EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

v.1 • n.1 - 1999

educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA v. 1 • n. 1

educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA
revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática
puc-sp

Catalogação na fonte - Biblioteca Central / PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós - Graduados em Educação Matemática / Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - n.1 (março de 1999)- São Paulo : EDUC, 1999 - semestral
ISSN 1516-5388

1. Educação Matemática Pesquisa - periódicos. I. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

EDUC - Editora da PUC-SP

Direção
Maria do Carmo Guedes
Maria Eliza Mazzilli Pereira

Coordenação Editorial
Magali Oliveira Fernandes

Revisão
Sonia Rangel

Revisão de inglês
Carolina Penteado Siqueira

Editoração Eletrônica
Waldir Antonio Alves

Capa
Sara Rosa

educ
Rua Ministro Godói, 1213
Cep 05015-001 - São Paulo - SP
Fonefax: (011) 3873-3359 / 262-6003

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

ISSN 1516-5388

Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v.1, n.1, 1999

educ

1999

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 - CEP 01303-050 - Consolação - São Paulo - SP
fone: (011) 2562622 ramal 202 / fax: (011) 31590189
e-mail: pegedmat@exatas.pucsp.br
De segunda a sexta-feira das 10h30min às 12h e das 13h30min às 17h30min

Editorial

A área da Educação Matemática vem crescendo significativamente no Brasil e não encontra, ainda, espaço de divulgação correspondente. Foi a partir dessa constatação que o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP tomou a iniciativa de abrir à comunidade acadêmica um novo periódico *Educação Matemática Pesquisa.*

Na intenção de contribuir com o debate e com o enriquecimento da pesquisa científica da área, a *Educação Matemática Pesquisa* pretende acolher fundamentalmente trabalhos que, de alguma forma, tenham recorte temático das linhas de pesquisa, *A Matemática na estrutura curricular e a Formação de Professores; Epistemologia e Didática da Matemática*; *Tecnologias da Informação e Didática da Matemática,* linhas de pesquisa estas que direcionam o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP. No entanto, esta pretensão, está longe de ser restritiva, pelo contrário, procura manter o diálogo científico entre a Educação Matemática e outros campos do conhecimento como a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia e a História das Ciências e a História Disciplinar com os quais ela guarda relações.

A *Educação Matemática Pesquisa* não tem compromisso com um determinado referencial teórico ou cultural. Assim, as escolhas ou encomendas de material para cada um dos números devem poder abrigar a pluralidade, uma vez que se crê o embate de idéias condição primordial para o desenvolvimento de uma área do conhecimento.

A preocupação com a qualidade do que for veiculado pela *Educação Matemática Pesquisa* está expressa na composição de seu comitê científico e no propósito de ter para cada artigo a aprovação de pelo menos dois dos componentes deste comitê.

Os artigos a serem avaliados deverão ser inéditos e, eventualmente, poderão já ter sido publicados em periódicos de outros países. Os artigos serão apresentados na língua de seus autores, com os resumos, sempre que possível, em francês e inglês além do português.

Esta revista pretende acolher também análises ou relatos de pesquisa, artigos de publicação conjunta de professores e alunos de pós-graduação, apresentações (como ciclo de palestras, conferências...) na forma de resumos científicos e resenhas.

Comitê Editorial

Editorial

The area of Mathematical Education has been growing significantly in Brazil but has not yet found a corresponding publishing space. This is the reason why the Post-Graduation Programme in Mathematical Education of PUC-SP has taken the initiative to open Educação Matemática Pesquisa to the academic community.

Intending to contribute to the debate and to the enrichment of scientific research in this area, Educação Matemática Pesquisa aims at receiving works that are in some way related to the thematics of the research lines: Mathematics in the curricular structure and the Formation of Teachers; Information and Didactics Technologies in Mathematics, which direct the Post-Graduation Programme in Mathematical Education of PUC-SP. However, this pretension is far from being restrictive; on the contrary, it wants to maintain the scientific dialogue between Mathematical Education and other knowledge fields, such as Epistemology, Educational Psychology, Philosophy, History of Sciences and Disciplinary with which it is related.

Educação Matemática Pesquisa is not committed to a certain theoretical or cultural framework. Thus, the choices of material to each one of the issues must be able to shelter plurality, since it is believed that the crash of ideas is the prime condition for the development of a knowledge field.

The concern about the quality of what is published in Educação Matemática Pesquisa is expressed in the composition of its scientific committee and in the intention of having each publishable article approved by at least two of the components of this committee.

The articles to be evaluated must be unpublished and in some cases they may have already been published in journals from other countries. The articles will be presented in their authors' language, with the abstracts, whenever possible, in French, English and Portuguese.

This journal also aims at receiving analyses or research accounts, articles to be published jointly by professors and post-graduation students, presentations (such as cycles of lectures, conferences...) in the form of scientific abstracts and reviews.

Editorial Board

Sumário

Apresentação

Os artigos apresentados neste primeiro número constituem um corpo com as características almejadas, uma vez que o trabalho de Rommevaux trata de visualização geométrica, assunto de crescente interesse e se vincula à linha de pesquisa *Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores*. O estudo histórico sobre Lacroix apresentado por Dynnikov, assim como todo estudo em História da Matemática, norteia as pesquisas em Didática da Matemática ligados à Epistemologia. O artigo de Hoyles investiga o papel do computador no ensino da Matemática, utilizando vários *softwares*. Mais precisamente, este número traz:

Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. Artigo de Marie-Paule Rommevaux, professora de Licée na França (correspondente ao ensino médio do Brasil) e pesquisadora da Didática da Matemática do IUFM. Este artigo foi resultante de suas pesquisas para a tese de doutorado (Universidade Louis Pasteur - Strasbourg I) e já foi publicado no volume 6 dos anais de Didática da Matemática de Strasbourg no mês de setembro de 1998. Rommevaux apresenta as interações entre as representações utilizadas na geometria espacial, explorando as dificuldades encontradas pelos alunos durante a aprendizagem. Muitas escolas brasileiras não trabalham a geometria espacial no ensino fundamental ou médio e a problemática da interação entre as representações no espaço, apresentada neste artigo, vai ser sentida no ensino superior em diversas áreas do conhecimento e, em especial, da Matemática.

Lacroix e a Popularização da Geometria Analítica. Artigo de Circe Silva da Silva Dynnikov, professora do Departamento de Didática e Prática de Ensino da Universidade Federal do Espírito Santo e pesquisadora em História da Matemática. Este artigo traz a apresentação da obra de Lacroix, sua penetração no Brasil e a aplicação da Álgebra à Geometria Analítica segundo Lacroix, por José Saturnino da Costa Pereira. Este último foi um político de projeção e docente proeminente da Academia Militar do Rio de Janeiro, nos idos de 1940. O livro texto de Saturnino foi o primeiro de Geometria Analítica escrito por um brasileiro.

Steering between skills and creativity: a role for the computer? Artigo de Celia Hoyles, pesquisadora do Departamento das Ciências Matemáticas do Instituto de Educação da Universidade de Londres. Este artigo foi preparado para publicação nos anais : *Proccedings of the First* ICMI-East Asia Regional conference on Mathematics Education, Korea, Aug. 1998. Hoyles sugere a incorporação, nos currículos, de atividades em computador especialmente elaboradas com o objetivo de ajudar estudantes a progredir na atividade matemática formal (demonstrações). A autora apresenta, em especial, seu olhar sobre a evolução do modo de produção dos alunos pesquisados, revelando suas atitudes, que nos levam a questionamentos sobre currículos, atingindo aspectos de natureza metodológica do Ensino de Matemática.

Comitê Editorial

Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle

MARIE-PAULE ROMMEVAUX

Resumo

Será que os alunos conseguem aprender a ver tridimensionalmente? O objetivo do presente artigo é responder essa questão. As interações entre as representações utilizadas para solucionar um problema de geometria tridimensional são apresentadas e analisadas conforme estudos históricos e didáticos. Nessa resolução, a importância da identificação de vários planos é avaliada através da complexidade matemática e da complexidade heurística. Variações nessa dupla complexidade permitiram que uma seqüência de aprendizagem fosse construída. Suas três fases e as diferentes representações utilizadas em cada uma delas são descritas abaixo.

Palavras-chave: visualização geométrica. coordenação entre espaço e plano, registro de representação.

Abstract

Can students learn to see three-dimensionally? The aim of the present paper is to answer this question. Interactions between representations used to resolve a 3D geometry problem are put forward and analysed according to historical and didactical studies. In this resolution, the importance of the recognition of various planes is assessed through mathematical complexity and heuristic complexity. Variations in this double complexity allowed us to construct a learning sequence. Its three phases and the different representations used in the interaction during each one of them are described below.

Key words: *geometry visualization, coordenation between espace and plane, representation of register.*

Résumé

Peut-on apprendre aux élèves à voir dans l' espace? C'est à cette question que nous essayons d'apporter une réponse. Il apparaît que les principales difficultés rencontrées dans la resolution d'un problème de géométrie tridimensionnelle se situent dans le discernement des différents plans entrant dans les situations étudiées et représentées. La complexité mathématique, due aux diversese définitions d'un plan, et la complexité heuristique, due aux représentations en perpective des situations tridimensionnelles, ont été évaluées. Leurs interactions sont schématisées par un double indice dont les variations permettent d'analyser les difficultés d'un problème de géométrie tridimensionnelle. Elles nous ont permis de construire une séquence d'apprentissage. La séquence, dont nous détaillerons les trois phases, a été expérimentée et évaluée. Nous donnerons enfin quelques uns des résultats obtenus.

Mots-clés: *visualisation géométrique; coordenation entre 3D-espace et 2D-espace; registre de representation.*

Le travail présenté a pour objet l'étude – du point de vue cognitif – des interactions entre représentations utilisées en géométrie tridimensionnelle.

L'importance de cette partie des mathématiques – que ni les élèves ni les professeurs n'apprécient –, en plus des applications directes qu'elle peut avoir, se situe pour nous dans les interactions entre perception et savoir discursif. Les fréquents changements de registre que cet apprentissage met en œuvre sont pour le développement des connaissances mathématiques *pour tous* un atout certain. Si les figures de la géométrie bidimensionnelle paraissent livrer du *premier coup d'œil* toutes leurs propriétés – ce qui nous le savons n'est pas exact –, tout le monde s'accorde pour reconnaître aux figures de géométrie tridimensionnelle une certaine complexité. Après l'échec fréquent de cet apprentissage le découragement amène généralement la constatation suivante: *il y a ceux qui voient et ceux qui ne voient pas*.

Qu'est ce que cela signifie pour les élèves résolvant un problème de géométrie tridimensionnelle ? Il ne s'agit pas de *voir dans un espace de dimension trois* mais de voir trois dimensions sur une figure géométrique qui n'en a que deux. L'examen des étapes nécessaires à la résolution d'un problème de géométrie tridimensionnelle montre une succession de sélection de plans, résolution de problèmes plans et coordination de ces résultats. *Voir dans l'espace* peut donc se manifester par cette aptitude à discerner les plans sur une représentation non tridimensionnelle.

Comment en est-on arrivé des objets du monde sensible à la géométrie tridimensionnelle et aux représentations de situations spatiales? Une rapide incursion dans l'histoire des mathématiques nous a donné peu de renseignements sur les supports matériels ou visuels utilisés par les mathématiciens créateurs des règles de la géométrie tridimensionnelle. Il faut attendre le XVII^{e} siècle pour trouver un exposé théorique de la perspective parallèle et les véritables théories de la représentation sont dues à G.Monge (1746-1818) dont il ne faut pas oublier qu'il a débuté sa carrière dans un atelier de dessin et de fabrication de maquettes. L'importance des objets matériels, que cette dernière remarque souligne, n'a pas échappé aux chercheurs qui se sont penchés sur cet apprentissage. Nous analyserons le rôle de ces objets dans leurs expérimentations avant de donner les éléments de notre analyse et les détails de la séquence d'apprentissage que nous avons expérimentée.

Les élèves auxquels nous nous sommes adressée sont des élèves de seconde (15-16 ans), sans tenir compte de l'âge ou de la classe, cet apprentissage s'adresse à des personnes qui peuvent *identifier* sur une représentation en perspective parallèle un solide connu, qui connaissent certaines des propriétés de ces représentations – conservation du parallélisme, du milieu etc. –, mais ne peuvent se servir de ces figures pour *traiter* un problème sur la configuration représentée.

Introduction

Pour tenter de comprendre les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle nous commencerons par nous interroger sur les processus mis en œuvre dans la résolution d'un problème relevant de cette partie.

Prenons un exemple:

ABCA'B'C' est un prisme de base *ABC* triangulaire, les arêtes *(AA')*, *(BB')* et *(CC')* sont parallèles. *I* est le milieu de *(BC)* , *I'* est le milieu de *(B'C')* et *M* est un point de l'arête *(AA')*.

a) Déterminer l'intersection de la droite *(MC')* et du plan *(ABC)*.

b) Déterminer l'intersection de la droite *(MB')* et du plan *(ABC)*.

c) Déterminer l'intersection de la droite *(MI')* et du plan *(ABC)*.

d) Montrer que les trois points ainsi trouvés sont alignés sur une droite parallèle à une arête du prisme.

L'intersection d'une droite et d'un plan est un point, figure géométrique de **dimension zéro**. Déterminer cette figure va demander la construction d'éléments de dimension supérieure, au moins un segment – de **dimension un** –, dont il peut être un point. Le plus souvent les points sont définis comme intersection de droites, mais, nous sommes dans un espace de **dimension trois** dont les éléments structurants sont les plans, de **dimension deux.**

Une première difficulté rencontrée par les apprenants déjà familiarisés avec la géométrie "plane" est le changement de dimension des éléments structurants. Les droites deviennent des éléments "incontrôlés" de cet espace dont l'ossature est faite de plans qui ne peuvent être représentés que par des couples de droites ou, des figures fermées particulières rencontrées dans les polyèdres.

Abordons le problème proposé et représentons la situation en perspective parallèle. La figure-source[1] n'est formée que d'un prisme triangulaire dont les sommets et les milieux de certaines arêtes sont nommés. Le texte s'intéresse aux droites *(MC')*, *(MB')* et *(MI')*, cette figure et les données sont représentées ci-dessous:

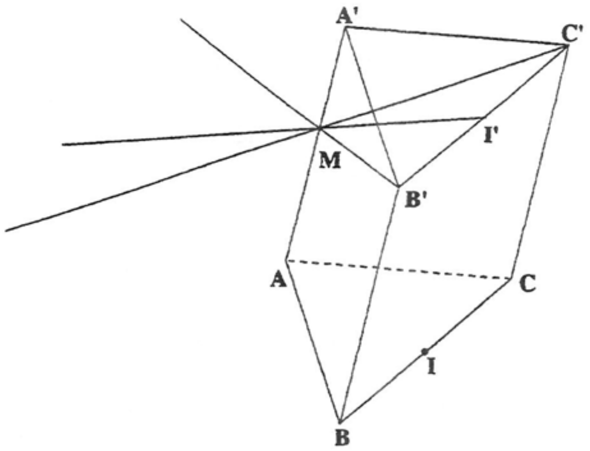


Figure 1: Projection parallèle sur un plan parallèle à *(ACC'A')*.

Cette représentation illustre ce que nous disions précédemment, ce ne sont pas les droites qui permettent de structurer la figure mais les plans, représentés ici par deux triangles et trois parallélogrammes. Répondre aux questions posées va demander une montée en dimension,

1 Nous appelons figure-source la figure obtenue en représentant les figures élémentaires – points, droites, etc. – données dans la question. Cette figure peut être effectivement représentée sur un support matériel ou être imaginée. Elle devra peut-être être complétée pour devenir une figure facilitant l'appréhension opératoire de la situation. Toutes les figures que nous donnons sont des figures géométriques: complexes de traits et d'hypothèses, les ambiguïtés susceptibles d'apparaître dans les représentations en perspective parallèle sont levées par les textes qui les accompagnent. Si certaines hypothèses, dans ce texte, ne sont pas explicitement rappelées, c'est que nous voulons insister sur un aspect perceptif des figures.

il va falloir plonger chacune des droites tracées dans un plan qui la contient et qui coupe le plan *ABC*. Si les plans des faces s'imposent pour deux d'entre elles, une section est à déterminer pour la troisième. Le parallélogramme section est facile à déterminer, ses quatre sommets sont donnés dans le texte. Nous avons représenté ci-dessous la figure livrant la solution.

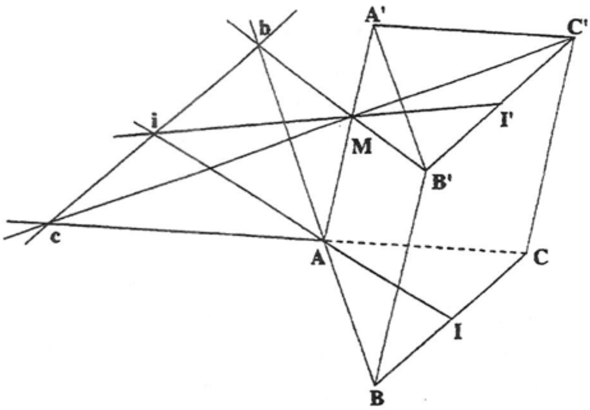


Figure 2

Dans ce cas la figure-source a des qualités heuristiques que les élèves peuvent apprendre à exploiter pour résoudre les problèmes de géométrie tridimensionnelle. Les plans des faces y sont **immédiatement perceptibles** – pour qui cherche à les voir –, le plan *AA'I'I* de section est lui **directement discernable** [2]. Déterminer les points *b, c, i* n'est pas immédiat, il faut en effet **choisir** la droite à prolonger et pour cela avoir présent à l'esprit que la droite d'intersection de deux plans contient tous leurs points communs. Les points *b, c, i* déterminés il s'agit de constater sur la figure qu'ils sont alignés, que la droite qui les porte est parallèle à *(BC)* ou *(B'C')* et, de le démontrer. C'est encore une **montée en dimension** qui va permettre de résoudre ce problème. Plonger les points *MB'C'I'bci* dans un même plan est immédiat, la réponse est donnée par l'intersection par un même plan de deux plans parallèles.

---

2 Voir le § III-2.

Nous avons essayé de situer dans cet exemple les difficultés rencontrées par les élèves lorsqu'ils résolvent un problème simple de géométrie tridimensionnelle. Ceci va nous permettre de mieux expliquer les choix qui ont présidé à la séquence d'apprentissage que nous avons conçue et à l'analyse théorique qui l'accompagne.

Les différentes phases de résolution du problème précédent montrent la succession de *sélection de plans* – face du prisme ou section –, *résolution de problèmes plans* – ici intersection de deux droites – et enfin *coordination des résultats plans* – les trois points trouvés sont alignés. Les problèmes plans rencontrés au début de l'apprentissage sont en général très simples, la difficulté principale est donc la sélection des plans pertinents pour la résolution de ces questions planes. **Quels registres de représentation utiliser, en plus du registre discursif** – indispensable en géométrie – **pour faciliter ces opérations ?**

Les représentations tridimensionnelles sont souvent évoquées et utilisées au tout début de l'apprentissage. Mais, elles ne peuvent remplir que des fonctions de simulation et de communication et non la **fonction de traitement** (*Duval,* 1995b). Cette dernière fonction, essentielle dans la résolution de problèmes ne peut être remplie que par les représentations sémiotiques et en géométrie ce sont les représentations figurales de dimension **deux** qui peuvent venir soutenir le discours. Ces représentations étant de dimension **deux** pour des situations de dimension **trois** nous savons qu'il y a perte d'informations, de plus la production de ces représentations doit obéir à des règles dont on veut favoriser l'apprentissage.

Résumons ce "cercle vicieux": les représentations en perspective parallèle paraissent les plus aptes à remplir une fonction de traitement, comment faire pour que les élèves puissent les utiliser dans ce sens ? Ceci ne paraît pas spontané et cette constatation donne lieu aux appréciations rituelles: *il y ceux qui ne voient pas dans l'espace et ceux qui voient ...* C'est-à-dire ceux qui sont capables de distinguer représentant – bidimensionnel– et représenté – tridimensionnel–, qui conçoivent le feuilletage de l'espace tridimensionnel en plans de différentes directions et sont capables de les discerner sur une représentation bidimensionnelle. La question qui se pose alors est: **Peut-on apprendre aux élèves à voir dans l'espace ?**

Nous avons essayé de trouver dans l'histoire des mathématiques les source d'inspiration des mathématiciens créateurs des concepts de la géométrie tridimensionnelle, centrant notre recherche sur les types de représentation utilisés. La pauvreté des renseignements recueillis nous a conduite vers les utilisateurs des mathématiques, nous avons trouvé là quelques renseignements intéressants. Nous rendrons compte ensuite rapidement de quelques travaux didactiques sur ce sujet en mettant en évidence l'articulation des différents types de représentation en présence. Nous aborderons alors nos propres travaux.

État des recherches

Dans l'histoire

Le premier fait qui ressort de notre "survol historique" (Rommevaux, 1997, p. 45-80) est la distance temporelle qui sépare le corpus mathématique nécessaire aux théories de la représentation, déjà en place dans les *Éléments* d'Euclide, de leur émergence en tant que telles. Le second fait frappant est que cette théorisation a été préparée et mise en place par des praticiens: peintres, tailleurs de pierres...

Les traités mathématiques ne nous donnant pas beaucoup d'indications sur les fonctions heuristiques des éventuelles représentations nous avons regardé ce que les utilisateurs de géométrie tridimensionnelle que sont les constructeurs ou architectes pouvaient nous apprendre. Notre quête a été plus riche dans ce domaine, même si, nous le savons, les artisans, surtout les compagnons, conservaient secrets leurs savoir-faire. Certains écrits comme le *Carnet de Villard de Honnecourt* (XIIIe siècle), nous permettent d'entrevoir ce que pouvaient représenter pour les bâtisseurs de cathédrales certaines constructions et représentations géométriques. Si certaines figures ont, d'après R.Bechmann (*Bechmann,* 1991), un caractère ésotérique d'autres sont proprement géométriques. Nous y trouvons par exemple le moyen de déterminer le centre d'une colonne "que l'on ne voit pas tout entière", celui de "tailler des pendants réglés" etc. Nous avons essentiellement retenu dans ce *Carnet* la présence de gabarits dont l'usage était fréquent à cette époque:

> On appelait *moles* d'une part les modèles des différentes faces des pierres et, d'autre part, également, ce qu'on appelle aujourd'hui

> *gabarits*, indiquant la section et qui servaient pour les profils de moulures, de nervures, de bandeaux, de corniches, de pilastres, etc. (Bechmann, 1991 p.52)

Ces modèles, encore utilisés de nos jours, servent à conserver, ou vérifier, la forme d'une section perpendiculaire aux génératrices d'une colonne ou autre élément de forme cylindrique, ou servent aussi comme des pochoirs pour reproduire des formes dessinées sur un support plan. L'usage que nous en avons fait avec les élèves est plus "symbolique": les gabarits nous permettent de plonger l'espace 2D dans l'espace 3D.

Nous trouvons dans le *Carnet* de Villard de Honnecourt les traces d'une géométrie pratique et appliquée qui va évoluer vers un savoir plus élaboré et discursif avec A., Dürer et Philibert de l'Orme et être finalement théorisé par G., Monge. Esquissons rapidement cette évolution.

La géométrie était une science importante pour les peintres de *Quattrocento* et de la Renaissance, on retient généralement de leurs travaux l'invention de la perspective linéaire, ce n'est pas pour cet aspect que nous en évoquerons deux d'entre eux, mais pour des remarques moins "purement mathématiques".

E. Panofsky (Panofsky, 1987, p. 373) souligne le fait que malgré ses connaissances mathématiques et ses qualités de géomètre, A.Dürer (1471-1528) retient pour la construction des coniques la méthode des projections parallèles. D'ailleurs, comme J. Peiffer le rappelle, il considère comme prérequis à l'étude de sa géométrie d':

> Avoir bien compris comment toute chose doit être tracée dans son plan et dans son élévation, selon la méthode que les tailleurs de pierre pratiquent tous les jours. (*Peiffer,* 1993, p. 11)

A. Dürer dans *Les instructions pour la mesure, à la règle et au compas, des lignes, plans et corps solides*, a le souci de transmettre des connaissances géométriques: pour se faire "bien comprendre" il donne *la procédure et le procédé:*

> Afin que "les jeunes aient sous les yeux et intériorisent ces images", Dürer cherche à représenter graphiquement toutes les figures décrites dans le livre. (Peiffer, 1993, p. 10)

La nécessité de représenter un même objet dans deux **registres sémiotiques** différents est ici manifeste.

Le souci de prendre en compte les **méthodes** utilisées par les praticiens et de leur faciliter la tâche en **retour** est aussi **manifeste** dans certains ouvrages de Piero della Francesca (1415-1492). Le *Libellus de quinque corporibus regularis* (1482) doit son **originalité** au:

> lien qu'il établit entre la géométrie euclidienne et les mathématiques de l'abaque, c'est-à-dire entre les mathématiques des savants et celles des techniciens. Piero est conscient d'être parmi les premiers à s'y essayer: dans sa dédicace à Guidobaldo de Montefeldre, le seigneur d'Urbino où il vivait, il affirme que la nouveauté de son travail réside dans la transposition des "choses" d'Euclide et des géomètres vers les arithméticiens. (Gamba & Montebelli, 1996, p.68)

Mais, le *Libellus* ne contient pas que des calculs [3]:

> Si Piero transpose Euclide dans le domaine de l'abaque, il utilise aussi ses talents artistiques en géométrie. L'inclusion de l'icosaèdre dans le cube est "vue" et "tracée", avant d'être démontrée, à partir de propriétés géométriques. Piero dessine une **perspective à lignes de fuite parallèles** plutôt qu'une perspective à lignes de fuite convergentes, selon le procédé inventé par Brunelleschi et Alberti, et théorisé par Piero dans son propre traité de perspective, parce que **le raisonnement mathématique est ainsi plus clair**: c'est une innovation remarquable. Piero est l'un des fondateurs du dessin technique et géométrique moderne: si l'on compare ses dessins avec les figures géométriques qui illustrent les éditions d'Euclide de l'époque, on constate des différences abyssales. Son œuvre, comme celles d'autres auteurs, reflète la demande d'un nombre croissant de techniciens qui souhaitaient disposer de constructions graphiques non équivoques et fiables. (Gamba & Montebelli, 1996, p. 70)

Cette longue citation montre la nécessité des représentations dans la transmission des connaissances, et met l'accent sur l'intérêt des

---

3 Nous soulignons.

représentations en perspective parallèle. Cet intérêt est celui que nous lui accordons encore aujourd'hui: ces représentations **ne reconstituent pas ce que nous voyons** mais facilitent les traitements mathématiques ou pratiques. Notons que les représentations en perspective parallèle furent explicitement théorisées, mais "à contre-cœur" par le jésuite Jean Dubreuil en 1651 (Rommevaux, 1997, p. 45 et 75)

Autre figure marquante pour notre propos: "le premier architecte français" , Philibert de l'Orme (env. 1510 ? – 1570). Fils d'un maître maçon il perpétue les traditions du passé et les adapte en leur donnant des bases rationnelles et non plus empiriques. Il utilise les mêmes *instruments* que Villard de Honnecourt mais leur donne des fonctions différentes. Les maquettes et les gabarits sont utilisés dans les chantiers pour **anticiper, prescrire et transmettre** [4]. P. Potié souligne ces fonctions dans son ouvrage (Potié, 1996, p. 68 et 69), nous retiendrons ici que Philibert de l'Orme en révélant dans un ouvrage l'art du tracé des gabarits choisit d'exposer la:

> *méthode* propre à faire de son *trait de géométrie* l'outil apte à ***conjoindre théorie et pratique*** en la figure unique de son art stéréotomique. (Potié, 1996, p. 91)

La stéréotomie et le tracé des gabarits nécessitent une virtuosité très grande dans l'art du discernement des plans et du changement de plans. Virtuosité dont fait preuve Philibert de l'Orme, particulièrement dans la construction de la trompe d'Anet. Il a exposé cette construction dans l'un de ses traités.

