A assimetria histórica entre as técnicas e o desenvolvimento do conceito de área na Antiguidade

Maria Helena Ribeiro

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Resumo

Nosso objetivo, com este trabalho, é analisar, de maneira didática e por meio de uma sequência de exemplos provenientes de diferentes momentos da História da Matemática, as assimetrias entre o desenvolvimento das técnicas e da construção do conceito de área de figuras planas na Antiguidade. Apresentaremos resultados parciais, que prosseguirão até a formalização do conceito de integração. Acreditamos na relevância dessa investigação como construção de um processo educativo baseado em uma teia de reflexões. Entendemos, como Brolezzi, que "a ordem lógica mais adequada para o ensino de Matemática não é a do conhecimento matemático sistematizado, mas sim aquela que revela a Matemática enquanto Ciência em construção"[1], que pode ser explorada pelas mediações entre a técnica e a elaboração dos conceitos. Encontramos suporte teórico de Radford e Furinghetti[2]. Considerando tal motivação, fizemos um recorte bibliográfico destacando exemplos de cálculo de áreas tendo em perspectiva a questão de pesquisa: "Quais e como aconteceram, ao longo do tempo histórico da Matemática, as assimetrias entre as técnicas e os conceitos relativos ao cálculo de áreas, gerando informações que possam ser exploradas como recurso em sala de aula." Nesse percurso, observamos a crescente sofisticação das técnicas que levou à evolução do conceito até as primeiras ideias de integração.

Palavras-chave: *Integral; Áreas; História; Técnica; Conceito.*

Abstract

Our goal with this work is to analyze, in a didactic way and through a sequence of examples from different moments in the history of mathematics, the gap between the development of techniques and the construction of the concept of area of plane figures in Antiquity. We present partial results, which will continue until the formalization of the concept of integration. We believe in the relevance of this research as construction of an educational process based on a web of reflections. We understand, as Brolezzi, that "the most appropriate logical order for teaching mathematics is not a systematic mathematical knowledge, but one

---

Trabalho apresentado na modalidade Comunicação Oral na IV Jornada de História da Ciência e Ensino: propostas, tendências e construção de interfaces, realizada de 4 a 6 de julho de 2013, São Paulo, Brasil

[1] A. C. Brolezzi, "A Arte de Contar: Uma Introdução ao Estudo do Valor Didático da História da Matemática" (dissertação de mestrado, USP, 1991).

[2] "Historical Conceptual Developments" e "Perspectiva Epistemológica Sociocultural" (L. Radford & F. Furinghetti, "Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: From Phylogenesis and Ontogenesis Theory to the Classroom Practice," in *Handbook of International research in Mathematica Education*, ed. L. English, 631-654 (New Jersey: Lawrence Erlbaum, 2002), apud A. Miguel & M. A. Miorim, *História na Educação Matemática: Propostas e Desafios* (Belo Horizonte: Autêntica, 2008), 80).

that reveals the Mathematics Science while under construction"[3], which can be exploited by mediation between technique and elaboration of the concepts. We find theoretical support in the works of Radford and Furinghetti[4]. Given this motivation, we made a cutout literature highlighting examples of calculation of areas taking into perspective the research question: "What happened and how, over time history of mathematics, the gap between the techniques and concepts relating to the calculation of areas, generating information that can be exploited as a resource in the classroom". In this way we observe the increasing sophistication of the techniques that led to the evolution of the concept until the early ideas of integration.

Keywords*: Integral; Areas; History; Technique; Concept.*

INTRODUÇÃO

A partir de uma experiência pessoal, na qual o aprendizado foi mais natural ao acompanhar a trajetória histórica da evolução dos conceitos, iniciamos esse trabalho com o objetivo de, por meio de uma sequência de exemplos provenientes de diferentes momentos da História da Matemática, identificar as assimetrias entre o desenvolvimento das técnicas e da construção do conceito de área de figuras planas na Antiguidade. Apresentamos resultados parciais, que deverão ser acrescidos de outros exemplos, até a formalização do conceito de integração, no âmbito do Cálculo Integral. Lembrando que, conforme observa Hoz[5] frente a tantas informações a que hoje está exposto, o aluno pode deixar de usar sua capacidade reflexiva para entender a razão daquilo que se aprende; acreditamos na relevância de uma investigação nessa direção como uma das formas de se construir um processo educativo baseado em uma teia de reflexões.

Seguindo na linha da educação, com ênfase na reflexão e unidade de todos os saberes, pensamos que a História da Matemática pode ajudar no processo educacional utilizando o viés da assimetria entre a técnica e a elaboração dos conceitos. Entendemos, assim como Brolezzi, que *"a*

---

[3] A. C. Brolezzi, "A Arte de Contar: Uma Introdução ao Estudo do Valor Didático da História da Matemática" (dissertação de mestrado, USP, 1991).

[4] "Historical Conceptual Developments" e "Perspectiva Epistemológica Sociocultural" (L. Radford & F. Furinghetti, "Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: From Phylogenesis and Ontogenesis Theory to the Classroom Practice," in *Handbook of International research in Mathematica Education*, ed. L. English, 631-654 (New Jersey: Lawrence Erlbaum, 2002), apud A. Miguel & M. A. Miorim, *História na Educação Matemática: Propostas e Desafios* (Belo Horizonte: Autêntica, 2008), 80).

[5] V. G. Hoz, *Pedagogia Invisível, Educação Invisível* (São Paulo: Nerman, 1988).

ordem lógica mais adequada para o ensino de Matemática não é a do conhecimento matemático sistematizado, mas sim aquela que revela a Matemática enquanto Ciência em construção"[6], construção que pode ser explorada pelas mediações entre as técnicas e os conceitos no processo de construção do conhecimento matemático.

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Dentre as referências bibliográficas que julgamos mais importantes figura uma leitura detalhada da tese de Antônio Miguel[7], que buscou, na literatura do último século, o posicionamento de vários autores sobre o uso e maneiras de aplicar a História ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Ao final, todos os autores citados entendem que, de alguma forma, a História deve ser reconstruída com fins pedagógicos para que se concretize em metodologias de ensino que, efetivamente, façam uso da História na Educação Matemática.

Miguel e Miorim[8] elaboraram cinco quadros resumo que sintetizam as experiências de pesquisadores e suas respectivas posturas epistemológicas a respeito do conhecimento em geral. Desse cenário, entendemos que a perspectiva defendida por Radford e Furinghetti[9], denominada como sociocultural, possa oferecer argumentos que fundamentam a pesquisa proposta no presente trabalho. Em tal perspectiva, utilizando as palavras de Miguel e Miorim, Radford e Furinghetti entendem que haja entre o passado e o presente um diálogo sem qualquer relação de subordinação, sendo, portanto, desvinculada da teoria do Recapitulacionismo. Para uma melhor compreensão desse referencial, avaliamos as posturas mais discutidas nas pesquisas sobre o assunto ao longo do último século, quais sejam: a 'Teoria da

[6] Brolezzi, "A Arte de Contar".
[7] A. Miguel, "Três Estudos Pedagógicos sobre História e Educação Matemática: A História e o Ensino-Aprendizagem da Matemática; a Constituição do Paradigmo do Formalismo Pedagógico Clássico em Educação Matemática; Números Irracionais: Um Estudo Histórico-Pedagógico," (tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, 1993).
[8] Miguel & Miorim, *História na Educação Matemática.*
[9] "Perspectiva Epistemológica Sociocultural" (Radford & Furinghetti, "Historical Conceptual Developments," apud Miguel & Miorim, *História na Educação Matemática*, 80).

