmos, porém todos tinham estudado o conteúdo de função exponencial dado no ensino médio. Foram cinco encontros em horário escolar, com a duração aproximada de 60 minutos cada. A seqüência era composta de quatro fichas, as quais continham situações-problema, atividades de cálculo e questões conceituais. Resumidamente, a primeira ficha teve por objetivo revisar o conteúdo de função exponencial, preparando o aluno para a introdução do logaritmo como uma ferramenta de resolução de problemas envolvendo equações exponenciais. A segunda ficha introduziu os logaritmos decimais, explorando os aspectos históricos inerentes a tal conceito. A terceira explorou a existência de logaritmos em outras bases (no caso, na base 2) e, por fim, a quarta ficha desenvolveu atividades sobre os logaritmos de base ½, a exploração das condições de existência da base e a definição matemática formal. Tal definição representou a última etapa do estudo, apresentada somente após a construção do conceito.

A seguir, para que o leitor tenha uma idéia desta seqüência, apresentaremos parte da mesma, selecionando o problema que introduziu os logaritmos e as atividades de exploração do logaritmo decimal (equivalente a parte das fichas 2 e 3).

Etapas

Situação-problema para introduzir os logaritmos:

O valor de um certo automóvel (em reais) sofre uma depreciação de 10% ao ano. Se o valor atual é de 10000 reais, determine a função que representa o valor deste automóvel após "t" anos.

Obs: neste caso, o aluno deveria construir a função $f(t) = 10000.\ 0{,}9^t$

1) Sabendo que a vida útil deste carro é de 20 anos, determine o valor do carro (utilize a calculadora, e quando necessário, use aproximação de duas casas decimais)

A) NO ATO DA COMPRA
B) APÓS UM ANO
C) APÓS DOIS ANOS E MEIO
D) APÓS SEIS ANOS
E) APÓS NOVE ANOS
F) APÓS DEZ ANOS
G) APÓS TREZE ANOS
H) APÓS DEZESSEIS ANOS
I) APÓS VINTE ANOS

2) Com os dados obtidos, construa uma tabela relacionando o tempo e o respectivo valor do carro.

Obs: O aluno construiria a seguinte tabela:

Tempo (em anos)	Valor do carro (em reais)
0	10000
1	9000
2,5	7684,43
6	5314,41
9	3874,20
10	3486,78
13	2541,86
16	1853,02
20	1215,77

3) Represente tais dados graficamente, no papel milimetrado:

Obs: utilizando os valores tabelados, o aluno deveria construir o gráfico da função $f(t) = 10000.\ (0{,}9)^t$

4) Analisando o gráfico, existe um tempo "t" em que o valor do carro seja de 5000 reais? Este valor pertence a que intervalo?

Obs: o aluno poderia notar, através da análise gráfica, que este valor está entre 6 e 7 anos.

5) Utilizando a função obtida, tente calcular o valor de "t", ou seja, o tempo necessário para que o valor do carro atinja 5000 reais.

Obs: através da função obtida, $f(t) = 10000.0{,}9^t$, podemos substituir 5000 em f(t), obtendo: $5000 = 10000.(0{,}9)^t \Rightarrow 0{,}5 = 0{,}9^t$

Os conhecimentos disponíveis dos alunos não são suficientes para resolver tal equação, visto que a mesma exige a aplicação de logaritmos.

Comentário: o problema explora os quadros numéricos, gráfico e a construção algébrica da função, fornecendo ao aluno várias formas de contato com o objeto de estudo (jogo de quadros). O aluno trabalha com os seus conhecimentos de função exponencial até se deparar com a questão 5. Pela análise gráfica realizada nos exercícios 3 e 4, o aluno já sabe que este tempo está entre 6 e 7 anos, porém, para obter uma melhor aproximação, há necessidade da aplicação de logaritmos (para determinar o expoente da equação $0,9^t = 0,5$). Com isso, a introdução deste conteúdo se dá através de uma necessidade, fato que acreditamos representar uma motivação para o estudo de um novo assunto. Neste momento, o professor pode intervir no processo relatando os aspectos históricos inerentes ao conteúdo de logaritmos.

Exploração do logaritmo de base 10

Após a resolução da equação do exercício 5, pede-se ao aluno que preencha a tabela e que responda às questões a seguir:

Valor	Número	Representar o número como potência de base 10	Apresentar o cálculo do logaritmo	Representar na notação de logaritmo
0	1			
	6			
	8,2			
1	10			
	29			
2	100			
	850			
3	1000			
3,0792				
4				
4,30103				
	100000			

Em seguida, pede-se ainda para que ele responda às seguintes questões:

a) o que representam os valores da primeira coluna?

Obs: esperávamos que, após preencher a tabela, o aluno pudesse perceber que os valores da primeira coluna coincidiam com os expoentes do 10, ou seja, são os logaritmos decimais dos números.

b) o que você notou em relação aos resultados obtidos pelo cálculo dos logaritmos de 1 a 10?

c) e dos logaritmos entre 10 e 100?

d) o que aconteceria com os logaritmos entre 10000000 e 100000000?

e) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 238?

f) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 3495?

g) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 12375?

h) marque as linhas onde os números (da 2ª coluna) são 1, 10, 100, 10000, 10000 e 100000. Estes números aumentam multiplicando-se por dez. O que ocorre com os seus logaritmos?

i) Tente representar o número 0,2 como potência de base 10. Em seguida tente representar 0,84 como potência de base 10. Existem logaritmos de números entre 0 e 1 nesta base? O que ocorre com eles?

j) Tente representar o número 0 como potência de base 10. O que acontece? Existe o logaritmo de 0 na base 10? Tente justificar a sua resposta.

l) Tente representar o número -10 como potência de base 10. O que acontece? Tente calcular o logaritmo de -250 na base 10. Existem os logaritmos de números negativos nesta base? Justifique.

m) procure, baseado neste estudo, escrever com suas palavras o que é logaritmo de um número na base 10 e quando ele existe.

Comentário: podemos observar que há uma grande preocupação em explorar a relação logaritmo-expoente. Além disso, há questões de estimativas (itens "e, "f" e "g"), as quais têm por objetivo observar como o aluno está construindo o conceito. O item de análise de crescimento ("h") permite a comparação da variação exponencial e logarítmica. O item "i" explora a questão do sinal e os itens "j" e "l", a análise da existência do logaritmo. Finalmente, a última questão pede para que o aluno conceitue logaritmo decimal.

Exploração do logaritmo de base 2 e ½

Após o estudo dos logaritmos de base 10, o aluno passa a ter contato com logaritmos em outras bases (no caso, nas bases 2 e ½). Tal conteúdo segue abordagem semelhante à utilizada para a base 10, através do preenchimento de tabelas e exploração de questões de crescimento, de sinal e de existência. Ainda, o aluno realiza o levantamento das semelhanças e diferenças entre os logaritmos estudados.

Exploração das condições de existência e apresentação da definição formal

A última etapa de nosso estudo procurou explorar questões de existência do logaritmando e da base, além de solicitar a interpretação da definição matemática:

"Se $a > 0,\ b > 0$ e $b \neq 1,\ \log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$"

Comentários gerais sobre a aplicação

Discutiremos, neste momento, o comportamento apresentado pelos alunos ante os exercícios discutidos neste artigo.

Em relação ao problema do automóvel, construímos juntos a função que representava o valor do carro após "t" anos. Os alunos conseguiram efetuar todos os cálculos numéricos sem dificuldade, bem como a construção da tabela. No item que solicitava a construção do gráfico, seis duplas localizaram incorretamente o ponto (0,10000), colocando-o no lugar de (0,0) ou de (1,10000), o que denotou dificuldade de trabalhar com o eixo cartesiano. Chamamos a atenção para essa questão, pois os sujeitos da pesquisa trabalham com a representação gráfica de função há mais de um ano (desde a última série do ensino fundamental) e, no entanto, ainda apresentam dificuldade em determinar um ponto no plano. Como esse comportamento ocorreu com a maioria das duplas, questionamos sobre a ênfase dada na escola à memorização, em detrimento da construção do conhecimento.

Outro fato notado em vários momentos da aplicação foi a "tendência à linearidade". Exemplificando: houve um momento em que os alunos queriam utilizar a régua para unir os pontos, alegando que a representação não sairia "perfeita" à mão livre.

Em relação ao item que questionava a existência de um tempo "t" (que faria com que o valor do carro assumisse 5000 reais), inicialmente as duplas não tinham idéia de como obtê-lo. Sugerimos que prosseguissem para a próxima questão (questão 5), que solicitava o uso da função dada na forma algébrica para obter esse resultado. Através dessa função, todos conseguiram obter a equação $0,9^t = 0,5$, justificando que não daria para trazer para a mesma base.

A experimentadora resolveu inicialmente a equação $0,9^t = 0,5$ usando logaritmos e fez a relação do valor encontrado e o intervalo por eles determinado no gráfico. Aproveitou ainda o encontro para relatar os fatos históricos inerentes a este conteúdo. Assim sendo, foi discutido o contexto da época, a criação dos logaritmos por Napier e as tabelas de Henry Briggs. Por fim, foi apresentada a utilidade dos logaritmos usada na época, exemplificada pela resolução do cálculo de $0,71^5 \times 0,34$. A experimentadora comentou que atualmente não há mais a necessidade de usar os logaritmos para esse fim, mas que se pode utilizá-los na resolução de equações exponenciais "não diretas".

