História da Ciência e Ensino
Construindo interfaces

http://dx.doi.org/10.23925/2178-2911.2017v15p81-95

Revisitando a lei dos cossenos para triângulos esféricos: um aporte histórico do século XV

Ana Carolina Costa Pereira

Bernadete Barbosa Morey

Resumo

A Trigonometria, ramo da Matemática, percorreu um longo caminho até se consolidar como ciência independente da Astronomia. Dentre as obras que contribuíram para a história da Trigonometria Plana e Esférica está De Triangulis Omnimodis Libri Quinque *de Regiomontanus, trabalho que recebeu destaque no século XVI por sua organização sistemática. Nesse artigo discutiremos a lei dos cossenos em relação aos lados de um triângulo esférico exposto nessa obra, apresentando os conceitos preliminares, o enunciado e a demonstração. Acreditamos que conhecer as origens dos conteúdos estudados por meio de fontes históricas pode possibilitar uma maior compreensão da matemática e de sua aplicação no mundo moderno.*

Palavras-chave*: Lei dos Cossenos; Trigonometria; Regiomontanus;* De Triangulis Omnimodis Libri Quinque.

Abstract

Trigonometry, branch of mathematics, has come a long way to be consolidated as an independent science of Astronomy. Among the compositions that contributed to the history of Flat and Spherical Trigonometry, De triangulis Omnimodis Libri Quinqueof the Regiomontanus,*work that was highlighted in the sixteenth century by its systematic organization. This article will discuss the law of cosines regarding to the sides of a spherical triangle exposed in this work, showing the previous concepts, statement and demonstration. We believe that, knowing the origins of the contents studied through historical sources can enable greater understanding of mathematics and its application in the modern world.*

Keywords*: Law of cosines; Trigonometry; Regiomontanus;* De triangulis Omnimodis Libri Quinque.

INTRODUÇÃO

A Trigonometria, um dos campos da Matemática, nasceu e se desenvolveu como instrumento cuja finalidade era apoiar a Astronomia ainda na Antiguidade. A ligação entre essas duas esferas era tão intrínseca que se tornou benéfico ponderar a sua separação apenas na Idade Média. Hoje, sua interpretação está associada às funções circulares.

Brummelen (2009, p. 9) trata o sentido da palavra Trigonometria sob a perspectiva do desenvolvimento da ciência: “A própria palavra, que significa ‘medição de triângulo’, fornece pouca ajuda: é um termo muito antigo, do século XVI, e a trigonometria medieval utilizava círculos e seus arcos em vez de triângulos, como seus valores de referência”. Se desejássemos conceituar Trigonometria como uma Ciência, dois requisitos necessários apareceriam prontamente: uma grandeza padrão quantitativa do declive de uma linha a outra linha; e a competência para, e empenho em, computar os comprimentos dos segmentos de linha.

A definição da Trigonometria aperfeiçoou-se com o tempo, porém "o que fez da trigonometria uma nova ciência foi a capacidade de obter um determinado valor de um ângulo e atribuir a esse valor um comprimento correspondente"[1].

A Trigonometria enquanto ciência nasceu no mundo antigo a partir de premências experimentais do cotidiano, sobretudo relativas à Astronomia, Agrimensura e Navegação. Foi uma extensa trajetória até se transformar em uma área da Matemática.

A obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos), redigida por volta de 1464 e publicada postumamente, em 1533, de Johann Müller Regiomontanus, consiste na primeira apresentação européia organizada da Trigonometria Plana e Esférica, uma tentativa importante de abordagem da Trigonometria de maneira emancipada da Astronomia.

Desse modo, nesse artigo iremos discutir a lei dos cossenos para triângulo esférico exposta no tratado *De Triangulis* como uma forma de inserção de conceitos históricos em atividades didáticas. Nesse sentido, vislumbramos uma possibilidade de unir História e Matemática por meio do desenvolvimento histórico de conteúdos ministrados nas salas de aulas, refutando o tradicionalismo presente no cotidiano escolar.

QUEM FOI JOHANN MÜLLER REGIOMONTANUS?

Johann Müller Regiomontanus (1436-1476?) (Figura1) não é um personagem conhecido entre os alunos e professores da Educação Básica e de cursos Superiores como, por exemplo, Leonard da Vinci (1452-1519) e Nicolau Copérnico (1473-1543), seus contemporâneos. Entretanto, ele contribuiu de forma sólida para a independência da Trigonometria que, até o século XV, era vinculada à Astronomia.