Recapitulação ou Paralelismo ontofilogenético' e o 'Método ou Metodologia Genética' e suas respectivas aplicações. Radford e Furinghetti se colocam como críticos de todos os tipos de argumentos baseados no princípio do paralelismo ontofilogênico – recapitulacionismo, pois entendem que a apresentação do material histórico, em oposição aos princípios da teoria da recapitulação, deva utilizar símbolos e expressões verbais modernos e ferramentas culturais diferentes daquelas empregadas pelos autores no passado. Radford[10] defende que o principal papel das análises histórico-epistemológicas, no domínio da Educação Matemática, é o de reconstituir os antigos significados de teorias, conceitos e procedimentos matemáticos, os quais, através de uma análise e adaptação didática, poderão ser compatibilizados e incorporados aos currículos da atualidade, bem como poderão fornecer subsídios para a produção de sequências didáticas a serem desenvolvidas no contexto social da atividade matemática em sala de aula. O papel da História da Matemática, nesse caso, é o de prover material para desenvolver sequências de ensino que propiciem aos estudantes o entendimento dos conceitos atuais.

Com o suporte teórico apresentado, delimitamos o escopo da presente pesquisa à construção do conceito de áreas até a formalização da integração, partindo, obviamente, do conhecimento histórico de problemas que consideramos representativos de cada época no tratamento de áreas, desde a Antiguidade até a formalização no Cálculo Integral. Assim, a questão que norteará nossa pesquisa será: "Quais e como aconteceram, ao longo do tempo histórico da Matemática, as assimetrias entre as técnicas e os conceitos relativos ao cálculo de áreas, gerando informações que possam ser exploradas como recurso em sala de aula".

ÁREAS E O CÁLCULO INTEGRAL

[10] Luis Radford, "On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics," *For Learning of Mathematics* 17 (1997): 32, apud Miguel & Miorim, *História na educação matemática.*

A Matemática se desenvolveu a partir de necessidades práticas similares surgidas no desenvolvimento de várias civilizações, como os povos egípcios, mesopotâmicos, indianos, chineses, japoneses etc. Adquiriu, porém, uma linguagem própria que se aperfeiçoou a partir da evolução da Filosofia e da Lógica no mundo grego. A busca de soluções para as necessidades primárias geraram os problemas que, uma vez formulados em termos matemáticos, acabaram por tornar-se, de algum modo, um desafio intelectual sobre o qual se debruçaram os intelectuais ao longo dos tempos. O Cálculo Diferencial e Integral, em especial, nasceu desta combinação: numa direção, os problemas geraram as formulações de conceitos, teorias e técnicas para resolvê-los enquanto, noutra direção, das próprias teorias sugeriram novos problemas que aperfeiçoaram o conhecimento sobre o conceito e ampliaram as áreas de aplicação.

O conceito e a teoria da integração desenvolveram-se basicamente a partir de problemas de cálculo de áreas, desde figuras poligonais até as áreas limitadas pelos gráficos de curvas ou funções. A geometria exerceu um papel fundamental nesse desenvolvimento conforme nos atesta Baron: "Embora conceitos precisos do Cálculo atual independam das figuras e dos desenhos, não teria sido fácil entender e ensinar sem a **imagem visual** promovida pelos modelos geométricos das curvas, tangentes e quadraturas"[11].

AS ÁREAS NA ANTIGUIDADE

Passaremos, na sequência, por uma pontuação de fatos históricos das civilizações egípcia e babilônica, destacando o desenvolvimento "prático" do conceito de área, qual seja, o desenvolvimento das técnicas utilizadas para o trabalho com as áreas, inicialmente vinculado aos avanços da geometria e relacionado ao conhecimento dos números. Encontrar a área de uma região é, por algum processo de medida, associar, a essa região, um número. Procuramos realçar, paralelamente à

[11] M. E. Baron & H. J. M. Bos, *História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo,* 5 vols. (Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985), 1:34.

apresentação dos fatos históricos, algumas das técnicas conhecidas relacionadas às estimativas de áreas, que precederam a formulação do conceito de integral, quais sejam:

- ✓ Métodos de cálculo elementar a partir de observações e experiências práticas;
- ✓ Método da composição e decomposição de figuras geométricas;
- ✓ Método de equivalência de áreas baseados na quadratura;
- ✓ Método de equivalência de áreas envolvendo congruências;
- ✓ Método das aproximações geométricas;
- ✓ Método Mecânico da alavanca - balanceamento de figuras geométricas;
- ✓ Método de Integração de Arquimedes – antecipação do Cálculo Integral

1. A Matemática na Mesopotâmia (4.500 – 1.500 a.C.)

Os mesopotâmios criaram o sistema de numeração sexagesimal onde se observava a notação matemática posicional, o uso do zero, o uso de tabelas com multiplicações e listas de recíprocos (para quase todo n, calculava-se 1/n). Aparentemente, a divisão era efetuada através da multiplicação pelo recíproco. O cálculo com frações era bem desenvolvido. Eles tinham um bom conhecimento sobre fatos geométricos que serviam, inclusive, para estudos da Astronomia. Os resultados geométricos, registrados pelos babilônios nos tabletes, evidenciam o conhecimento de processos gerais não explicitados e tratam de situações e experiências práticas. Vejamos três exemplos.

Um dos primeiros registros de problemas relativos à divisão de bens deixados como herança é encontrado no tablete YBC4608: "Um triângulo, com comprimento 6,30 e 11, 22, 30 de área, com largura desconhecida, é dividido entre seis irmãos. A parte de cada um excede a do outro, mas também não se sabe o quanto excede. Quanto cada irmão ganha a mais do que o outro?". A figura a seguir ilustra a divisão proposta

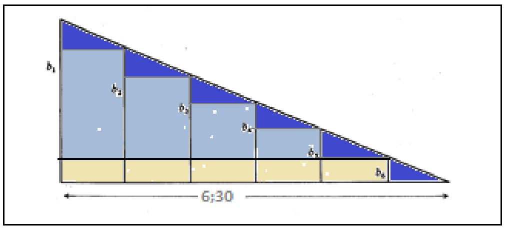


Figura 1: Ilustração da divisão proposta no tablete YBC4608.
Fonte: Própria

São apontados, no tablete, os passos:

- ✓ Multiplique a área por 2 – temos 22,45,0;
- ✓ O recíproco de 6,30 não pode ser obtido; por quanto se deve multiplicar 6,30 para dar 22,45,0?
- ✓ Temos 3,30 para a multiplicação, a maior largura;
- ✓ Tome o recíproco de 6, o número de irmãos, e multiplicado por 6;30, resulta em 1,05 o comprimento de cada um;
- ✓ O tablete está danificado a partir daí, o que impede a tradução completa do texto.