Em seguida, os alunos preencheram a tabela sem dificuldades, pois perceberam que a primeira coluna coincidia com os expoentes do dez, ou seja, representava o logaritmo de cada número. A tabela foi preenchida na ordem dada e todos conseguiram estabelecer a relação inversa quando era dado somente o valor da primeira coluna e se pedia para determinar o número. Conseguiram estimar, perceber o crescimento e verificar que os números a, tal que $0 < a < 1$ têm logaritmo "decimal negativo".

No caso do logaritmo de zero, obtiveram a mensagem de erro na calculadora e, assim, concluíram a não existência do logaritmo de zero. Nenhuma dupla conseguiu justificar esta ocorrência estabelecendo a relação com a função exponencial, fato que nos surpreendeu, visto que os alunos já tinham estudado este conteúdo, o que, novamente, nos leva a questionar sobre as escolhas psicopedagógicas da escola, a qual parece priorizar o método de memorização do aluno em detrimento da sua ação sobre o objeto, em variadas situações-problema. Com isso, retomamos o estudo da exponencial, lembrando que o conjunto imagem era formado por números reais estritamente positivos. Para isso, tomamos como exemplo $f(x) = 2^x$ e os alunos observaram, atribuindo valores, que para qualquer valor de "x", as respostas obtidas eram estritamente positivas. Assim, todos conseguiram justificar a não existência do logaritmo decimal de número negativo, escrevendo respostas tais como "o número 10 elevado a qualquer expoente dá um resultado estritamente positivo".

Notamos ainda a fragilidade na concepção de potência. Ao serem questionados sobre o que representava o logaritmo, todos forneciam verbalmente a resposta de que era um expoente. Porém, quatro duplas forneciam como resposta escrita a base elevada ao expoente. Exemplificando, o logaritmo de 100 na base 10 era representado como 10^2 por estas duplas. Voltamos então a discutir o que representava base e expoente de uma potência.

Uma evidência neste encontro foi o fato de que havia uma grande dificuldade em questões que exigiam a construção de textos. Essa constatação foi notada na questão em que pedíamos o conceito de logaritmo. Ao serem indagados verbalmente, todos sabiam explicar corretamente o que era logaritmo. Na escrita, o resultado era sempre inferior ao fornecido verbalmente. Apesar de todos concluírem que "logaritmo decimal era o expoente do 10 para obter um outro número", sete duplas relataram este fato de maneira muito confusa. Exemplificando, apresentaremos o conceito escrito de uma das duplas: "Logaritmo é o expoente da base 10 quando elevado a qualquer número é positiva a resposta" (Dupla Milena e Juliana).

As mesmas dificuldades foram notadas na exploração dos logaritmos de bases 2 e ½. Quanto à interpretação da definição formal, notamos que a simbologia matemática representou um fator complicador do estudo, tendo em vista que nenhuma dupla conseguiu interpretar corretamente tal definição sem o auxílio do orientador.

Instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes)

Como comportamento geral, podemos dizer que os alunos apresentaram dificuldades em conteúdos pré-requisitos para a formação do conceito de logaritmo, tais como potência e função. Também foi fato que a abordagem através de situações-problema constituiu um fator motivador do processo, apesar de questões de interpretação e modelização não representarem tarefas simples para o grupo.

O grupo que realizou a aprendizagem dos logaritmos através de nossa seqüência foi submetido a dois testes: o pré-teste – aplicado antes do estudo e composto de seis questões – e o pós-teste – aplicado após o estudo dos logaritmos através da seqüência de ensino.

Apresentaremos, a seguir, os dois instrumentos diagnósticos para, a seguir, proceder à análise dos principais resultados obtidos pelos alunos.

Pré-teste	**Pós-teste**
1) Calcular: a) $\log_6 36$ b)log1012 2) Resolver em R: $9^x = 729$ 3) Resolver em R: $9^x = 20$ 4) Uma pessoa aplicou 300 reais em um certo investimento que fornece 5% de juros compostos mensalmente. Determine: a) a quantia após 3 meses b) tempo necessário para que a quantia atinja 1200 reais 5) se $\log_2 x = 2{,}8074$, então: a) $1/2 < x < 1$ b) $1 < x < 2$ c) $2 < x < 4$ d) $4 < x < 8$ e) $8 < x < 10$ Justifique a sua resposta 6) O que é logaritmo?	1) Calcular: a) $\log_3 81$ b)$\log_{10} 75$ 2) Resolver em R: $4^x = 64$ 3) Resolver em R: $5^x = 10$ 4) Uma aplicação financeira fornece 4% de juros compostos mensalmente. Supondo que hoje você deposite 80 reais e que não faça mais nenhum depósito ou retirada, determine: a) a quantia acumulada após 3 meses b) o tempo necessário para que a quantia atinja 400 reais 5) se $\log_2 x = 3{,}78$, então: a) $1 < x < 2$ b) $2 < x < 4$ c) $4 < x < 8$ d) $8 < x < 16$ e) $16 < x < 32$ Justifique a sua resposta 6) O que é logaritmo?

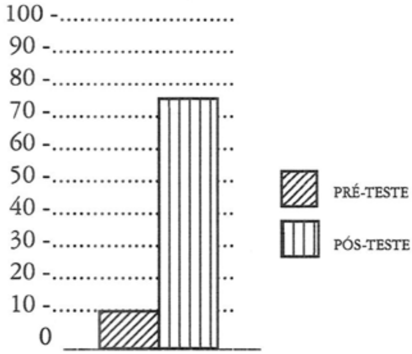
Análise dos resultados

No estudo global, foram realizados cinco tipos de análise, dos quais apresentaremos e comentaremos a análise percentual de acertos geral, por questão, por desempenho individual dos alunos e a análise do tipo de erro que os alunos cometeram nos testes.

Para computar os resultados, consideramos apenas os alunos que participaram de todo o processo, ou seja, do pré-teste, dos cinco encontros da seqüência e do pós-teste, totalizando, neste caso, 13 alunos.

Tabela 1 – Análise do desempenho geral nos testes diagnósticos

Pré-teste	Pós-teste
9,61%	75,96%



O gráfico acima, acompanhado da tabela, mostra-nos que houve um crescimento satisfatório no desempenho dos alunos entre o teste inicial e o final. É importante notar que o desempenho inicial dos alunos foi muito baixo (menos de 10% do total do teste), embora o teste tenha sido elaborado de tal forma a permitir que um aluno que não tenha ainda estudado logaritmo, mas que já tenha visto função exponencial, pudesse acertar até 25% dele. Tal resultado nos faz pensar sobre a formação escolar, até onde os alunos realmente adquirem um conceito a partir das aulas. Por outro lado, o resultado final alcançou um patamar suficiente (ainda usando o parâmetro da escola). Contudo, essa primeira apresentação dos resultados é muito geral e não nos fornece "pistas" suficientes para que possamos entender o comportamento do grupo. Passaremos, a seguir a fazer uma análise mais detalhada dos dados.

Percentual de acerto por questão

A Tabela 2, a seguir, apresenta resultados bastante satisfatórios no desempenho dos alunos no teste final, quando comparado com o teste inicial. De fato, se tomarmos como patamar o percentual de 60% de acerto, podemos notar que, dos oito itens do pós-teste, apenas um não superou tal índice, representado pela questão 4b. Outra informação que podemos extrair dos dados apresentados na tabela, baseadas no percentual de acerto do pré-teste, é que esses alunos não tinham conhecimento anterior sobre logaritmos.

Portanto, do ponto de vista de percentagem de acerto do grupo às seis questões, pelas quais avaliamos a aquisição do conceito de logaritmo desse grupo de alunos, podemos afirmar que houve avanços significativos para todas as questões. Como, entre o pré e o pós-teste, o único contato que esse grupo teve com o conteúdo foi através da seqüência de ensino, é razoável supor que o fator responsável pela formação do conceito foi a seqüência.

Tabela 2 – Análise percentual de acertos do grupo por questão

Questão	**Pré-teste**	**Pós-teste**
1A	0%	76,92%
1B	0%	100%
2	69,23%	92,31%
3	0%	61,54%
4A	7,69%	84,61%
4B	0%	38,46%
5	0%	69,23%
6	0%	84,61%

Analisando o percentual de acerto nas questões da tabela 2, notamos que, na primeira, os alunos apresentaram resultados bastante satisfatórios no pós-teste. Os dois itens dessa questão foram apresentados de forma muito parecida com a do livro didático, isto é, descontextualizado e valorizando a técnica de cálculo. A diferença era que no "A" eles não tinham como usar calculadora e no "B" podiam lançar mão dessa ferramenta tecnológica. O resultado mostra claramente o favorecimento da calculadora (100% de acerto), indicando que esta ferramenta, de fato, tem grande poder, como concluem Gracias e Borba (1998), e que, pedagogicamente, alcança melhores resultados do que as tradicionais tabelas de logaritmos. Contudo, para procedermos com uma análise mais fina desses resultados, resta-nos saber que tipo de erro os alunos do grupo experimental cometeram no item "A" desta questão, o que será feito mais adiante.

A questão 2, que envolvia uma equação exponencial de transformação direta, já apresentou bons índices de acerto ainda no pré-teste e esse índice só melhorou no teste final. As questões 4A e 6 também não foram problema para esse grupo. Gostaríamos de salientar, principalmente, o resultado da questão 6 (11 dos 13 alunos explicaram corretamente o que era logaritmo) porque ao ter sucesso nessa questão os alunos estavam demonstrando que tinham o conceito de logaritmo.