> Afin de valoriser cette leçon, il offre ensuite au lecteur la seule vue en perspective présente dans le traité. On remarquera au passage l'étonnant manque d'intérêt de Philibert de l'Orme pour une discipline géométrique voisine de l'art du trait. Il est possible qu'il ne maîtrisât pas suffisamment la perspective pour l'employer couramment. Il est possible également qu'il n'en ait pas eu l'usage,

4 La géométrie des constructions, la confection des maquettes que l'on retrouve dans de nombreuses *Maisons de l'œuvre* de cathédrales, renvoient à une situation pratique: les unités n'étaient pas universelles et les chantiers duraient plusieurs décennies. Il était nécessaire de laisser aux successeurs des représentations utilisables.

> **préférant ses maquettes au savoir-faire des peintres.** (Potié, 1996, p. 91)

Théorie et pratique ont à partir de cette époque de plus étroites relations, comme nous allons rapidement le montrer en évoquant l'œuvre de G. Desargues (1591-1661) et de G. Monge (1746-1818). Nous retiendrons de Girard Desargues, dont le nom est attaché à la géométrie projective, qu'étudiant les techniques graphiques utilisées dans différents domaines pratiques: perspective, taille des pierres, gnomonique, il:

> avait réussi à discerner clairement les principes géométriques qui servaient de base à ces différentes techniques. Et, tandis que les épures de la coupe des pierres l'amenaient à pressentir, après Dürer et avant Monge, les procédés de la géométrie descriptive, la perspective pratique et la gnomonique le conduisaient à étudier, d'une façon rigoureuse et approfondie, les propriétés théoriques de la perspective géométrique. (Taton, 1951, p. 95)

Terminons cette partie historique en évoquant la carrière de Gaspard Monge, créateur de presque toutes les méthodes utilisées en géométrie tridimensionnelle, qu'elles soient graphique – géométrie descriptive – ou symboliques – géométries différentielle et analytique. B.Belhoste et J. Sakarovitch insistent dans leurs articles (Belhoste, 1989 ou 1997), (Sakarovitch, 1995) sur la formation technique et pratique de ce futur mathématicien.

> À l'école de Mézières, il a commencé comme "artiste": **il dessine, coupe des pierres et des bois et prépare des modèles en plâtre à la gâcherie** ; son habileté est remarquable. **Toute sa vie il conservera ce sens du concret** qui le rattache au monde de l'échoppe et de l'atelier dont il est issu. (Belhoste, 1989, p.67)

G. Monge saura théoriser ces pratiques et essentiellement celles de la taille des pierres:

> La géométrie descriptive, comme la géométrie différentielle de Monge, emprunte à la taille des pierres sa définition des surfaces, ou plus exactement donne une définition théorique de la notion

de surface qui dérive directement de la manière dont celles-ci sont obtenues par le tailleur de pierres. (Sakarovitch, 1995, p.86)

Nous avons essayé de donner ici quelques éléments à l'appui de ce que nous affirmions au début:nous trouvons dans les chapitres XI et XIII des *Éléments* les théorèmes essentiels en géométrie tridimensionnelle, les théories de la représentation s'appuyant sur ces théorèmes ne sont apparues que par l'intervention de praticiens: peintres épris de géométrie, constructeurs, architectes, tailleurs de pierres, dessinateurs.

L'apprentissage de cette partie des mathématiques ne devrait-il pas lui aussi prendre en compte l'interaction entre théorie et pratique ?

Ce sont ces interactions que nous avons essayé de mettre en évidence dans les études didactiques consacrées à l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle que nous allons évoquer maintenant.

Dans la didactique

Le projet des différents auteurs est toujours le même: trouver un chemin facilitant le franchissement des étapes d'un parcours allant de l'espace sensible qui nous entoure -tridimensionnel – à l'espace du dessin – bidimensionnel – qui seul autorise les traitements ceux-ci permettant, en retour, d'appréhender l'espace géométrique tridimensionnel et ses propriétés. Le cheminement historique que nous avons esquissé à grands traits montre que le chemin est long. Il va se construire, pour un individu, tout au long de la découverte de l'espace sensible et de la géométrie. Nous avons retenu dans les travaux sur ce sujet certaines études marquant les différentes étapes de cette initiation. Notre choix a été guidé par les fonctions que les auteurs attribuaient aux types de représentations en présence et à l'étude de leurs interactions.

Donnons des exemples de ces travaux en prenant comme fil conducteur l'âge des apprenants.

Lorsque les enfants sont à l'école maternelle ou primaire, les expérimentations utilisent des objets matériels qui seront dessinés – modèle à représenter – mais aussi **manipulés** pour résoudre de petits problèmes. La **vue** et le **toucher** sont sollicités, ces deux sens vont permettre la "naissance de la fonction symbolique des représentations". Les représentations, analogiques dans certains cas, non analogiques dans d'autres, varient suivant les tâches et les moyens graphiques dont disposent les enfants.

Si J. Caron-Pargue s'intéresse aux différents modes de codage mis en œuvre par les enfants, étudie leurs évolutions suivant l'âge et la tâche – avec ou sans manipulation de l'objet représenté – (Caron-Pargue, 1981 et 1987), d'autres expérimentations comme celles de A. Bessot et M. Eberhard (Bessot & Eberhard, 1987a et 1987b) vont jouer sur les tâches et les objets pour faciliter l'émergence d'un certain type de codage, en l'occurrence le repérage orthogonal de la géométrie analytique.

Nous retiendrons de ces études les apports positifs et les obstacles dus à ces manipulations. La citation suivante a accompagné tous nos travaux:

> Manipuler, c'est d'après le dictionnaire, "remuer, déplacer, faire fonctionner un objet" ; et par là même, l'explorer, le transformer. Mais on peut concevoir une manipulation qui ait lieu de façon médiate, sur des substituts de l'objet. Nous qualifierons la première de "matérielle" et la seconde de "symbolique". La **manipulation matérielle** entraîne un certain afflux d'informations vers le sujet; mais ces informations seront-elles toujours adéquates à la tâche? Cet afflux va-t-il entraîner des conséquences au niveau de la sélection, de l'organisation et de la réorganisation des informations? Dans la **manipulation symbolique**, le substitut filtre les informations de telle ou telle façon suivant sa nature; ce filtrage, s'il est approprié, peut constituer un apport économique intéressant pour le sujet. Mais d'autre part, le substitut de l'objet véhicule lui-même des informations qui lui sont propres, et dont l'articulation avec celles qui proviennent de l'objet peut être souhaitable ou non suivant la nature ou le but de la tâche à accomplir. (Caron-Pargue, 1981, p. 7-8)

Trois tâches sont primordiales dans cet apprentissage: prendre toutes les informations, les organiser et surtout **en abandonner**. Il y a là une question de choix qui ne peut être résolue de façon unique. Nous voyons d'ailleurs que l'âge[5] n'est pas dans ces cas là déterminant et que l'adéquation du traitement de la représentation à la tâche doit s'apprendre.

---

5 Voir dans (Rommevaux, 1997, p. 122-123) les résultats que nous avons retenus des travaux de R.Baldy avec des adultes en formation.

S'adressant à de très jeunes enfants les expérimentateurs essaient d'étudier les différents codages qu'ils mettent "spontanément" en œuvre pour traiter les problèmes proposés. Dans les expérimentations que nous allons évoquer maintenant il y a une intention d'enseignement qui ne figurait pas dans les expérimentations précédentes. Les tâches de communication d'assemblages de cubes proposées vont obliger les élèves à transmettre une information complète, ces tâches vont faire apparaître des représentations non analogiques – prise en compte d'un plan de référence et codage numérique. Jouant sur les variables cubes accrochables ou non-accrochables et sur le nombre de cubes à la disposition des élèves, A. Bessot et M. Eberhard vont essayer de les conduire de la manipulation des cubes, à des représentations graphiques non normalisées[6] et à un repérage symbolique. Elles constatent, au cours du déroulement de ces expérimentations[7] que le référentiel évolue et tend à **se détacher du sujet** dans la succession des situations-problèmes. Ce qui leur permet,

> en jouant sur la situation de communication (et sur des familles de polycubes), d'envisager une suite de situations-problèmes où l'élève construise, comme solutions, des représentations graphiques non normalisées pour aboutir à un repérage dans l'espace faisant intervenir trois coordonnées: ce repérage nécessite un détachement du référentiel par rapport à l'objet lui-même, dernier passage du graphique au symbolique. (Bessot & Eberhard 1987a, p. 70)

Nous retiendrons de ces expérimentations l'usage fait des objets matériels qui gardent le statut central qu'ils peuvent avoir dans la vie industrielle ou artisanale. Leur manipulation est motivée par les enjeux de la situation et nous ne trouvons pas dans ces articles certaines des considérations qui en font des objets d'étude mathématique peu prisés.

6 Une représentation normalisée très présente dans notre environnement: la perspective est quelquefois utilisée par les enfants, mais aussi bien J.Caron-Pargue que A.Bessot et M. Eberhard soulignent sa non-maîtrise et son peu de spontanéité dans les productions des enfants.

7 Celles-ci ont été faites avec des élèves différents, de l'école primaire au collège de 1982 à 1987.

Nous retiendrons également l'importance qui est donnée à deux de nos sens: la vision et le toucher[8].

Il faut néanmoins qu'en tant qu'"êtres infiniment plats" [9] nous apprenions à représenter sur un plan les solides tridimensionnels. C'est en général au collège – entre 11 et 15 ans – que se place cet apprentissage. C'est aussi à ce moment là que la contradiction qui le sous-tend apparaît de façon plus aiguë. Comment initier les élèves à ces représentations sans donner les règles qui les justifient et permettent de les interpréter ?

Deux activités essentielles sont expérimentées: l'exécution de représentations en perspective parallèle – de l'objet au dessin – et la "lecture" de représentations de même type – du dessin à l'objet. L'objectif est de pouvoir aller d'un dessin de l'objet à un autre dessin de l'objet sans le passage par l'objet matériel lui-même.

L'équipe dirigée par G.Audibert a beaucoup travaillé dans ce domaine. Partant d'observations faites au travers des problèmes "FIL" et "SEC" les auteurs ont constaté que la perspective cavalière paraissait la mieux adaptée aux élèves pour traiter les problèmes de géométrie euclidienne et l'objectif de leur travail a été de mettre en place une séquence d'apprentissage de cette technique de représentation.

Dans le paragraphe précédent nous avons noté qu'historiquement cette remarque avait été faite. Les auteurs s'attachant à cette question qu'elle soit scolaire ou technique reconnaissent aux perspectives parallèles des qualités qui facilitent les traitements géométriques (Comar, 1994, p. 59). Mais, il ne faudrait pas suggérer que cette représentation reproduit notre "vision" de l'objet représenté, elle n'en est qu'une *image*:

> S'il n'existe aucune solution "exacte" pour fixer l'espace sur un plan, c'est que toute image – même fondée géométriquement – transforme les choses ; elle en privilégie certains aspects. (Comar, 1994. p.82)

---

8 Nous insistons dans (Rommevaux, 1997 p. 74-75 et 91-94) sur l'importance du toucher dans l'appréhension des formes tridimensionnelles.

9 Gaston Julia évoquant l'œuvre de Louis Antoine, géomètre qui venait de disparaître, déclarait en 1971: "*Tout ce que l'on peut prévoir comme relevant du bon sens est exact dans le plan, et Antoine en donne le premier, une démonstration rigoureuse, mais est toujours faux dans l'espace à plus de deux dimensions. Notre intuition géométrique est surtout celle d'êtres infiniment plats.*" (Nordon, 1992, p.7.)

Le fait que la perspective parallèle est une projection sur un plan et non une reproduction de l'image visuelle que l'on a de l'objet ne nous paraît pas suffisamment prise en compte dans l'apprentissage de ces représentations. L'évocation de la vision crée des confusions entre représentant et représenté qui sont très résistantes: nous avons eu quelques difficultés à faire admettre à des professeurs que l'on pouvait représenter un cube avec un *coefficient de réduction* de 2 [10], et qu'un parallélépipède quelconque pouvait avoir la même représentation en perspective parallèle qu'un cube (Rommevaux, 1997, p. 33).

Les élèves de cinquième qui, à Montpellier, ont suivi la séquence PC (Bonafe, 1991) n'ont pas réussi à surmonter ces obstacles: il nous semble que l'introduction de l'objet *à dessiner*, le fait de représenter des lignes *cachées*, créent des différences de traitement entre objet mathématique et objet matériel que les élèves ont des difficultés à analyser. Un autre facteur intervient aussi, que nous avons souligné dans nos expérimentations et que souligne également F. Bonafe: **le temps.**

L. C. Pais (Pais, 1991) s'est, sous les mêmes hypothèses de départ, intéressé à la représentation des corps ronds. La lecture de ces travaux, et tout particulièrement de l'analyse *Problème SEC*, fait e par A.Chevalier (Chevalier, 1989) nous paraît mettre en évidence deux faits importants: malgré la présence d'un objet matériel les élèves les plus jeunes[11] ont des difficultés à distinguer représentant et représenté et, nous le constatons dans toutes les expérimentations précédentes: représenter ou déterminer la forme d'une section est un problème très difficile à résoudre car on ne peut que rarement découvrir sa forme en manipulant l'objet matériel.

En conclusion, il semble que les élèves de collège peuvent apprendre à représenter de façon "conventionnelle" les solides en appliquant ce que F.Bonafe appelle "l'algorithme de la construction", ils peuvent aussi **reconnaître** sur une représentation un solide simple. Mais, résoudre des problèmes et tout particulièrement utiliser des sections demande plus de maturité et un apprentissage spécifique faisant peut-être intervenir des maquettes. La fonction donnée aux maquettes

10 Évidemment le terme est mal choisi!

11 Voir les études de R. Baldy signalées précédemment qui montrent pour les adultes les mêmes différences.

dans les expérimentations concernant les élèves de collège ne nous paraît pas clairement définie: ni simulation, ni illustration, ni source d'informations puisque certaines sont "grossièrement" construites, d'autres opaques alors que les objets que l'on étudie sont transparents. Les auteurs semblent craindre que les élèves ne puissent s'en détacher et en font volontairement des objets à négliger.

Les études historiques et certaines études techniques montrent cependant que ces objets peuvent avoir, pour la compréhension de l'espace réel ou virtuel, des fonctions importantes: fonction heuristique par les simulations qu'elle autorise, fonction de vérification – utile –, mais qui ne peut intervenir que lorsque le problème est résolu. Les deux expérimentations dont nous allons rendre compte maintenant leur donnent un rôle beaucoup plus important.

B.Parzysz dans ses travaux (Parzysz, 1989 et 1991) se préoccupe tout d'abord de *l'encodage et du décodage* des dessins. Il analyse les représentations des manuels, les dessins d'objets – cubes ou pyramides squelettes [12] – faits par des élèves au cours d'enquêtes. Une seconde phase de ses enquêtes consiste à proposer aux élèves des représentations et à leur demander de les interpréter. L'auteur constate, et ceci se retrouve dans les études d'autres chercheurs, que les élèves réussissent mieux en *décodage* qu'en *encodage*. L'analyse précise de ses enquêtes basée sur la mise en évidence du conflit *voir/savoir*, a permis à B. Parzysz d'élaborer une ingénierie didactique qu'il a expérimentée dans une classe de Seconde et de Première scientifique. Nous retiendrons de ses expérimentations l'usage d'une maquette adaptable aux tâches proposées: les études d'ombres. Ombre au flambeau qui matérialise une projection conique et ombre au soleil qui elle, matérialise une projection parallèle. La maquette utilisée est posée sur le bureau du professeur: elle a une *fonction de simulation* – l'ampoule de poche placée en haut du " flambeau" n'est pas allumée – elle sert au professeur ou à un élève à trouver, expliquer ou vérifier une solution. Il s'agit dans cette phase de l'apprentissage de déterminer l'ombre d'un cube squelette dans différentes positions de l'objet ou de la source lumineuse. Les règles de la projection sont alors découvertes puis institutionnalisées. Cette compétence acquise les élèves vont pouvoir poursuivre l'étude de l'espace. Pour les élèves de seconde,

12 Réduits à leurs arêtes.

des difficultés persistent au niveau du passage de la représentation à l'objet de l'espace et la différenciation entre représentant et représenté n'est pas encore stable.

Le rôle, dans toutes ces expérimentations, des objets tridimensionnels ne nous paraissait pas suffisant. Pourquoi ne pas leur donner dans la construction du savoir mathématique l'importance qu'ils peuvent avoir pour certaines autres activités pour lesquelles:

> Le substitut représentant contrôle les actions et celles-ci par leurs effets modifient la connaissance que l'on a de l'objet représenté. (Bresson, 1989, p. 936)

Il nous fallait tout d'abord savoir si, comme le craignait la plupart des expérimentateurs, les élèves "lisait tout sur la maquette": c'est à cette question que l'observation faite en 1989 (Rommevaux, 1991, p. 85-123) nous a permis de répondre. Nous avons pour cette première expérimentation étudié en détails les "capacités heuristiques" données à un objet-maquette par la matière dont il est fait. Les objets tridimensionnels ne pouvant constituer un registre sémiotique, nous voulions que les maquettes proposées aux élèves possèdent presque toutes les possibilités qu'offre une représentation d'un tel registre: permettre la fonction de traitement.

Un objet creux – une surface – en acétate transparent permettant le dessin, les vérifications par transparence, et autorisant les changements de points de vue, nous a paru la forme la plus apte à remplir les contraintes imposées. Regarder un tel objet peut même suggérer une représentation en perspective parallèle: toutes les arêtes du polyèdre représenté sont visuellement accessibles et les "arêtes cachées" sont plus *pâles* que les arêtes visibles. Nous n'avons pas utilisé cette possibilité qui, comme nous l'avons vu précédemment, ne constitue pas une approche efficace de la représentation en perspective parallèle.

L'objet que nous avons présenté aux élèves pour cette première observation avait toutes les qualités possibles: bien construit, conforme aux données du texte, permettant les mesures, le dessin, la vérification par transparence. L'énoncé demandait d'étudier l'évolution du périmètre des sections *horizontales* d'un cube suspendu par une diagonale *verticale*.

Nous avons été obligée de constater que, si la maquette jouait un rôle très important dans la phase heuristique du problème, les élèves n'utilisaient pas toutes les possibilités que donnait l'objet et, que les difficultés qu'ils rencontraient se situaient dans l'impossibilité dans laquelle ils étaient de concevoir la variabilité des directions de plans et celle des sections d'un cube. La, remarque de P. Cartier est toujours d'actualité pour les débutants en géométrie tridimensionnelle:

> La vision fine de l'espace est délicate: qui d'entre nous n'a pas été surpris la première fois qu'on lui a montré que l'intersection d'un cube et d'un plan pouvait être un hexagone régulier? (Cartier, 1991, p. 12)

Dans cette phrase, que nous citons souvent, le mot <u>montré</u> illustre tout à fait les intentions qui sont à l'origine de l'apprentissage dont nous allons décrire les intentions et le déroulement dans les paragraphes suivants.

Après avoir mis en évidence les différences importantes existant entre les figures illustrant des situations bidimensionnelles et celles illustrant des situations tridimensionnelles, nous donnerons les principaux éléments de l'analyse qui nous a permis de mieux comprendre la spécificité de la géométrie tridimensionnelle. Plus encore qu'en géométrie plane, les interactions entre représentation figurale et texte doivent être maîtrisées et nous mettrons en évidence deux indices de complexité qui, pour les questions premières de la géométrie tridimensionnelle nous ont guidée dans la conduite de l'apprentissage et dans la progression des questions de l'évaluation finale.

Le discernement des plans: une entrée en géométrie tridimensionnelle

Éléments d'analyse heuristique des figures géométriques

Considérons ci-dessous deux figures géométriques [13]: celle de droite représente un rectangle, ses diagonales et le segment joignant les milieux

13 Nous appelons figure géométrique toute représentation figurale d'une situation mathématique donnée: c'est un complexe de lignes et d'hypothèses. (Duval, 1995b)

de deux côtés; celle de gauche représente la projection parallèle du cube *ABCDEFGH* sur un plan parallèle au plan *BDHF*, et certaines figures liées à un problème.

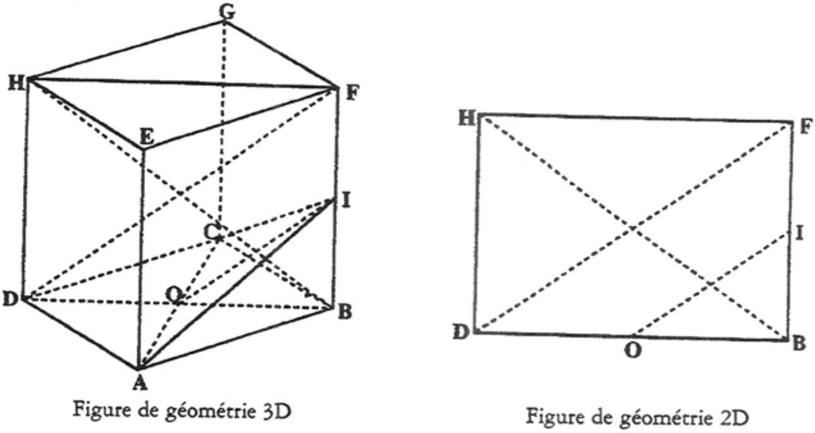


Figure 3

Quoique dans le même registre de représentation sémiotique, il existe des différences importantes entre ces figures. Pour bien comprendre ces différences il faut distinguer: le support de la représentation (feuille de papier, écran d'ordinateur, tableau), le ou les plan(s) de référence, le ou les plan(s) propre(s) de la situation géométrique représentée. À partir de ces distinctions, deux différences apparaissent entre ces représentations.

La première différence est dans les éléments de référence représentés:

– en géométrie bidimensionnelle, le support de la représentation, le plan de référence, le plan de la situation coïncident.

– en géométrie tridimensionnelle, l'un des plans de référence peut coïncider ou ne pas coïncider avec le support de la représentation, peut également coïncider ou ne pas coïncider avec un plan de la situation géométrie étudiée.

La seconde différence est dans la nature du lien entre l'objet et sa représentation:

– en géométrie bidimensionnelle on représente les objets mathématiques que l'on veut étudier et toute modification sur la représentation peut immédiatement être interprétée comme une modification sur l'objet lui-même;

– en géométrie tridimensionnelle, ce sont les **plans de référence** qui sont essentiellement représentés et éventuellement certains plans de la situation. Discerner ces différents plans: support de la représentation, plans de référence, plans pertinents pour la situation est une opération qui doit précéder l'identification des objets mathématiques dans ces plans.

La représentation du cube ci-dessus illustre cette complexité: le plan de la représentation "coïncide" avec un plan du solide: le plan du rectangle diagonal qui, dans le problème proposé est aussi un plan pertinent pour la situation étudiée. Les plans de référence sont les faces du cube[14].

Discerner les plans sur une représentation en perspective d'une situation spatiale est, nous le voyons, difficile. Une telle figure ne livre pas immédiatement les pistes pour procéder visuellement à un certain travail de discrimination. Il faut donc savoir *a priori* ce que l'on cherche, ce que l'on *devrait voir*.

Comment sont définis les plans que l'on cherche? Nous trouvons plusieurs définitions contrairement aux droites, qui elles, sont définies par deux points distincts. Trois points distincts non alignés ne sont pas la seule façon de reconnaître un plan qui peut aussi être défini par une paire de droites sécantes ou parallèles. Dès lors, si *voir* en géométrie plane que trois points sont alignés est simple – il suffit d'avoir une règle –, *voir* – tout simplement – sur une représentation en perspective que quatre points sont coplanaires est beaucoup plus difficile. Nous allons maintenant examiner ce problème à travers des questions que nous avons proposées à l'évaluation finale. Cette épreuve nous a permis de mesurer, par rapport à un groupe témoin, l'efficacité ou la neutralité, de l'apprentissage expérimenté.

---

14 Nous voudrions faire remarquer à ce propos que si toutes les situations étudiées au cours de cet apprentissage se situent dans des solides, ce ne sont pas les cubes, parallélépipèdes, prismes, pyramides qui ont constitué l'objet de l'étude mais les plans – faces ou sections – qu'ils permettent de représenter. Les polyèdres ne servent qu'à mettre en évidence des droites et plans de l'espace qui se trouvent ainsi matérialisés, ils ne sont que des outils.

Critères de discernabilité des plans

Premier exemple:

La figure 4 ci-contre représente une pyramide à base carrée $SABCD$ de sommet S, en perspective parallèle sur un plan parallèle à SHI. I, J et K sont respectivement les milieux des arêtes (BC), (SA) et (SD).

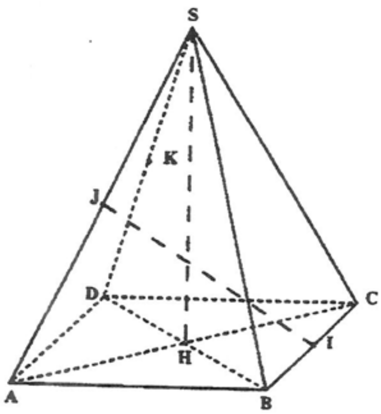


Figure 4

Les droites (SH) et (JI) sont-elles sécantes ?

La figure proposée aux élèves est ici la figure-source [15]. Répondre directement sur celle-ci est à éviter: deux droites sécantes sur la représentation ne le sont pas nécessairement sur l'objet, les élèves, après apprentissage connaissent généralement cette restriction. La question doit être reformulée – c'est pour nous la marque d'une certaine **complexité mathématique** –, les quatre points S, H, J et I regroupés différemment. Un rapide calcul montre qu'avec quatre points six situations nouvelles peuvent être envisagées, la figure va ici venir au secours du raisonnement combinatoire: trois des quatre points sont dans un plan <u>immédiatement perceptible</u> sur la figure: le plan SAC déjà dessiné qui contient S, J et H. La réponse à la question est alors elle aussi immédiate. La figure peut donc, après raisonnement ou formulation explicite d'une nouvelle question livrer la solution.