O exemplo abaixo, encontrado no tablete BM85194, leva a uma aproximação para π igual a 3. O problema pode ser traduzido simplificadamente: "Desenhei a fronteira de uma cidade (a circunferência interna); não se conhece o seu comprimento. Caminhei a partir da circunferência interna na direção contrária ao centro e me afastei 5 em todas as direções, chegando à segunda fronteira. A área entre as circunferências é 6, 15. Encontre o diâmetro da velha e da nova cidade".

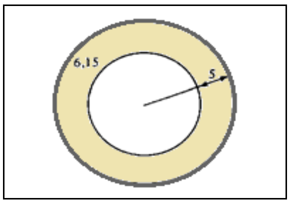


Figura 2: Ilustração do problema encontrado no tablete BM85194.
Fonte: Própria.

Para a solução, temos os registros:

- ✓ Multiplicar o 5 do acréscimo por 3; tem-se 15;

- ✓ Tomar o inverso de 15 e multiplicar por 6,15, a área entre as circunferências; tem-se 25;
- ✓ Escreva o 25 duas vezes;
- ✓ A um deles, some o 5, que é o que se caminhou, para obter um dos diâmetros e do outro subtraia 5 para chegar ao outro diâmetro.

Hoje, conhecemos a fórmula da área da coroa circular:

$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)(R - r)$$

O problema nos dá os valores de *A* e *R* - *r*. Daí, 6, 15 = π . *5(R + r)*, o que nos leva a concluir que a aproximação para π utilizada pelos babilônios era *3*. Os cálculos apontados conduzem ao valor *25* = *R* + *r*, que somado a *5* = *R* – *r* dá o valor do diâmetro maior, e, subtraído, o diâmetro menor.

Em ambos os problemas, observamos que o tratamento inicial foi essencialmente numérico; a divisão por 6 no primeiro problema leva à decomposição da área, mas não temos as informações seguintes.

No terceiro exemplo, abaixo, observamos, novamente, um tratamento numérico para encontrar a área do triângulo isósceles inscrito num círculo cuja circunferência é igual a 3 valores de 20 conforme registrado no tablete MS 3051.

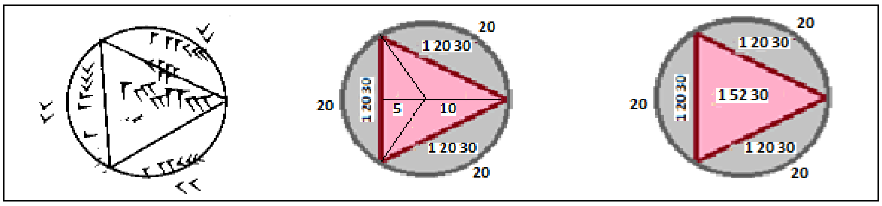


Figura 3: Reprodução da figura no tablete MS 3051.[12]

Os registros mostram uma aproximação bem apurada da $\sqrt{3} = \frac{26}{15} =$ 1,7333. Os chamados três valores 20 da circunferência totalizam 60 que corresponde ao valor 1,00 no sistema sexagesimal. Nos registros da solução, utilizando o valor de π=3, obtém-se o diâmetro do círculo igual a

[12] Fonte: J. Friberg, *Inexpected links between Egyptian and Babylonian Mathematics* (New Jersey: World Scientific, 2005), 130.

20 e a respectiva altura do triângulo igual a 15. Na sequência, a área do triângulo foi dada pelo cálculo $\mathbf{6}\,.\,(\frac{5\sqrt{3}\,.5}{2})$, que resultou no valor aproximado de 1,52,30 registrado no tablete.

Quase todos os povos antigos tentaram estabelecer a relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, com o objetivo de resolver problemas práticos de geometria. Os egípcios conseguiram a aproximação de 3.1605. O mesmo número aparece em escritos da China antiga. O indiano Brahmagupta associou essa relação com a raiz quadrada de 10, ou seja, ≈3,162278.

2. Matemática no Egito Antigo (3.500 – 1.500 a.C.)

O sistema numérico egípcio, utilizado na resolução dos problemas, baseia-se numa aritmética aditiva com símbolos para unidades e múltiplos de dez. A multiplicação e a divisão eram efetuadas usando séries de adições e duplicações. Não há evidências de que tenham tido preocupação com processos gerais ou dedutivos. O problema 24 do papiro do Cairo, que conduz aos resultados do posterior teorema de Pitágoras, exemplifica o conhecimento de um processo similar.

Problema 24: "Calcular a nova altura de um bastão de 10 cúbitos em pé que tem sua base afastada de 6 cúbitos". Para calcular a distância do alto em que está o bastão após o deslocamento, o escriba calcula 10. 10 = 100, subtrai 6.6 = 36 e extrai a raiz quadrada de 64, obtendo 8. Desta forma, a nova altura será 10 - 2 = 8.

Veremos abaixo dois exemplos que evidenciam as técnicas utilizadas nos cálculos de áreas.

O problema 48 do papiro de Rhind (1650 a.C.) trata de estudar a razão entre a área do círculo e seu diâmetro usando uma técnica de aproximação. Considera-se um círculo cujo diâmetro mede 9 unidades e um quadrado cujo lado tem o mesmo comprimento. A área do octógono, construído sobre um quadriculado com quadrados de lado unitário, dá a aproximação para a área do círculo utilizada pelos egípcios.

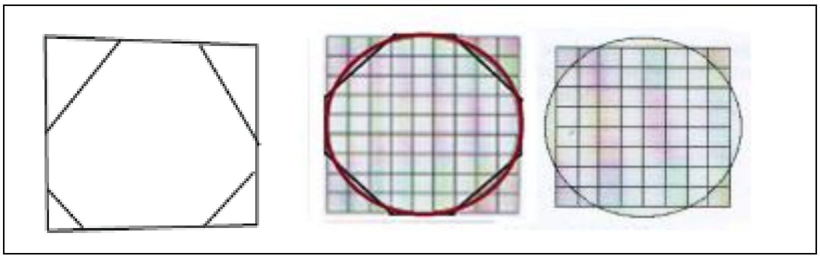


Figura 4: Reprodução da figura do papiro de Rhind.[13]

Calculando a área do octógono da figura central, a partir do quadrado e subtraindo as áreas dos triângulos, temos uma aproximação para a área do círculo utilizada pelos egípcios: $9^2 - 4.\frac{3^2}{2} = 63 \approx 64 = 8^2$. Os egípcios recomendavam o seguinte cálculo para a área da circunferência: subtraia do comprimento do diâmetro sua nona parte e multiplique o resultado por si mesmo

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{d}\,.\,\frac{8}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\,.\,\boldsymbol{r}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2.\,\boldsymbol{r}^2$$

Com esse cálculo, a aproximação para $\boldsymbol{\pi}$ será:

$$\boldsymbol{\pi} \approx \frac{256}{81} = \mathbf{3}\ \frac{13}{81} = \mathbf{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \approx \mathbf{3{,}1605}$$

O exemplo a seguir, problema 36 do papiro do Cairo, trata do cálculo da área de um segmento circular utilizando o método de aproximação de figuras geométricas.