Figura 1: Johannes Müller Regiomontanus[2]

[1] Glen Van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry* (New Jersey: Princeton University, 2009), 9.
[2] Howard Eves, *Introdução à História da Matemática* (Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004).

Segundo Pereira:

> A fonte mais antiga relativa aos dados de seu nascimento é dada por Erasmus Reinhold (1511-1553)[3], em 1549, na Universidade de Wittenberg, citada também por Gerolamo Cardano (1501-1576)[4] e Lucas Gauricus (1475-1558)[5]. Regiomontanus nasceu no dia 6 de junho de 1436, na pequena cidade de Königsberg, província de Francônia, na antiga Prússia Oriental.[6]

Recebeu sua instrução inicial em casa. Suas aptidões matemáticas se despontaram ainda prematuramente, ocasionando sua ida aos onze anos a Leipzig, onde iniciou seus estudos universitários.

Ao entrar na Universidade de Leipzig, em 1447, iniciou os estudos em dialética. Entretanto pouco tempo depois, "em 15 de abril de 1450, Regiomontanus matriculou-se na Universidade de Viena, na Áustria, como Johannes Molitoris Künigsperg, atraído pelo ensino de Matemática, Astronomia e Cosmologia"[7].

Na nova universidade, Regiomontanus foi discípulo de Georg von Peuerbach, (1423-1461)[8] seu mentor de projetos acadêmicos, efetivando, paralelamente, extraordinários trabalhos. Dentre as traduções, podemos encontrar o *Epítome do Almagesto,* de Claudius Ptolomeu, isto é, uma versão concisa com explicações, iniciado por Peuerbach e terminado por Regiomontans, após a morte de seu professor, no final de 1462.

O grau de bacharel foi concedido a Regiomontanus em 16 de janeiro de 1452, sendo designado professor da Universidade de Viena, cinco anos depois, em 11 de novembro de 1457. Suas realizações foram extremamente importantes e seguiram os passos do seu mestre, Peuerbach. Em 1462, ele adentrou na Universidade de Pressburg, na Hungria.

Com a conclusão da obra *Epítome do Almagesto*, em 1462, Regiomontanus percebeu a ausência de tratados que englobassem as regras sobre Triângulos, o que seria muito útil aos leitores do *Epítome*. Dessa forma, ainda em 1462, ele iniciou a escrita da sua mais famosa obra *De Triangulis*

---

[3] O alemão Erasmus Reinhold (1511-1553) foi o mais influente professor de Astronomia de sua geração. Lecionou na Universidade de Wittenberg, onde publicou vários trabalhos de astronomia do século XVI. Ele identificou e listou um grande número de estrelas. Owen Gingerich & Robert Westman, "The Wittich Connection:Conflict and Priority in Late Sixteenth-Century Cosmology," *Transactions of the American Philosophical Society* 78, nº 7 (1988): 1-148.

[4] Gerolamo Cardano (1501-1576), matemático italiano, teve sua formação inicial voltada para a medicina. É famoso pela publicação da obra *Ars Magna, sive de Regulis Algebraicis* (A grande Arte, ou Sobre as Regras de Álgebra) que foi o primeiro tratado latino dedicado a soluções das equações cúbicas e quádricas. Victo Katz, *História da Matemática* (Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010).

[5] Lucas Gauricus (1475-1558) era um astrônomo e astrólogo italiano que trabalhou para setores da Igreja. Sua obra mais famosa é o *Tractatus astrologicus in quo agitur de praeteritis multorum hominum accidentibus per proprias eorum genituras ad unguem examinatis* de 1552. Kocku von Stuckrad, *História de Astrologia:da Antiguidade aos Nossos Dias*, trad. Kelly Possos (São Paulo: Editoria Globo, 2007).

[6] Ana C. C. Pereira, "A Obra 'De Triangulis Omnimodis Libri Quinque' de Johann Müller Regiomontanus (1436-1476): Uma Contribuição para o Desenvolvimento da Trigonometria" (Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010), 28.

[7] Ibid., 30.

[8] O austríaco Georg von Peuerbach foi astrônomo e professor da Universidade de Viena. O seu discípulo mais famoso foi Johannes Müller von Königsberg, Regiomontanus. Uma de suas obras mais importantes foi *Theoricae novae planetarum* (1473). Pereira, "A Obra 'De Triangulis Omnimodis Libri Quinque'".