Les plans qui "sautent aux yeux" dès que leur recherche est clairement formulée ont été qualifiés de **plans immédiatement**

15 Voir une note précédente.

perceptibles. De tels plans sont représentés par des figures fermées, faces des solides de référence ou sections de formes triangulaires ou trapézoïdales déjà présentes sur la figure-source. Ces figures suggèrent l'existence d'un plan, celle-ci doit ensuite être établie par une démonstration.

Cette même question pouvait être résolue avec d'autres plans, comme nous allons le voir ci-dessous.

On peut s'intéresser au plan *SHI*, plan de section de la pyramide non représenté dans la figure-source mais facile à déterminer en joignant des points déjà présents. Il s'agit alors de déterminer une sous ou surfigure dans laquelle sera *plongée* la figure étudiée.

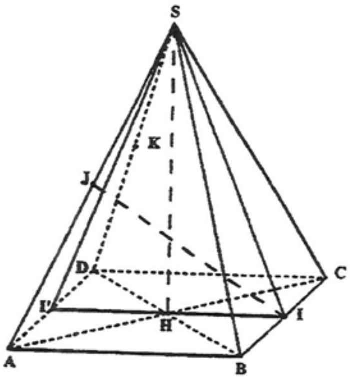


Figure 5

Dans ce cas la sous ou sur-figure utile pour déterminer le plan pertinent pour la résolution est directement *représentable* sur la figure-source: il suffit de joindre des points déjà présents pour la mettre en évidence sans résoudre de problème auxiliaire difficile. Nous dirons que le plan pertinent est un **plan directement discernable.** Texte et représentation figurale sont, comme toujours en géométrie, très dépendants mais ici, le langage, l'expression explicite de ce que l'on cherche guide de façon encore plus utile la perception de la figure: **on ne peut y voir que ce l'on cherche.**

Le second exemple que nous avons choisi est encore plus représentatif de la remarque précédente. Les différentes solutions que nous donnons ici en exemple sont des solutions que nous avons effectivement trouvées dans les productions des élèves.

Deuxième exemple:

Un cube *ABCDEFGH* est représenté ci-contre en projection parallèle sur le plan *BDHF* . Les points I, *J, K, L* et *M* sont les milieux respectifs des arêtes *(AB), (GF), (GH), (HD)* et *(AD)*.

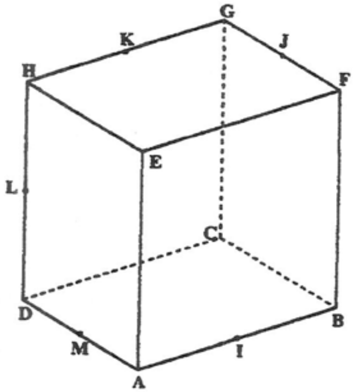


Figure 6

Les points L, J, B, K sont-ils dans un même plan ?

Les lois de la Gestalt, qui ont pu être renforcées par l'apprentissage, amènent à *regrouper les stimulis* (*Palmer & Rock*, 1991): à joindre sur le papier ou mentalement les points donnés – ce qui est fait en trait gras sur la figure –, la forme obtenue constitue la figure-source.

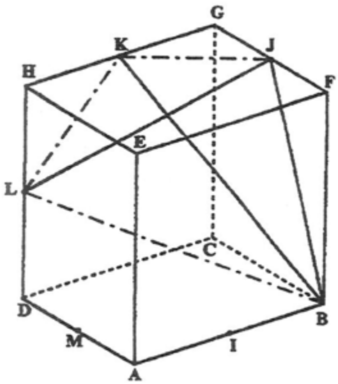


Figure 7

Celle-ci est une forme ouverte, elle ne permet pas comme l'indiquent les lois du regroupement ou de clôture de *détacher une forme du fond*. Tentant, toujours selon les mêmes lois, de *percevoir la forme la plus simple avec l'information disponible*, on cherche à joindre les points donnés pour obtenir une forme fermée qui, dans les meilleurs cas peut suggérer la réponse: la figure dessinée en trait pointillé. Nous voyons ici que les figures obtenues en traits plein ou pointillé ne suggèrent aucune piste. Il est alors nécessaire pour répondre à la question de **dissocier** les points et de les regrouper: les sept possibilités de regroupement sont ici ouvertes. Nous allons donner quatre solutions effectivement trouvées dans les productions d'élèves, chacune répond à une reformulation du problème proposé.

a) Les droites *(LK)* et *(BJ)* sont-elles dans un même plan?

Dans la figure-source associée à cette nouvelle question les droites seront tracées qu'il faudra *plonger* dans des plans permettant de répondre. Chacune d'elles est située dans une face du cube – **plans directement discernables** –, ces faces, adjacentes, se coupent suivant une arête. Il faut ensuite trouver l'intersection de deux droites dans un plan et, **interpréter en dimension trois** ce que permet de *lire* la figure: les points d'intersection des deux droites avec l'arête sont distincts.

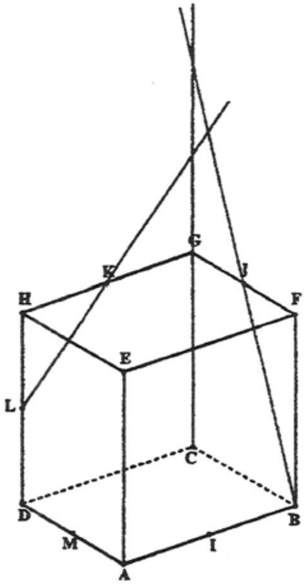


Figure 8

La démonstration, de géométrie bidimensionnelle, est calquée sur cette appréhension. L'obstacle ne réside pas ici dans l'action de "sortir" du plan, ce que les élèves apprennent sans trop de difficulté, mais dans les changements constants de dimension: montée en dimension: choix des plans, puis descente en dimension: arête commune etc., qui conditionnent la maîtrise de cette "sortie" hors du monde fermé des solides[16]. Ces différents changements lorsqu'ils deviennent conscients peuvent tout à fait être réussis par des élèves de seconde. La représentation figurale permet une interaction productive entre **appréhension perceptive** et **appréhension opératoire** (Duval, 1995b).

b) Les droites *(LB)* et *(JK)* sont-elles dans un même plan ?

La résolution de cette question reformulée va faire intervenir des éléments de dimension disparate, ce qui peut paraître simple pour des esprits exercés à la géométrie tridimensionnelle mais ne l'est pas pour les débutants. Comme précédemment, il est nécessaire de plonger chacune des droites dans un plan qui la contient: l'un est une face du cube, l'autre le plan diagonal *DBFH*, ils sont **directement discernables**.

Après avoir résolu un problème plan très simple dans *EFGH*, il faut, pour répondre, associer la droite *(JK)* et le plan *DBFH* et "oublier" la droite *(LB)*. Comme précédemment appréhension perceptive et appréhension opératoire sont étroitement associées et peuvent permettre une démonstration presque immédiate.

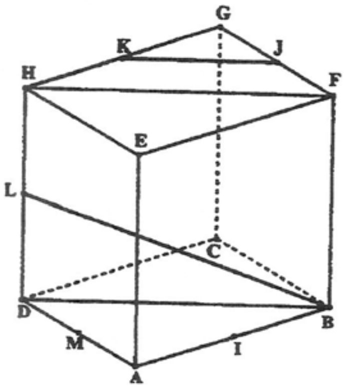


Figure 9

Nous allons maintenant étudier deux des regroupements déterminant un plan, ceux que nous avons rencontré dans les productions des élèves. Les deux autres donnent des pentagones difficiles à déterminer pour des élèves de ce niveau. Nous donnerons ensemble les deux formulations qui relèvent d'une même analyse.

c) Le point *L* est-il dans le plan *(KJB)*?
d) Le point *B* est-il dans le plan *(LKJ)*?

16 La maîtrise de ces changements se lit sur les dessins: les élèves prolongent l'arête.

Dessiner sur la représentation en perspective parallèle du cube les plans *(KJB)* ou *(LKJ)* demande la résolution d'un problème d'intersection de plans. La droite *(BD)* – ci-contre –, ou *(LM)*, *(MI)* etc. – ci-dessous – ne peuvent être créées qu'après un raisonnement.

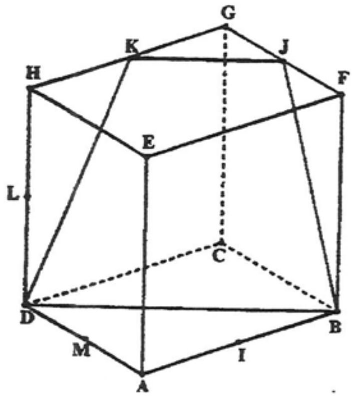


Figure 10

Nous dirons que dans ce cas la figure n'a pas, intrinsèquement, de qualités heuristiques, elle permet seulement une meilleure prise en compte des divers éléments entrant dans la démonstration. Le plan pertinent pour la résolution est, dans la figure-source, **non visuellement accessible**. Le problème d'intersection résolu la solution est immédiate.

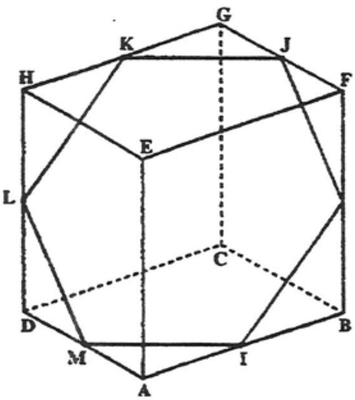


Figure 11

Mais, toute la difficulté est dans ce problème non explicitement posé. Il semble clair que seuls les élèves ayant déjà rencontré ces sections du cube, donc en concevant *a priori* l'existence, peuvent produire ces solutions.

Les deux complexités que nous avons définies:

– complexité mathématique liée aux différentes définitions d'un plan, donc impliquant un choix,

– complexité heuristique liée aux formes qui peuvent sur la figure-source suggérer l'existence d'un plan pertinent pour la résolution, ont été déclinées en trois degrés que nous allons donner séparément puis combiner en un tableau croisé. Ce tableau nous a permis de gérer les différentes étapes de l'apprentissage et de graduer les exercices de l'évaluation. Associés, à l'origine, à la détermination des plans dans les problèmes de géométrie tridimensionnelle, nous les avons adapté à d'autres types de problèmes pour lesquels ils peuvent aussi permettre d'analyser des démarches complexes.

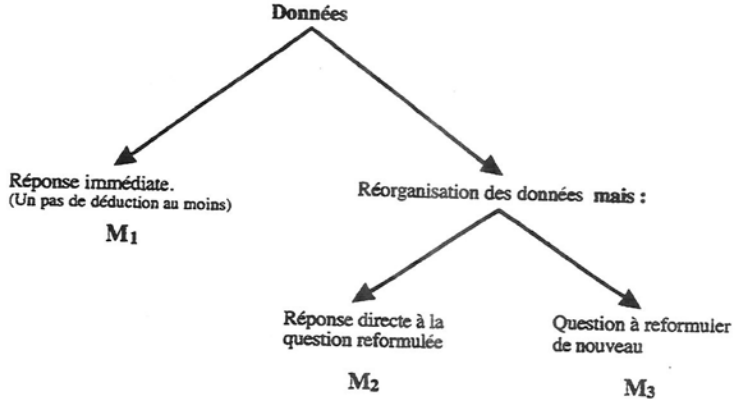


Figure 12: Indice de "complexité mathématique"

Lorsque les données de la question doivent être réorganisées, les éléments de la figure interviennent pour orienter le choix, c'est pour cette raison que les deux indices doivent être croisés.

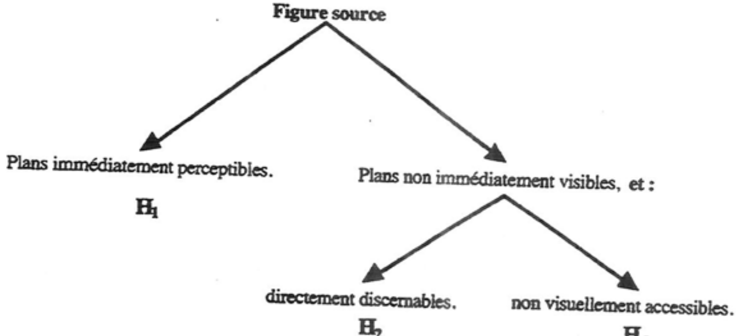


Figure 13: Indice de "complexité heuristique"

Lorsque les plans ne sont pas immédiatement perceptibles – c'est-à-dire déjà représentés sur la figure: plans de référence ou plans ayant été définis dans des réponses précédentes –, les éléments de la figure-source représentés et la reformulation de la question vont intervenir conjointement dans la recherche de la solution.

Heuristique / Mathématique	Plans immédiatement perceptibles H_1	Plans directement discernables H_2	Plans non visuellement accessibles H_3
Réponse immédiate M_1			
Réponse immédiate à la question reformulée, M_2			
Question à reformuler au moins une seconde fois M_3			

Figure 14: Prise en compte simultanée des deux indices.

Ce tableau est destiné à recevoir les pourcentages de réussite aux questions d'un problème analysé en fonction des indices précédemment définis. Il nous permet, dans l'analyse préalable des questions, de mesurer la difficulté prévue et, dans l'analyse des productions effectives, de confirmer certains points. Ce tableau a été mis à l'épreuve pour un problème classique de géométrie tridimensionnelle, il a répondu à notre attente (Rommevaux, 1997, p. 256-264).

Après une synthèse des éléments issus de l'analyse précédente nous donnerons les étapes de la séquence d'apprentissage expérimentée.

Comment développer chez les élèves l'aptitude à discerner les plans en liaison avec un apprentissage de la géométrie tridimensionnelle?

Nous avons montré que complexité mathématique et complexité heuristique étaient liées dans la recherche aboutie des solutions. Il est donc nécessaire que l'apprentissage prenne en compte ces deux aspects et ne se satisfasse pas du seul contenu mathématique. Il faut alors tenir compte des représentations figurales ou matérielles aussi bien que du contenu des définitions ou des problèmes. **La coordination des représentations en présence est ici essentielle.**

L'objectif de l'apprentissage est le développement de la fonction de traitement des représentations en perspective parallèle. D'autres études ont montré que l'usage, souvent efficace, qu'en font les élèves se centre surtout sur la fonction de communication. La fonction de traitement est moins disponible car les élèves n'imaginent pas le feuilletage en plans de l'espace graphique. Il nous fallait donc trouver une représentation intermédiaire permettant de donner aux représentations planes cette possibilité virtuelle. Cette représentation ne pouvait être que matérielle, sa présence seule ne suffit pas. Il faut pour que la fonction de traitement se développe que les représentations en présence soient bien coordonnées. Ce qu'un mathématicien fait spontanément doit, pour la plupart des individus, être acquis par l'apprentissage: *voir dans l'espace* peut s'acquérir comme tout autre savoir.

Examinons les représentations en présence et les conditions de leur coordination.

Image : **objet 3D** (maquette)

1 →

3 Représentation sémiotique **2D pour 3D** (représentation en perspective)

2 →

→ Représentation sémiotique **2D issue de 3D** (faces ou sections d'un solide)

Figure 15

Nous avons noté ci-dessus les deux types de représentations, autres que langagière, en présence en géométrie tridimensionnelle. Nous avons distingué les représentations sémiotiques de celles que nous appelons **image** (Duval, 1995a, p. 15). Les images sont des **reproductions** d'objets réels ou virtuels: le support physique ou psychique qui les reçoit agit comme un récepteur, il n'y pas comme pour une représentation sémiotique adaptation au registre dans lequel elles sont formées ni choix des traits représentés (Rommevaux, 1997, p. 23-27). Des représentations figurales de deux types ont été distinguées pour cette coordination:

– celles que nous appelons "2D pour 3D" pour montrer qu'elles représentent un objet d'un autre espace que celui dans lequel elles sont formées;

– celles que nous appelons "2D issues de 3D" pour montrer qu'elles sont effectivement représentées dans leur registre d'origine mais, extraites de l'espace dans lequel elles étaient plongées.

Les flèches numérotées codent les interactions entre les représentations. La flèche 1: passage d'un objet matériel à une représentation en perspective, dite: *dessin de l'objet* est le passage qui apparaît le plus fréquemment dans l'enseignement. Les flèches 2 et 3, passages d'une représentation en perspective ou d'un objet, à une représentation plane de figures planes extraites, sont moins souvent utilisés. Le passage 2 apparaît en général au niveau des contrôles de connaissances, le passage 3 n'est pratiquement jamais envisagé au niveau des décisions d'enseignement. Contrairement à ce que l'on pourrait croire les figures dessinées sur une maquette ne livrent pas au *premier coup d'œil* leur formes planes, le passage 3 demande aussi à être travaillé. Malgré les sens choisis dans le schéma précédent, les interactions sont à double sens. Notre objectif étant de rendre aux représentations sémiotiques, ici les représentations figurales, leurs qualités heuristiques: **permettre la sélection des plans**, les flèches indiquent les interactions privilégiées. Les représentations étant simultanément présentes les actions se situent aussi fréquemment dans les sens réciproques.

Deux expérimentations ont été nécessaires pour mettre au point la coordination des représentations en présence. Nous pensions, après les premières observations (Rommevaux, 1991, p. 119), que les élèves devaient d'abord savoir résoudre les problèmes sur la maquette et être en possession des règles de la représentation en perspective parallèle pour pouvoir les utiliser avec profit. Nous avions alors utilisé *successivement* les deux types de représentation. Les résultats de l'évaluation finale n'ont pas été probants. Lors de la seconde expérimentation, celle que nous allons présenter, les deux types de représentation étaient présents dès le début de l'apprentissage, avant que les élèves ne soient en possession des règles mathématiques qui les fondent. Les résultats d'études déjà faites montrent que la fonction de **communication** est disponible très tôt, il suffisait, par **différenciation fonctionnelle**, de développer la fonction de **traitement** de ces mêmes représentations sémiotiques[17]. La séquence d'apprentissage est fondée sur un travail d'observation de variations concomitantes sur deux types de représentations. Les variations sur une représentation "2D pour 3D" sont observées en coordination avec celles que l'on effectue systématiquement et non pas de manière illustrative ou indicative sur une représentation de type maquette. Pour conduire ce travail, la tâche mathématique choisie est la construction des **sections planes** d'un cube. Ce choix a été dicté par l'importance de ces sous-figure planes dans la résolution des problèmes de géométrie tridimensionnelle, et la difficulté qu'ont les élèves à les imaginer (Rommevaux, 1991 p. 119). Le choix s'est porté sur le cube car il offre la plus grande variété de sections planes. Cet objet n'a pas été choisi comme modèle d'un objet mathématique précis mais comme outil permettant d'apprendre à **discerner les plans**, en **articulation** avec le fonctionnement des représentations en perspective parallèle.

Nous allons étudier maintenant les différentes phases de la séquence expérimentée. Les maquettes que nous avons utilisées tout au long de l'apprentissage sont toutes en acétate transparent pour rétroprojecteur et possèdent toutes les qualités que nous avons détaillées à la fin du paragraphe II. La trame de la séquence d'apprentissage est donnée par la coordination des représentations en présence:

– le langage naturel: registre sémiotique indispensable pour donner aux représentations "2D pour 3D" leur troisième dimension, pour donner

17 Ces deux modes de présentation d'un concept ont été étudiés par P.Oléron: *L'erreur est sans doute de croire à une solution générale alors que le niveau des sujets, en particulier leur capacité à comparer les stimuli, joue un rôle important voire déterminant. Pour la formation des concepts on tiendra compte de la complexité des données ; la présentation successive est en un sens un moyen d'analyser celle-ci en amenant à les considérer l'une après l'autre et non en bloc. Mais l'élément de rétention mnémonique intervient alors en un sens défavorable.* (Oléron, 1963, p. 23).

les hypothèses – faire de la figure une figure géométrique -, mais aussi pour désigner les différents plans en présence – la désignation participe ici à la fonction d'objectivation – et participer à la coordination des résultats plans qui ne peut se faire que par l'intermédiaire d'un discours explicite ou intériorisé ;

– une maquette en acétate transparent modèle du solide de référence – objet 3D ;

– des représentations en perspective parallèle et des représentations de sections planes de solides – représentations sémiotiques du registre figural 2D.

Les trois phases de l'apprentissage vont jouer sur ces trois types de représentation et prendre en compte les analyses que nous avons développées précédemment ainsi que celles développées par R. Duval dans (*Duval,* 1994).

Phase exploratoire

La première phase a été précédée d'un prétest et d'un état des lieux, d'une harmonisation connaissances des élèves, essentiellement au niveau du vocabulaire et des définitions déjà données au collège.

Cette première phase met en *concurrence ou en synergie* les espaces bi et tri-dimensionnels, l'objectif de cette phase est la prise de conscience par les élèves de la variabilité des directions de plans. Elle se déroule dans l'**espace sensible**. Une première feuille est proposée aux élèves[18] ainsi qu'une maquette de cube et le dessin de quatre formes planes. La tâche: répondre par OUI ou NON à la question:

— Pouvez-vous obtenir, en "coupant" le cube, le polygone dessiné?

Il était demandé aux élèves de donner les raisons de leur choix. Précisons également que les dimensions du cube étaient données et que les élèves pouvaient fournir tout type d'arguments. Ces premières réponses données, les feuilles sont ramassées et les élèves reçoivent une nouvelle feuille et des rectangles de carton dans lesquels des formes ont été **évidées**. La tâche est la même que précédemment avec la question:

18 Les élèves, en classe c'est-à-dire avec l'objet matériel, travaillent en binôme. Mais ensuite le travail de mise au point – la rédaction, si importante pour l'objectivation – se fait individuellement et est corrigé par le professeur.

– Pouvez-vous obtenir, en "coupant" le cube, le polygone évidé ?

La première question était accompagnée de quatre formes, la seconde est accompagnée de six formes évidées dont les quatre précédentes que les élèves peuvent reconnaître car elles portent les mêmes numéros.

Si dans la première tâche les deux espaces bi et tri-dimensionnels coexistent, dans la seconde les plans peuvent être matériellement **plongés** dans l'espace du cube dont certaines formes sont issues. Cette action est la même que celle que faisaient les tailleurs de pierres autour du XIIIe siècle, les élèves ne la font pas spontanément. Ils montrent aussi, en "collant" les formes sur les faces que pour eux les seuls plans existants sont ceux déjà matérialisés. Mais, ce pas franchi certains, manifestent un grand intérêt pour les découvertes qu'il suscite. Des raisons données pour refuser certaines formes sont remises en cause et discutées. Certains binômes voudraient que toutes les formes s'enfilent autour du cube[19]: le pentagone régulier en particulier subit beaucoup d'outrages!

Dans la première tâche les feuilles portant les formes sont posées sur la table ou *mises à côté du cube*, pour identifier les sections il faut les **imaginer**. Les explications fournies pour refuser les formes sont très révélatrices des conceptions des élèves: les élèves transfèrent au solide les propriétés des formes planes qui le caractérisent, ici le **carré**. Les polygones ayant *plus de quatre côtés* sont en général refusés, tous les polygones ayant *un angle droit* généralement acceptés comme le triangle rectangle ou le trapèze rectangle.

Lorsque les polygones sont présentés sous forme de **gabarits** la maquette va permettre une **montée en dimension**: le plan "entoure" le cube, plusieurs gabarits enfilés autour du cube visualisent la variabilité des directions de plans et des formes des sections. Les élèves déduisent de la réussite ou de l'échec de ce plongement certaines des propriétés des sections: par exemple le parallélisme de côtés du polygone dès que leur nombre est supérieur à quatre. Les propriétés ne sont pas **constatées** mais leur **nécessité** est établie par la manipulation et l'observation des figures en présence.

Cette séance qui ne dure qu'une heure reviendra comme un point de repère tout au long des séances suivantes qui vont permettre aux élèves d'entrer dans la phase plus discursive de l'apprentissage. Ils apprendront

19 On trouvera en annexe les représentations réduites des quatorze formes proposées.

au cours de la phase suivante comment ont été construits les polygones sections dont les formes leur ont paru bizarres.

Phase de traitement figuratif

Avant de détailler le déroulement de la recherche associée à la dernière feuille de cette phase – la plus longue –, nous voudrions faire le point sur les connaissances supposées des élèves à ce stade. Ils ont presque tous vu au collège des représentations en perspective parallèle, savent que deux droites parallèles dans l'espace sont représentées par des droites parallèles sur le dessin et que dans les directions parallèles les proportions sont conservées[20]. Ils connaissent également les différentes façons de définir un plan.

L'objectif de cette phase est de donner aux représentations en perspective parallèle, qui ont à ce stade une fonction de communication, la fonction de traitement qui en fera un outil indispensable pour l'heuristique d'un problème. Cette nouvelle fonction sera acquise par l'étude des variations concomitantes des traitements sur la maquette et sur les représentations "2D pour 3D". La *nécessité* des propriétés d'incidence sera suggérée par les tracés sur la maquette, les règles seront ensuite institutionnalisées et réutilisées au fur à mesure de la complexification des tâches associées à la recherche des différentes sections.

On trouvera en annexe 2 le libellé de la dernière feuille de cette phase qui en comporte cinq. Après avoir découvert une section triangulaire, deux sections quadrilatères – un parallélogramme et un trapèze – une section pentagonale, la feuille que nous allons étudier fait découvrir une section hexagonale. Les textes sont toujours proposés sur le même modèle: trois points sont donnés sur trois arêtes du cube, les variations de leurs positions ou des situations relatives des arêtes qui les portent, vont nous permettre de gérer la complexité des tâches, qu'elles soient mathématiques ou heuristiques.

Trois tâches vont contribuer à la coordination des représentations en présence au travers des différentes appréhensions d'une figure:

– **le dessin sur la maquette de la section**, seule tâche faisant réellement intervenir l'axiomatique de la géométrie tridimensionnelle, –

20 Les calculs de proportionnalité seront repris à cette occasion.

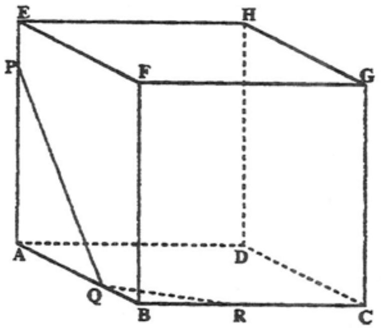
appréhension perceptive et manipulation demanderont, d'une feuille à l'autre à être appuyées par une appréhension discursive et opératoire: tout ne se voit pas sur la maquette;

– **la représentation en vraie grandeur du polygone section** dont la nature a été découverte sur la maquette – il s'agit ici d'une tâche de construction plane qui va demander une appréhension séquentielle de la figure. Cette tâche, par les détours que nécessitent les constructions auxiliaires, va impliquer la sélection de plans – autres que les faces du solide -, ainsi que des descentes et montées en dimension, des coordinations de résultats. Toutes ces opérations sont facilitées par la mobilité et la transparence de la maquette;

– enfin, la troisième tâche est **la représentation de la section obtenue, sur l'une ou l'autre des deux représentations en perspective données,** – ce sont ici les variations concomitantes sur les deux types de représentation qui vont développer l'appréhension opératoire des représentations en perspective parallèle.