Problema 36: "Calcular a área de um pedaço de terra circular no qual cabe um triângulo de 3 lados iguais de 12 cúbitos".

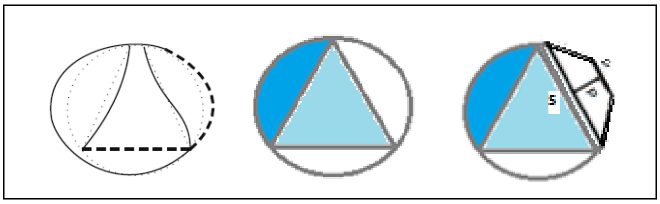


Figura 5: Reprodução da figura do papiro do Cairo.[14]

[13] Fonte: R. A. Parker, comp., *Demotic Mathematical* Papyri (London: Lund Humphries, 1972), Plate 12, apud G. D. Young, "Diagrams in Ancient Egyptian Geometry: Survey and Assessment," *Historia Mathematica* (nov. 2009): 343.
[14] Fonte: Parker, comp., *Demotic Mathematical* Papyri, Plate 12, apud Young, "Diagrams in Ancient Egyptian Geometry," 354-355.

Aqui o escriba encontrava o valor da altura do triângulo a partir do lado $\boldsymbol{s} = \mathbf{12}$ utilizando a técnica do problema 24 descrito acima. Em seguida calculava $\boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ da altura do triângulo e a área do segmento circular era dada por $\boldsymbol{p}$. $(\frac{s+p}{2})$, uma aproximação do trapezoide.

3. A Matemática Grega (600 – 200 a.C.)

A partir do século VIII a.C., os gregos expandiram muito seu território. Fundaram grandes cidades do mundo atual na costa dos mares Negro e Mediterrâneo, o que lhes permitiu manter contatos com as civilizações orientais, em especial com os babilônios e egípcios.

Sabe-se, também, que no período de 800-600 a.C., além da expansão geográfica, houve um grande desenvolvimento cultural, que inclui um alfabeto próprio e poemas famosos como a Ilíada e a Odisseia, de Homero. Galvão ressalta que

> Os gregos desenvolveram uma cultura rica e sensível, na busca da forma perfeita através da arte e da elevação do espírito pelo conhecimento orientado pela razão e pela Filosofia, que se caracteriza como o exercício do pensamento e da linguagem, em busca da verdade. Neste ambiente cultural, a Matemática se desenvolve e adquire uma linguagem própria e os processos empíricos, até então suficientes para responder às questões na forma de 'como', foram considerados insuficientes para as novas questões agora na forma do 'porque'.[15]

Os aspectos filosóficos relacionados com os conceitos de espaço e de tempo, a natureza de quantidades contínuas – medidas e sua divisibilidade *ad infinitum* com implicações de quantidades infinitamente pequenas e o advento dos irracionais, foram objetos de estudo de várias escolas de pensamento, que buscavam na filosofia e na matemática entendimentos que não gerassem paradoxos e contradições entre si. De

[15] M. E. E. L. Galvão & V. H. G. de Souza, "Luas, Áreas e Quadratura: Um Problema e Muitos Séculos na História da Matemática," in *Anais do III Seminário Internacional de Educação Matemática,* São Paulo, 2011.

fato, alguns conceitos, como as quantidades infinitamente pequenas, continuaram em aberto até o século XIX, quando foram contornados para estruturar o cálculo com base nos conceitos de número e limites.

No período de 600-400 a.C., as contribuições principais de Tales (585 a.C.) e Pitágoras (550 a.C.) foram fundamentais para o desenvolvimento da matemática. Para Aristóteles, os pitagóricos foram os criadores da Geometria como ciência das figuras e de suas relações com a Aritmética, ciência dos números. Segundo Baron[16], depois dos pitagóricos, a Matemática lidava com dois tipos diferentes de atividades. O primeiro relacionado à aritmética - envolvendo "um sistema de contagem de elementos discretos, separados e fisicamente indivisíveis"; o segundo relativo à geometria - envolvendo "medida de quantidades que são contínuas e, na imaginação, 'infinitamente' divisíveis, isto é, divisíveis sem fim". Essas atividades estavam relacionadas, pois os números eram utilizados para a medição.

Áreas por Quadraturas

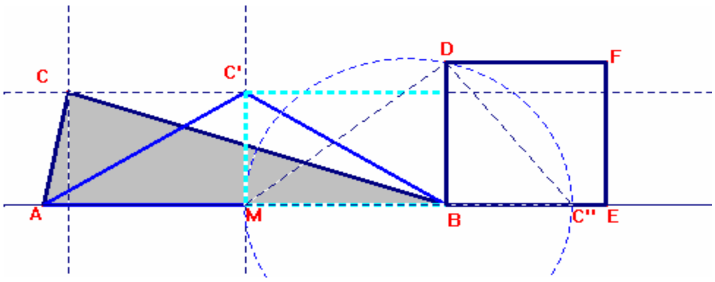
Por volta do século V a.C., faltavam técnicas para a quadratura do círculo, embora já fosse conhecida a técnica das quadraturas para as figuras poligonais. Os gregos estabeleceram o procedimento da quadratura para obter a área de uma figura geométrica, qual seja construir com régua e compasso um quadrado equivalente a ela com a mesma área da figura dada.

Abaixo, Galvão[17] descreve os passos para obter-se a quadratura de um triângulo poligonal qualquer, partindo da sua composição em triângulos.

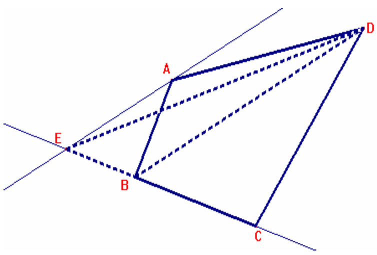
Se começamos com um triângulo ΔABC, é fácil seguir as etapas descritas e ilustradas a seguir para construir um quadrado equivalente a ele:

[16] Baron & Bos, *História da Matemática*, 1:22.
[17] Galvão & Souza, "Luas, Áreas e Quadratura".