Sentimos ainda lacunas na análise tal como temos até aqui procedido. Precisamos entender, por exemplo, o que houve na questão 3, cujo índice de sucesso atingiu um pouco mais que 60% da amostra e, principalmente, na questão 4B, a qual apenas quatro alunos acertaram. A seguir analisaremos os resultados individuais de cada aluno para poder iniciar uma discussão mais rica sobre a aquisição do conceito e o papel de nossa seqüência no seu desenvolvimento.

Desempenho individual dos alunos

A Tabela 3 nos permite observar que todos os alunos tiveram um crescimento significativo com relação ao seu desempenho nos testes. Devemos levar em consideração, porém, que o ponto de partida desses alunos foi muito baixo, o que pode ser observado no resultado obtido no instrumento inicial, quando o aluno que obteve o maior sucesso acertou apenas duas das oito questões, e quatro alunos não acertaram nenhuma. E mais, a questão na qual houve um maior número de acertos foi a segunda, cujo conhecimento requerido era o de função exponencial.

Este dado poderia levar a uma interpretação precipitada de que o bom desempenho desses alunos no teste final deveu-se, principalmente, ao fato de que eles não sabiam praticamente nada e que, portanto, era praticamente impossível que eles não melhorassem no teste final. Discordamos dessa interpretação porque, tomando como patamar o adotado pela maioria das escolas, notamos que doze dos treze alunos acertaram pelo menos 50% da avaliação, sendo que, destes, nove tiveram um índice de acerto igual ou superior a 75%. Isto implica em dizer que doze dos treze alunos seriam aprovados na escola e, ainda, a maioria obteria uma marca considerada acima da média.

Portanto, do ponto de vista do desempenho individual dos alunos, podemos afirmar que houve avanços significativos quanto ao sucesso desses alunos. Este fato reforça nossa crença de que a seqüência foi um fator importante na formação do conceito de logaritmo.

Tabela 3 – Desempenho dos alunos nos pré e pós-testes

Alunos	Pré-teste	Pós-teste	% de acertos
1	1 em 8 itens	6 em 8 itens	75
2	1 em 8 itens	8 em 8 itens	100
3	1 em 8 itens	8 em 8 itens	100
4	2 em 8 itens	6 em 8 itens	75
5	1 em 8 itens	7 em 8 itens	87,5
6	1 em 8 itens	8 em 8 itens	100
7	0 em 8 itens	5 em 8 itens	62,5
8	0 em 8 itens	6 em 8 itens	87,5
9	0 em 8 itens	3 em 8 itens	37,5
10	1 em 8 itens	6 em 8 itens	75
11	0 em 8 itens	5 em 8 itens	62,5
12	1 em 8 itens	6 em 8 itens	75
13	1 em 8 itens	4 em 8 itens	50

Ainda segundo dados da Tabela 3, notamos que apenas três alunos acertaram o pós-teste inteiramente. Então, alguns questionamentos nos vêm a mente: "se esses alunos adquiriram o conceito de logaritmo, por que ainda aparecem erros após a aplicação da seqüência?", "quais os erros mais freqüentes?", e mais: "que tipo de erro os alunos cometeram antes e depois da seqüência de ensino? Isto é, houve mudança qualitativa no desempenho desse grupo?" Para responder a estas questões precisamos analisar o comportamento desses alunos do ponto de vista da formação e desenvolvimento do conceito de logaritmo, isto é, precisamos analisar o tipo de erro que os alunos apresentaram, tanto na fase do pré-teste quanto no momento em que estavam respondendo às questões do pós-teste.

Análise dos tipos de erros por aluno

Ao investigar sobre os tipos de erros cometidos pelos alunos, mostrados na Tabela 4, notamos primeiramente que no pré-teste o que ocorreu basicamente foram questões deixadas em branco. Uma questão em branco nos permite inferir que o aluno não sabe resolvê-la, mas não nos deixa saber o porquê, nem o que e nem o quanto ele não sabe e/ou entende sobre o conteúdo. Assim, das 104 respostas que poderíamos obter no pré-teste, 82 foram em branco, ou seja, em torno de 81% das questões do teste foram entregues sem nenhuma resolução. Já no pós-teste o número de respostas em branco cai drasticamente para quatro e o número de respostas erradas, para 21 (ou seja, em torno de 20%), o que significa que os alunos, na grande maioria das questões, fizeram algum tipo de tentativa para resolvê-las, mesmo que incorretamente. Serão essas as respostas que estamos interessadas em examinar a seguir.

Tabela 4 – Tipos de erros cometidos nos pré e pós-testes

Alunos	Tipos de erros no pré-teste					Tipos de erros no pós-teste							
	Q1a, 1b, 3 e 6	Q2	Q4a	Q4b	Q5	Q1a	Q1b	Q2	Q3	Q4a	Q4b	Q5	Q6
1	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	C	E_1	E_6	C
2	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	C	C	C	C
3	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	C	C	C	C
4	E_b	C	C	E_b	E_b	E_5	C	C	C	C	C	C	E_5
5	E_b	C	E_4	E_4	E_6	C	C	C	C	C	E_1	C	C
6	E_b	C	E_4	E_4	E_6	C	C	C	C	C	C	C	C
7	E_b	E_2	E_b	E_b	E_b	C	C	C	E_2	C	E_3	C	E_5
8	E_b	E_3	E_4	E_4	E_b	C	C	C	C	C	E_3	C	C
9	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_8	C	E_5	E_2	C	E_b	E_5	C
10	E_b	C	E_b	E_b	E_b	E_8	C	C	E_2	C	C	C	C
11	E_b	E_3	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	E_1	E_6	E_6	C
12	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	E_2	C	E_7	C	C
13	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	C	E_b	E_b	C

Legenda: C = Resposta certa; E_b = Resposta em branco; E_1 =Erro na manipulação algébrica – apesar de usar o procedimento correto, errou nas contas ou na hierarquia das operações; E_2 =Problema na concepção de potência; E_3 =Problema na concepção de função exponencial. Ex: $9x = 729$ ... $9^x = 3^6 \therefore x = 6$; E_4 = Uso do pensamento linear em situações não lineares; E_5 = Erro de expressão na forma escrita. Apesar de resolverem a questão parcialmente e justificarem verbalmente, não conseguem dar uma resposta escrita satisfatória (ver ex. página seguinte); E_6 = Erro na interpretação da questão; E_7 = Erro no não estabelecimento do LOG como ferramenta na resolução de equações exponenciais; E_8 = Erro na técnica de cálculo do logaritmo.

Os erros mais freqüentes encontrados na Tabela 4 foram aqueles relacionados à dificuldade de expressão na forma escrita (cinco respostas do tipo E_5). Esse erro aconteceu em praticamente 25% das respostas erradas e ele é um indicador de dificuldade que não pertence ao conteúdo específico do logaritmo. Se somarmos a isso os erros nas manipulações algébricas (três respostas apresentaram esse tipo de erro no pós-teste), teríamos que mais de um terço das respostas erradas foram em conteúdos outros que não o logaritmo.

Porém, sob a ótica da teoria dos campos conceituais, tudo indica que esses conteúdos estão relacionados, pertencendo ao mesmo campo conceitual. Isto é, são conceitos/invariantes/propriedades que estão presentes nas situações logarítmicas.

Um exemplo do que consideramos como um erro do tipo 5 (E_5):

> Na questão 5 pedia-se para o aluno escolher uma das alternativas que estimava corretamente o valor de x em $\log_2 x = 3{,}78$.
> O aluno 9 respondeu alternativa "d" ($8 < x < 16$), o que estava certo, mas justificou dizendo que "**...pois se nós elevarmos a base a resposta tem que dar o expoente**".

Aqui vê-se claro a dificuldade do aluno em se expressar em linguagem natural e essa dificuldade o leva ao insucesso na resposta, embora tenha, a princípio, respondido corretamente.

Não obstante os erros relacionados acima, chama-nos a atenção os problemas relacionados à concepção de potência (quatro respostas do tipo E_2) e à concepção de função exponencial (duas respostas do tipo E_3 no pré-teste e mais duas no pós-teste). Tal observação vem, novamente, ao encontro à teoria de Campo Conceitual de Vergnaud, já que parece que a potência e a equação exponencial formam, junto com o logaritmo, conceitos de um mesmo campo conceitual. Portanto, problemas na formação desses dois primeiros levaria à dificuldade na construção do terceiro conceito.

Devemos refletir que apesar de atentos às idéias propostas por Vergnaud sobre os campos conceituais, provavelmente não tenhamos dedicado tempo e/ou atividades suficientes para trabalhar esses conceitos conjuntamente com o logaritmo. Tal reflexão nos leva à constatação de que se, por um lado, houve uma lacuna em nossa seqüência, por outro parece claro que aqui há um campo conceitual, o qual merece maior atenção e estudo dos educadores matemáticos.

Por fim, a Tabela 4 nos informa ainda que os alunos superaram sua tendência em limitar seu pensamento para situações lineares. De fato, esse tipo de erro que apareceu em seis respostas no pré-teste desapareceu completamente no pós-teste.

Conclusão

Nossos resultados nos permitem concluir que nossa seqüência didática cumpriu o seu papel de facilitar a formação do conceito de logaritmo. Vale ressaltar que, na maioria dos casos, o sucesso nas questões só não foi maior devido a erros cometidos em outros conteúdos matemáticos, o que evidencia a grande conexão existente entre os assuntos estudados. Essa conclusão nos remete às idéias discutidas na Introdução quanto à necessidade, proposta por Vergnaud, de se pensar não em um conceito, mas em um campo conceitual.