La première tâche permet de découvrir la nécessité des règles de la géométrie tridimensionnelle, celles-ci ne doivent pas être abstraites à partir du constat des résultats de leur application sur des représentations comme cela est fait dans la plupart des manuels mais leur pertinence doit s'imposer dans l'exploration des objets, maquette et figures, qui sont manipulés. Elles seront réinvesties dans la tâche de dessin des sections sur la maquette au fur et à mesure que celles-ci se compliquent. Les deux autres tâches tendent à développer ce que l'on peut appeler *la vision dans l'espace,* et plus spécialement le *discernement des plans.* La seconde tâche par les multiples directions de plans qu'elle nécessite permet l'appréhension opératoire de la variabilité des directions de plans. La troisième tâche prend, au fur et à mesure de l'évolution de l'apprentissage de plus en plus d'importance. Jouant sur les contraintes de l'organisation de la classe on demande aux élèves de terminer le travail à la maison, n'ayant plus de maquette mais seulement les représentations en perspective parallèle ils doivent transcrire sur celles-ci le plus possible de renseignements de façon à poursuivre leur travail. Ces représentations n'ont pas été construites par les élèves mais ils peuvent en identifier les éléments conservés en vraie grandeur et choisir le point de vue en nommant les sommets, elles vont peu à peu remplacer la maquette et acquérir par ce biais la *fonction de traitement.*

La première tâche proposée est le dessin sur la maquette de la section plane définie par les trois points donnés. Après avoir nommé les sommets du cube et placé les points *P, Q* et *R* conformément au texte donné [21] les élèves doivent dessiner sur les faces du cube les segments côtés du polygone section. Les qualités de la maquette: mobilité, transparence, vont permettre de découvrir certaines des propriétés d'incidence. Par exemple le parallélisme des droites d'intersection sur deux faces parallèles du cube.



Nous avons représenté ci-contre – en perspective obligatoirement – les tracés obtenus sur la maquette à partir des données. Ces tracés étant faits, les élèves ont eu la surprise de ne trouver aucun théorème, aucune action perceptivo-gestuelle susceptible de leur permettre de continuer immédiatement le tracé.

Figure 16

La situation demande alors à être analysée collectivement.

L'intersection de deux plans étant une droite, deux procédures mathématiques sont disponibles:

– on peut en déterminer deux points: c'est le cas des points donnés qui sont sur des arêtes,

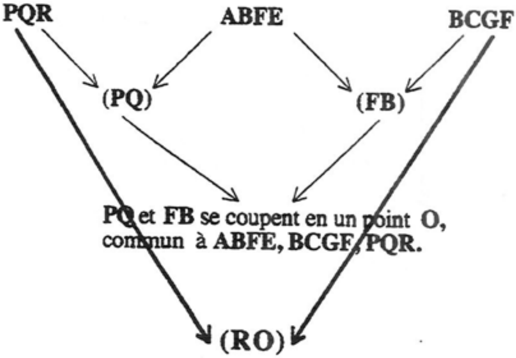
– on en connaît un point et la direction: c'est une procédure que les élèves connaissent à ce stade de l'apprentissage.

21 Cette tâche a, au tout début de l'apprentissage posé quelque problème aux élèves: la mobilité de la maquette est ici un handicap. Notons également que la notion de section plane est à définir et rappeler très souvent. Seule l'expérience de la *pomme de terre* (Bonafe, 1985, p. III.1) permet aux élèves de comprendre la différence entre section plane et solide résultant de la coupe. Assimiler cette distinction demande un certain temps.

Examinons la situation pour faire un choix entre ces deux procédures.

Dans l'impossibilité de connaître la direction commune des deux droites intersections du plan *PQR* et des plans *ADHE* et *BCGF*, peut-on trouver un point, autre que *P* ou *R* commun à l'une des faces et à *PQR* ? Il faut rappeler que l'ensemble des points communs à deux plans est leur droite d'intersection et que lorsqu'on cherche un tel point on est guidé par cette propriété. Les élèves sont invités à faire un recensement des renseignements déjà en leur possession.

Le professeur doit alors reprendre la classe pour étudier avec les élèves les intersections des différents plans en présence. Cette recherche est schématisée ci-dessous.



Ce schéma indique les intersections de plans et de droites. Fait avec les élèves il les aide à analyser formellement la situation, ils doivent ensuite déterminer sur leurs représentations le point *O*.

Figure 17

La procédure que nous proposons pour cette détermination utilise les interactions entre espaces bi et tri-dimensionnel, **descente et montée en dimension**. Il faut "sortir" du cube pour déterminer le point *O* qui se trouve sur la droite *BF* et dans le plan de la face *ABFE*. Cette face n'étant qu'une figure du plan il faut donner une autre représentation de celui-ci. Sur une feuille de papier par exemple, reproduire le carré en prolongeant ses côtés, placer les points *P* et *Q*, déterminer *O* puis, recommencer avec le plan de la face *BCGF* pour déterminer le point *S* qui, enfin, peut être placé sur l'arête *CG*. Procédure illustrée ci-dessous.

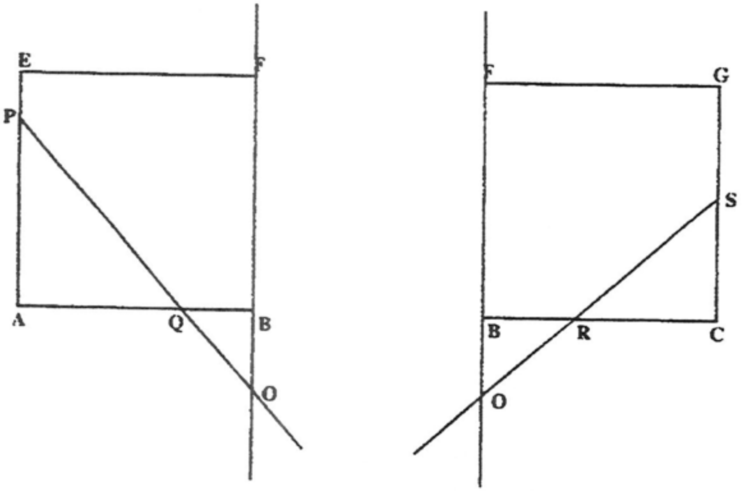


Figure 18

Pour aider les élèves ayant des difficultés à imaginer ces interactions et l'infinitude des plans nous avons proposé de prendre une feuille de papier de la plier en deux, d'appliquer le pli sur l'arête *BF* de la maquette, de "décalquer" chacune des faces *BFEA* et *BFGC* puis de déplier cette feuille. On peut alors, en dimension 2, dessiner la droite *PQ*, son intersection avec le "pli": *O,* puis la droite *RO* qui coupe l'arête *CG* en *S*. On replie ensuite la feuille et on peut placer le point *S* sur *CG*, toujours en "décalquant". **Sélection des plans utiles, traitement du problème bidimensionnel, coordination des résultats et plongement dans l'espace tridimensionnel sont ainsi mis en action.** La figure ci-dessous – à gauche – représente la feuille dépliée et les constructions effectuées. Elle peut aussi permettre aux élèves de mettre en place des procédures de calculs des segments en cause. À droite le dessin de la section sur la maquette est terminé en utilisant les propriétés d'intersection de deux plans parallèles par un même plan. La transparence permet de comprendre cette construction et les élèves "reportent" *PQ* sur la face *CDHG* et tracent la parallèle à *PQ* passant par *S*. Ces constructions permettant de terminer la représentation ont déjà été effectuées pour les sections précédentes.

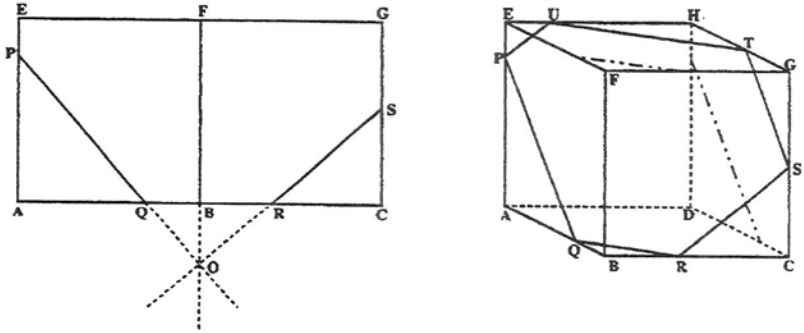


Figure 19

La première tâche terminée: la section est dessinée sur la maquette, la seconde tâche demande de la construire en vraie grandeur sur la feuille. L'appréhension séquentielle de la figure, nécessaire à toute construction, va amener les élèves à "entrer" dans le cube. Les traces du plan *PQR* sur les faces du cube ne suffisent pas à déterminer le polygone section. Dès qu'il a plus de trois côtés les mesures des angles[22] ou de certaines diagonales sont indispensables pour le *rigidifier.* Pour déterminer la longueur des segments *PQ* et *QS* par exemple – ce qui est suffisant car ensuite le parallélisme prend la relève –, certains triangles, si possible rectangles, doivent être imaginés. La mobilité de la maquette permet de poser le cube sur la table de façon à *voir* que les triangles *PBR* et *QBS* sont rectangles en *B*. L'orthogonalité de toute verticale et d'un plan horizontal, a quelquefois été vue au collège, le théorème d'orthogonalité droite-plan peut être donné à cette occasion. C'est, dans l'apprentissage proposé, le seul théorème sur l'orthogonalité que nous ayons institutionnalisé. Les détours de l'appréhension séquentielle ont, tout au long de la construction des sections, utilisés la mobilité de l'objet maquette pour casser la position privilégiée des faces. L'objectif de la construction, la formulation de la tâche ont, de plus, permis de sélectionner dans l'objet diverses directions de plans et de *filtrer* les informations qu'il fournit.

22 Il n'est pas possible à ce niveau d'introduire ces notions. Pour la seconde section proposée – un parallélogramme – beaucoup d'élèves transférant à la section les propriétés de l'objet tridimensionnel ont dessiné un rectangle.

Les figures ci-dessous montrent les constructions effectives ou imaginées sur la maquette et la représentation de la section en vraie grandeur[23]. Les élèves devaient terminer la construction en l'absence de l'objet et l'une des représentations du cube avait pour mission de recueillir les informations utiles pour mener la tâche le plus loin possible. La représentation de gauche montre ce que les élèves relevaient à la fin de l'heure souvent à main levée et complété par des cotes ou informations chiffrées.

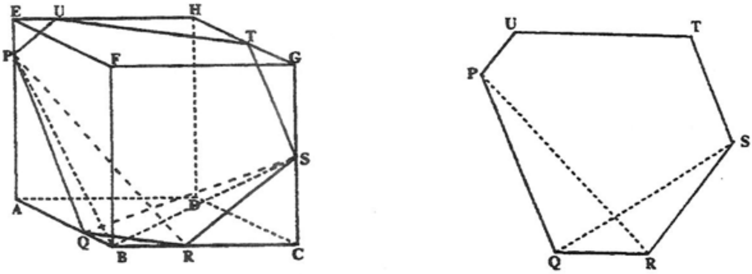


Figure 20

Sur les représentations en perspective parallèle la détermination du point *O* est beaucoup moins coûteuse, comme le montre la figure ci-dessous. Mais elle nécessite de savoir avec précision dans quel plan se placent les traits que l'on dessine. Les efforts faits pour cet apprentissage sont ainsi *récompensés*!

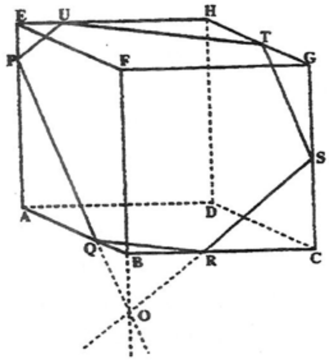


Figure 21

23 Les dessins sont réduits.

La donnée de deux représentations *muettes* du solide permet aux élèves de travailler sur l'une d'elles et d'utiliser la seconde pour choisir le *meilleur point de vue*, c'est-à-dire celui qui permet de "voir" avec le moins de déformation possible les sous-figures planes utiles. Ils ont ainsi appris à changer de point de vue en modifiant la désignation des sommets, ce qui leur donnera ensuite quelque liberté lorsqu'eux-mêmes construiront les représentations.

Cette troisième tâche est essentielle: les variations concomitantes sur l'objet matériel et sur les représentations en perspective, développent leur fonction heuristique en transformant les actions sensibles en tracés et mettant en œuvre l'appréhension opératoire de cette représentation.

Phase d'institutionnalisation

Nous avons noté dans les phases précédentes que des *moments d'institutionnalisation* étaient intégrés au déroulement de l'apprentissage. Chacune des règles d'incidence dont la nécessité a été mise en évidence sur l'objet maquette a été donnée explicitement et les variables, "positions des points" sur les arêtes sont choisies de façon à obliger les élèves à les réutiliser pour mener à bien la première tâche pour la section suivante.

Cette dernière partie de l'apprentissage a essentiellement consisté en exercices dans lesquels étaient donnés des solides de référence autres que des cubes. Les règles de la perspective parallèle ont été données mais, nous estimons qu'il est encore trop tôt pour que les élèves en aient la totale maîtrise. Les textes étaient toujours accompagnés d'une représentation pour laquelle le plan de projection est indiqué ce qui, dans les exercices non métriques, suffit à repérer dans la représentation les figures déformées ou non déformées par la projection.

Cette période de transfert a été un peu difficile pour certains élèves: pour ceux-ci, la période de travail sur l'objet aurait du se prolonger et ne pas se dérouler seulement sur le cube (Rommevaux, 1997, p. 344 note). Ces mêmes élèves ont éprouvé une certaine satisfaction à faire – enfin! – une déduction correcte. Comment être sûrs que les plans discernés sur la représentation sont bien des plans dans l'espace tridimensionnel, sinon par l'application explicite de certaines règles d'incidence?

Évaluation

Cette séquence d'apprentissage a été expérimentée dans une situation normale de classe dans deux classes de seconde d'un lycée de Montbéliard (Doubs). Celle dont j'avais la charge avait, de par les options choisies par les élèves, un profil plutôt littéraire – la plupart des élèves ont choisi une section L en première –, l'autre seconde avait, elle, un profil plutôt scientifique – confirmé par les orientations en première S. Dans cette dernière classe, le professeur a pris la responsabilité de l'expérimentation. Nous faisions le point de la progression après chaque séance. Deux classes témoins, de deux lycées de Strasbourg, ont été associées à l'expérimentation.

Certaines remarques doivent être faites: j'étais à la fois professeur, chercheur et expérimentateur, je n'ai visité aucune des autres classes et toutes les classes étaient des classes courantes de lycées – certaines homogènes d'autres hétérogènes. Les expérimentations dans ces conditions ne permettent pas une exploitation exhaustive des situations, beaucoup de faits échappent. Seules les traces écrites peuvent vraiment être étudiées.

Avant tout apprentissage les élèves de trois des classes ont été soumis à un prétest: "les triangles dans le cube" plusieurs fois étalonné, depuis qu'en 1984 l'équipe de G.Audibert l'a proposé à de nombreux élèves (Rommevaux, 1997, p. 201). Il s'agit de savoir si les élèves *lisent* sur une représentation en perspective parallèle une figure de géométrie bidimensionnelle ou tridimensionnelle. Toutes les classes de seconde étant soumise à une évaluation nationale au début de l'année scolaire nous avons également une épreuve indépendante de tout enseignement nous permettant de classer les performances globales des élèves.

Après apprentissage expérimental ou "classique" les élèves ont été soumis à une évaluation finale dont quelques questions ont été étudiées dans le paragraphe III. Les questions proposées comportaient deux volets: les élèves devaient répondre par OUI ou NON à des questions du type: *deux droites sont-elles dans un même plan ?* et les variantes sur le parallélisme ou l'intersection qui s'en déduisent, ou plus généralement: *quatre points donnés sont-ils coplanaires?* Une justification était demandée dans laquelle nous souhaitions trouver mention des plans permettant de mettre en évidence les différents pas de la déduction nécessaire à la justification. Cette épreuve comportait quatre exercices. Nous laisserons de côté le dernier dans lequel nous voulions voir si les élèves concevaient qu'un même trapèze pouvait être section d'un cube et d'une pyramide à base carrée. Les non-réponses ont été nombreuses à cet exercice difficile. Les trois autres exercices comportaient en tout douze questions indépendantes, de difficulté croissante, dont les solides de référence étaient un cube et une pyramide à base carrée. Les taux de non-réponses sont peu élevés pour ces trois exercices. Pour les questions pour lesquelles un doute se fait sentir sur l'interprétation de la figure "2D pour 3D" les non-réponse peuvent traduire une prise de conscience de l'ambiguïté de ces représentations.

La prise en compte dans les tableaux croisés du double indice (M_i, H_j) [24] se trouve justifiée par les variations des pourcentages conjoints des réponses exactes et des réponses justifiées: réponses exactes se traduisant par OUI ou NON et justifications réussies mettant en avant les plans pertinents pour la démonstration [25]. Les variations observées dans les tableaux sont identiques dans chacune des classes: ce tableau mesure donc bien la difficulté des exercices. Il permet de déceler les questions dont la justification est nécessaire pour répondre correctement: on trouve alors pour un faible taux de réponses exactes un taux élevé de justification réussie.

Une dernière remarque avant la comparaison entre les classes témoins et les classes expérimentales. Les questionnaires ont été conçus sous deux modalités: deux points de vue différents ont été choisis pour les représentations des solides. Les tests ont montré que les taux de réussite sont indépendants de la représentation proposée.

Compte tenu de l'hétérogénéité des niveaux des classes, nous avons choisi d'apparier des élèves de l'une des classes témoins – celle ayant subi les deux tests – et ceux des classes expérimentales ayant les mêmes résultats aux deux prétests et de mesurer l'évolution des couples ainsi formés. Neuf élèves de chacune des classes expérimentales ont été appariés à dix huit élèves de la classe témoin. Nous avons pour chacun de ces couples calculé les différences algébriques – pour les deux élèves appariés –, entre les nombres de bonnes réponses et les nombres de ces réponses correctement

24 Tableau présenté à la fin du § III.

25 Les élèves avaient à leur disposition au début du questionnaire toutes les règles d'incidence utiles pour la justification des réponses.

justifiées. Il apparaît que la différence du nombre total de réponses exactes est seulement de quatre (Δ_i) en faveur des élèves des classes expérimentales et de trente neuf (Δ_j) toujours en leur faveur, pour les réponses justifiées. L'exemple ci-dessous permettra d'éclairer notre méthode de comparaison:

Elè.	Eva2	T1		11	12	13	14	15	21	22	31	32	33	34	35		E4		>5	Δe	≥8	Δj
EA	82%	9		9	9	9	9	7	7	9	8	6	3	7	6		5'		11		6	
ET	82%	9		7	9	8	8	6	1	6	1	0	3	3	8		0		7	4	4	2
IA	69%	8		9	9	9	3	7	7	0	6	0	3	3	9		0		7		4	
IT	71%	8		7	6	6	1	1	2	6	6	2	2	6	6		4		7	0	0	4
LB	73%	6		7	7	9	9	8	9	0	6	6	2	0	0		0		8		4	
LT	73%	6		7	7	8	6	7	7	9	7	6	6	6	3		4		11	-3	2	2

EA et ET codent respectivement des élèves d'une classe expérimentale et de la classe témoin. La colonne Eva2 donne les résultats à l'évaluation nationale à l'entrée en seconde et la colonne T1 les nombres de triangles reconnus au prétest. Les élèves ayant les mêmes résultats à ces épreuves préalables sont appariés, on note dans les colonnes 11 à 35 les codes de leurs réponses aux douze questions des trois premiers exercices de l'évaluation finale, dans E4 on trouve les codes des réponses à l'exercice 4. Les codes supérieurs à 5 codent les réponses exactes, les codes 8 et 9 des réponses exactes et justifiées de façon "satisfaisante": les plans utiles sont mentionnés dans la justification donnée. Les totaux pour chaque élève sont donnés dans les colonnes nommées : > 5 et ≥ 8 et les différences positives ou négatives dans les colonnes codées Δ_e et Δ_j.

Les différences se font donc sentir sur l'*appréhension discursive des figures et non sur l'appréhension perceptive* ce qui confirme en quelque sorte que voir dans l'espace est: **discerner les plans en présence.**

Conclusion

La géométrie tridimensionnelle met, en général, en œuvre deux registres de représentations sémiotiques: le registre figural et le langage naturel indispensable à l'identification des représentations et aux traitements géométriques. La coordination de ces registres, difficile en géométrie plane est rendue encore plus problématique lorsqu'il faut, dans les représentations planes d'objets tridimensionnels, identifier certaines sous-figures déformées par les projections ou discerner des plans à partir de quelques uns de leurs éléments représentés.

Les recherches dont nous avons rendu compte montrent que les élèves de collège peuvent apprendre à représenter les solides simples et à les identifier, sans connaître les règles de la projection parallèle sur un plan. Mais, ces mêmes élèves (Bonafe, 1991) ont des difficultés à reconstruire un solide à partir de sa perspective parallèle, à représenter un solide sous un autre point de vue que celui donné. À ce niveau, les deux espaces bi et tri-dimensionnels paraissent presque indépendants. Ces collégiens ne discernent pas sur une représentation en perspective parallèle les faces utiles pour la construction d'une section et la présence de l'objet réel n'améliore pas en général les performances (Chevalier, 1989).

Le **discernement des plans** est, en effet, un seuil difficile mais essentiel pour l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle. Difficile, aussi bien sur un objet matériel que sur une représentation en perspective parallèle et essentiel, car sur les plans reposent toutes les étapes des démonstrations. "Voir dans l'espace" implique, pour l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle, le discernement des plans:

> Nous ne "voyons" des objets, sur de telles projections, que quand nous les connaissons déjà: un dessin dans le plan avec sa perspective, ses différents plans n'est assimilé par l'observateur que s'il a intégré préalablement cette structure dans son cerveau. (Hubbard, 1990 p. 7)

Peut-on apprendre à discerner les plans sur une représentation en perspective parallèle? Si oui, comment? Nous avons fait l'hypothèse, comme d'autres chercheurs, que la nécessité de structurer l'objet pour que son image résiste aux rotations [23], de discerner les plans pour analyser et coordonner les différents éléments bi ou uni-dimensionnel imposait, pour un temps déterminé, l'introduction d'un objet matériel.

---

23 Nous empruntons cette expression à R. Baldy (Baldy, 1989, p. 425) qui lui aussi constate que l'introduction de l'objet matériel doit se faire à un moment précis même pour les adultes en préformation.

Nous avons pu constater que cette introduction facilitait, pour les élèves des classes expérimentales, l'utilisation des représentations en perspective parallèle à des fins de **traitement**. Cet objet n'a pas été choisi comme modèle mathématique d'un objet précis mais comme outil permettant d'apprendre à **discerner des plans**, en **articulation** avec le fonctionnement des représentations en perspective parallèle.

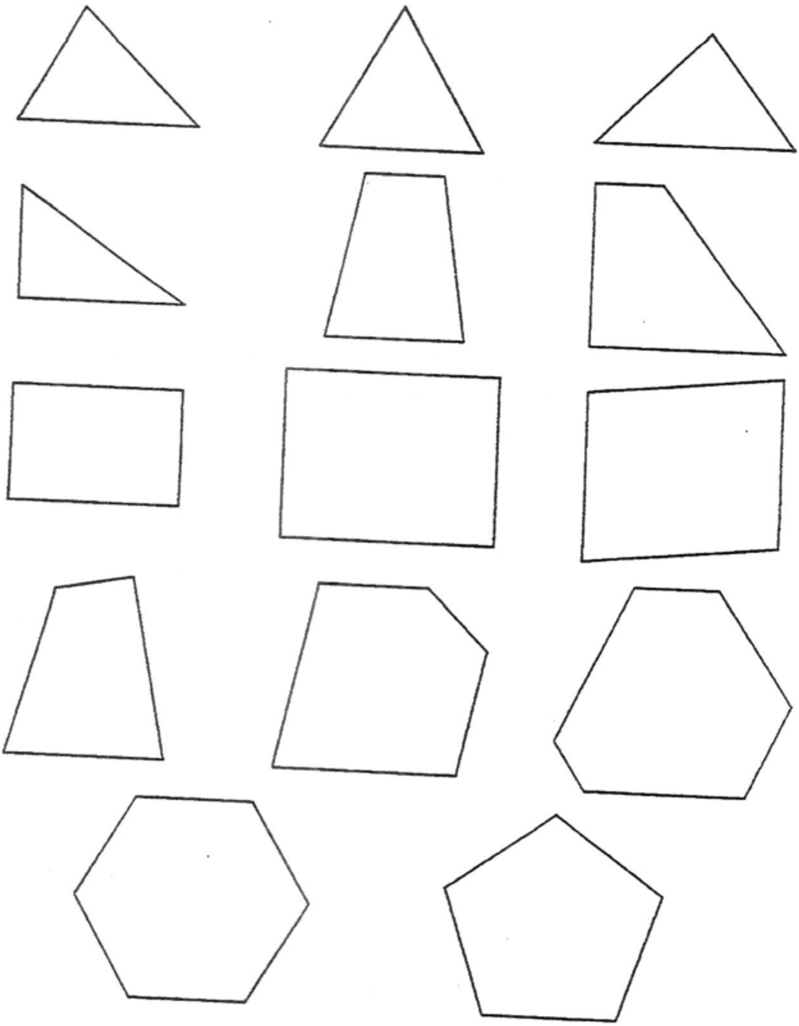
Les résultats montrent que cet apprentissage donne aux élèves la capacité de déceler, sur des représentations bidimensionnelles, des sections planes et de les utiliser dans leur déduction, d'utiliser l'appréhension perceptive support d'une appréhension opératoire. Si tous n'ont pas franchi ce seuil, le plus grand nombre a compris qu'il était essentiel de commencer par bien identifier les plans. Ce seuil franchi, les élèves peuvent être alors en mesure de créer eux-mêmes les représentations en perspective parallèle utiles à la résolution des problèmes tridimensionnels.

Ce travail éclaire certaines questions non complètement résolues. Le problème du temps très long d'appropriation de l'appréhension perceptivo-opératoire d'une représentation "2D pour 3D" ainsi que la non conception de la diversité des sections d'un solide, permet de penser que la fréquentation des maquettes devrait être plus précoce. Mais, comme nous l'avons vu, les moments d'introduction et les tâches demandées déterminent la réussite de cet apprentissage: ces moments et ces tâches sont à déterminer. Le rôle du langage naturel dans la réussite du discernement des plans: *la formulation de la question*, dont à plusieurs reprises nous avons signalé l'importance, devrait être étudié de façon spécifique. Il nous était difficile en tant qu'acteur et observateur de discriminer son influence.