- ✓ Inicialmente construímos o triângulo isósceles ΔABC′ com a mesma base do triângulo ΔABC e o vértice C′ na reta paralela à base AB que passa pelo vértice C;
- ✓ O triângulo isósceles é equivalente ao retângulo cujos lados são MC′ e BM;
- ✓ Construindo o triângulo retângulo ΔMDC′′, cuja hipotenusa tem comprimento MB + BC′′, e BC′′ = MC′, temos que sua altura relativa à hipotenusa terá comprimento x tal que x^2 = BD^2 = MB . BC′′ = MB . MC′ ou ainda: área do quadrado é x^2 = área do retângulo BMC′ = área do triângulo ΔABC.



Passando dos triângulos aos quadriláteros, observamos que é possível, para um quadrilátero qualquer, construir um triângulo equivalente. A construção é simples e está ilustrada na figura abaixo:



A partir da diagonal BD, o triângulo ΔABD é equivalente ao triângulo ΔBDE, sendo E o ponto de intersecção da reta que contém o lado BC com a paralela à diagonal BD que passa pelo ponto A. Daí, o novo triângulo ΔECD é equivalente ao quadrilátero ABCD.

A partir do triângulo ΔECD, construímos, conforme o processo anterior visto para a quadratura do triângulo, um quadrado equivalente ao quadrilátero ABCD. Para polígonos quaisquer, generaliza-se, portanto, o procedimento utilizado para os triângulos.

ÁREAS POR COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

As primeiras experiências com cálculos de áreas de figuras circulares, ainda sem utilizar a técnica da aproximação por áreas de polígonos, foram registradas nos estudos de Hipócrates (430 a.C.) que utilizou a técnica da composição e decomposição de figuras geométricas para as chamadas "Luas de Hipócrates".

O exemplo a seguir, obtido de Kline[18], ilustra a técnica de Hipócrates para calcular a área de luas construídas sobre os lados de um triângulo isósceles.

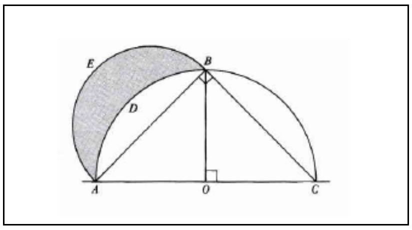
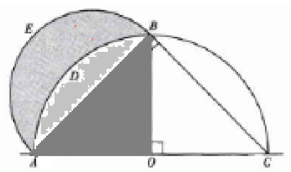


Figura 6: Luas de Hipócrates[19]

Hipócrates desenhou um semicírculo ABC em torno do triângulo retângulo isósceles de diâmetro AC e outro semicírculo AEB com diâmetro AB. Trabalhou com a hipótese de que as áreas estão na razão do quadrado dos diâmetros, embora não tenha apresentado a prova dessa afirmação visto que, para tal, fazia-se necessário utilizar o princípio de Eudoxo de anos posteriores.

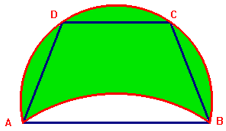
A partir da hipótese utilizada, obtém-se a razão 2 entre as áreas dos semicírculos:

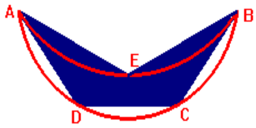


$$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{AEB}} = \frac{\mathrm{AC}^2}{\mathrm{AB}^2} = \frac{\sqrt{2}^2\,\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AB}^2} = 2$$

Ou seja, a metade do semicírculo maior é igual ao semicírculo menor. Portanto, ao subtrair a área comum entre as duas figuras, teremos a área da lua ADBE igual à área do triângulo ABO. Hipócrates encontrou outras duas luas cuja quadratura podia ser feita pelo mesmo processo.

[18] M. Kline, *Mathematica Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972), 41.
[19] Fonte: Ibid., 41.





MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO GEOMÉTRICA – PRINCÍPIO DE EUDOXO

Eudoxo (408–355 a.C.) introduziu o conceito de magnitude**,** elaborou a Teoria das Proporções e sugeriu o Princípio da Exaustão ou Princípio de Eudoxo. O sistema de números inteiros e razões entre números inteiros eram sabidamente insuficientes para representar alguns segmentos de retas, superfícies e volumes. Destas grandezas podia-se apenas dizer que são maiores, menores, iguais ou que permanecem numa dada proporção em relação à outra quantidade da mesma espécie. Para resolver o problema, Eudoxo introduziu o conceito de magnitude**,** que não é um número, mas podia ser associada a um segmento, a um ângulo, a áreas ou volumes. Das magnitudes podia-se definir razão ou proporção. Assim, os fatos aritméticos passaram a ser associados a procedimentos geométricos.

No contexto dessa inovação importante e determinante em relação aos processos aritméticos e geométricos, Eudoxo elaborou a Teoria das Proporções – razão entre grandezas. Em seguida, sugeriu uma abordagem irrefutável sobre processos repetidos continuamente, conhecido como Princípio de Eudoxo; na linguagem atual, tal princípio pode ser expresso assim: Dado um número inteiro positivo $\boldsymbol{M_0}$, existe um número $\boldsymbol{M_1} < \frac{1}{2}\boldsymbol{M_0}$, $\boldsymbol{M_2} < \frac{1}{2}\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M_3} < \frac{1}{2}\boldsymbol{M_2}$, … e assim por diante. Seja $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, então, existe um número inteiro positivo $\boldsymbol{N}$ tal que $\boldsymbol{M_N} < \boldsymbol{\mathcal{E}}$.

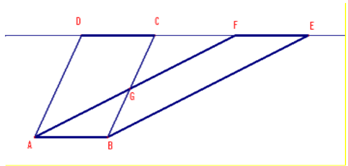
Como veremos adiante, Arquimedes fez uso intensivo desse Princípio. Antes, porém, elencamos alguns exemplos relativos à equivalência e comparação de áreas.

EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS BASEADA NA DECOMPOSIÇÃO E CONGRUÊNCIA

Nos "*Elementos*" de Euclides[20] encontramos a comparação de áreas de figuras geométricas envolvendo a decomposição e congruência, além das técnicas de quadratura já conhecidas. Nas proposições iniciais do Livro I, Euclides estabelece a construção de segmentos congruentes a um segmento dado, a diferença de segmentos desiguais e a construção da mediatriz e da perpendicular de uma reta por um ponto não pertencente a ela. As provas são feitas utilizando construções geométricas. Em seguida, trata das propriedades dos lados e ângulos de um triângulo e os conhecidos casos de congruência *ALA* e LAA_o. Depois de estudar as propriedades das retas paralelas e a soma dos ângulos de um triângulo, passa às propriedades dos paralelogramos.

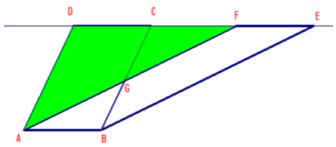
Encontramos, na proposição 35, a primeira comparação de áreas:

"Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais".