Concluímos ainda que utilizar uma abordagem que parta de situações-problema (tal como sugere Vergnaud), considerando o logaritmo como ferramenta indispensável para a sua resolução (no sentido de Vygotsky), representou uma possibilidade viável para a aplicação em sala de aula. De fato, tendo em vista que utilizamos o horário normal de aula para o desenvolvimento da seqüência e que o material nela envolvido é de fácil aquisição (inclusive financeiramente), acreditamos que não haverá necessidade de grandes adaptações na seqüência para que um educador possa usá-la em sua sala de aula.

Outra conclusão não menos importante é a de que a calculadora representou para nossa amostra uma ferramenta bastante eficaz, possibilitando que o aluno centrasse sua atenção no conceito e não nas técnicas de cálculo. Neste momento gostaríamos de salientar que não defendemos o uso da calculadora indiscriminadamente. Mesmo no desenvolvimento da seqüência houve momentos em que os alunos trabalharam com estimativa do valor do logaritmo e nessa hora a calculadora, obviamente, ficava de lado. Concluímos então que cabe ao professor decidir em quais atividades a calculadora pode representar uma ferramenta eficaz.

Por fim, gostaríamos de deixar claro que a forma que encontramos para introduzir o conceito de logaritmo não tem a pretensão de ser a única ou a melhor maneira para alcançar este objetivo. Porém nos sentimos confortáveis para afirmar, a partir da análise dos resultados, que, para esse grupo, tanto a seqüência de ensino, trabalhando a partir de situação-problemas envolvendo equações exponenciais, como a utilização da ferramenta calculadora, foram certamente elementos facilitadores no processo ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Referências bibliográficas

GRACIAS, T. S. e BORBA, M. C. (1998). Calculadoras gráficas e funções quadráticas. *Revista de Educação Matemática,* (4), 27-32.

CONFREY, J. (1991). "The Concept of Exponential Functions: a Student's Perspective". In: *Epistemological Foudations of Mathematical Experience.* New York, Ed. L. Stefe.

CONFREY, J. e SMITH, E. (1995). Splitting, Covariation and their role in the development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education,* (26), 66-86.

EVES, H. (1983). *An introduction of the history of mathematics.* Saunders – College Pub.

LESTER, F. K. e MAU, T. S. (1993). Teaching mathematics via problem solving. *For the Learning Mathematics*, 13, pp. 8-17, USA.

VERGNAUD, G. (1987). Problem Solving and Concept Development in Learning of Mathematics. *E.A.R.L.I.* (Second Meeting). Tübigen, Earli.

_____(1983). "Multiplicative Structures". In: LESH, R. e LANDAU (eds.), *Aquisitions of Mathematics Concepts and Processes.* New York, Academic Press, pp. 127-174.

_____(1994). "Multiplicative Conceptual Field: What and Why?". In: HAREL, G. e CONFREY, J. (eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. State University of New York Press.

VYGOTSKY, L. S. (1991). *Formação social da mente – O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. Trad. de J. Cipolla Neto e outros. São Paulo, Martins Fontes.

_____(1993). *Pensamento e Linguagem.* Trad. de J. L. Camargo. São Paulo, Martins Fontes.

_____(1997). *The collected works of L. S. Vygotsky.* Vol. II. Problems of General Psychology. New York, Plenum Press.

A Matemática na formação clássico-literária, tornando-se ensino de cultura geral

WAGNER RODRIGUES VALENTE*

Resumo
Este texto tem como objetivo focalizar um momento histórico fundamental da Matemática no Brasil: sua penetração no ensino de cultura geral escolar, no âmbito da formação clássico-literária.
Palavras-chave: história da matemática, matemática escolar, cultura escolar, história do currículo, geometria.

Abstract
This text aims to focus on a fundamental moment of mathematics in Brazil: its penetration in the teaching of general culture, in the scope of the classic-literary formation.
Key-words: *history of mathematics, school mathematics, school culture, history of the curriculum, geometry.*

Preliminares

O ensino secundário sempre foi um ensino de cultura geral. Um ensino desinteressado, de formação do espírito. Essa concepção de cultura geral tem origem remota e data dos gregos: o cultivo do espírito possibilitado pelo ócio, a cisão da teoria com a prática, do pensar com o fazer.

Foi a organização universitária medieval que colocou na faculdade de artes liberais esse ensino de cultura geral. Um vestíbulo de acesso aos cursos especializados e profissionais de teologia, direito e medicina. Logo em seguida os colégios medievais perpetuaram e trouxeram até nossos dias o ensino de cultura geral no secundário.

* PUC-SP.

Para tornar-se ensino de cultura geral, a Matemática precisou penetrar, inicialmente, na formação clássico-literária. Isso quer dizer que transformou-se de um ensino técnico, aplicado, num ensino de formação do espírito, de desenvolvimento do pensar. Este texto tem intenção de analisar a trajetória seguida pela Matemática no Brasil, para tornar-se um ensino de cultura geral.

A formação clássico-literária

A educação humanista clássica é, para dizer sumariamente, um trabalho de formação do espírito. Para que isso possa ocorrer é preciso que sejam desenvolvidas um certo número de qualidades: "a clareza no pensar e na expressão, o rigor no encadeamento das idéias e das proposições, o cuidado da medida e do equilíbrio, a adequação tão justa quanto possível da língua à idéia" como enumeram Chervel e Compère (1997, p. 14).

Durkheim avalia que a obra pedagógica jesuítica foi justamente a de não permitir que a educação humanista clássica, abandonada a si mesma, pudesse "determinar um renascimento do espírito pagão". Assim, a Companhia de Jesus apropria-se da educação humanista clássica e a transforma num "instrumento de educação cristã". Ainda segundo Durkheim, tal procedimento "esvazia as obras clássicas de seu conteúdo positivo, isto é, de seu paganismo, para preservar tão-somente a forma, animando-a de um espírito cristão. O humanismo jesuítico fica condenado ao mais completo formalismo que se pode conceber" (1938 [1990], p. 289).

De todo modo, o meio de desenvolver e formar o espírito é a literatura dos antigos. Através dos ensinamentos das obras greco-romanas torna-se possível a educação humanista clássico-literária que, entre nós, liga-se, por quase dois séculos, direta e exclusivamente aos colégios da Companhia de Jesus.

Vale lembrar, a partir de Leite (1938), que, no Brasil, os colégios jesuítas, depois de um curso elementar, abrangiam os cursos de humanidades, artes e teologia. No que toca ao ensino de cultura geral, poderemos localizá-lo nos cursos de humanidades (de dois anos de duração, ministrados principalmente através do ensino da gramática e da retórica, através do uso do latim) e nos de artes (três anos de duração, com ensino de lógica, física, matemática, ética e metafísica através, sobretudo, dos textos de Aristóteles).

A formação de cultura geral dada nos colégios jesuítas, dominada pelo latim, pouquíssimo espaço deixou às ciências. E, mesmo nesse pouco espaço, é importante ressaltar que tipo de ensinamento era esse. A matemática, a física aristotélica, quando ensinadas, prestavam-se à reflexão especulativa. Mesmo se o objeto de discussão fosse a natureza, o meio físico, não era através da observação e experimentação (como fez Galileu dois mil anos após Aristóteles) que as ciências, e a matemática em particular, revelavam serventia e eram ministradas nos colégios.

Ocupar-se das ciências e da matemática, mesmo de modo especulativo, roubaria tempo importante dos estudos das letras, essas sim consideradas relevantes para a formação do homem. Tal era o pensamento de muitos jesuítas de outros países também, e é significativo citar a opinião de uma importante autoridade francesa, partilhada pela grande maioria dos jesuítas:

> o estudo das ciências especulativas como a geometria, a astronomia e a física é um divertimento vão. Todos esses conhecimentos estéreis e infrutíferos são inúteis por eles mesmos. Os homens não nascem para medir linhas, para examinar a relação entre ângulos e para empregar todo seu tempo em considerar os diversos movimentos da matéria. Seu espírito é muito grande, a vida muito curta, seu tempo muito precioso para se ocupar de tão pequenas coisas (...). (Dainville,1978, p. 332)

Cabe, por fim, perguntar se a Colônia tinha alguma necessidade do ensino de conhecimentos matemáticos em tempos da Companhia de Jesus.

A defesa do território das invasões estrangeiras; as disputas, ao sul da Colônia, com os espanhóis, trazem a necessidade de formação de técnicos e militares com competência para as lides da guerra, para a construção das fortificações que foram edificadas ao longo da costa brasileira.

A Colônia tinha necessidade, sim, dos conhecimentos matemáticos; eram eles fundamentais para a proteção e preservação dos domínios portugueses na instrumentação dos futuros engenheiros e militares encarregados das obras e do domínio da arte da guerra. Apesar disso, melhor seria dizer *sobretudo por isso*, pela possibilidade de utilização prática desse saber, ele não participava da cultura geral escolar de época. Como já se disse, o ensino de cultura geral repele tudo quanto possa ser aplicado, aproveitado como profissão. De todo modo, era preciso ensinar as matemáticas e suas aplicações. Seu lugar de ensino é nas escolas militares, nas escolas de caserna, nas *Aulas de Artilharia e Fortificações* (Valente,1999).