Nous ne pouvons pas ne pas nous poser la question de la place de l'outil informatique dans cet apprentissage. Cet outil peut-il aider au développement de l'"intuition" de l'espace qui sollicite la vue, le toucher, le mouvement? Voir bouger une représentation en perspective parallèle n'est pas perceptivement de même nature que voir – et faire – tourner un objet. Seul le regard participe à la première opération alors que le corps ajoute sa participation dans le second cas. Les travaux existants ne permettent pas encore de savoir quelles activités spécifiques à l'utilisation des ordinateurs pourront aider au franchissement de ce seuil du discernement des plans.

Cet apprentissage a été ressenti comme *difficile* par les "futurs scientifiques" qui situaient cette difficulté dans la *démonstration*. Par contre, les "futurs littéraires" peut être parce qu'ils savaient que cet apprentissage ne serait pas repris l'année suivante y ont trouvé un grand intérêt. Il nous semble que la *découverte* qu'une représentation peut s'analyser, qu'une démonstration peut être utile à la compréhension d'une figure leur sera profitable dans d'autres domaines que les mathématiques. Il suffit de lire certains textes de critiques ou d'historiens d'arts pour s'en convaincre. H. Damisch parle du feuilletage du plan pictural à propos de l'Autoportrait du Louvre de Nicolas Poussin (1650). E. Jollet, toujours à propos de Poussin, évoque la distinction que celui-ci faisait entre l'""aspect" et le "prospect", le premier regard sur l'œuvre et son analyse plus profonde. Dans ces deux volets nous pouvons reconnaître l'appréhension perceptive et l'appréhension opératoire. La géométrie tridimensionnelle, par l'aspect **compréhension** des représentations planes et exécution de celle-ci, nous paraît devoir trouver une place dans l'enseignement des mathématiques pour tous les élèves.

Annexe 1



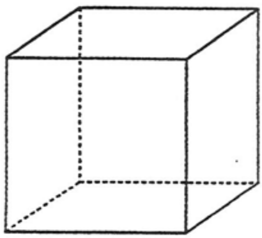
Formes contenues dans les enveloppes: échelle 60%

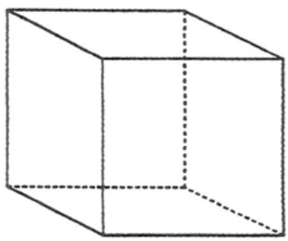
Annexe 2

Feuille 7

Noms, Prénoms:
date: Classe:

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 5 cm. $ABCD$ est une face, les arêtes (AE), (BF), (CG) et (DH) sont parallèles.
P est le point de l'arête (AE) tel que $AP = 4cm$,
Q est le point de l'arête (AB) tel que $AQ = 3{,}5cm$,
R est le point de l'arête (BC) tel que $BR = 2cm$.
On "coupe" le cube suivant le plan (PQR), dessiner sur la maquette et en vraie grandeur sur la feuille la section plan du cube.
Indiquer sur la feuille la démarche suivie pour le dessin sur l'objet et le dessin en vraie grandeur.
Terminer en représentant, sur chaque dessin en perspective parallèle ci-dessous, la section obtenue.
Nommer avec soin les sommets du cube, ainsi que les sommets de la section.





Exemple d'une feuille d'apprentissage.[4]

4 La figure de droite est une projection parallèle sur un plan parallèle à une face, l'angle des fuyantes est de 153° et le coefficient de réduction est de 3/5. La figure de gauche est une projection parallèle sur un plan parallèle à un face, l'angle des fuyantes est de 35° et le coefficient de réduction est de 1/2. Les figures sont réduites à l'échelle 70%.

Bibliographie

BALDY, R. (1989). Comparaison de dessins d'objets en perspective cavalière avec un dessin modèle ou avec un objet réel. *European journal of psychology of education* v.IV n.3, pp. 419-428.

BECHMANN, R. (1991). *Villard de Honnecourt. La pensée technique au XIII^e siècle et sa communication*. Picard éditeur, Paris.

BELHOSTE, B. (1989). Gaspard Monge. *Pour la Science* n.146, pp. 66-73.

______.(1997). L'école du génie de Mézières, l'alliance entre théorie et pratique. *La Recherche* n.300, pp. 40-45 .

BESSOT, A., EBERHARD M. (1987a). Représentations graphiques d'assemblages de cubes et finalités des situations. *Le dessin technique*, (P. Rabardel, A.Weill-Fassina éditeurs) Hermès, Paris, pp.61-71.

______.(1987b). Représentations graphiques et théorisation de l'espace des polycubes. Un processus didactique. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (G. Vergnaud, G. Brousseau, M. Hulin éditeurs). Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 87-108.

BONAFE, F. (1985). *La genèse du problème SEC.* Edition Irem-USTL, Montpellier.

______.(1991). *La séquence PC, suite pas à pas des travaux des élèves.* Edition Irem-USTL, Montpellier.

CARON-PARGUE, J. (1981). Quelques aspects de la manipulation. Manipulation matérielle et manipulation symbolique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* V.2.1, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 5-35.

______.(1985). *Le dessin du cube chez l'enfant: organisations et réorganisations de codes graphiques.* Editions Peter Lang, Berne.

______.(1987). Une approche de la genèse de la production graphique. Le dessin du parallélépipède. *Le dessin technique*, (P. Rabardel, A.Weill-Fassina éds) Hermès, Paris, pp. 35-42 .

CHEVALIER, A. (1989). *Analyse du problème SEC. Dessin en perspective cavalière et vision de l'espace.* Edition Irem-USTL Montpellier.

COMAR, P. (1994). *La perspective en jeu. Les dessous de l'image.* Ed. Découvertes Gallimard, Paris.

DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères*, n.7. Topiques éditions, Pont-à-Mousson, pp. 121-138.

_____.(1995a). *Signe et objet*. À paraître.

_____.(1995b). *Sémiosis et pensée humaine.* Peter Lang, Berne.

GAMBA, E., MONTEBELLI, V. (1996). Piero della Franscesca peintre mathématicien. *Pour la Science*, n.224, pp. 68-75.

MARTZLOFF, J. C. (1988). *Histoire des mathématiques chinoises.* Editions Masson, Paris.

NORDON, D. (1992). Bloc-notes. *Pour la Science,* n.71, p. 7.

OLÉRON, P. (1963). Les activités intellectuelles. *Traité de psychologie expérimentale* VII. *L'intelligence.* (J. Piaget, P. Fraisse éditeurs). P.U.F. Paris (1980), pp. 1-62.

PAIS, L. C. (1991). *Représentation des corps ronds dans l'enseignement de la géométrie au collège: pratiques d'élèves, analyse de livres.* Thèse de doctorat, Montpellier II.

PALMER, S., ROCK, I. (1991). L'héritage du gestaltisme. *Pour la Science,* n.60, pp. 64-70.

PARZYSZ, B. (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir-savoir*. Thèse de doctorat de l'Université de Paris VII.

_____.(1991). Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* V.11, pp. 2-3, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 211-240.

PANOFSKY, E. (1987). *La vie et l'Art d'Albrecht Dürer* (Première édition 1943) Edition Hazan, Paris.

PEIFFER, J. (1993). Dürer, le peintre géomètre. *Pour la Science,* n.184, pp. 10-12.

POTIÉ, P. (1996). *Philibert de l'Orme. Figures de la pensée constructive.* Editions Parenthèses, Marseille.

ROMMEVAUX, M-P. (1991). Le premier pas dans l'espace. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* v.4. Irem-ULP, Strasbourg, pp. 85-123.

_____.(1997). *Le discernement des plans: un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle.* Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg.

SAKAROVITCH, J. (1995). Stéréotomie et géométrie. *Mathématiques et Arts.* (M.Loi éditeur) Hermann éditeurs, Paris, pp. 79-91.

TATON, R. (1951). *L'œuvre mathématique de G. Desargues.* Presses Universitaires de France, Paris.

Lacroix e a popularização da geometria analítica*

CIRCE MARY SILVA DA SILVA**

Resumo
O francês Sylvestre Lacroix, professor da Escola Politécnica de Paris, foi autor de numerosos livros-texto abrangendo várias áreas da Matemática. Eles foram adotados oficialmente nos ginásios, colégios e no ensino universitário da França e tiveram também ampla penetração em outros países europeus, como, por exemplo, na Alemanha. No Brasil, pode-se dizer que houve um longo período de dominância dos livros de Lacroix, de tal maneira que o ensino de matemática no País, no século XIX, foi fortemente orientado pela obra de Lacroix. Em 1812, o brasileiro José Victorino Santos de Souza traduziu a terceira edição do livro de Lacroix, que era o livro-texto recomendado para a Academia Militar do Rio de Janeiro. O Tratado Elementar de Aplicação de Álgebra à Geometria não consiste numa simples tradução. Victorino separou a Trigonometria da Geometria Analítica. Ele não abordou as noções trigonométricas, iniciando o texto com a Geometria Analítica propriamente dita. Além disso, o autor contribuiu incluindo alguns temas que ele mesmo elaborou, no apêndice. Essa obra foi indicada como livro-texto para a disciplina de Geometria Analítica nos cursos de matemática, no Brasil, até a década de 70. Outro autor fortemente influenciado por Lacroix, no Brasil, foi José Saturnino da Costa Pereira, que em 1841 publicou o livro intitulado "Applicação da Algebra a Geometria ou Geometria Analítica segundo o systema de Lacroix". Apresenta-se uma análise da referida obra procurando compará-la com aquela de Lacroix.
Palavras-chave: Geometria Analítica, Sylvestre Lacroix, álgebra, História da Matemática, José Victorino Santos e Souza, José Saturnino da Costa Pereira.

Abstract
The French Sylvestre Lacroix, a professor of the Polytechnic School of Paris, was the author of various text-books dealing with many areas of Mathematics. His books were officially adopted at schools and universities in France and also had a broad acceptance in other European countries such as Germany. In Brazil, it is possible to say that there was a long period of dominance of Lacroix's books – the teaching of Mathematics in the country during the 19th century was strongly guided by Lacroix's work. In 1812, the Brazilian José Victorino Santos de Souza translated the third edition of Lacroix's book, the text-book recommended to Rio de Janeiro's Military Academy. The Tratado

* Pesquisa financiada pelo CNPq.

** Circe Mary Silva da Silva é professora do Departamento de Didática e Prática de Ensino da Universidade Federal do Espírito Santo, doutora em Educação Matemática pela Faculdade de Matemática da Universidade de Bielefeld, Alemanha.

Elementar de Aplicação de Álgebra à Geometria (Elementary Treatise on the Application of Algebra to Geometry) is not a mere translation. Victorio separated Trigonometry from Analytical Geometry. He did not approach the trigonometry notions; he began the text with Analytical Geometry. Furthermore, the author contributed including in the appendix some themes that he elaborated himself. This work was indicated as a text-book to the subject of Analytical Geometry in Mathematics courses in Brazil until the 1970's. Another author strongly influenced by Lacroix in Brazil was José Saturnino da Costa Pereira, who published in 1841 a book entitled "Applicação da Algebra a Geometria ou Geometria Analítica segundo o systema de Lacroix" (Application of Algebra to Geometry or Analytical Geometry according to Lacroix's system). This article presents an analysis of the above-mentioned work, comparing it with that of Lacroix.
Key words: *Analytical Geometry; Sylvestre Lacroix; Algebra; History of Mathematics; José Victorino Santos de Souza; José Saturnino da Costa Pereira.*

Aplicação da álgebra à geometria por Lacroix

Sylvestre François Lacroix (1765-1843) nasceu em Paris. Foi catedrático de Matemática da Escola de Guardas da Marinha, em Roquefort, 1782; membro da Comissão de Restauração da Instrução Pública, na França, em 1794; professor da Escola Politécnica de Paris, em 1799; exerceu também a docência na Universidade de Paris, em 1815, e, após, no Colégio de França. O ano de 1831, na Academia de Ciências de Paris, foi marcado pela polêmica que envolveu os trabalhos de Galois. Nessa época, juntamente com Poisson, Cauchy, entre outros, era também membro da referida Academia o matemático Lacroix. Juntamente com os demais matemáticos, leu e emitiu parecer sobre os resultados em teoria das equações alcançados por Galois[1]. Ficou muito conhecido por sua produção científica, escreveu inúmeros livros de Matemática para o ensino, que influenciaram o ensino de Matemática na França, no século XIX. Essas obras foram traduzidas para diversas línguas: alemão, inglês e português, entre outras. A Escola Normal, em

1 A carta de Galois, de 31 de março de 1831, fazia um apelo veemente ao presidente: "Eu lhe peço, senhor presidente, para libertar-me de minha intranquilidade, perguntar aos senhores Poisson e Lacroix, se eles talvez localizaram o meu tratado ou se eles tencionam apresentar a Academia um parecer sobre ele (...)" A resposta da Academia foi enviada em outubro do mesmo ano, ocasião esta em que Galois encontrava-se na prisão, onde afirmava que o trabalho "(...) não era suficientemente claro nem tão pouco suficientemente redigido, a fim de que pudesse ser julgado (...) Espera-se que o autor publique uma versão completa de seu trabalho, antes de dar-lhe um parecer final". (Wussing, p. 393).

Paris, foi fundada no mesmo ano que a Escola Politécnica (1794) e, entre seus professores, encontramos os proeminentes docentes Lagrange, Laplace, Monge, Hachette e Lacroix.

O livro-texto que Lacroix escreveu, intitulado *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie*, foi verdadeiramente o primeiro livro-texto sobre a Geometria Analítica plana. No século XIX, surgiram 27 edições em língua francesa dessa obra, tornando-se assim o livro-texto indicado nos colégios, academias militares, escolas normais, etc. Não há praticamente alterações nessas edições, sendo que a décima primeira, de 1863, é praticamente igual à versão da terceira edição do início do século XIX. Essa obra ficou conhecida não apenas na França, mas em vários países, onde foi traduzida e adotada no ensino, como, por exemplo, na Alemanha e no Brasil.

Lacroix foi, sem dúvida, o autor de livros-texto mais produtivo dos tempos modernos, se considerarmos as múltiplas edições de seus livros. Somente em língua francesa foram escritas por Lacroix e publicadas as seguintes obras por nós identificadas: *Traité élémentaire d'Arithmétique* (vigéssima edição em 1848); *Cours de Mathématiques à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations* (obra adotada pelo governo para os liceus, escolas secundárias e colégios); *Éléments d'Algèbre* (vigéssima primeira edição em 1854); *Éléments d'Géométrie* (décima oitava edição em 1863), introduzida nas escolas públicas e autorizada pelo ministro da Instrução Pública em 1861; *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie* (primeira edição em 1798 e vigéssima quinta edição em 1897); *Complément des Éléments d'Algébre* (sétima edição em 1863); *Essais de Géométrie sur les Plans et les Surfaces courbes* (Éléments de Géométrie descriptive), sétima edição em 1863; Traité du Calcul différentiel et du calcul intégral; *Traité élémentaire de Calcul différentiel et du Calcul intégral* (sexta edição, revista e aumentada por Hermite e Serres em 1861-62 e nona edição em 1881); *Essai sur l'Enseignement en général et sur celui des Mathématiques en particulier* (1838); *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités* (quarta edição em 1863); *Introduction à las Géographie mathématique et physique; Introduction à la connaissance de la Sphère* (1832).

Lacroix inspirou-se em Lagrange e Monge para escrever seu livro-texto sobre Geometria Analítica. Gaspard Monge (1748-1818) muito conhecido por sua obra de Geometria Descritiva, escreveu também sobre Geometria Analítica. Foi um dos primeiros professores da Escola Politécnica de Paris, fundada em 1794, juntamente com Laplace. A exemplo de Lagrange, Monge não fez uso de diagramas geométricos. Na primeira edição do livro *Feuilles d'analyse appliqué à la géométrie*, de 1795, Monge inicia com a equação da linha reta no plano, estabelece as condições de perpendicularismo entre retas todavia, essas considerações são excluídas das edições posteriores, ficando em sua obra apenas os resultados referentes à Geometria Analítica a três dimensões. A edição de 1801 traz outro título *Applications de l'algèbre à la géométrie*. É o primeiro tratado, após o *Introductio* de Euler (1707-1783), em que as transformações de coordenadas e a pesquisa das superfícies do segundo grau recebem um tratamento original. A abordagem de Monge sobre as transformações de um sistema de coordenadas aproxima-se muito do atual tratamento, que utiliza matrizes. Analisandos-se ambas obras: a *Geometria Descritiva* e a *Aplicações da Álgebra à Geometria*, pode-se perceber que o autor aspirava sempre estabelecer uma conexão entre a Geometria e a Álgebra, ainda que, em cada caso, trate-se da elaboração de métodos independentes um do outro. Há um paralelismo entre os conteúdos tratados em ambos os livros no que se refere ao estudo da reta e do plano.

Lacroix conhecia a fundo o trabalho de Monge, tinha sido seu aluno, e foi posteriormente seu colega. Era necessário escrever um trabalho introdutório para a Geometria Analítica em duas dimensões. Monge e Lacroix deram à Geometria Analítica a sua forma final, mas não o seu nome, este foi dado por Biot em 1802, na obra *Essai de géométrie analytique*. O livro texto de Biot foi muito usado nos Estados Unidos, enquanto que o de Lacroix foi o livro-texto de quase todo o século XIX, na França, e também no Brasil, sendo posteriormente substituído pelo livro de Comte, sobre o mesmo assunto. Monge foi o modelo de que se serviu Lacroix para apresentar um tratamento da Geometria Analítica no plano, mas seu inspirador verdadeiro foi Lagrange. O artigo de Lagrange de 1773, intitulado "Soluções analíticas de quaisquer problemas sobre pirâmides triangulares", foi a obra-mestra do tipo de geometria que Lacroix tinha em mente. Segundo Delambre (1749-1822) a ressureição da aliança da geometria com a álgebra, iniciada por Descartes, foi devida a Monge e sua influência foi estendida aos livros elementares através das obras de Lacroix e Biot (Boyer, 1956, p. 211).

Lacroix concebeu a Geometria Analítica somente a partir de Viète e Descartes. Antes deles, a álgebra era apenas um meio para facilitar a aplicação de certos teoremas de geometria na resolução de determinadas questões. O trabalho de Descartes serviu como ponto de partida, mas foi segundo Lacroix, somente no século XVIII, que os matemáticos começaram a analisar as curvas a partir das equações gerais a duas incógnitas. Esse trabalho, devido principalmente a Euler e Cramer, facilitou o desenvolvimento do Cálculo Diferencial no século XVIII.

A Mecânica, que começou a desenvolver-se graças aos trabalhos de Descartes, Huyghens e Newton, não se beneficiou, no século XVII, das aplicações da álgebra. A razão disso, segundo Lacroix, era a predileção que Newton tinha pela síntese, muito ao gosto dos cientistas da época. A situação alterou-se somente com Euler, que introduziu a análise sem restrições. Ele foi o primeiro que procurou deduzir as leis do movimento dos corpos inteiramente a partir do Cálculo. Com isso a Mecânica tomou um impulso muito grande no século XVIII.

Lacroix questiona: "Qual deve ser o conteúdo de um tratado de aplicação da álgebra à geometria, quando este se destina a alunos que devem se consagrar aos estudos das ciências físico-matemáticas, por exemplo a fortificação, a artilharia, a química e a mineralogia?" Sua resposta: "A obra deve conter tudo o que é necessário para compreender as obras mais modernas" – supõe-se que aqui o autor esteja se referindo ao cálculo diferencial e integral, a mecânica e a física. Além disso, o autor acentua que a obra deve mostrar o duplo ponto de vista sob o qual se pode considerar a Geometria Analítica: primeiramente, da maneira como os inventores a trataram, como um meio de combinar os teoremas da geometria; e, em segundo lugar, como Descartes, Lagrange e Monge, que a tornaram um meio geral de deduzir as propriedades da extensão a partir do menor número de princípios.

O que significa esse duplo ponto de vista? Significa, de um lado, mostrar como a partir de um problema geométrico é possível introduzir-se a notação algébrica para obtermos o equivalente analítico deste ente geométrico, que nada mais é do que seguir a gênese do conceito; de outro lado, tratar o problema enfatizando, priomordialmente, sua abordagem analítica.

O primeiro ponto de vista é exaustivamente abordado por Lacroix, e, nesse sentido, ele se afasta bastante da abordagem de Euler e Lagrange, estando mais próximo de Descartes. As construções geométricas são apresentadas sempre como um recurso mais elegante para resolver o problema.

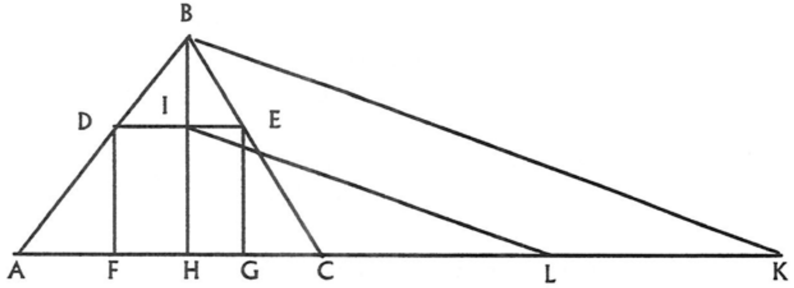
Seus objetivos principais com esse estudo eram: explicitar as linhas segundo as suas equações; transformar as coordenadas; empregar a transformação de coordenadas para a classificação das linhas; partir das propriedades de uma curva para encontrar a sua equação; mostrar que as diversas equações das curvas nada mais são do que enunciados de suas diversas propriedades; deduzir as equações gerais das curvas de segundo grau; deduzir as propriedades dessas curvas e servir-se desses conhecimentos para unir os conhecimentos que os antigos tinham destas curvas com os conhecimentos modernos; determinar as tangentes das curvas do segundo grau segundo um método analítico; determinar os limites das tangentes e assíntotas; determinar as curvas pelo número de pontos que as caracterizam; usar as curvas para construir as raízes das equações e para determinar a sua resolução.

Curiosamente, a obra de Lacroix ainda está muito próxima da de Descartes. Ele não inicia a abordagem da Geometria Analítica pelo sistema de coordenadas; este será introduzido muito tardiamente. A exemplo de Descartes, começa com problemas clássicos da geometria euclidiana, mostrando como eles podem ser resolvidos com auxílio da álgebra, e também como os construir geometricamente.

Entre os inúmeros exemplos que Lacroix apresenta sobre as aplicações da álgebra à geometria encontra-se, no parágrafo 3, o problema que propõe inscrever um quadrado DEFG, em um triângulo ABC.

A resolução de Lacroix segue o método formulado por Descartes:

"Será necessário supor a questão resolvida, e depois disso procurar entre as linhas dadas imediatamente pelo triângulo, e o lado do quadrado, uma relação que se possa exprimir algebricamente. Para o que abaixaremos a perpendicular BH, que consideraremos conhecida. Depois disso, consideraremos os triângulos BAC e BDE; BAH e BDI, que permitem escrever:



(fig.1)

AB: BD:: AC: DE

porque os triângulos BAC e BDE são semelhantes,

AB : BD :: BH : BI

porque os triângulos BAH e BDI são semelhantes.

Destas relações pode-se escrever:

AC : DE :: BH : BI

Ora BI = BH – IH

e pela definição de quadrado, IH = DE. Designando AC por "a" e BH (a altura) por "b" e IH por "x" teremos:

BI = b -x,

$$x=\frac{ab}{a+b}$$

Quando os segmentos a e b forem expressos em números, a fórmula acima dá o número que exprime o comprimento do segmento IH. Mas, não há necessidade de recorrer aos números para determinar o comprimento de IH, e por conseqüência o ponto I; as operações indicadas na expressão de x podem efetuar-se sobre as linhas.

Com efeito, é claro que esta incógnita é o quarto termo da proporção seguinte:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{b}{x}$$

e que por conseguinte tudo se reduz a achar a quarta proporcional às linhas a+b, a e b" (Victorino, p. 5).

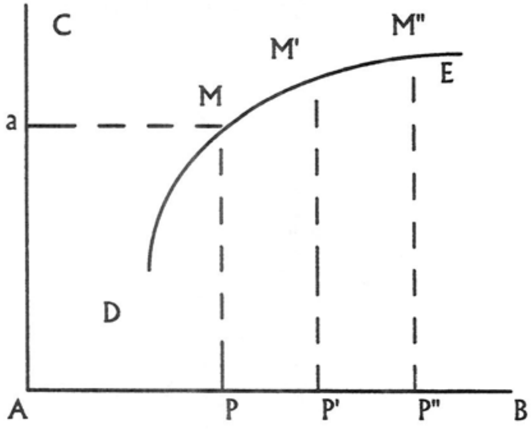
O autor considera mais elegante tratar o problema apenas com a ajuda da geometria. Para determinar o ponto I, ele procede da seguinte maneira: traça a altura do triângulo, que é o segmento BH. A partir de H determina o ponto L, que tem medida igual ao segmento AC, e, a partir de L, determina o ponto K, de tal maneira que o segmento LK é igual a BH. Isto é, HL = a = AC, LK = b = BH. Unindo o ponto K ao ponto B, e depois tirando IL paralelamente a BK, determina-se ponto I.

Há uma grande preocupação em mostrar que os procedimentos analíticos, embora muito eficientes, podem ser substituídos pela construção geométrica, considerada mais elegante. O método analítico não parece ainda possuir muita força ou, talvez, a tradição euclidiana esteja muito presente na concepção de uma matemática que deve se caracterizar pela "elegância".

Lacroix repete as construções para as operações elementares conforme Descartes, em 1637, como, por exemplo, para a raiz quadrada.

A Geometria Analítica, propriamente dita, é introduzida no capítulo 18:

> Se imaginarmos, por exemplo, que todos os pontos de uma linha qualquer DE (fig.2) se abaixarem perpendiculares PM, P'M', P"M", etc sobre uma lina reta AB, dada numa posição, e que a partir de um ponto A, tomado à vontade sobre esta linha, se tenham medido as distâncias AP, AP', AP", etc, cada uma destas distâncias, e a perpendicular que lhe corresponde, estarão ligadas entre si de maneira que uma necessariamente se concluirá da outra. (...) Não há obstáculo em imaginarmos que as linhas AP e PM sejam referidas a uma linha comum tomada por unidade, e que sob este ponto de vista, elas sejam antes representadas por números de que por letras. Se a relação que houver entre AP e PM, entre A'P' e P'M", etc puder ser expressa por uma equação algébrica, esta equação caracterizará a linha DE e poder-se-á fazer conhecer sucessivamente todos os pontos.