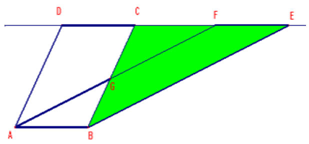


Para a prova da "igualdade" os passos importantes são:

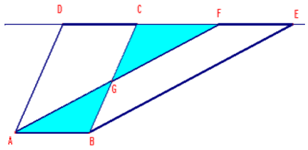
- ✓ Os segmentos DF e CE são congruentes;



- ✓ Os triângulos AFD e BEC são congruentes;

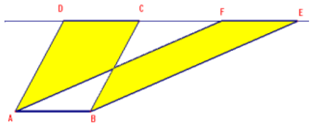


- ✓ Os triângulos ABG e FCG são congruentes;

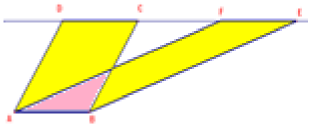


[20] Euclides, *Os Elementos*, trad. Irineu Bicudo (São Paulo: UNESP, 2009).

✓ Os trapézios ADCG e BEFG são equivalentes, pois têm a mesma área;

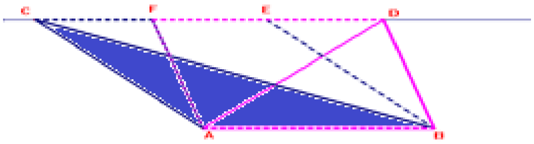


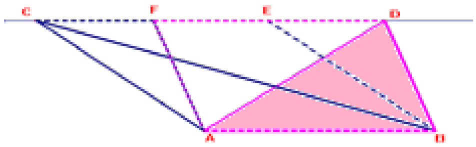
✓ Finalmente, conclui-se que os paralelogramos são "iguais".



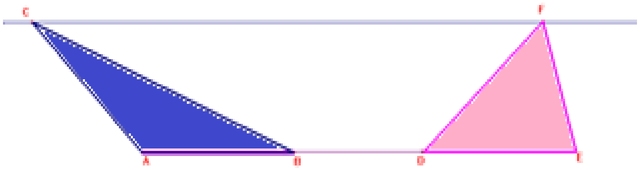
A proposição 36 do livro I trata de paralelogramos com bases iguais, mas não necessariamente coincidentes e com mesma altura.

A proposição 37 trata da igualdade de áreas de triângulos com a mesma base e a mesma altura: "Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas paralelas são 'iguais' entre si".



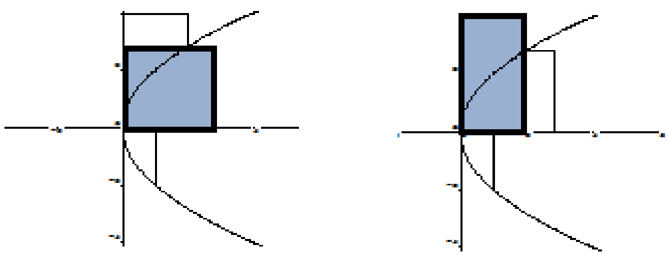


A estratégia, nessa proposição, é considerar cada um dos triângulos como metade de paralelogramos nas condições da proposição anterior, logo, suas áreas são iguais. A proposição seguinte trata da igualdade das áreas dos triângulos com bases e alturas congruentes, e a prova usa argumentos semelhantes aos já aqui resumidos.

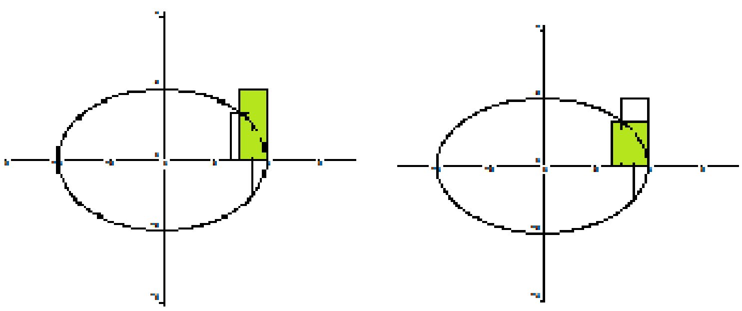


COMPARAÇÃO DE ÁREAS PARA CARACTERIZAÇÃO DAS CÔNICAS

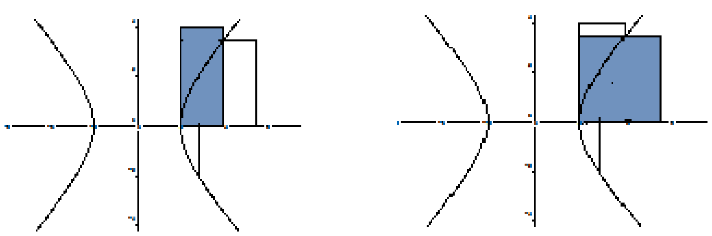
Apolônio (262 – 190 a.C.) denominou as secções de um cone qualquer - parábolas, elipses ou hipérboles, através da comparação de áreas, como veremos a seguir a partir de Katz[21]. No seu trabalho, Apolônio tomou um cone qualquer, formado pela reunião das retas que passam por um ponto comum e pelos pontos de uma circunferência. Seja V o vértice da cônica. Para cada ponto P da cônica, construiu um quadrado cujo lado tem o comprimento do segmento da perpendicular PX do ponto ao eixo da cônica. Apolônio comparou esta área com a área do retângulo que tem por base o segmento VX e por altura o "*latus rectum*" da cônica, que é a corda perpendicular ao eixo passando pelo foco da cônica.



A parábola é a cônica em que a área do quadrado, para cada ponto P, é igual à área do retângulo cuja altura é o *latus rectum* L. Se adotarmos a linguagem atual, podemos dizer, neste caso, que: $y^2 = Lx$



A elipse é a cônica em que a área do quadrado, para cada ponto P, é menor do que a área do retângulo cuja altura é o *latus rectum* L. Podemos dizer, neste caso, que: $y^2 < Lx$



A hipérbole é a cônica em que a área do quadrado, para cada ponto P, é maior do que a área do retângulo cuja altura é o *latus rectum* L. Podemos dizer, neste caso, que: $y^2 > Lx$

[21] V. A. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Boston: Pearson Education, Inc, 2009), 115.

ÁREAS E AS PRIMEIRAS IDEIAS DA INTEGRAÇÃO

Boyer diz que *"Ninguém, no mundo antigo, se igualou a Arquimedes, quanto à invenção e à demonstração, ao lidar com problemas relacionados ao cálculo"*[22]. Com Arquimedes, o Cálculo Integral começou a delinear-se como um conjunto mais elaborado de ferramentas, técnicas e estruturas de demonstrações.