Tal situação é semelhante àquela revelada pela pesquisa do lugar de ensino da geometria, conhecimento tão fundamental aos arquitetos das catedrais dos séculos XII e XIII: não é no interior do ensino de cultura geral medieval, dado pelo *trivium* e pelo *quadrivium* sobretudo, que a geometria era ensinada aos construtores das catedrais. O ensino era dado nas corporações técnicas (Pires,1990, p. 42).

Assim é o ensino de cultura geral: um ensino desinteressado, não profissional. O papel da matemática, da física, dentro da cultura clássico-literária não tem nada de útil, utilizável no meio físico, cotidiano. Constitui-se num ensino menor, pois disputava posição com outros saberes especulativos.

Era no tempo do Império...

Após a Independência, dissolvida a Assembléia Constituinte de 1823, fica organizado o governo monárquico, hereditário e constitucional do Brasil, pela Carta de 1824. O Império passa a ter uma nobreza, mas não uma aristocracia, ou seja, surgem os nobres por títulos concedidos por D. Pedro I, porém títulos não hereditários, isto é, não haveria uma "aristocracia de sangue" (Fausto,1999, p. 150). Uma nobreza, outorgada pelo imperador, que em grande parte ocupará postos no poder Legislativo dividido em Câmara e Senado vitalício. Essa minoria, que concentrará o poder, passará a disputar com o imperador o privilégio de dirigir a nação, forçando-o à abdicação em 1831, é bem caracterizada por Costa (1987, p. 52): homens em sua maioria com mais de cinqüenta anos, alguns portugueses de origem; quase todos com estudos realizados na Metrópole, com experiência anterior de funcionários da Coroa; uma verdadeira oligarquia dirigente do novo país, que se instala no Conselho de Estado, Senado e Câmara dos Deputados.

Será na Câmara e no Senado, desde a Independência, o lugar institucional do debate sobre educação brasileira. É possível dizer que isso perdurou praticamente até 1924, quando foi criada a Associação Brasileira de Educação. A partir daí o país ganha foros específicos para a discussão das questões educacionais.

Um dos primeiros debates sobre educação girou em torno do tema da criação de uma universidade. Obtida a autonomia política, era essa uma questão de ordem: a formação das elites do novo país. Depois de longos debates a respeito da instalação se de duas ou três universidades no Brasil - nenhuma se concretizando - chega-se ao relativo consenso de que é preciso e urgente instalar cursos jurídicos. Não tinha mais cabimento para um país independente formar a sua intelectualidade em Coimbra. Novas e longas discussões ocorrem sobre em que parte do Brasil deveriam eles ser instalados. Em Minas? Rio de Janeiro? São Paulo? Definidos Olinda e São Paulo como locais, é a vez dos debates sobre os estatutos dos cursos. Que formação prévia deveria ter o aspirante aos cursos jurídicos? Essa pareceu ser uma das questões mais agudas das discussões. Em realidade, tratava-se de redefinir o que se entendia por formação geral que o aluno deveria trazer dos estudos elementares para cursar o ensino superior. Estava em discussão a cultura geral escolar.

Antes de ser profissional, ser "doutor"...

No romance *Casa de pensão,* de Aluísio de Azevedo (1979 [1884]), temos bem retratada, na Corte do Rio de Janeiro, as perspectivas para o candidato às chamadas profissões liberais, constituídas a partir de 1808 com a vinda da família real: engenharia, medicina e advocacia. Vamos ao romance:

O Rio de Janeiro era a Paris do Brasil. Fora do Rio, fora da Corte, estavam as províncias. Amâncio, provinciano do Maranhão, desembarca no Rio "para ver se era possível matricular-se na Escola de Medicina. Não negava que se havia demorado um pouquinho nos preparatórios... mas seria dele a culpa?". Por que Amâncio escolheu medicina?

> O medo às matemáticas levara-o a desistir da Marinha e agarrar-se à Medicina, como quem se agarra a uma tábua de salvação, pois o Direito, se bem que para ele fosse de todas as formaturas a mais risonha, não lhe servia igualmente, visto que não estavam disposto a deixar a Corte e ir ser estudante na província.

Nem entravam em cogitação outras alternativas, como as artes, por exemplo. O velho Vasconcelos, pai de Amâncio, tinha uma opinião muito firme sobre os artistas: "uns pedaço-d'asnos!". Vociferava que não se devia perder tempo com estudos para isso. Bastava ter dinheiro que se podia ter "à disposição os artistas que se quiser!". Amâncio matutava que o velho poderia pensar assim também quanto aos médicos e, desse modo, não precisaria ele submeter-se ao martírio dos estudos na faculdade. Afinal, tinham dinheiro. Mas uma voz vinha de seu próprio raciocínio para concluir que a coisa era diferente:

> Não se trata aqui de fazer um "médico", trata-se de fazer um "doutor", seja ele do que bem quiser! Não se trata de ganhar uma "profissão", trata-se de obter um "título". Tu não precisas de meios de vida, precisas é de uma posição na sociedade.

O século XIX consolida culturalmente o *status* de "doutor". Toda família mais abastada quer fazer um *doutor*.[1] Após o ensino de primeiras letras, o passo seguinte para formar um "doutor" é a eliminação dos preparatórios. A longo do século XIX e até as primeiras décadas do século XX serão os exames parcelados, por matérias, que definirão a formação geral do aluno, sua cultura geral, para o ingresso nos estudos superiores. O caso de Amâncio, personagem de Aluísio de Azevedo, é emblemático. Na Corte e na Bahia, as Academias de Medicina; em São Paulo e Olinda, as de Direito; ainda na Corte, as Escolas Militares. Vindos para o Rio de Janeiro, oriundos das mais diferentes províncias, a estudantada buscava a medicina e a engenharia (através da carreira militar). Direito não era a escolha de Amâncio, pois não queria deixar-se estar na província de São Paulo. Na carreira militar (Marinha) havia a matemática...

Serão os "doutores" da engenharia, da medicina e advocacia que tomarão assento nas cadeiras da Câmara e do Senado do Império, além de serem também presidentes de províncias, ministros de Estado", etc. Vejamos como foi sendo formada a classe dos "doutores" imperiais.

---

1 Coelho (1999, p. 98) analisa, para além do filtro social que havia para quem intentasse estudar, todo um rol de taxas, impostos e despesas que os candidatos às carreiras profissionais deviam satisfazer e que implicavam, para as famílias de recursos modestos, enormes sacrifícios com o fim de formar um "doutor" trazendo como resultado, muitas vezes, o abandono do projeto pela metade.

As profissões imperiais e a cultura geral escolar

Qual era a formação geral exigida para o ingresso nos cursos superiores em tempos iniciais de constituição novo país? Vale dizer: que cultura geral era necessária ao futuro engenheiro, médico e advogado?

Figuras de baixo prestígio social, sobretudo até a primeira metade do século XIX, "nossos" engenheiros foram formados através de um espírito livresco e muito diferente dos ingleses ou americanos que construíram as ferrovias, os cais das cidades portuárias e as obras de infra-estrutura de nossas cidades. Procuravam sempre evitar a identificação de seu ofício com as atividades "mecânicas". Ao examinar contratos, ao escreverem pareceres e na fiscalização de obras, resguardavam seu lugar numa sociedade agroexportadora em que pouco espaço havia para a criatividade técnica e para o desenvolvimento de projetos empresariais. Não era através da competência técnica que buscavam prestígio e *status* social para a profissão. Agarravam-se a todo custo à busca dos títulos acadêmicos e à exibição do anel de grau. A maioria era formada por doutores em matemáticas e ciências físicas e naturais (Coelho, 1999, p. 95).

As origens da profissão de engenheiro remontam à formação militar. Um oficial cujo núcleo de estudos centrava-se nas matemáticas. Desse futuro oficial militar exigia-se tão-somente o conhecimento das quatro operações fundamentais da aritmética no momento de seu ingresso na Academia Real Militar. Posteriormente, os primeiros anos de sua formação iriam dar ao futuro profissional todo um curso elementar de matemática, preparatório para o aprendizado das matemáticas superiores. Vê-se bem que a cultura escolar exigida para a formação do engenheiro, do militar no momento de seu ingresso nas Academias era paupérrima.

Do mesmo modo que para o engenheiro, o médico, em tempos de Império, tinha um prestígio social muito precário. Pior ainda, precária era também sua autoridade técnica, cultural. Aqui, também, a autoridade e prestígio de uma ínfima minoria de médicos não advinha de sua competência técnica, dos resultados práticos de seu trabalho, mas de um conjunto de outros fatores como, por exemplo: domínio de uma língua estrangeira – sobretudo o francês – conhecimento das teorias médicas mais em voga na Europa, seleta extração social, rede de relações de pessoas influentes, boa base cultural humanística e, por certo, o diploma de médico (Coelho, 1999, p. 90).