(fig.2)

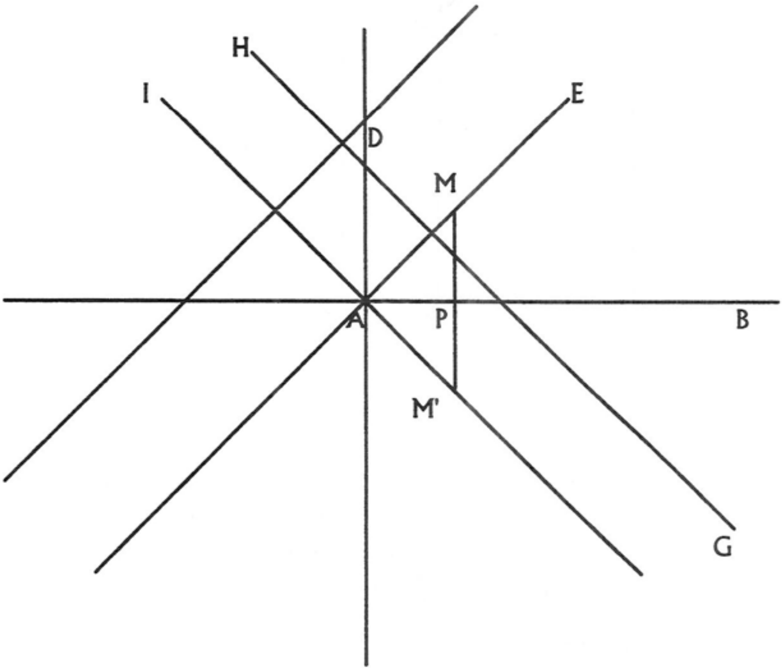
Segundo Lacroix, a mais simples das equações é a equação do primeiro grau e esta representa a reta. "Esta equação pode representar-se por Cy = Ax + B: porém se dividirmos tudo por C, nada perderá de generalidade, e virá a ser $y = \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}$ ou y = ax + b, fazendo $\frac{A}{C} = a$ e $\frac{B}{C} = b$" (Victorino, p. 42).

Supondo inicialmente b = 0, a equação fica y = ax e isto quer dizer que em toda a sua extensão a relação de PM e AP será constante. Esta propriedade resulta da semelhança dos triângulos APM, AP'M', etc.

Resulta da semelhança dos triângulos que $\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'}$. O coeficiente a depende do ângulo que a reta AE faz com o eixo AB, e no triângulo retângulo APM, a relação $\frac{PM}{AP}$ representa a tangente deste ângulo.

Após ter identificado o coeficiente a com a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo, o autor dá a condição de paralelismo e deduz a condição de perpendicularismo entre duas retas:

considerando as retas AE e AI perpendiculares, como na figura 3, abaixo:



(fig.3)

cujas equações são $y = ax$ e $y = a'x$, respectivamente, pela semelhança dos triângulos AMP e AM'P conclui-se que $a' = -1/a$.

A expressão que permite calcular a distância entre dois pontos surgiu tardiamente, dentro da história da geometria analítica. Foi em 1731 que, pela primeira vez, Clairaut, nos seus "Recherches", mostrou essa fórmula, quando deduzia a equação da esfera. Da mesma forma, também no texto de Lacroix, esta fórmula só aparece depois que ele deduziu uma série de outras expressões. Utilizando o triângulo retângulo NRN', da figura 5, chamando as coordenadas dos pontos N e N' de α, β e α' e β', respectivamente, ele chega na equação:

$$d = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}$$

Os clássicos problemas envolvendo retas, como, por exemplo, a distância de um ponto a uma reta, é tratado como o comprimento de uma perpendicular baixada de um ponto a uma reta.

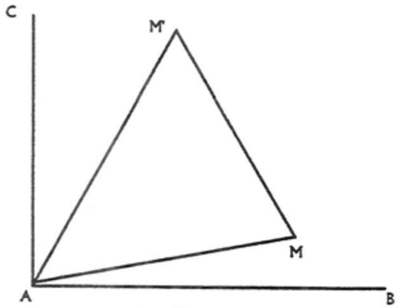
Utilizando o conceito de distância entre dois pontos, deduz a equação geral do círculo

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2py + q^2 = r^2$$

e resolve o problema de determinar a equação do círculo que passa por três pontos dados.

Segue-se uma série de problemas envolvendo retas e círculos, entre eles o de achar a área de um triângulo.

Problema: Achar a área do triângulo MAM', onde A é a origem.



(fig.4)

Se as coordenadas dos pontos M e M' são, respectivamente, (α, β) e (α', β) então a equação da reta que passa por estes pontos é:

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

ou

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha - \alpha'}$$

comparando esta última fórmula com a equação y = ax + b, teremos:

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} \text{ e } b = \frac{\alpha' \beta - \beta' \alpha}{\alpha - \alpha'}$$

a perpendicular procurada terá equação

$$y = -\frac{1}{a}x + b$$

Utilizando a expressão para o cálculo do comprimento da perpendicular, vem:

$$d = \frac{\beta - \mathrm{b} - \mathrm{a}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + 1}}$$

como a = 0 e b = 0, vem:

$$d = \frac{-\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + 1}}$$

substituindo a e b pelos valores acima:

$$d = -\frac{\alpha' \beta - \beta' \alpha}{(\alpha - \alpha')\sqrt{\mathrm{a}^2 + 1}} = -\frac{(\alpha' \beta - \beta' \alpha)}{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}}$$

daí o comprimento de AD (altura do triângulo) será:

$$AD = \frac{(-\alpha' \beta + \beta' \alpha)}{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}}$$

e como o comprimento do segmento MM' é

$$\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}\ ,$$

temos que a área do triângulo considerado é:

$$S = \frac{(-\alpha'\beta + \beta'\alpha)}{2}$$

expressão esta que dá a área de todos os triângulos que têm um dos vértices na origem.

Esta é a única explicitação da área em termos de coordenadas dos vértice. Para o caso de três pontos quaisquer, ele apoiou-se no trabalho de Lagrange (vide Silva da Silva, 1991), só que considerou os pontos no plano, em lugar de os considerar no espaço, como Lagrange, não chegando a obter uma fórmula análoga à de Lagrange, para três pontos quaisquer no plano.

Vários problemas propostos pela geometria euclidiana são abordados analiticamente para ilustrar a aplicação da álgebra à geometria: *"tirar uma tangente a um círculo por um ponto fora dele"* (Victorino, p. 45).

Segundo Lacroix, as questões da Geometria poderiam ser tratadas por dois métodos muito distintos:

> ... um consiste em determinar as equações das linhas que contém os pontos, que se procuram, partindo das propriedades destas linhas; e o outro, a deduzir imediatamente da consideração dos triângulos semelhantes, e dos triângulos retângulos, que apresenta a figura resultante do problema suposto resolvido (ajudando-se para isto de alguma construção preparatória) as relações das retas que determinam a posição destes pontos. o primeiro destes métodos, que muitas vezes é mais elegantes, é sempre mais geral, porém o segundo é freqüentemente mais simples (Victorino, p. 81).

Após o estudo detalhado da reta, envolvendo também problemas relacionados à circunferência, o autor apresenta a equação do segundo grau a duas variáveis afirmando que a equação da circunferência nada mais é do que um caso particular das equações do segundo grau e que resta ainda descobrir as curvas que correspondem aos outros casos que essa fórmula envolve:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e$$

$$y = \frac{-(ax + c) \pm \sqrt{4e + c^2 - (4b - a^2)x^2 - 2(2d - ac)x}}{2}$$

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

ou de forma mais abreviada:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e$$

Com o objetivo de analisar quais as curvas que tal equação pode representar, ele isola o termo y:

$$y = \frac{-(ax + c) \pm \sqrt{4e + c^2 - (4b - a^2)x^2 - 2(2d - ac)x}}{2}$$

Fazendo para abreviar:

$$4e + c^2 = p$$
$$2d - ac = n$$
$$4b - a^2 = m$$

teremos,

$$y = \frac{-ax + c}{2} \pm \frac{\sqrt{p - 2nx - mx^2}}{2}$$

dependendo da quantidade sob o radical teremos diferentes curvas: se m for positiva, compreende um espaço fechado, e elas são designadas pelo nome elipse. Se m for negativo então elas são formadas de quatro ramos infinitos e formam duas partes separadas, chamam-se hipérboles. Se m for nulo é a equação de uma parábola.

A abordagem sobre a mudança de coordenadas de Lacroix difere daquela apresentada por Euler, em 1748, em que ele emprega as relações trigonométricas. Aqui, o autor trabalha apenas com semelhança de triângulos e exclui qualquer referência a senos ou cossenos de ângulos.

Em nota de rodapé, o tradutor explica que não seria difícil transformar as denominações m, n, p e q em termos de senos e cossenos dos ângulos compreendidos entre os eixos das coordenadas e teríamos então as fórmulas que se acham em muitas obras, porém a "forma aqui adotada abrevia as expressões e conserva melhor elegância analítica", foi por isto que Lagrange e Monge as preferiram, em lugar do uso de funções trigonométricas. Todavia, o tradutor omite as transformações que Lacroix faz utilizando as linhas trigonométricas.

É fácil ver que se se m é o cosseno do ângulo B"A'"B', denominado f, e n é o seno do mesmo ângulo, valerá a relação $m^2 + n^2 = 1$ e teremos, em lugar das expressões $x' = mt - nu$ e $y' = nt + mu$ a seguinte fórmula:

$$x' = t \cos f - u \operatorname{sen} f$$
$$y' = t \operatorname{sen} f + u \cos f$$

O autor mostra ainda como simplificar a equação completa do segundo grau por meio de mudanças de coordenadas. Considera que, para facilitar os cálculos, torna-se mais simples iniciar as operações considerando a mudança de x para $x' + a$ e de y por $y' + b$. Ele não explica o significado geométrico desta mudança de coordenadas, que nada mais é do que uma translação de eixos.

Embora o autor utilize amplamente das representações geométricos (apresenta 76 figuras), não há nenhum exemplo numérico dos problemas enunciados, todos eles são genéricos, nem tão pouco exercícios resolvidos ou problemas propostos.

Como o livro de Lacroix ficou conhecido no Brasil?

Com a vinda da família real para o Brasil, a vida intelectual brasileira, e especialmente a vida na corte (Rio de Janeiro), sofreram mudanças significativas. Em 13 de maio de 1808, fundou-se a Impressão Régia que, até 1821, foi a única tipografia no Rio de janeiro. No primeiro ano de sua fundação foram editadas 37 publicações e, segundo Wilson Martins[2], até 1822 foram catalogadas 1154 publicações. Todavia o surgimento da imprensa no Brasil não significou a liberdade de pensa-

2 Veja em Wilson Martins *História da Inteligência Brasileira*, vol.II, p.29.

mento na Colônia. A Impressão Régia era dirigida por uma junta que tinha amplos poderes de censura. Entre os membros dessa junta vêem-se os nome de José Saturnino da Costa Pereira, docente da Real Academia Militar e político (ministro e senador), Manuel Ferreira de Araujo Guimarães, também docente da mesma Academia e político, bem como o filósofo e publicista Silvestre Pinheiro Ferreira e cônego Januário da Cunha Barbosa, fundador do Instituto Histórico. Contrário à censura exercida pela junta diretora da Impressão Régia, Hipólito José da Costa (1774-1823) iniciaria no jornal *Correio Brasiliense* um movimento de cunho liberal. No quinto número do jornal, de outubro de 1808, Hipólito manifestava-se contra as atividades de censura da junta diretora:

> Aquele freio, de que se não possa publicar obra alguma, em matéria nenhuma, sem que seja aprovada por uns poucos homens (...) Se agora ressuscitasse o grande Newton e quisesse publicar em Portugal os seus Princípios Matemáticos (...) seria essa obra mandada rever (...) e se o frade a quem a obra fosse distribuída para a censura assentasse que as proposições matemáticas que ele não entendia deviam, por isso ser suprimidas, bem que podia o grande Newton tornar a morrer e enterrar-se junto com sua obra, porque Portugal e o Mundo estava sentenciado a ser privado do benefício daquela obra (...) (Martins, p. 33).

No Brasil, Lacroix ficou muito conhecido no meio acadêmico. Os membros da junta militar da Real Academia Militar do Rio de Janeiro, responsáveis pela orientação acadêmica dos cursos da referida academia, elegeram os livros-texto de Lacroix como os mais adequados para o ensino, e, por muitos anos, eles foram os mais recomendados e utilizados na escola. A primeira tradução da *Geometria Analítica* surgiu em 1812 e foi feita por José Victorino de Santos Souza. Além desta tradução apareceu a de Manoel Ferreira Guimarães (1777-1838), em 1821, e outra obra intitulada *Geometria Analítica* segundo o sistema de Lacroix, de José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852), em 1842. Embora tenha-se localizado as traduções da obra de Lacroix sobre a Geometria Analítica, presume-se que as versões em língua francesa eram muito utilizadas, no Brasil, porque ainda no final da década de 90 desse século, encontram-se nos sebos de grandes cidades como Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre, edições francesas da metade do século XIX.

Mesmo tendo surgido outros autores populares como Lefebure de Fourcy[3] e Biot[4], o ensino da Geometria Analítica no Brasil orientava-se mais fortemente nos livros de Lacroix. A partir da análise que se vem desenvolvendo com os livros-texto de Matemática utilizados no Brasil, no século passado, nota-se que o nosso ensino seguia o mesmo estilo que nos demais países.

Os dados biográficos de José Victorino dos Santos e Souza não são facilmente encontráveis. Sabe-se que faleceu em 1852 no Rio de Janeiro, formou-se em matemática e foi docente da Real Academia Militar do Rio de Janeiro. Traduziu livros franceses que começaram a ser publicados em 1812 para uso dos alunos da Academia. As obras que publicou não são meras traduções, há contribuições do autor: *Elementos de geometria descriptiva com aplicação às artes*, extraídos das obras de Monge para uso da Real Academia Militar, Rio de Janeiro, 1812; *Tratado elementar de aplicação da álgebra à geometria* por Lacroix, traduzido do francês, acrescentado e oferecido ao Conde de Galveas, etc,1812; *Geometria e mecânicas das artes, dos ofícios e das belas-artes* por C. Dupin; traduzidos do francês, 1832; "Memória sobre as causas físicas dos movimentos de rotação da terra e dos planetas"; causas e influências da lua, etc. In: *Sciencia*, 1847, p. 84.

Na dedicatória da obra, o autor afirma que foi encarregado da tradução do compêndio de Lacroix para que o mesmo fosse utilizado na Real Academia Militar. Baseado nos Estatutos e na Carta de Lei de 1810, que criou a Academia Militar do Rio de Janeiro, foi incentivado a fazer acréscimos à obra "... concedem aos Lentes, para adicionarem os métodos e novas decobertas, que se possam fazer nas ciências, me resolvi a dar a extensão necessária ao Apêndice que se segue ao referido Compêndio ..." (José Victorino, dedicatória, sem paginação). A obra que José Victorino traduziu foi a terceira edição do *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre*. Todavia, ele excluiu da tradução os capítulos referentes à trigonometria. Não há no texto qualquer explica-

3 A primeira edição do livro de Lefebure surgiu em 1827 e intitulava-se: *Leçons de Géométrie Analytique, comprenant la trigonométrie rectiligne et sphérique, les lignes et les surfaces de deux premiers ordres*. Uma nona edição desta obra apareceu em 1871.

4 O livro de Biot, *Essai de géométrie analytique, appliqué aux courbes et aux surfaces du seconde ordre,* surgiu em 1803 e teve nove edições até o ano de 1839, em língua francesa, enquanto que, em língua inglesa, teve sete edições, de 1840 a 1874.

ção sobre esta exclusão. Contudo pode-se conjecturar que o tradutor procedeu desta forma porque já havia sido traduzido o *Tratado de Trigonometria* de Legendre, por Manuel Ferreira de Araujo Guimarães em 1809, e este era recomendado como livro-texto para a Academia.

A introdução que José Victorino apresenta é quase que inteiramente devotada à tradução do prefácio de Lacroix, no qual ele explica sobre o que trata a Geometria Analítica, historiando os desenvolvimentos desde Descartes.

Victorino chama a atenção para o fato de que uma obra que serve como guia para o estudante não deve conter todos os detalhes, os quais não deixam nada para o aluno refletir e trabalhar. Lacroix não abordou a transformação de coordenadas no espaço. O tradutor, que fez vários acréscimos no apêndice, poderia ter incluído este importante tema, mas não o fez e justifica-se dizendo ter analisado todas as possibilidades que teria ampliando os métodos e acrescentando, por exemplo, a transformação de coordenadas no espaço, mas não as incluiu porque "o pouco êxito que têm as idéias novas enquanto os espíritos não estão familiarizados com elas, ou elas não se tem tornado necessárias para as aplicações mais elevadas (...) me obrigaram a suspender a sua publicação até que a sua falta se torne sensível" (Victorino, xiii).

José Victorino conclui dizendo que a aplicação da álgebra à geometria, tratada segundo o método de Lacroix, contém os germes preciosos para desenvolver os talentos e promover as faculdades intelectuais dos indivíduos. Essa concepção da Matemática como um instrumento para o desenvolvimento das faculdades intelectuais permanece até os nossos dias, salientada tanto por matemáticos quanto por educadores da matemática.

A versão de Victorino da obra de Lacroix não se enquadra naquilo que denominamos "tradução" propriamente dita. A razão disso reside no fato de que o tradutor fez alterações significativas na obra. Primeiramente, excluiu toda a parte referente à trigonometria e, em segundo lugar, fez acréscimos no apêndice da obra original, em que abordou com mais detalhes a Geometria Analítica espacial. Relativamente à Geometria Analítica plana, Victorino de Souza manteve-se fiel ao texto. Entretanto, o tradutor omite as transformações que Lacroix faz utilizando as linhas trigonométricas, em nota de rodapé.

O objetivo principal de Lacroix foi apresentar a Geometria Analítica a duas dimensões; por isso, dedicou para a parte espacial apenas algumas páginas no apêndice. Ele parece não querer apresentar a Geometria Analítica espacial em todo a sua profundidade, mas sim dar curtas referências ao assunto (lembremos que Monge já havia apresentado a Geometria Analítica espacial de forma bastante aprofundada e sistematizada na obra a que já fizemos referência). As noções básicas que Lacroix selecionou para fazer parte deste apêndice incluem a equação do plano, da reta, as condições de paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos, e ainda uma curtíssima referência às superfícies do segundo grau a três variáveis, onde apresenta a equação do cone reto e da esfera e, como exemplo de uma curva no espaço, determina a intersecção de um plano com um cilindro.

É no apêndice do livro que Victorino revoluciona o texto de Lacroix. Não há mais tradução, mas sim uma nova abordagem sobre o tema. Inicia com o conceito de um ponto no espaço, a seguir deduz as equações de vários sólidos: esfera, cone reto e os sólidos de revolução, como o elipsóide e o parabolóide. Distintamente de Lacroix, antes de abordar o estudo da reta e do plano, ele apresenta a noção de distância entre dois pontos no espaço. Segue-se o estudo sistemático da reta no espaço. Seguindo o estilo de Monge, apresenta os temas, através da formulação de um problema:

> Achar as equações de uma linha reta que passa por dois pontos dados (§129); Achar as condições necessárias para que duas retas sejam paralelas no espaço (§130); Achar as condições necessárias para que duas retas se intercetem no espaço, ou o que é o mesmo, conhecer quando elas existem em um mesmo plano, e quando estas condições forem satisfeitas, achar seu ponto de intersecção (§131); Achar o ângulo que formam duas retas de que temos as equações de projeção (§132); etc.

Assim como Lacroix, a reta é obtida através da intersecção de dois planos. A diferença entre as duas abordagens é que Victorino sistematiza melhor os temas. Como uma aplicação do estudo da reta, ele utiliza os conceitos de reta fixa e móvel para determinar a equação do cone mais geral; assim como exemplifica a aplicação da equação da reta na dedução da equação do cilindro.

Quando aborda as superfícies cilíndricas, Victorino necessita enunciar um resultado que trata de um polígono fechado ("Em um polígono fechado qualquer, um dos seus lados é igual a soma de tordos os outros lados multiplicados cada um pelo cosseno do ângulo, que ele forma com o primeiro"; apêndice, p. 238), que ele não demonstra, mas afirma estar demonstrada por princípios mais longos na "Geometria de Posição". Sua justificativa para não apresentar a demonstração é a seguinte:

> Não damos aqui esta teoria, porque exige figuras e raciocínios, que nos distrairão agora muito do nosso objeto. Quem quiser pode consultar a referida obra, e a correlação das figuras de Geometria donde transcrevemos algumas das consequências que aqui referimos, e que nos servirão para o que adiante temos de tratar a respeito da superfície de poliedros (Victorino, nota de rodapé, p. 241).

Provavelmente o autor esteja se referindo à conhecida obra de Lazare Carnot (1753-1823), *Géométrie de Position*, publicada em 1803. Sabe-se que a obra de Carnot fazia parte do acervo da biblioteca da Escola Politécnica, em 1876, mas não se tem informações de que a mesma já existisse na biblioteca em 1812. Restam poucas dúvidas de que Victorino conhecia a referida obra. Se isso se confirma, é interessante a atualidade que demonstra o autor brasileiro, uma vez que o ano de publicação da tradução de Lacroix ocorreu em 1812, ou seja, nove anos após o surgimento da obra de Carnot.

Só após o tratamento sistemático do estudo da reta, ele introduz o estudo do plano. Nesse estudo inlui: equação do plano no espaço $Ax+By+Cz+D=0$, deduz a equação do plano que passa por duas retas, intersecção do plano com os eixos, intersecção de dois planos, equação do plano que passa por três pontos, planos paralelos, equação de um plano perpendicular a uma reta dada, distância de um ponto a um plano e ângulo entre dois planos.

Quando introduz as curvas no espaço, Victorino resolve inovar, mesmo que seja brevemente, escrevendo as equações das superfícies na forma

$$z = F(x, y),\ z = f(x, y) \text{ e } x = F(y),\ x = f(z),\ y = F(z).$$

Em nota de rodapé ele esclarece: "As letras F, *f*, F denotam funções das coordenadas que seguem, é útil a familiaridade com esta espécie de abstração" (p.262). Esta é a única vez em que o tradutor fala na palavra **função**. Raros são os livros, dessa época, que utilizam a simbologia de funções nos textos sobre Geometria Analítica. Lacroix, por exemplo, não emprega esta terminologia.

O último tema abordado diz respeito às curvas de dupla curvatura. Ele afirma: "em um grande número de casos a curva resultante da intersecção de duas superfícies não será plana, mas sim de dupla curvatura, por exemplo a intersecção da esfera com o cilindro reto"(p. 266). Apresenta vários exemplos de curvas de dupla curvatura como a resultante da intersecção do parabolóide e do cone reto.

Relativamente às ilustrações do texto original, acrescenta algumas figuras àquelas apresentadas por Lacroix, excluindo as referentes à trigonometria. A tradução contém 275 páginas, errata e tábuas de figuras.

Applicação da Algebra a Geometria ou Geometria Analítica, segundo o systema de Lacroix por José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852)

José Saturnino da Costa Pereira, nascido em Sacramento, atualmente cidade localizada no Uruguai, bacharelou-se em matemática pela Universidade de Coimbra. Retornando ao Brasil, exerceu, além da docência na Academia Militar, inúmeras funções públicas: foi oficial do corpo de engenheiros, pertenceu ao conselho do imperador, foi senador do império pela província de Mato Grosso, trabalhou no Ministério da Guerra, etc. Traduziu o *Tratado Elementar de Mecânica*, de Francouer e, como contribuição pessoal, anexou doutrinas extraídas de diversas obras de autores como Poncy, Bossut, Marie, etc. Publicou 18 livros, entre os quais, uma obra dedicada ao imperador Pedro II, intitulada *Recreação moral e científica ou biblioteca da juventude* (1834-1839). Foi um escritor muito ativo, e suas obras abrangem diversas áreas: lógica, geografia, astronomia, ótica, história e literatura, além da matemática. Em 1841 publicou o livro intitulado *Applicação da Algebra a Geometria ou Geometria Analítica*.

Este título contém um subtítulo: segundo o Systema de Lacroix. Analisando o título e o subtítulo temos duas considerações a fazer: a primeira é que Pereira faz uma pequena inovação – Lacroix não utilizou em nenhuma das várias edições de seu livro-texto sobre Geometria Analítica, a denominação Geometria Analítica, embora o termo já tivesse sido utilizado especificamente por Biot como título da obra que escreveu em 1802 sobre o tema; segundo, no subtítulo, Pereira admite explicitamente que baseou-se no "Systema de Lacroix". O que não fica claro, uma vez que o livro não contém nem introdução nem prefácio, é saber o que o autor entendia por "systema". Podemos fazer algumas suposições, como, por exemplo, entender por sistema o conjunto de todas as obras de Lacroix ou talvez o estilo desse escritor.

Pereira não apresenta em seu livro, de 140 páginas, o índice das matérias que desenvolve, mas apresenta, no final do texto, 5 quadros com um total de 62 figuras. É comum, nesta época, não apresentar as figuras junto com o texto, mas sim agrupá-las no final. Lacroix, Biot, Salmon, Comte, entre outros, procederam desta maneira.

Os conteúdos expostos não estão divididos em capítulos, mas separados por 205 parágrafos. Até o parágrafo 165 são abordados os conteúdos de geometria analítica a duas dimensões, após, sob o título "appendix" seguem-se os assuntos referentes à geometria analítica a três dimensões.

Como Lacroix e muitos autores da época, Pereira inicia o seu texto com vários exemplos da aplicação da Álgebra à Geometria. Além do problema clássico, de inscrever um quadrado num triângulo, que é exposto por Bézout em 1772, ele apresenta, por exemplo, o seguinte: "Procuremos a expressão do volume de um tronco, em que os dois lados homólogos, ou os raios de suas bases sejam representados por a e b; por g a sua altura, e por h o da piramide completa" (p. 3). Cinco parágrafos são empregados para a apresentação deste tipo de aplicações. Outro tema que os autores costumavam incluir, antes de introduzir o sistema de coordenadas, eram os problemas de construções dos valores das incógnitas. Este tema começou a ser abrodado por Descartes, em 1637, e manteve-se presente nos livros-texto até o final do século passado. O autor atribuiu muita ênfase a este tema, uma vez que utilizou 19 parágrafos para o desenvolver.

Assim como Lacroix, Pereira teve dificuldades em entender o significado dos números negativos. A este assunto ele dedica três parágrafos.