Dois recursos são muito importantes nas origens do Cálculo Integral – o método da Exaustão, derivado do Princípio de Eudoxo, e o método Mecânico inventado por Arquimedes, seguido das antecipações das somas de elementos de dimensionalidade menor. O princípio de Eudoxo, descrito anteriormente, estava mais alinhado com os conceitos de limites desenvolvidos no século XIX e permitiu desenvolver um método impecável para estabelecer a validade de um teorema. O método mecânico de Arquimedes, que dividia ou decompunha as figuras geométricas para depois somar suas áreas, envolvia os indivisíveis ou os elementos de dimensionalidade menor, conceitos mais alinhados ao desenvolvimento do Cálculo no século XVII. Com os exemplos selecionados, mostraremos como Arquimedes calculou a área de um segmento parabólico, utilizando as abordagens mencionadas acima.

MÉTODO DA EXAUSTÃO - ÁREA DO SEGMENTO PARABÓLICO $y = x^2$

Dentre muitos outros trabalhos, Arquimedes demonstrou que a área do segmento parabólico equivale a 4/3 da área do triângulo inscrito. Preenchendo o segmento parabólico com triângulos, utilizou o método da aproximação de figuras geométricas em conjunto com o princípio de Eudoxo, conforme figura abaixo.

[22] Carl B. Boyer, *Tópicos da História da Matemática para a Sala de Aula: Cálculo* (São Paulo: Editora Atual, 1993), 7.

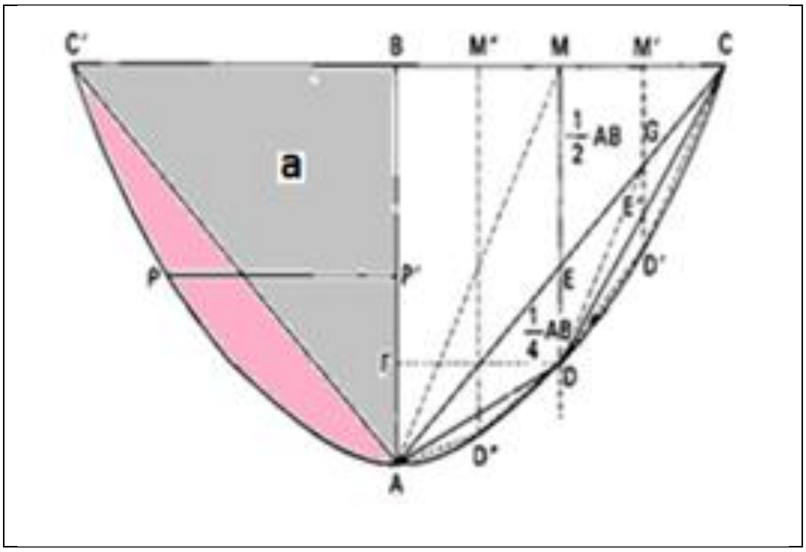


Figura 7: Área de um segmento parabólico – Método da Exaustão.[23]

Utilizando a técnica de semelhança de triângulos no diagrama acima, Arquimedes concluiu que:

(i) O ΔADC = ¼ ΔABC, o ΔAD'C = ¼ ΔADC = 1/16 ΔABC
A demonstração deste passo encontra-se em Boyer, 1993, p. 58.

(ii) ΔADC + ¼ ΔABC + $1/4^2$ ΔABC + $1/4^3$ ΔABC + ... + $1/4^n$ ABC aproxima-se cada vez mais de 4/3 ΔABC, a medida que n vai crescendo.

Boyer[24] afirma que Arquimedes foi o primeiro matemático a enfrentar problemas envolvendo limites e séries. Um exemplo está na demonstração da soma acima onde, em notação atual, temos: $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = {}^{1}/_{3}$.

Katz[25] descreve a demonstração de Arquimedes, que não utilizou a fórmula de Euclides para a soma de uma progressão geométrica. Em vez disso, recorreu à dupla redução ao absurdo. Assim, dada a série:

$$a + {}^{1}/_{4}\, a + ({}^{1}/_{4})^2 + \cdots + ({}^{1}/_{4})^n a + {}^{1}/_{3}\,({}^{1}/_{4})^n = {}^{4}/_{3}\, a$$

Seja K = $({}^{4}/_{3})a$ a soma da série.

[23] Fonte: Ibid., 58.
[24] Ibid., 60.
[25] Katz, *A History of Mathematics*, 108.

Seja A a área do segmento parabólico.

Seja T a área dos triângulos inscritos no segmento parabólico.

Ou K = A ou K > A ou K < A.

Se K < A podemos definir ε = A - K e podemos inscrever tantos triângulos no segmento até que A – T < ε, ou seja, A – T < A – K. E para tal, T > K o que é uma contradição, pois a fórmula mostra que T < $({}^{4}/_{3})a$ = K.

Mas, se K > A podemos definir ε = K - A e teremos algum n para o qual $({}^{1}/_{4})^{n}a$ < e, ou seja, $({}^{1}/_{4})^{n}a$ < K – A. Mas, K – T = ${}^{1}/_{3}({}^{1}/_{4})^{n}$ < $({}^{1}/_{4})^{n}a$. E como tal, A < T, o que é novamente uma contradição. Portanto, A = K = $({}^{4}/_{3})a$, conforme Arquimedes queria demonstrar.

MÉTODO MECÂNICO - ÁREA DO SEGMENTO PARABÓLICO $y = x^2$

Além de utilizar amplamente o Método da Exaustão, Arquimedes introduziu uma técnica revolucionária, referenciada por ele mesmo como o Método da Alavanca ou Método Mecânico segundo Boyer[26]. Consistia num esquema para equilibrar entre si os "elementos" de figuras geométricas, elementos obtidos pela divisão da figura geométrica. A técnica utilizava o conceito de elementos de dimensionalidade menor ou 'indivisíveis' juntamente com a ideia de quantidades infinitamente grandes. Esta a abordagem mostrou-se heuristicamente frutífera ao admitir que:

- ✓ Um segmento de reta era formado por inúmeros pontos;
- ✓ Uma superfície plana era formada por uma quantidade indefinidamente ou infinitamente grande de segmentos de reta;
- ✓ Um sólido era considerado como uma totalidade de elementos planos paralelos.

Em Katz[27] encontramos um exemplo da utilização deste método para o cálculo da área do segmento parabólico y=x². No diagrama abaixo, Arquimedes definiu uma alavanca dada pelo segmento HC com

[26] Boyer, *Tópicos da História da Matemática*, 57.
[27] Katz, *A History of Mathematics*, 105.

ponto de equilíbrio em K. Em seguida, dividiu o ΔAFC em segmentos de reta e, para cada um deles, utilizou dados aferidos por semelhança de triângulos e equilibrou as partes do segmento na referida alavanca.