Engenheiros e médicos do Império não se notabilizam por sua competência técnica. Tanto para engenheiros como para médicos, a distinção social de uma minoria absoluta desses graduados, que não raro também eram políticos, faz-se em relação aos colegas de formação nas Academias, por vias que não aquelas exigidas como cultura geral escolar. Sua distinção é de origem familiar principalmente, não se baseia na cultura necessária a adquirir para o ingresso nas Academias Militares, nas Escolas de Medicina. Do mesmo modo que para o futuro engenheiro, ao futuro médico, a cultura que deveria ser trazida para o ingresso nesses cursos era muito pobre. Note-se que o primeiro plano de estudos de constituição do curso de cirurgia na Bahia exigia tão-somente que o candidato soubesse ler e escrever.[2]

O prestígio social do advogado em tempos do Império é algo mais complexo de estimar, visto que qualquer pessoa poderia exercer muitas atividades que hoje são próprias do bacharel em direito. Todo um mundo de práticos sem diploma surge no exercício jurídico por conta de brechas que a legislação sobre o tema possibilitava (Coelho, 1999, pp. 90-91). De todo modo, havia, desde logo, uma classe muito especial de advogados, de bacharéis: os "doutores". Uma minoria que irá compor junto aos "doutores" da medicina e da engenharia, a fração de prestígio social mais elevado e mais numeroso. Coelho (1999, p. 92) pondera que, do mesmo modo que para médicos e engenheiros,

> o prestígio desses homens era função menos de sucessos no exercício da advocacia do que da atividade política, em particular das funções para as quais foram eleitos ou dos cargos que ocuparam na alta administração do Estado.

O mesmo autor, em seguida, sintetiza a ação desses advogados notáveis:

> de seus escritórios, como uma estação inicial de onde embarcavam para a aventura da política, plataforma de baldeação entre dois ramais políticos ou administrativos e estação terminal no poente da vida pública.

2 O Plano de Estudos de cirurgia aprovado em 1° de abril de 1813 foi elaborado por Manoel Luiz A. de Carvalho, conselheiro e médico real e mencionava que teriam direito à matrícula no primeiro ano de curso de cirurgião os alunos que soubessem *ler e escrever corretamente* (Moreira de Azevedo,1881, pp. 88-100).

Qual formação anterior, então, deveria ter o futuro bacharel? Que cultura geral deveria trazer para os bancos dos cursos jurídicos?

A matemática para os futuros bacharéis, a matemática na formação geral

Ao futuro advogado, bacharel dos cursos jurídicos criados em 1827, algo mais complexo era exigido que dos aspirantes a engenharia e medicina: o artigo 8º da Lei de 11 de agosto, que estabeleceu a criação das Academias de São Paulo e Olinda, dizia:

> Os estudantes que se quiserem matricular nos Cursos Jurídicos devem apresentar as certidões de idade por que mostrem ter a de quinze anos completos, e de aprovação da língua francesa, gramática latina, retórica, filosofia racional e moral e geometria.

Como se vê, do conjunto dos conhecimentos solicitados ao ingressante nos cursos jurídicos, a geometria é o elemento mais distanciado das demais disciplinas. Por que razão em meio à formação clássico-literária, dominada pelo latim, ao futuro bacharel era solicitada a geometria? Para responder a essa questão, é preciso voltar à cena dos debates travados na Câmara e no Senado do Império. Lá estão os "doutores" em engenharia/matemáticas, em medicina e advocacia, formados na Europa, sobretudo em Coimbra, e que vão participar ativamente dos debates que darão origem e continuidade à sua casta por todo o Império.

O documento de referência para as discussões sobre os estatutos dos futuros cursos jurídicos tinha sido elaborado pelo Visconde de Cachoeira. Este havia tomado por base os estatutos que vigiam na Universidade de Coimbra. Dentre todos os artigos, o que interessa aqui era o originalmente de nº 7, relativo às condições de ingresso nos cursos:

> Art. 7º – Os estudantes, que se quiserem matricular no 1º ano do curso jurídico, devem apresentar certidão de idade e de aprovação em Gramática Latina, Retórica e Filosofia Racional e Moral; estes exames serão feitos por três professores públicos, presididos pelo decano dos lentes.

O debate envolve, na Câmara dos Deputados, políticos formados pela Universidade de Coimbra como: Antonio Ferreira França e José Lino

Coelho, médicos; Manoel Odorico Mendes, que iniciou estudos em medicina; José Clemente Pereira, advogado. Depois da Câmara, segue a discussão no Senado. Aí, os personagens principais são Joaquim Carneiro de Campos, marquês de Caravelas, advogado por Coimbra e Francisco Villela Barbosa, marquês de Paranaguá, da Academia de Marinha, doutor em matemáticas e professor de geometria.

Ferreira França[3] manifesta-se com relação aos pré-requisitos para ingresso nos cursos jurídicos (Art. 7º) do seguinte modo:

> Eu não tenho presentes esses Estatutos [os da Universidade de Coimbra], porém segundo a minha lembrança, eles tratam a Geometria como uma doutrina indiferente, e nós devemos olhar melhor para esta ciência.

A ele, segue a intervenção de Odorico Mendes[4]:

> No meu modo de pensar, a Geometria deve entrar em primeiro lugar, porque é a lógica prática, e a que habilita a raciocinar com rigor, e por isso não quisera que se deixasse esse exame para o segundo ano, antes propusera que o exame de Latim fosse posterior ao de Geometria [os Estatutos em discussão previam que fosse feito um exame de Geometria no segundo ano, e que ele não representasse um pré-requisito para entrada do aluno nos estudos superiores]. Logo que se sabe ler, escrever e contar, pode-se saber medir e, por conseqüência, pode-se estudar Geometria.

Tendo entrado nas discussões sobre os pré-requisitos para ingresso aos cursos jurídicos, a geometria, de um modo ou de outro, não houve quem lhe refutasse a importância. Passou mesmo a ser posta como contraponto à própria lógica contida no preparatório

3 Antonio Ferreira França nasceu na Bahia em 1771 e faleceu em 1848. Médico e político, formou-se na Universidade de Coimbra em medicina, matemática e filosofia. Escreveu várias obras, dentre elas, *Preleções de Geometria.*

4 Manoel Odorico Mendes nasceu em 1799 e faleceu em 1864. Em viagem para cursar medicina na Universidade de Coimbra em 1824, desiste, retornando ao Brasil para dedicar-se à política e ao jornalismo. Deputado pelo Maranhão e Minas Gerais, foi membro da Academia Real das Ciências de Lisboa. Literato, traduziu várias obras do latim e do grego.

denominado Filosofia Racional e Moral. Assim se pronunciou, na mesma sessão que discutiu o artigo 7°, Lino Coutinho[5]:

> Sr. Presidente, eu não sou em tudo conforme com os Estatutos do Visconde de Cachoeira, e um dos primeiros pontos, em que deles discordo, é este preparatório chamado Filosofia Racional e Moral. Eu me declaro altamente contra semelhante preparatório, nem sei o que seja uma tal filosofia como preparatório, porque não se pode nada disto saber, senão depois de se haver aprendido muitas outras cousas. Nós sabemos por experiência própria o que passamos; por toda essa rotina de escolas chamadas preparatórias ou elementares. Ora, qual é o ensino, que faz com que o estudante tenha hábito de tirar as conseqüências de princípios estabelecidos: Será a Lógica e a Metafísica de Genuense? Não certamente porque eu por ela aprendi e foi-me necessário desaprender cousas tão rançosas para estudar outras melhores em mais provecta idade, havendo perdido um tempo assaz precioso para outros ensinos. Estudem pois os rapazes como preparatórios Gramática Latina, Retórica e Geometria. Não pretendo que eles sejam geômetras gráficos, nem práticos, porque não os quero para medidores de terras, mas quero que por esse estudo exercitem a razão a tirar conseqüências precisas a dos princípios postos.

Lino Coutinho, na continuidade de sua intervenção, contrapõe o ensino escolástico, o ensino herdado pelos seminários, com sua nova proposta, que inclui geometria, ao reafirmar:

> Eis aqui os preparatórios [Gramática Latina, Retórica e Geometria], que se devem exigir da mocidade que vai fazer os estudos maiores, e de mais exata combinação de idéias. O mais é aprender definições, que ninguém entende, e máximas de disputar, que estão hoje acabadas, e que caducaram de uma vez, porque já não existem esses antigos claustros de uma polêmica verbosa, nem fradescas conclusões, onde se tratava mais de enredar com distinções, e subdistinções, do que de descobrir a verdade. Uma vez que um rapaz seja bom geômetra, sabe por princípios tirar conseqüências, isto é, tem a sua razão exercitada, que é o que se procura, para ele poder entrar em estudos maio-

5 José Lino Coutinho (1784-1836) foi professor de medicina na Bahia, bacharel pela Universidade de Coimbra. Era oposicionista do 1° Reinado. Após a abdicação ocupou a pasta do Império por seis meses. Lente de *pathologia externa* na Escola de Medicina.

> res. (...) Façamos pois um plano de estudos preparatórios adequados ao tempo e às luzes e, por isso, substituamos um mais acurado estudo de Geometria a essa Filosofia rançosa que com ênfase se chama - Racional e Moral.

Clemente Pereira[6] retruca que tudo que foi dito sobre o ensino de Filosofia Racional e Moral assim é, pois os compêndios pelos quais se ensina tal disciplina não são bons e há necessidade de outros. Pereira ressalta que adicionaria ainda exames das línguas francesa e inglesa, pois representam meio de "adquirir luzes". Quanto à geometria diz: "A Geometria é indispensável: sem ela como se podem adquirir idéias exatas em Economia Política?"

Seguem as discussões e Lino Coutinho ainda ressalta:

> O estudo da Geometria, por que tanto clamo, é unicamente para exercitar a razão ainda inexperta do rapaz, sem o que ele não poderá avançar nos estudos, da mesma maneira que o homem não poderá caminhar sem ter bem exercitados os seus membros.