> Na aplicação da Algebra a Geometria, o sinal " – " se interpreta em geral como a respeito dos números, invertendo em certo modo o enunciado da questão, e tomando as linhas que dela são afetas em sentido contrário ao que haviam sido tomadas. Devemos desde já lembrar-nos que as quantidades negativas tiveram sua origem das subtrações, que não podem efetuar-se na ordem em que são indicadas, porque a quantidade a subtrair excede a de que deve ser tirada. Por essa circunstancia se reconhece, que houve erro no enunciado da questão.... (Pereira, p. 14)

O que sucede é que o autor está ainda muito preso à idéia de grandeza, não consegue pensar em número negativo simplesmente como um novo **objeto matemático** teórico que não existe como um objeto empírico, mas sim, que é definido através da equação $x + a = 0$, ou seja, que é um objeto realmente existente na matemática, porque se pode operar com ele. Aqui, há claramente um obstáculo epistemológico. Como não é possível ver esse ente, por ele denominado, "quantidade negativa", no mundo real, ele simplesmente o refuta. Se surgir um problema cuja solução seja um número negativo, a saída que o autor encontra é afirmar que houve um erro no enunciado do problema e que o enunciado deve ser reformulado para que a resposta seja positiva.

A refutação dos números negativos não é total. Ele necessita desses objetos para estabelecer um sistema de coordenadas. Então, ele admite a operação de subtração de segmentos num sentido amplo, ou seja, admite a subtração quando a linha a subtrair é maior que a linha dada. Neste caso, o sinal negativo corresponderia à oposição de sentido do segmento.

> A continuidade das linhas e a possibilidade de as prolongar indefinidamente nos dois sentidos, dá a seu respeito o meio de operar (...) a subtração da mesma maneira, seja ou não a linha a diminuir menor do que a de quem se diminue. (Pereira, p. 16)

A diferença significativa entre as abordagens de Pereira e Lacroix é observada no tratamento das cônicas.

Para Lacroix há dois métodos para se considerar as questões de Geometria, que podem ser realizadas pelo emprego da Álgebra. O primeiro método consiste em se determinar as equações das linhas, partindo das propriedades geométricas destas linhas; o outro, é deduzir essas equações imediatamente pela consideração de semelhança de triângulos e dos triângulos retângulos, em que se apresenta a figura resultante do problema suposto resolvido. Este último método é aquele que o autor mostra através de inúmeros problemas nos primeiros capítulos de sua obra, como, por exemplo, o problema de inscrever um quadrado num triângulo. Todavia, segundo o autor, o primeiro método é mais elegante e geral e o segundo mais fácil.

Pereira escolhe o primeiro método para iniciar a exposição das cônicas. Ele faz, na realidade duas abordagens distintas para as cônicas. Na primeira, ele parte da definição geométrica de uma curva que satisfaz uma certa propriedade e deduz a equação das cônicas na forma simplificada (que envolve a excentricidade). Na segunda abordagem, ele parte da equação geral do segundo grau a duas variáveis e mostra que esta representa todas as cônicas.

Pereira simplifica muito o texto de Lacroix e apresenta as cônicas de uma forma muito elegante.

> Se cada um dos pontos M de uma curva CM (figura 1) for de sorte colocado a respeito de um ponto fixo F e de uma reta LH dada de posição, que seja sempre constante, a relação entre a reta MF e o comprimento MH da perpendicular baixada do ponto m da curva sobre a mesma reta LH, resultará $\frac{MF}{MH} = e$.

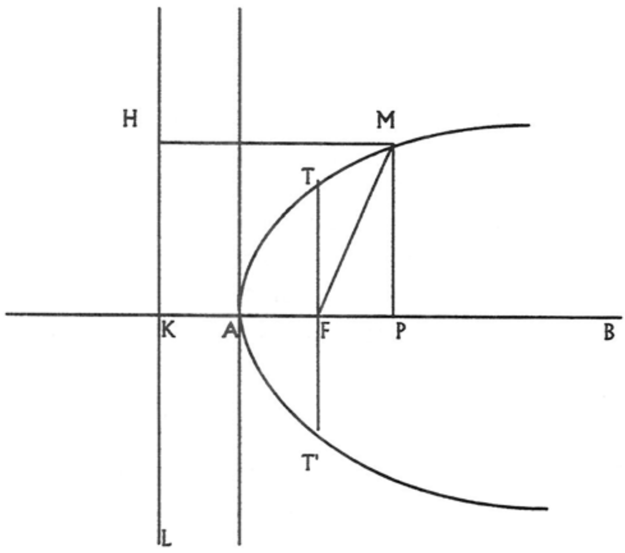


Fig.4

Onde F = foco, FK = eixo das abscissas, A = origem, MP= ordenada, AP= x PM=y, AF=c, AK=h.

Como $\frac{MF}{MH} = e$, deduz-se facilmente que

$$y^2 + x^2 + c^2 - 2\,cx = h^2 e^2 + x^2 e^2 + 2\,hxe^2.$$

Se tomarmos a origem no ponto em que a curva corta o eixo, na equação acima fazendo x=0 e y=0 dará $c^2 = h^2 e^2$ e chega-se a uma equação simplificada:

$$y^2 = 2\,cx(1 + e) - x^2(1 - e^2)$$

A constante e pode ser igual, menor ou maior que a unidade, resultando daí três curvas distintas.

A partir daí deduz as equações da parábola, elipse e hipérbole.

As cônicas são também obtidas por intersecções feitas por um plano em um cone reto. A terceira abordagem feita pelo autor é partir da equação do segundo grau a duas variáveis e mostrar que essa tem por lugar geométrico uma cônica. O último tema abordado sobre a geometria analítica plana diz respeito às equações das cônicas em coordenadas polares. Chega a equação geral $r = \dfrac{d(1+e)}{1+e\cos\varphi}$, que pertence a todas as cônicas.

O "appendix" do livro de Pereira difere significativamente daquele de Victorino. Inicia com o conceito de um ponto no espaço, aborda os eixos coordenados, introduz a equação do plano, e, a seguir, a equação da reta, que é introduzida com sendo a intersecção de dois planos. Seguem-se temas ligados ao plano e à reta: equação de um plano que passa por 3 pontos; equação da reta que passa por dois pontos; duas retas contidas num mesmo plano; condição para que dois planos sejam paralelos; condição para que duas retas sejam paralelas; condição para que um plano seja perpendicular a uma reta; condição para que uma reta seja perpendicular a um plano; distância de um ponto a origem; distância entre dois pontos; ângulo entre retas; retas perpendiculares; cossenos diretores; ângulos entre planos; planos perpendiculares. Após isso, o autor apresenta as superfícies, as secções de superfícies, as superfícies de revolução. O elipsóide é apresentado com a denominação de "sólido ellíptico" e também é deduzida a equação para o cone reto. Uma curta referência é feita a curvas com dupla curvatura.

Como devemos classificar o livro-texto de Pereira? Ele seria uma mera tradução ou uma obra independente? Quais os critérios que se dispõe para julgar em tal caso? É difícil um posicionamento radical. Seria um tanto injusto falar em mera tradução. Todavia, o livro-texto está fortemente baseado no estilo de Lacroix, apresentando algumas contribuições do autor, tanto em ordenação dos conteúdos, quanto em exemplos, neste caso talvez seja possível dizer que já se trata em um livro-texto independente daquele de Lacroix. Se julgarmos desta maneira, trata-se efetivamente do primeiro-livro texto de Geometria Analítica escrito por um brasileiro.

Conclusões

Lacroix inspirou-se em Lagrange e Monge para escrever seu livro-texto sobre Geometria Analítica. Lacroix fez um trabalho semelhante ao de Monge, só que em duas dimensões. Este trabalho constitui-se na primeira abordagem sistemática da Geometria Analítica a duas dimensões. O autor acentua que a obra deve mostrar o duplo ponto de vista sob o qual se pode considerar a Geometria Analítica: primeiramente da maneira como os inventores a trataram, como um meio de combinar os teoremas da geometria, e, em segundo lugar, como Descartes, Lagrange e Monge, que a tornaram um meio geral de deduzir as propriedades da extensão a partir do menor número de princípios. O primeiro ponto de vista é exaustivamente abordado por Lacroix, e, nesse sentido, ele se afasta bastante da abordagem de Euler e Lagrange, estando mais próximo de Descartes. As construções geométricas são apresentadas sempre como o recurso mais elegante para resolver o problema. Há uma preocupação muito grande em mostrar que os procedimentos analíticos, embora muito eficientes, podem ser substituídos pela construção geométrica, considerada mais elegante. O método analítico não parece ainda possuir muita força ou, talvez, a tradição euclidiana esteja muito presente na concepção de uma matemática que deve se caracterizar pela "elegância". Lacroix não inicia a abordagem da Geometria Analítica pelo sistema de coordenadas; este será introduzido muito tardiamente. A exemplo de Descartes, começa com problemas clássicos da geometria euclidiana, mostrando como este pode ser resolvido com auxílio da álgebra, e também como os construir geometricamente. A abordagem sobre a mudança de coordenadas de Lacroix difere daquela apresentada por Euler, em 1748, em que ele emprega as relações trigonométricas. Lacroix trabalha apenas com semelhança de triângulos e exclui qualquer referência a senos ou cossenos de ângulos (exceto em nota de rodapé). Suas fórmulas tornam o texto mais trabalhoso de ler. Não há qualquer referência ao significado geométrico da mudança de coordenadas.

A primeira "tradução", em língua portuguesa, da *Geometria Analítica* surgiu em 1812, por obra de José Victorino de Santos Souza. Além desta tradução apareceu uma outra, a de Manoel Ferreira Guimarães, em 1821. A versão de Victorino da obra de Lacroix não se enquadra naquilo que denominamos "tradução" propriamente dita. A razão disso reside no fato de que o tradutor fez alterações significativas na obra. Primeiramente, excluiu toda a parte referente à trigonometria e, em segundo lugar, fez acréscimos no apêndice da obra original, onde abordou com mais detalhes a Geometria Analítica espacial. Relativamente à Geometria Analítica plana, Victorino de Souza manteve-se quase fiel ao texto. Quando introduz as curvas no espaço, Victorino introduz a notação de funções para representar as equações das superfícies, na forma z = F(x, y), z = f(x, y). Esta é a única vez que o tradutor fala na palavra função. O surgimento do livro *Geometria Analítica* de Saturnino Pereira, em 1842, já é um avanço em relação ao texto de Victorino, uma vez que não se trata de uma tradução.

José Victorino de Santos Souza e Saturnirno Pereira seguiram quase fielmente a geometria analítica plana de Lacroix, mas na abordagem da geometria analítica espacial deram a sua contribuição, fugindo daquilo que Lacroix apresentou no apêndice, e que se referia a três dimensões.

Com base nas análises desenvolvidas, pode-se afirmar que o ensino da Geometria Analítica, no Brasil, no século XIX, orientado pelos mesmos autores de livros-texto recomendados nos demais países, não diferia substancialmente do ensino dessa disciplina nos outros países, como, por exemplo, França, Alemanha e Estados Unidos.

Referências bibliográficas

ALMEIDA, R. T. (1905). *Lições de Geometria Integral.* Rio de Janeiro, Imprensa Nacional.

BÉZOUT, E. (1800). *Mathématiques a al'usage de la Marine et de l'artillerie.* Paris.

_____.(1802). *Cours D'Arithmétique*, a L'usage des Gardes du Pavillon, de Marine, du Commerce, et des Élèves de l'Ecole Politechnique. Paris.

_____.(1803). *Cours de Mathématiques* a l'usage des Gardes du Pavillon, de la Marine et des Élèves de l'Ecole Politechnique, 3. Partie. Paris.

_____.(1809). *Cours de Mathématiques* a l'usage des Gardes du Pavillon, de la Marine et des Élèves de l'Ecole Politechnique, suite de la 4.Partie. Paris.

BIOT, J. B.(1834). *Essai de Géométrie Analytique appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre.* Paris, Bachelier, Imprimeur-Libraire.

BOS, H. J. M. (1990). Der doppelte Auftakt zur frühneuzeitlichen Algebra: Viète und Descartes. In E. Scholz (Editor), *Geschichte der Algebra*. Mannheim; Wien; Zürich, BI– Wiss.-Verlag.

_____. (1991). Descartes, Pappus' problem and the Cartesian Parabola: a conjecture. In: *Festschrift for Whiteside* edited by Alan Shapiro and Peter Harman.

BOUTROUX, P. (1968). *Das Wissenschaftsideal der Mathematiker*. Liechtenstein, Saendig Reprint Verlag Hans Wohlwend.

BOYER, C. (1956). *History of Analytic Geometry*. New York, Scripta Mathematica.

BRUNSCHVICG, L. (1972). *Les Etapes de la Philosophie Mathematique*. Paris, Blanchard.

CAJORI, F. (1928). A *History of Mathematical Notations*. London, The Open Court Company.

CARNOT, L. (1921). *Reflexion sur la Metaphysique du Calcul Infinitesimal*. Paris, Gauthier-Villar.

_____. (1803). *Geometrie de Position*. Paris, De L'Imprimiere de Crapelet.

COMTE, A. (1975). *Philosophie prémiere*. Paris, Hermann Editeurs et des Artes.

_____. (1969). *Cours de Philosophie Positive*. Paris, Bachelier Libraire pour les Mathematiques.

_____. (1894). *Traité Élémentaire de Géométrie Analytique a deux et a trois dimensions*. Paris und Rio de Janeiro, Louis Dahl e F. Briguiet.

_____. (1844). *Traité Philosophique D'Astronomie Populaire*. Paris, Carilian-Goeury.

DASTON, L. (1986). The physicalist tradition in early nineteenth century french geometry. In: *Studies in History and Philosophie of Science*, 17, pp. 269-295.

DESCARTES, R. (1962). *Regeln zur Leitung des Geistes*. Hamburg, Verlag von Felix Meiner.

DESCARTES, R. (1894). La Géométrie. In:*Traité Élémentaire de Géométrie Analytique a deux et a trois dimensions*. Paris und Rio de Janeiro, Louis Dahl e F. Briguiet.

DEVRIES, H. (1984). How analytic geometry became a science. In: *Scripta Mathematica*, v.14.

DIEUDONNÉ, J. (1990). *A Formação da Matemática Contemporânea*. Lisboa, Publicações Dom Quixote.

ENCICLOPÉDIA BRASILEIRA MÉRITOVOL, v. 11, p. 713.

EULER, L. (1748). *Introduction à L'Analyse Infinitésimale*. Paris, ACL – éditions.

GRANGER, G. (1974). *Filosofia do estilo*. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo.

LACROIX, S. F. (1863). *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et* *sphérique, et d'application de l'algèbre a la géométrie*. Paris, Mallet-Bachelier.

LAGRANGE, J. L (1880). *Mathematische Elementarvorlesung*. Leipzig: Teubner.

_____. (1824). Lagrange's mathematische Werke: *Über dei Auflösung der numerischen Gleichungen von beliebigen Graden*. Berlin, G. Reimer.

_____. (1806). *Leçons de Calcul de Fonctions*. Paris, Novel Edition.

_____. (1882). *Oeuvres de Lagrange*. Paris, Tome Treizième.Gauthier-Villars.

LAMÉ, G. (1818). *Examen des Différentes Méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*. Paris, Librairie Scientifique J. Hermann.

LAPLACE, P. (1932). *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit*. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.

LEIBNIZ, G.W. (1962). *Mathematische Schriften*. Hildsheim, Georg Olms.

_____. (1966). *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*: (editor) Cassirer, Hamburg, Verlag von Felix Meiner.

LÜBSEN, H. B. (1848). *Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höhern Geometrie zum selbsunterricht*. Hamburg, Verlag von G. Bödecker.

LUTZ, E. (1909). *Analytische Geometrie der Ebene* – Elementares Lehrbuch für höhere Lehranstalten. Leipzig und Berlin, Teubner.

MAINZER, K. (1980). *Geschichte der Geometrie*. Mannheim, Wien, Zürich, Bibliographisches Institut.

MÖBIUS, A. (1827). *Der barycentrische Calcul*. : ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte. Leipzig, Verlag von Johann Barth.

MONGE, G. (1850). *Application de L'Analyse a la Géométrie*. Paris, Bachelier.

NEWTON, I. (1976). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. Cambridge, At the University Press 1972 und v.VII.

OHM, M. (1826). *Die analytische und höhere Geometrie in ihren Elementen. Mit vorzüglicher Berücksichtigung der Theorie der Kegelschnitte*. Berlim, Riemann.

PEREIRA, J. S. C. (1842). Applicação da Algebra á Geometria, ou Geometria Analytica segundo o systema de Lacroix. Rio de Janeiro, Typographia Nacional.

SALMON, G. (1873). *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*. Leipzig, Druck und Verlag Teubner.

SOUZA, J. V. (1812). *Tratado Elementar de Applicação de Álgebra à Geometria*. Rio de Janeiro, Impressão Régia.

SILVA DA SILVA, C. (1991). "Positivismus und Mathematikunterricht": Portugiesiesche und französische Einflüsse in Brasilien im 19. Jahrhundert. Diss. IDM. Universität Bielefeld.

_____. O desenvolvimento da Geometria Analítica e a Influência de Descartes e Euler na Obra de Auguste Comte. In: *Boletim da Sociedade Paranense de Matemática*. 14 1/2 (1993-1994).

STRUIK, D. J. (1980). *Abriss der Geschichte der Mathematik*. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften.

TROPFKE, J. (1903). *Geschichte der Elementar-Mathematik*, segundo volume. Leipzig, Verlag Von Veit.

UMPFENBACH (1843). Durch vier gegebene Puncte eine Parabel zu ziehen. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin.

WEIERSTRASS, K. (1988). *Einleitung in die Theorie der Analytischen Funktionen: Vorlesung Berlin 1878*, Braunschweig/ Wiesbaden, Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

WUßING, H. (1989). Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Steering between skills and creativity: a role for the computer?

CELIA HOYLES

Resumo
O conhecimento matemático de crianças e adultos parece entrar em crise com freqüência – crise de habilidade ou de criatividade. Embora cauteloso quanto a soluções universais, este artigo sugere, como uma saída para esse impasse, a inclusão, no currículo, de atividades computacionais planejadas para auxiliar os alunos a associar seu conhecimento informal às práticas convencionais da matemática.
Palavras-chave: prova, currículo de matemática, computador na educação matemática.

Abstract
Children's and adults' mathematical knowledge frequently appears to be in a state of crisis - a crisis of skills or a crisis of creativity. While cautioning against universal solutions, this paper suggests that the incorporation into the curriculum of computer-based activities designed to help students connect their informal knowledge with the conventional practices of mathematics is one way out of this impasse.
Key words: *mathematics curriculum, computer in mathematic education.*

BACKGROUND

Children's and adults' mathematical knowledge frequently appears to be in a state of crisis – a crisis of skills or a crisis of creativity. In UK and USA, there are now waves of enthusiasm for basic skills, mental arithmetic, and target setting. A huge multi-million pound National Numeracy project is now underway in UK and we await the final publication of our Government's Numeracy Task Force. In its preliminary report, (Numeracy Matters, 1998), the TIMSS studies (see for example, Harris, Keys & Fernandes, 1997) were cited as one reason for this new focus.

Studies comparing England's performance in mathematics with other countries show this country to be performing relatively poorly in comparison with others. For example, evidence from the Third International Mathematics and Science Survey (TIMSS) indicates that our Year 5 pupils (aged 9 and 10) are amongst the lowest performers in key areas of number out of nine countries with similar social and cultural backgrounds. (p. 8)

At the same time, the news from the Pacific Rim reports rather different pressures for change. For example, Lew, (in press) describes Korea, a country which scores very highly on most international comparisons of mathematics attainment, as being in "total crisis" in mathematics. He illustrates graphically how most students seem quite unable to relate their well-developed manipulative skills to the real world. Lew argues that 'the direction of the mathematics curriculum in Korea should change from emphasis on computational skills and the 'snapshot' application of fragmentary knowledge to emphasis on problem-solving and thinking abilities'. Similarly, Lin and Tsao present a picture of test obsession in Taiwan where college entrance examinations dominate students' (and parents') lives (Lin and Tsao, in press). Both of these countries are planning to encourage more 'open' curricula to include opportunities for mathematical creativity: that is, adapt their curricula to be more like those now being vilified in UK and USA!

Other data from TIMSS suggest that English children are comparatively successful at applying mathematical procedures to solve practical problems and are generally positive about mathematics. Is it possible to retain these strengths while at the same time consolidating arithmetic skills and developing the ability to construct rigorous and systematic arguments? (The latter area is one in which we have shown out students to be surprisingly weak - see Healy and Hoyles, 1998). The challenge for the international mathematics education community perhaps appears at first sight to be the design of a globally-effective balanced curriculum. From a UK perspective, this would build on the wealth of informal mathematical knowledge students bring to school, while at the same time drawing their attention to mathematical structures and properties and introducing them more systematically to mathematical vocabulary. The mathematical curriculum of the next millennium should harness children's motivation without losing their mathematics - and we envisage that the computer might offer just the context to help us to do this.

A ROLE FOR THE COMPUTER

I was inspired in the early 80's by Seymour Papert's radical vision of a mathematics that was playful and accessible, but at the same time rigorous and serious. We[1] dreamed (and still do!) of children actively expressing mathematics in different ways. We wanted children to learn by conjecture, reflection on feedback and debugging, as part of their own meaningful projects that required planning, sustained engagement with mathematical ideas and the bringing together of a range of skills and competencies. Logo was the vehicle or the catalyst for many of us to try to achieve those dreams. In doing this work, our eyes were opened to students' strategies and potentials - computer interaction was a window on to possibilities, an environment to illuminate pupil meanings and interpretations (Hoyles 1985, Noss and Hoyles, 1996).

Since that time, we have designed a range of microworlds around different 'open' software and have further developed the notion of technology as a means by which knowledge can be concretised and connected. We have also undertaken more systematic investigation of the nature of the child's activity and how it can be better understood and guided (Hoyles and Noss, 1992). Inevitably the boundary of what is and is not mathematics has been explored (see Papert, 1992): some say that working experimentally with the computer is mathematics, some that it is not, and many are not sure. The software may have changed but the issues have not and the location of this boundary is still a matter of hot dispute, brought even more into focus in an international forum such as this.

If we want to design investigative environments with computers that will challenge and motivate children *mathematically,* we need software where children have some freedom to express their own ideas, but in ways constrained so as to focus their attention on mathematics. Are there lessons to be learned from all the work that has been done with these sorts of environments over several decades? What do we actually know about how children can better learn mathematics with technology?

Mathematics comprises a web of interconnected concepts and representations which must be mastered to achieve proficiency in

1 We, in this text, refers to my close colleague in Mathematical Sciences at the Institute of Education, Richard Noss.

calculation and comprehension of structures (for elaboration of this theoretical framework, see Noss and Hoyles, 1996). Mathematical meanings derive from connections - intramathematical connections which link new mathematical knowledge with old, shaping it into a part of the mathematical system; and extra-mathematical meaning derived from contexts and settings which may include the experiential world. Yet how are these meanings to be constructed? How is the learner to make these connections? To what extent can the software tools encourage this process of meaning-making and connection-making?

A critical weakness of many mathematical learning situations has been the gap between action and expression and the lack of connection between different modes of expression. Does technology magnify these problems of fragmentation and lack of connection or help to solve them? Clearly it depends how the technology is used; a lesson certainly worth reiterating! Technology does nothing in and of itself! Over many years, our central research priority has been to find ways to help students build links between seeing, doing and expressing (see for example, Noss, Healy & Hoyles, 1997). We have shown that technology can change pupils' experience of mathematics but with several provisos: the users of the technology, (teachers and students), must appreciate what they wish to accomplish and how the technology might help them; the technology itself must be carefully integrated into the curriculum and not simply added on to it (see Healy and Hoyles, in press), and most crucial of all, the focus of all the activity is kept unswervingly on mathematical knowledge and *not* on the hardware or software.

COMPUTERS AND THE CURRICULUM

To date, work with computers in mathematics education has largely been concerned with construction and the potential of software to aid the transition from particular to general cases - specific instances can be easily varied by direct manipulation or text-based commands and the results 'seen' on the computer screen (see, for example, Laborde and Laborde, 1995). Yet, even if students develop a sense of how certain 'inputs' lead to certain results, there remains the question of how to develop a need to explain, a need to prove, as part of, rather than added on to, this constructive process. In countries like UK, where proof has all but disappeared from the curriculum, this issue must be addressed urgently if we are to avoid limiting the mathematical work for most children by the introduction of computers. If we fail, the majority of our students will simply be subjected to even more convincing empirical argument - for example, using powerful dynamic geometry tools simply to measure, spot patterns, and generate data.

There is an alternative which we are in the process of investigating. We have designed activities where, through computer construction, students have to attend to mathematical relationships and in so doing are provided with a rationale for their necessity. Thus, the scenario we envisage is one where students construct mathematical objects for themselves on the computer, conjecture about the relationships between them, and check the truth of their conjectures with the tools available. This forms part of a teaching sequence which also includes reflection away from the computer guided by the teacher, and the introduction of mathematical proof as a particular way of expressing one's convictions and communicating them to others. It is in this way, we suggest, that constructing and proving can be brought together in ways simply not possible without an appropriate technology: formal proof is simply be one facet of a proving culture, revitalised by the 'experimental realism' of the computer work (Balacheff and Kaput, 1996).

Over the last few years. Lulu Healy[2] and I have devised algebra and geometry teaching sequences which follow these criteria. Our activities were developed after analysing students' responses to a nationwide paper-and-pencil survey to assess students' conceptions of proving and proof (Healy and Hoyles, 1998). This questionnaire was completed by 2,459 fifteen year-old students of above average mathematical attainment from across England and Wales. Each teaching sequence was designed 'to fit into the curriculum' and to plug at least some of the gaps our survey had revealed in the understandings of our students. Overall 18 students from three schools have worked through the sequences, each of which took nearly 5 hours of classroom contact supplemented by homework.

I will now present snapshots from the case studies of two students who engaged in these sequences. The first case study illustrates the gains

2 ESRC project, *Justifying and Proving in School Mathematics*, Ref R000236178. I wish to acknowledge the central work of Lulu Healy in all aspects of this project.

that can be made by connecting skills to creative exploration through computer interaction; the second points to potential pitfalls in planning 'the best' mathematics curriculum incorporating technology.

TIM: MAKING THE STEP TO *EXPLAINING* IN ALGEBRA

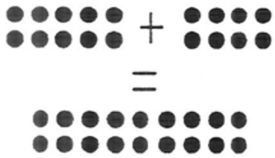
Tim was a quiet and diligent student who knew about proof as something that involved verification and explanation, only recognised it in the context of algebra – a natural consequence of our curriculum with its emphasis on generalising and explaining number patterns (see Figure 1).

In mathematics, proof is used prove whether a statement is true of false. It is often in algebra, but sometimes it is written down in words. It is used to explain why and how something is happening.

Figure 1: Tim's initial view of proof

It was also clear from Tim's choices in the questionnaire, that he had a preference for visual argumentation: he evaluated the visual 'proof' by Yvonne in exactly the same way as a 'correct' formal algebra proof, and when asked about this, it was clear he 'saw' the general structure *through* this particular visual example (see Figure 2).

Yvonne's answer



So Yvonne says it's true.