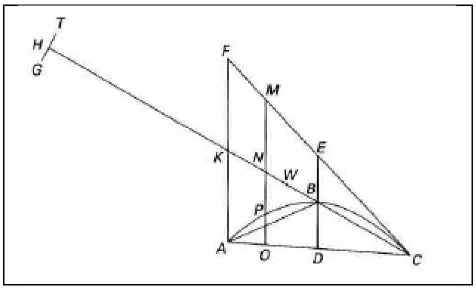


Figura 8: Balanceando a área de um segmento parabólico – Método Mecânico.[28]

Arquimedes observou que a área do segmento parabólico ABC = 1/3 ΔACF. Mas como ΔACF = 4 . ΔABC, concluiu, então, que a área do segmento parabólico ABC = 4/3 ΔABC.

Katz[29] faz referência ao "Método" no qual Arquimedes declarava que o resultado obtido com a técnica da alavanca é apenas um valor provável que deveria ser submetido a uma prova geométrica – aquela já vista anteriormente, pela composição dos triângulos.

MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DE ARQUIMEDES - ÁREA DO SEGMENTO PARABÓLICO $y = x^2$

Baron[30] se refere a este processo como 'Método de Integração de Arquimedes', uma antecipação ao Cálculo Integral. Arquimedes entendeu ser necessário demonstrar que esse processo ou técnica de dividir as figuras geométricas em elementos de dimensionalidade menor era válido e aplicável a qualquer sólido dado e para tanto, deveria utilizar uma prova geométrica. Assim, com o princípio de Eudoxo e o conceito de séries obtidas de observações geométricas, Arquimedes demonstrou sua proposição de forma rigorosa.

Os livros pesquisados trazem uma demonstração dessa proposição para o cálculo do volume de um sólido de revolução gerado por um

[28] Fonte: Ibid., 105.
[29] Ibid.
[30] Baron & Bos, *História da Matemática*, 1:40.

segmento de parábola ou hipérbole, válida também para uma sessão menor que a metade de um esferoide. Para calcular tais volumes, Arquimedes fatiou o sólido em planos, elementos de dimensionalidade menor, e se propôs a calcular a área destas superfícies pensando em inscrever e circunscrever outra figura plana em torno desta superfície, cada uma delas construída de cilindros ou troncos de cilindros com alturas iguais. Para facilitar a compreensão do método, descreveremos em linhas gerais a demonstração do cálculo da área da superfície delimitada pelo segmento parabólico. O método propõe a divisão da superfície em retângulos horizontais inscritos e circunscritos ao segmento parabólico $y=x^2$, conforme ilustração a seguir.

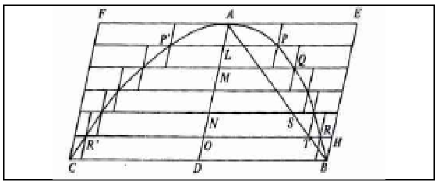


Figura 9: Área de um segmento parabólico – Integração de Arquimedes.[31]

Seja c_i a representação para cada retângulo circunscrito e i_i cada retângulo inscrito; C_n e I_n as áreas respectivas da somatória dos retângulos. Seja E a área envolvente da figura – neste caso a área do retângulo que envolve toda a figura, e e_i cada fatia desta área. Assim:

$$In = i_1 + i_2 + i_3 + ... + in$$

$$Cn = c1 + c2 + c3 + ...+ cn$$

$$E = e1 + e2 + e3 + ... + en$$

Da figura temos ainda que $i_1 = 0$ e c1= i2 , c2 = i3, ... de forma que (c1 + c2 + c3 + ... – (i1 + i2 + i3 + ...) = i1 + cn = cn). Ou seja, Cn – In = cn. Porém, cn = en que é uma fatia da área envolvente (e1 = e2 = e3 = ... = en). Ou seja, en = E/n. Assim, $C_n - I_n = E/n$. Se tomarmos n suficientemente grande, C_n e I_n se aproximam ou convergem para o mesmo valor. Assim, Arquimedes demonstrou a validade de sua

[31] Fonte: Ibid., 1:44.

técnica de dividir os objetos geométricos em elementos de dimensionalidade menor. Observamos, no entanto, que o processo é válido para o cálculo de áreas delimitadas pelo gráfico de funções crescentes ou decrescentes.

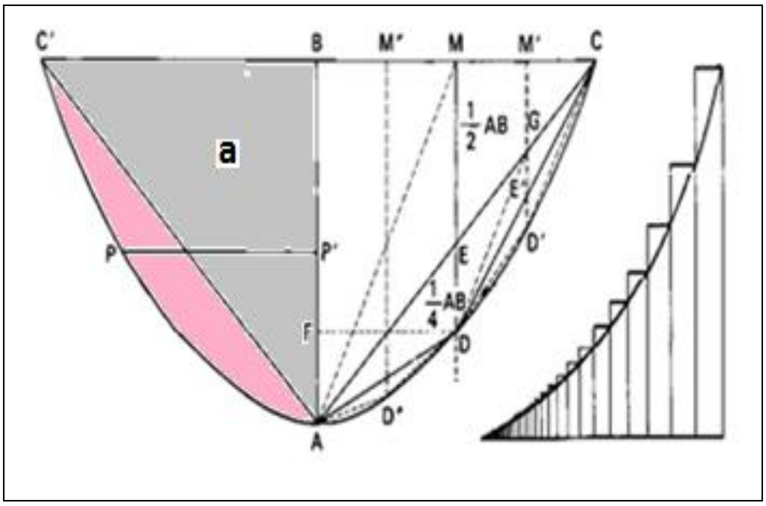


Figura 10: Composição
- Métodos da Exaustão e Integração de Arquimedes.[32]

Como afirma Boyer[33], os métodos utilizados por Arquimedes constituem as origens do Cálculo Integral. Porém, esses conceitos inovadores de processos repetidos continuamente, quantidades infinitamente grandes ou pequenas, indivisíveis ou dos elementos de dimensionalidade menor, não progrediram na Idade Média e só foram retomados no século XIV, atingindo seu desenvolvimento pleno no Renascimento.

Com os exemplos selecionados nesse trabalho, percorremos a trajetória da utilização de técnicas, surgidas na Antiguidade, que foram se sofisticando ao ponto de gerar os fundamentos para a formalização do conceito das áreas no âmbito do Cálculo Integral. Os exemplos selecionados poderão ser utilizados em sala de aula em diferentes situações de trabalho envolvendo área de figuras planas. Essa trajetória dos problemas, relacionados ao manuseio com áreas, deverá ser

[32] Fonte: Boyer, *Tópicos da História da Matemática*, 58.
[33] Ibid., 7.

ampliada, sendo acrescentados problemas encontrados nos trabalhos dos séculos posteriores, até a formulação do conceito de integral no século XIX.

SOBRE AS AUTORAS:

Maria Helena Ribeiro

Universidade Bandeirante Anhanguera

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Universidade Bandeirante Anhanguera

Artigo recebido em 27 de agosto de 2013

Aceito para publicação em 27 de setembro de 2013