Retomando a palavra, Ferreira França sublinha que irá discorrer mais longamente sobre a necessária preparação dos estudantes que intentam ingressar nos cursos jurídicos. Segundo o parlamentar, um estudante, para aprender Direito, não poderia prescindir de ter *suficiente cultura da sensação e da razão*. Ferreira França enumera toda uma formação que inclui letras e ciências. Estas entendidas como cultura da sensação. Defendia o estudo da física, da anatomia: "Como é possível que um homem de letras se entregue ao estudo dos objetos externos e recuse o estudo de si mesmo?". Ao estudo da razão, Ferreira França destaca a lógica e a retórica e assim corrobora com a opinião de Lino Coutinho sobre a importância do ensino da Geometria.

Encerradas as discussões, na Câmara, sobre os preparatórios a serem exigidos, após a votação, ficam definidos os seguintes: língua francesa, filosofia racional e moral, gramática latina, retórica e geometria.

---

6 José Clemente Pereira, português, nascido em 1787, morreu em 1854. Formado pela Universidade de Coimbra em direito, foi senador pelo Pará, ministro da Justiça e da Guerra. Era aliado do imperador.

O artigo sobre os preparatórios ainda seria objeto de estudo no Senado. Ali, o Marquês de Paranaguá, Vilela Barbosa[7], sugere a seguinte emenda: "Proponho que em lugar das palavras 'e Geometria' se diga, 'e do primeiro ano matemático'". Tal proposta foi rebatida e vencida pela do Marquês de Caravelas, que declarou:

> Eu não impugno, Sr. Presidente, que todos os estudos do primeiro ano matemático sejam muito úteis, mas serão eles necessários para os jurisconsultos? O que com estes estudos se pretende é que tenham adquirido uma boa lógica, o hábito de tirar conclusões exatas.

O resultado final de toda a discussão é o texto que mencionamos logo ao princípio, que diz:

> Os estudantes que se quiserem matricular nos Cursos Jurídicos devem apresentar as certidões de idade por que mostrem ter a de quinze anos completos, e de aprovação da língua francesa, gramática latina, retórica, filosofia racional e moral e geometria.

Em 1831, novos estatutos para os Cursos de Ciências Jurídicas e Sociais do Império são aprovados. Está prevista a incorporação às Academias de cadeiras destinadas a ministrar os conhecimentos exigidos para os exames de ingresso.[8] Dentre elas as aritmética e geometria. Ficava também estabelecido que, nos exames de ingresso, para a aritmética, não seriam exigidos conhecimentos das teorias de *progressão* e *logaritmos*. Para a geometria, os conteúdos seriam os de geometria plana. Assim, para a formação do candidato ao ensino superior é dado mais um passo na incorporação da matemática como cultura geral escolar. Aritmética e geometria juntam-se à cultura clássico-literária.

---

7 Francisco Villela Barbosa (1769-1846), Marquês de Paranaguá, nasceu no Rio de Janeiro, entrou para a Academia Real de Marinha em Lisboa, em 1801, como *lente* substituto de matemática. Promovido mais tarde a *lente catedrático*, permaneceu em Portugal até 1822, voltando ao Brasil por ocasião da Independência, sendo nomeado coronel graduado do Real Corpo de Engenheiros. Homem de muitos títulos, foi Senador do Império. Escreveu o didático *Elementos de Geometria,* em 1815 (Valente,1999, p. 98).

8 Eram elas: latim em prosa e verso, francês em prosa e verso, inglês em prosa e verso, retórica e poética, lógica, metafísica e ética, aritmética e geometria, história e geografia.

Em 1832, pela nova organização das Academias Médico-Cirúrgicas do Rio de Janeiro e da Bahia, também são exigidos, aos candidatos para ingresso, conhecimentos de aritmética e geometria (Moreira de Azevedo, 1881, pp. 99-100).

A partir do Ato Adicional de 1834 se efetivaram providências no sentido de dar alguma organização aos estudos secundários. Nascem os liceus provinciais. Tais liceus vão reunir as aulas avulsas espalhadas pelas províncias (Haydar, 1972, p. 22)

Finalmente, em 1837, com intuito de servir de modelo de escolarização secundária para o país, é criado o Imperial Colégio de D. Pedro II. Através do Regulamento nº 8, de 31 de janeiro de 1838, Cap. XIX, vemos as matemáticas figurarem em todas as oito séries do Colégio.

As condições de ingresso no Colégio Pedro II definem praticamente o que se deve entender por escolarização primária em matemática: "contar", ter conhecimento das quatro operações fundamentais da aritmética.

A matemática escolar secundária terá sua referência a partir do programa de ensino do Colégio posto em seu Regulamento: a aritmética era ensinada nos três primeiros anos do curso, seguida pela geometria por mais dois anos e álgebra no sexto ano. Nos dois últimos as matemáticas eram ensinadas sob o título de matemática. Na verdade, tratava-se do ensino da trigonometria e da mecânica.

A matemática na formação clássico-literária

O período histórico dado pelo final da década de 20 e meados da década de 40 do século passado, que inclui a constituição das escolas primárias, a criação dos cursos jurídicos, do Colégio de D. Pedro II, a solidificação dos preparatórios às escolas superiores, o aparecimento dos liceus provinciais, enseja a elaboração e seleção do que deve ser importante em matemática para a formação prévia, pré-universitária, do futuro bacharel.

O caráter da escolarização secundária, por esse tempo, era o de curso preparatório para o ensino superior. Não se tratava de formação do adolescente. Daí as matemáticas de fato ensinadas nos liceus e preparatórios serem aquelas valorizadas nos exames para ingresso ao ensino superior. O futuro bacharel, o adolescente que "eliminou" os exames preparatórios, traz consigo a formação secundária exigida para prosseguir nos estudos superiores.

De um modo ou de outro, os certificados dos exames preparatórios de aritmética, geometria, latim, francês, inglês, retórica e poética, lógica, metafísica e ética, história e geografia atestam a formação secundária do futuro advogado, profissão àquela altura de caráter culturalmente muito amplo, para a qual se dirigia grande parte da elite intelectual do país. E é por força dos exames preparatórios que as matemáticas vão sendo amalgamadas à cultura clássico-literária predominante. Através do caráter de preparatório que caracterizava a escolarização secundária de então, as matemáticas vão deixando de representar um saber técnico, específico das Academias Militares e vão passar a fazer parte da cultura escolar geral de formação do candidato ao ensino superior.

A entrada das matemáticas, sobretudo a geometria, como disciplina a compor o núcleo de estudos do ensino pós-escolarização primária não significa que tenha, por esse tempo, havido alguma modificação substantiva no modo de ser idealizada a formação do candidato ao ensino superior. A geometria, como se viu anteriormente, na longa transcrição dos discursos na Câmara e Senado do Império, era vista como elemento de aperfeiçoamento da razão, uma *lógica prática* como mencionou Odorico Mendes; "uma disciplina que faz exercitar a razão e tirar conseqüências precisas dos princípios", no dizer de Lino Coutinho.

A geometria foi bem aceita como pré-requisito, pois o que era necessário, para ingresso nos cursos superiores jurídicos, nas palavras de Almeida e Albuquerque, na sessão de 26 de agosto de 1826, era que o "estudante tenha a sua razão desenvolvida nos preparatórios". Assim, nada há que indique tenha havido a transição de uma cultura escolar clássico-literária para uma cultura escolar de iniciação científica.

Há, de fato, a incorporação da matemática como elemento ao bem pensar, ao raciocínio preciso e claro. No entanto, será por esse mesmo modo de ser apropriada a matemática à cultura escolar clássico-literária que será possível a valorização do estudo das ciências no currículo escolar. A matemática, nesse caso, é a primeira das disciplinas científicas a cumprir tal papel. É inicialmente a geometria, em meio a disciplinas como retórica, latim, filosofia e línguas que vai permitir a intersecção da cultura escolar humanista-literária, dominada pelo latim, com a escolarização técnico-militar-científica desenvolvida nas Academias. Isso ocorrerá através dos professores militares convocados para o ensino das matemáticas nos preparatórios[9] e liceus como, também, pela difusão e divulgação dos livros escolares de matemática por eles escritos ou traduzidos.

Referências bibliográficas

AZEVEDO, A. (1979 [1884]). *Casa de pensão*. São Paulo, Ática.

CHERVEL, A. e COMPÈRE, M.-M. (1997). "Les humanités dans l'historie de l'enseignement français". *Histoire de l'éducation*, n. 74. Paris, INRP.

COELHO, E. C. (1999). *As profissões imperiais - medicina, engenharia e advocacia no Rio de Janeiro, 1822-1930*. Rio de Janeiro, Record.

COSTA, E. V. (1987). *Da monarquia à república: momentos decisivos*. São Paulo, Brasiliense.

DAINVILLE, F. (1978). *L'éducation des jésuites (XVIe.-XVIIIe. Siècles)*. Paris, Les Éditions de Minuit.

DURKHEIM, E. (1990 [1938]). *L'évolution pédagogique en France*. Paris, PUF.

Enciclopédia e Dicionário Internacional. Rio de Janeiro, W. M. Jackson Editores.

FAUSTO, B. (1999). *História do Brasil*. São Paulo, Edusp/Fundação para o Desenvolvimento da Educação.

HAIDAR, M. L. M. (1972). *O ensino secundário no império brasileiro*. São Paulo, Edusp/Editorial Grijalbo Ltda.

LEITE, S. (1938). *História da Companhia de Jesus no Brasil*. Rio de Janeiro, Civilização Brasileira.

MOREIRA DE AZEVEDO, M. E. (1881). "Memória sobre a constituição da Faculdade de Medicina". In: *Apontamentos históricos*. Rio de Janeiro, Garnier.