Yvonne's answer	agree	don't know	disagree
Has a mistake in it	1	2	3
Shows that the statement is always true	1	2	3
Only show that the statement is true for some even numbers	1	2	3
Shows you why the statement is true	1	2	3
Is an easy way to explain to someone in your class who is unsure	1	2	3

Figure 2: Tim's evaluation of a visual proof

In the first algebra session of our teaching sequence, students are introduced to our microworld, *Expressor,* in which they build 'matchstick' patterns of number sequences by constructing simple programs. They are encouraged to connect their computer constructions with corresponding mathematical properties, and find a general formula for the number sequence explaining why any conjecture is true or false by reference to computer feedback *and* to the mathematical structures they have constructed. Similar work with more complex number sequences is undertaken in the third session.

Tim found this work of generalising through programming both engaging and challenging – in fact, he described it as the most enjoyable parts of our teaching. He also saw a strong connection between proving and his computer work.

> T – I liked the programming stuff – that helped [to write proofs] because it sort of showed how it was constructed so... It helped prove because it showed you how they were made... How that construction was made step by step.

In the second session, students are introduced to writing formal algebraic proofs and helped to 'translate' their Logo descriptions of the mathematics structures into algebra. They are also taught how to construct deductive chains of argument; systematically to start from the properties they had used in their constructions and to deduce further properties. Both of these activities are unfamiliar to UK students.

Let me give an example. Students are asked to investigate the properties of the sums of different sets of consecutive numbers. They construct by programming a visual representation of numbers as columns of dots (shown in Figure 3 below). Students can for example move the bottom right dot to the bottom left, see that it would 'even up' the three columns, and convince themselves that the conjecture that the sum of 3 consecutive numbers is divisible by 3 is always true.

Although these moves can be achieved by, for example, using counters, in *Expressor,* the visual arrangement has a simultaneous 'algebraic' description which is constructed by the children. In Fig. 3 a program `col`, has been written to generate 6 (`n`), 7 and 8 columns. The dots can be dragged into columns as with real counters; but as this is done, a recorded 'history' of the actions is stored (see the `history` box in Figure 3*)* in the form of fragments of computer program. This code is executable: that is, it can be 'run' to produce the output (or part of the output) which produced it. There is, therefore, a duality between the code and the graphical output of the dots; the action (on the dots) to produce a new visual arrangement and the expression (in the form of pieces of program) are essentially interchangeable and the code is a rigorous description of the student's action to construct a particular image, and her actions are executable as computer programs. A box `n` is used to store the smallest of the three numbers and our student might see that what is in the box `n` hardly matters, and therefore that the theorem is independent of the first number.

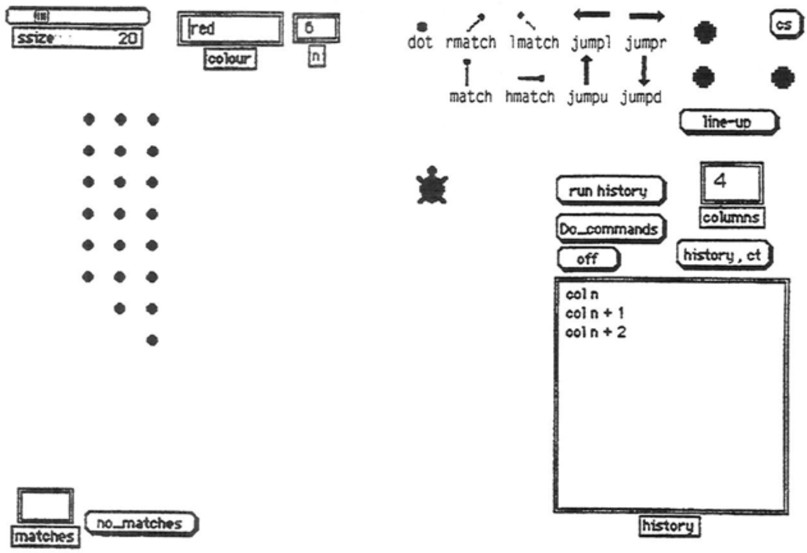
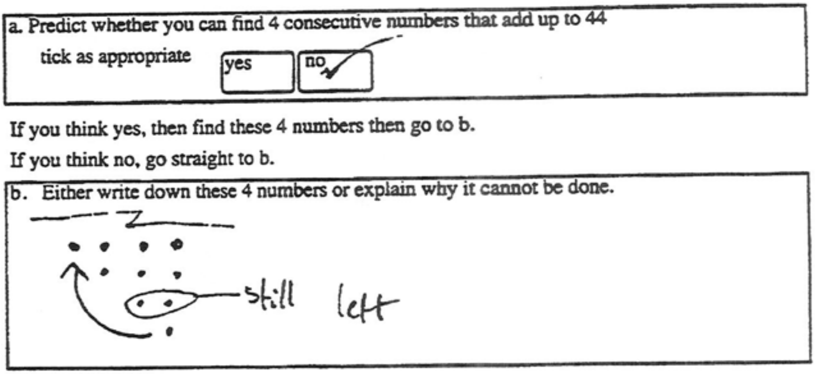


Figure 3: A typical *Expressor* screen to explore the sum of 3 consecutive numbers

How did Tim cope with this activity? In his first session, he had been seeking explanations for a general rule in the general symbolic expressions he had constructed (in the form of programs). He constructed his three columns of dots in Expressor and was faced with a screen rather like Figure 3. Then he wrote: $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3$.

But, he obtained this equivalence ***not*** a result of a manipulating algebra but by reference to our microworld to 3 columns of length and a 'tail' of 3. He then argued correctly as his proof that the sum of 3 consecutive numbers always had a factor of 3: "if you add 3 to any factor of 3, then it is still a factor of 3" (he used factor instead of multiple throughout!). Tim generalised this method to find factors of sums of different numbers of consecutive numbers - always considering columns of dots and a tail, but flexibly using his visual argumentation. For example, to show that it was impossible for the sum of 4 consecutive numbers to have a factor of 4 and so could never add up to 44, he visually moved dots, as he described in Figure 4:


a. Predict whether you can find 4 consecutive numbers that add up to 44

tick as appropriate yes no ✓

If you think yes, then find these 4 numbers then go to b.

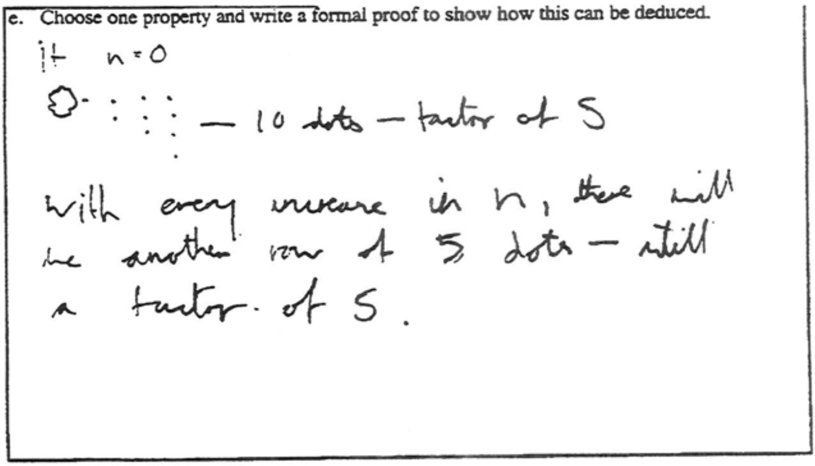
If you think no, go straight to b.

b. Either write down these 4 numbers or explain why it cannot be done.

still left

Figure 4: Tim's proof that the sum of 4 consecutive numbers is not divisible by 4

Finally together with his partner, Tim also came up with a brilliant inductive. visual 'proof' that the sum of 5 consecutive numbers had a factor of 5, again using visual reasoning but in yet another way (see Figure 5).


e. Choose one property and write a formal proof to show how this can be deduced.

if n = 0

— 10 dots — factor of 5

with every increase in n, there will be another row of 5 dots — still a factor of 5.

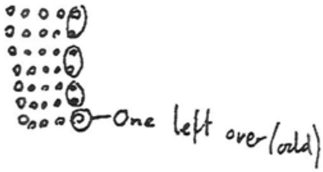
Figure 5: Tim's inductive Proof

By this time it was clear that Tim had found two ways to explain which seemed to be well connected: constructing symbolic code and manipulating visual expressions. His explanations came from linking logical and general arguments with visual representations (columns of dots) - and not from algebra, even though he clearly recognised its importance. This gap in his repertoire of skills is well illustrated in his final homework (Figure 6). Tim creatively generalised 'the dots microworld' into thinking of multiplication as a rectangular array of dots, whose rows could be paired off leaving 'one left over'. But, he was still unable to multiply out brackets correctly!

18. Prove whether the following statement is true or false:

When you multiply any 2 odd numbers, the answer is always odd.

True



Also:

x = even

$(x+1) \times (x+1) = x^2+1$ (odd)

Figure 6: Tim's two explanations

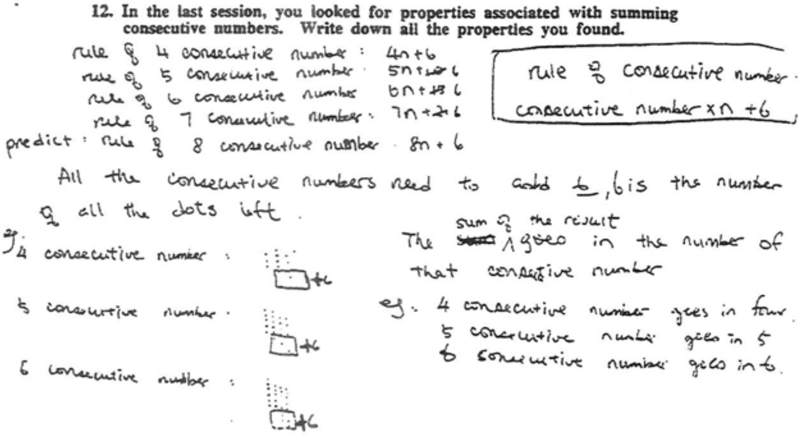
SUSIE: AN INAPPROPRIATE INTERVENTION IN ALGEBRA?

In contrast to Tim, Susie could say nothing about what proof was about and was clearly confused about the generality of a mathematical argument. She selected empirical arguments as her own approach in all the multiple-choice 'proofs' in our survey, in geometry and in algebra, and described these as both general and explanatory. She thought mathematics was quite complicated and, in fact, admitted to hating it. Although Susie offered no description of proof or its purposes, it emerged in interview and watching her computer work that she did have a view about proof - it was about examples (*many* examples)! It was enough to have shown a statement was true many times! Additionally, for Susie, there was another important aspect of proof which was a rule or formula. *But,* its role was to obtain more marks from the teacher rather than to confer generality - the examples were enough for this.

Although Susie could write formal proofs, she did not see them as general and found them no more convincing than empirical evidence - her two 'modes of proving'- examples and formal proofs - apparently completely disconnected. She believed for example that even after producing a valid proof that the sum of two even numbers is even, more examples would be needed to check that the statement holds for particular instances.

In our teaching experiments, both in algebra and geometry, we noticed that Susie followed all the instructions carefully, but rarely if ever experimented with the computer. She found it hard to see the computer as means to try things out when unsure, to learn from feedback.

I will illustrate Susie's work in algebra by reference to the same activities described earlier. Susie was considering the sum of four consecutive numbers. She constructed the columns of dots and came up with the formula, $4n + 6$, ostensibly by making the connection of the '+6' with the 'tail of dots'. For 5 consecutive numbers, she apparently used the same method to come up with the correct sum of $5n + 10$. Then she changed her mind. She crossed out the +10 explaining this by writing that she had checked and 'it was 6'. From this point on, her written work and explanations were disconnected from any generality suggested by the visual display she had constructed in the microworld, *except* she persisted in showing pictures of columns of dots with a 6 dot tall, as illustrated in her homework following this session.



12. In the last session, you looked for properties associated with summing consecutive numbers. Write down all the properties you found.

rule of 4 consecutive number : 4n+6
rule of 5 consecutive number : 5n+~~~~6
rule of 6 consecutive number : 6n+~~~~6
rule of 7 consecutive number : 7n+~~~~6
predict : rule of 8 consecutive number : 8n + 6

rule of consecutive number
consecutive number × n +6

All the consecutive numbers need to add 6, 6 is the number of all the dots left.

e.g. 4 consecutive number : +6
5 consecutive number : +6
6 consecutive number : +6

The ~~~~ sum of the result goes in the number of that consecutive number

e.g. 4 consecutive number goes in four.
5 consecutive number goes in 5
6 consecutive number goes in 6.

Figure 7: Susie's rule for consecutive numbers

We can explain the rupture of connection between particular examples and generalisations by reflecting on what we had discovered as Susie's goal in mathematics - to find examples and then a *rule.* She had achieved this: found a rule in which numbers could be substituted and even had pictures to illustrate it!

I must mention Susie's story is not completely negative. She did make progress after engaging in our sequences, By constructing matchstick patterns, Susie was beginning to appreciate how an algebraic expression could express generality (and serve merely as something to be manipulated), and, although proving for Susie remained solidly 'a rule plus examples', she did seem to be beginning *to want to explain* as well.

SOME SNAPSHOTS FROM THE GEOMETRY SEQUENCE

I will mention briefly some insights we gained from our teaching sequence in geometry, simply to illustrate further some points raised in the previous sections. This sequence followed a similar pattern to that in algebra. In the first session, students are encouraged to construct simple geometrical objects on the computer with dynamic geometry software, to describe their constructions, connect each with a corresponding mathematical property, and use the computer to explore or reject conjectures. In the second session, students are encouraged to construct familiar geometrical objects (parallelograms, rectangles) on the computer, identify the properties and relations of a geometrical figure that had been used in their constructions and distinguish some properties that might be deduced from those given by exploring with the computer. In much the same way as in algebra, students are also taught at this point to construct logical deductive chains of argument and write formal proofs based on their computer constructions. In the third session, students are faced with more unfamiliar constructions and proofs, which again they can tackle experimentally on the computer.

So how did Tim fare in geometry? Geometry for Tim, as for most of our students, was far more problematic than algebra. He did make some progress in that he learnt to write clear descriptions of his constructions, translate them into given properties and 'see' deduced properties. The computer work helped Tim 'see' relationships and convinced him of their necessity, but the links he could make between constructions and proofs or even explanations were much more tenuous than in algebra.

> T – Well you could actually see like if they were congruent - you could take however much you were allowed to take and actually make a triangle. If it was congruent then you could... tell it was.
>
> C – Tell it how?
>
> T – Just by seeing.
>
> C – And did that help you write your formal proofs?
>
> T – Not really - not the formal stuff. — But — well it made it more enjoyable.

Tim found it hard to appreciate and reproduce 'the game' of proving - that is, systematically to separate givens from deduced properties and produce reasons for all his steps. He found the language of formal geometry proofs inhibiting - it stopped him 'seeing it all'. The construction task in the third session was important in his progress. He had to construct a quadrilateral where adjacent angle bisectors were perpendicular and to describe and justify its properties. Tim found this hard, but, after much experimentation and measuring lots of angles, he eventually 'saw' the key relationship - two parallel lines - not be 'just seeing them' but by noticing two equal angles and dragging. The important point is that the measurements for Tim were not simply collecting empirical evidence, they were not only part of the conjecture but also and crucially part of his proof. When he talked about two angles of 44°, it was clear to us that he was seeing *through* the numbers to the general case -just as he had done in *Expressor.* As in algebra, Tim was using the computer interaction to help him to find explanations.

Susie again presents us with a different picture. When it came to constructing proofs, Susie's responses were quite unlike the majority of students in our survey. Her proofs in geometry were far better than in algebra and the proof she constructed for the more complex geometry question, (a standard Euclidean geometry proof), was much better than almost all the survey students[3]. Yet we found very little evidence that Susie made any progress in geometry as a result of undertaking our teaching sequence. At the start, formal proof was a ritual, disconnected from any appreciation of the generality of the mathematical properties and relationships she used. As in algebra, she believed that even after proving a statement, its validity had to verified in any specific set of cases (see also, Chazan, 1993). In our case, Susie was certain that she needed examples to check that the statement, the sum for the angles of a triangle is always 180° held for right-angled triangles. The computer interaction did not seem to help Susie to come to appreciate the generality of a proof and the proving process. Also, before she started our teaching sequences, Susie could already construct formal geometry proofs, but only in the context of familiar and fairly routine problems. Faced with more unfamiliar situations as that described above, she was lost and, unlike Tim, was unable to use the computer to help her.

We can throw light on this lack of progress, by reference to two factors: her interactions with the computer and her interpretation of feedback. First, as I have mentioned, Susie did not exploit the computer to test hypotheses or try things out. But the success of our tasks *relied* on

3 She produced na almost perfect formal proof – something only achieve by 4.8% of the students in the survey and which 62% of students did not even start.

experimental interaction - we did not expect our students immediately to know what to do. Second, Susie interpreted the feedback from the dynamic geometry software in a way which certainly was unexpected. For her, dragging a Cabri construction was *not* testing a relationship, exploring a property - but merely a way of generating many examples. Once we had noticed this, we could see it was completely consistent with Susie's view of proof! Susie's reflections on the use of the computer in mathematics are relevant. When interviewed, it was clear that she thought the computer had given her ideas about 'what it was all about' and had done it quickly. But rather crucially it makes examples and checks them[4].

I have to mention that Susie did change for the better in her response to mathematics. All through the teaching experiments, Susie picked the most enjoyable aspect of her mathematical work as 'finishing it', 'getting it right', 'writing down the results'. Yet, in algebra, we were beginning to catch glimmers of enjoyment and engagement: Susie began to mention *the activity* rather than simply its end point. In her interview too, she spontaneously said how much she had enjoyed the work the computer, although it must be admitted this was only as a contrast with 'normal maths'. Even so, this more positive attitude might be the key to Susie's further development.

DISCUSSION AND CONCLUSION

To begin an explanation of the two very different student responses to our teaching and the work with computers, we have to consider cultures and curricula - huge issues beyond the scope of the paper but which simply cannot be ignored. Susie's profile is somewhat less 'odd' if it is known that she had only studied mathematics in an English school for one year - she was in fact from Hong Kong and had been educated there, although the language of instruction was English. Unlike most other students in our survey, Susie had been taught formal geometry proofs as well as algebraic formulae and manipulation and had little experience of 'doing investigations'.

4 She also thought that the computer helped her to remember, but there was a disadvantage 'you can't use the computer in exams'!

As I have tried to show, Susie's lack of progress might at least partly be explained by the disjuncture between the assumed starting points of our activities, particularly those with computers - in terms of sense of proving and student-computer interaction - and Susie's world. We had students like Tim in mind when we designed our sequences; students reared in an investigative culture - who wanted to explain but who lacked the tools to do it. Susie was at odds with this culture in terms of her beliefs about mathematics and about proof. Our activities did not build on *her* existing framework for proof, did not help her to connect her informal mathematics to our agenda. Our story of Susie provides compelling evidence that we must take seriously prevailing beliefs about mathematics and about computers in our curriculum planning, and resist the temptation to import 'exemplary activities' from other cultures.

The comparison of Tim and Susie's work cautions against any assumption that the computer will lead to a set of learning outcomes or bring about particular changes. We can only design optimal activities within very limited parameters, given that how children interact with and learn from software depends on their expectations and beliefs. Curricula must seek to build on student strengths - in the case of UK on a confidence in conjecturing and arguing - and connect these strengths to new dimensions. Students like Tim respond positively to the challenge of attempting more rigorous proof alongside their informal argumentation. Susie was less successful as the culture which shaped our teaching and task design was not shared by her.

Clearly, not all of UK students are like Tim or students from Hong Kong like Susie. But the purpose of elaborating their stories is to guard against the stupidity of 'transferring' curricula simplistically across cultures, the replacement of a curriculum which over-emphasises an empirical approach with one in which students are simply 'trained' to write formal proofs. It is all too easy for countries simply to flip between two states of skill and creativity crisis while attempting to model curriculum innovations which look so alluring to the distant observer.

So, returning to my initial question about the desirability of a globally-effective mathematics curriculum. I can only conclude that this goal is fundamentally misguided. We should not set our sights on the same curricula sequences and targets, because these are not the same in any reality. Incorporating what look like comparable activities into our curricula, will not mean that the meaning derived from them will be comparable[5]. Cultural effects might even be magnified when activities involve technology, which carries its own sets of beliefs and agendas. I have tried to illustrate how the power of microworlds to engage our students with mathematics rests first and foremost on what our students believe about curriculum goals and intentions.

Our aim in mathematics education maybe to reach a common goal - mathematical literacy comprising a better balance between skills and competencies and engagement with mathematical thinking. We might even agree that the computer might have a useful role to play. Although it is deeply illuminating and exciting to move beyond the surface features and slogans of international comparisons and focus on what *mathematics* and what *education* we strive to achieve in our countries, to learn from each in international meetings like this, ultimately we have to tease out different routes to this same goal.

References

BALACHEFF, N. e KAPUT, J. (1996). Computer- Based Learning Environments in Mathematics. In: *Bishop*, A.Clements, K. Keital, C. Kilpatrick, J. & Laborde, C. (eds) *International Handbook of Mathematics Education Part* I, pp. 469- 505

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), pp. 359-387.

HARRIS, S.; Keys, W.; & Fernandes, C. (1997). *Third International Mathematics and Science S (TIMSS), Second National Report, Part* I National Foundation for Educational Research.

HEALY, L., e HOYLES, C. (1998). *Justifying and Proving in School Mathematics.* Technical Report University of London, Institute of Education.

_____. (in press) Visual and Symbolic Reasoning in Mathematics: Making Connections with Computers? *Mathematical Thinking and Learning.*

5 Similar points have been made in relation to the meanings of test items in TIMMS which are not the same because it is the same test (Keitel and Kilpatrick, in press).

HOYLES, C. (1985). Developing a Context for Logo in School Mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour,* 4(3), pp. 237-256.

HOYLES, C., MORGAN, C. e WOODHOUSE, G. (eds.). (in press). *Rethinking the Mathematics Curriculum*. London, Falmer Press.

HOYLES, C. e NOSS, R. (eds.). (1992). *Learning Mathematics and Logo*. Cambridge, Ma., MIT Press.

______.(1992). A pedagogy for mathematical microworlds. *Educational Studies in Mathematics, 23*(1), pp. 31-57.

KEITEL, C. e KILPATRICK, J. (in press). *The rationality and irrationality of International Comparative Studies.* In: Kaiser, G., Luna, E. Huntley, L. (eds.) *International comparisons in mathematics education* London, Falmer Press.

LABORDE, C. e LABORDE, J. M. (1995) What about a Learning Environment where Euclidean Concepts are manipulated with a mouse? In: A. di Sessa, C. Hoyles, R. Noss, & L. Edwards (eds.). *Computers for Exploratory Learning*. Springer Verlag, pp. 241-262.

LEUNG, F. (in press). The Traditional Chinese Views of Mathematics and Education: Implications for Mathematics Education in the new millennium. In: Hoyles, C., Morgan, C., & Woodhouse, G. (eds.). *Rethinking the Mathematics Curriculum*. London, Falmer Press.

LEW, H-C. (in press) New Goals and Directions for Mathematics Education in Korea, in Hoyles, C., Morgan, C., & Woodhouse, G. (eds.). *Rethinking the Mathematics Curriculum.* London, Falmer Press.

LIN, F-L. e TSAO, L-C., (in press) EXAM MATHS Re-examined. In: Hoyles, C., Morgan, C., & Woodhouse, G. (eds.) *Rethinking the Mathematics Curriculum.* London, Falmer Press.

Numeracy Matters: The Preliminary Report of the Numeracy Task Force (1998) London: Department for Education and Employment.

NOSS, R. e HOYLES, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

NOSS, R.; HEALY, L. e HOYLES, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. *Educational Studies in Mathematics, 33(2),* pp.203-233.

PAPERT, S. (1980). *Mindstorms. Children, computers, and powerful ideas.* New York, Basic Books.

Normas para publicação

Pesquisadores interessados em contribuir com publicação nesta revista deverão preparar o texto e enviá-lo segundo as regras que se seguem.

Preparação para envio: uma cópia do texto **em disquete**(s) com os nomes dos autores e sem numeração de página. Outras quatro (4) cópias impressas, sendo que uma deve ser idêntica à do(s) disquete(s) e as outras três (3) devem ter numeração de página e não ter os nomes dos autores.

Versão – programa Word 6.0 for Windows, para ser lido em PC.

Formatação:

Título – Centralizado, em letras maiúsculas e em negrito.

Nomes dos autores - Em uma só das vias impressas e no disquete, separar os nomes dos autores do título por um espaço simples entre linhas; cada nome em uma linha e cada um seguido de filiação a uma Instituição ou de titulação. A filiação ou titulação e o nome devem ser separados por vírgula ou um traço. Ex: Maria Dolores, PUC-SP ou Maria Dolores - Mestre em Educação Matemática - PUC-SP.

Resumo – Em português e inglês, na língua original do texto, com no máximo 10 linhas, espaço duplo, mesma fonte do texto, em itálico, acompanhado de três palavras-chave.

Corpo do texto – Papel tamanho A4
Margem superior e inferior com 2,5 cm
Margem direita e esquerda com 3,0 cm
Fonte Times New Roman,
tamanho da letra 12 pontos.
Espaçamento entre linhas 1,5 linha
Alinhamento justificado

Referências bibliográficas:

Textos de autores brasileiros - Citações e notas observando as normas da ABNT em vigor. Bibliografia de referência ao final do texto, seguindo as mesmas normas.

Textos de autores estrangeiros – Citações e notas seguindo uma mesma norma, por todo o texto. Bibliografia de referência ao final do texto, seguindo uma mesma regra.

Quantidade de páginas: máximo de 36 páginas.

Impressão: em jato de tinta ou em laser. Páginas impressas só numa face.

Enviar para: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 CEP 01303-050
Consolação - São Paulo - SP
fone - (011) 2562622 ramal 202
fax - (011) 31590189
e-mail - pegedmat@exatas.pucsp.br

EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA
PESQUISA

REVISTA DO PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa tem interesse na publicação de trabalhos voltados para linhas de pesquisa que direcionam o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP. Também está aberta para outros campos do conhecimento, que venham proporcionar um diálogo científico, como a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia e a Hist;oria das Ciências e a História Disciplinar.

INFORMAÇÕES PARA AQUISIÇÃO

Assinatura 199 – n^{os} 1 e 2 – R$ 20,00

Anexa cópia do depósito em conta no **Banco Real**, agência 0384, c/c Educ/FCSP nº 3.704.722, para aquisição dos seguintes exemplares de *Educação Matemática Pesquisa:*

☐ nº 1 ☐ nº 2

Nome: ______________________________
Endereço: ______________________________
____
Cep: ____________ Cidade: ______________ Estado: ___
Telefone: ______________ Ocupação: ______________

Impressão de miolo e acabamento:

Gráfica da PUC-SP
Rua Ministro Godói, 965 – Perdizes – SP
Tel.: 3670-8366

SUMÁRIO

ISSN 1516-5388