PIRES, C. (1990): "Disciplinas integrantes do ensino no século XII". In: *Leopoldianum*, vol. XVII, nº 48. Santos-SP, Unisantos/Editora Universitária.

9 Através do Decreto de 19 de setembro de 1828 é nomeado 1º professor de geometria para os Cursos Jurídicos: o primeiro-tenente do corpo de engenheiros André Cordeiro de Negreiros Lobato (Livro de Correspondência entre a Faculdade de Direito de São Paulo e o Imperador:1828-1839). Certamente, Lobato constituiu-se no primeiro examinador de geometria em São Paulo.

VALENTE, W. R. (1999). *Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930*. São Paulo, Annablume/Fapesp.

VALLADÃO, A. (1977). *A criação dos cursos jurídicos no Brasil*. Câmara dos Deputados/Fundação Casa de Rui Barbosa.

Dissertações apresentadas em 1999

BARBOSA, Lisbete Madsen. *Ensino de Algoritmos em cursos de Computação*. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori.

O objetivo desta pesquisa foi analisar as representações de algoritmos feitas por estudantes em linguagem natural, e comparar essas produções com as correspondentes representações em pseudo-código. Para tanto, foi criada uma seqüência didática cujo foco principal foi a produção de um algoritmo e a sua representação em linguagem natural. Na análise das produções dos alunos, verificou-se a utilização de construtores lógicos de seleção e repetição, com diferenças acentuadas em relação à correspondente representação em pseudo-código. Essas diferenças podem representar um fator decisivo no processo de ensino-aprendizagem.

FREITAS, Ivete Mendes e. *Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno*. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Profa. Dra. Sílvia Dias Alcântara Machado.

Pesquisa de caráter diagnóstico, que busca verificar que sentido os alunos ao final do ensino médio dão às soluções de sistemas lineares parametrizados. Através de questões sobre a relação que estabelecem entre a solução de um dado sistema de, no máximo três incógnitas, e sua representação gráfica. O diagnóstico revela que a maior parte dos alunos não estabelece uma relação entre número de soluções de um sistema e os pontos de intersecções das retas que o representam.

KARRER, Monica. *Logaritmos – proposta de uma seqüência de ensino utilizando a calculadora*. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Profa. Dra. Sandra M. P. Magina.

O objetivo deste trabalho consistiu em investigar se uma seqüência didática significativa para o ensino dos logaritmos, aliada ao uso da calculadora, favoreceria a formação deste conceito. Foi construída uma seqüência de ensino que partiu de situações-problema exponenciais. Assim, o logaritmo foi introduzido como uma necessidade de estudo, assumindo o papel de ferramenta para a resolução desses problemas. A conclusão obtida é a de que a abordagem desenvolvida pela seqüência criada favoreceu a formação do conceito de logaritmo.

LIMA, Rosane Nogueira de. *Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas*. Dissertação de Mestrado. Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

Com o objetivo de estudar métodos geométricos e algébricos de resolução de equações de terceiro grau, o texto apresenta uma seqüência didática que enfatiza o método geométrico de Omar Khayyam, matemático árabe do século XII; a fórmula de Cardano e o dispositivo de Briot-Ruffini para resolver equações cúbicas. Os resultados obtidos mostram que o quadro geométrico dificilmente é utilizado pelos estudantes; que a fórmula de Cardano traz problemas aos alunos que não conhecem números complexos e que o dispositivo de Briot-Ruffini só poderá ser usado quando a equação que se quer resolver tem uma raiz inteira.

MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de. *Demonstração: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino de geometria*. Dissertação de Mestrado. Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

A partir do trabalho com uma classe de 8ª série do Ensino Fundamental, foram analisadas as dificuldades apresentadas pelos alunos submetidos a uma seqüência didática trabalhada como alternativa metodológica para o ensino de geometria. A seqüência didática enfatizou a *demonstração,* considerando, sobretudo, os trabalhos de Balacheff e Duval.

MUNHOZ, Marcos. *A impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos no ensino/aprendizagem da geometria analítica*. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Profa. Dra. Sílvia Dias Alcântara Machado.

Trabalho que realiza um diagnóstico dos termos geométricos mais usados em geometria analítica que causam confusão para os alunos. Dentre os termos analisados, *superfície* foi o que mostrou maior intensidade de impregnação da sua concepção cotidiana. Além disso, a pesquisa revelou que apenas 21% dos alunos compreendem tal noção. O trabalho conclui pela necessidade do uso de algumas estratégias como forma de enfrentar os problemas da dupla interpretação dos termos geométricos. Dentre elas, tornar a ambigüidade uma aliada no ensino.

PEROTTI, Alberto Ramos. *O estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais: uma proposta alternativa de ensino*. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Profa. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos.

A partir da Teoria das Situações de Guy Brousseau, o trabalho tem como objetivo apresentar uma seqüência didática que possibilite aos alunos a aprendizagem da equação da reta com ênfase no conceito de coeficiente angular, calculado pela taxa de variação. Na construção da seqüência didática, três hipóteses foram testadas: o aprendizado será facilitado se o assunto for introduzido por problemas cotidianos; o ponto de partida para o estudo da reta deverá ser a idéia de linearidade; o conceito de coeficiente angular deve ser posto inicialmente como "taxa de variação".

WOERLE, Nilce Helena. *Números racionais no ensino fundamental: múltiplas representações*. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Profa. Dra. Anna Franchi.

Uma pesquisa em sala de aula, a partir de abordagem qualitativa, onde é proposta uma seqüência didática para o ensino concomitante dos números racionais em sua representação fracionária e decimal. O texto busca articular questões teóricas desenvolvidas por Raymond Duval sobre a importância do uso de diferentes sistemas de representação para um mesmo objeto matemático.

Normas para publicação

Pesquisadores interessados em contribuir com publicação nesta revista deverão preparar o texto e enviá-lo segundo as regras que se seguem.

Preparação para envio: uma cópia do texto **em disquete(s)** com os nomes dos autores e sem numeração de página. Outras quatro (4) cópias **impressas**, sendo que uma deve ser idêntica à do(s) disquete(s) e as outras três (3) devem ter numeração de página e não ter os nomes dos autores.

Versão – programa Word 6.0 for Windows, para ser lido em PC.

Formatação

Título – centralizado, em letras maiúsculas e em negrito.

Nomes dos autores – em uma só das vias impressas e no disquete, separar os nomes dos autores do título por um espaço simples entre linhas; cada nome em uma linha e cada um seguido de filiação a uma Instituição ou de titulação. A filiação ou titulação e o nome devem ser separados por vírgula ou um traço. Ex: Maria Dolores, PUC-SP ou Maria Dolores - Mestre em Educação Matemática - PUC-SP.

Resumo – em português e inglês, na língua original do texto, com, no máximo, 10 linhas, espaço duplo, mesma fonte do texto, em itálico, acompanhado de três palavras-chave.

Corpo do texto – Papel tamanho A4
Margem superior e inferior com 2,5 cm
Margem direita e esquerda com 3,0 cm
Fonte Times New Roman,
Tamanho da letra 12 pontos.
Espaçamento entre linhas 1,5 linha
Alinhamento justificado

Referências bibliográficas

Textos de autores brasileiros – citações e notas observando as normas da ABNT em vigor. Bibliografia de referência ao final do texto, seguindo as mesmas normas.

Textos de autores estrangeiros – citações e notas seguindo uma mesma norma, por todo o texto. Bibliografia de referência ao final do texto, seguindo uma mesma regra.

Quantidade de páginas: máximo de 36 páginas.

Impressão: em jato de tinta ou em laser. Páginas impressas só numa face.

Enviar para: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 CEP 01303-050
Consolação - São Paulo - SP
fone: (11) 256-2622 ramal 202
fax: (11) 3159-0189
e-mail: pegedmat@exatas.pucsp.br

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

REVISTA DO PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa publica trabalhos voltados para as linhas de pesquisa: *A Matemática na estrutura curricular e a Formação de Professores; Epistemologia e Didática da Matemática; Tecnologias de Informação e Didática da Matemática.* Também está aberta para outros campos do conhecimento, que venham proporcionar um diálogo com a área, como a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História das Ciências e a História Disciplinar.

INFORMAÇÕES PARA AQUISIÇÃO

Assinatura 1999 – n^{os} 1 e 2 – R$ 20,00
Número avulso – R$ 12,00

. . . .

Anexo cópia do depósito em conta no **Banco Real**, agência 0384, c/c Educ/FCSP nº 3.704.722, para aquisição dos seguintes exemplares de *Educação Matemática Pesquisa:*

❑ nº 1 ❑ nº 2

Nome: ______________________________
Endereço: ______________________________
____
Cep: __________ Cidade: ______________ Estado: __
Telefone: ______________ Ocupação: ______________

Impressão de miolo e acabamento:

Gráfica da PUC-SP
Rua Ministro Godói, 965 – Perdizes – SP
Tel.: 3670-8366

SUMÁRIO

Création d'un groupe de recherche sur l'écrit en 6ème: quelles incidences sur les pratiques des enseignants?
Jean-Claude Rauscher

Procurando um equilíbrio entre o que se pode "ver" e o que se pode "imaginar"
Gilda de La Rocque Palis e Lynne Ipiña

A apropriação da ferramenta logaritmo a partir de situações com exponenciais aliada ao uso da calculadora
Monica Karrer e Sandra Magina

A Matemática na formação clássico-literária, tornando-se ensino de cultura geral
Wagner Rodrigues Valente