Omnimodis Libri Quinque, finalizada parcialmente no verão de 1463, em Veneza. Segundo Regiomontanus, na sua introdução: "Embora tenha escrito este trabalho sobre triângulos após a *Epítome*, a arte que eu quis transmitir deve ser estudada na ordem inversa, como esta introdução tenta mostrar. Porque ninguém pode ignorar a ciência dos triângulos e alcançar um conhecimento satisfatório das estrelas"[9].

Devido a sua amizade com o Cardeal Johannes Bessarion (1395-1472)[10], Regiomontanus viajou a Pádua, Veneza, Roma, Hungria e Nuremberg onde escreveu diversos trabalhos.A tabela 1 mostra as publicações mais relevantes de Regiomontanus[11].

Tabela 1. Publicações relevantes na vida de Regiomontanus[12]

Ano	Local	Atividade
~1451	Itália/Roma	*Disputationes contra Cremonensia in planetarum theoricas deliramenta*
1462	Itália/Roma	Epítome do Almagesto de Ptolomeu
1462-1463 Publicado 1533	Viena	*De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*
Iniciado em 1463 Obra perdida	Viena/Veneza	*Problemata almagesti*
1467 Publicado 1490	Hungria	*Tabulae directionum et profectionum*
~1468	Hungria	*Tabulae primi mobilis*
1469 Publicado 1544	Nüremberg	*Scripta clarissimi mathematici M. Ioannis Regiomontani*
1474	Itália/Nüremberg	*Efemérides*
1473-1474	Nüremberg	*Tradelist*
~1471	Nüremberg	*Commensurator ou Problemata geometrica omnimoda*
Publicado em 1476	Nüremberg	*Kalendarium*

Em 1471, Regiomontanus escolheu Nüremberg como lugar para fixar residência. A escolha se deveu ao fato de a cidade representar o centro mercantil da Europa, o que lhe dava a oportunidade de fazer instrumentos, especialmente para observação, e do seu ambiente favorável para a troca de ideias com estudantes oriundos de outros lugares. Em Nüremberg, ele imprimiu e publicou alguns

[9] Regiomontanus, *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* (1561), introdução, apud Barnabas Hughes, *Regiomontanus on Triangles* (Madison: University of Wisconsin, 1967), 27.
[10] O turco Cardeal Bessarion foi um clérigo da igreja católica, nomeado arcebispo de Nicéia antes dos 35 anos. Ele possuiu uma das maiores bibliotecas de sua época, podendo ser encontrados, atualmente, seus manuscritos na biblioteca Marciana, em Veneza. Devido ao seu bom relacionamento com os sábios da época, ele traduziu e encomendou traduções importantes de obras para o latim de muitos autores gregos, dos mais variados campos como da teologia, filosofia e literatura. Ernst Zinner, *Regiomontanus:His Life and Work*, trad. Ezra Brown (Amsterdam; New York; Oxford; Tokyo: North-Holland, 1990).
[11] As datas de concepção dos tratados e publicações de Regiomontanus são imprecisas, variando de autor para autor.
[12] Pereira, "A Obra 'De Triangulis Omnimodis Libri Quinque'," 57.

tratados incluindo *Theoricae novae planetarum* do seu mestre e amigo Georg Peuerbach que se tornou rapidamente um dos textos-padrão de cursos universitários em Astronomia. Segundo Zinner, "Uma das principais razões que motivou Regiomontanus a publicar obras impressas era eliminar as distorções em trabalhos científicos que foram causados por erros de cópia"[13].

Além das publicações em Nüremberg, Regiomontanus tinha projetos de fazer observações dos céus para estabelecer uma nova base de investigação do movimento planetário. A última dessas observações foi realizada no dia 28 de julho de 1475. A partir dessa data, Regiomontanus desapareceu. Segundo Hartmann Schedel (1440-1514), citado por Zinner[14], o Papa Sixtus IV precisou de seus trabalhos para a reforma do calendário. Dessa forma, não temos uma data precisa de sua morte, somente sabemos que ele faleceu em Roma, na Itália, aos 40 anos.

Alguns pesquisadores contam que ele foi enterrado no Pantheon, entretanto Schedel refuta essa informação: "Em julho de 1476, o astrônomo distinto Magister Johann de Königsberg morreu em Roma e foi enterrado em um terreno ao redor da igreja (Anno isto 1476 Tempore junij obiit egregius astronomus Mgr. Jo kongsperg in Roma sepultus in agro dei)"[15].

A OBRA DE TRIANGULIS OMNIMODIS LIBRI QUINQUE

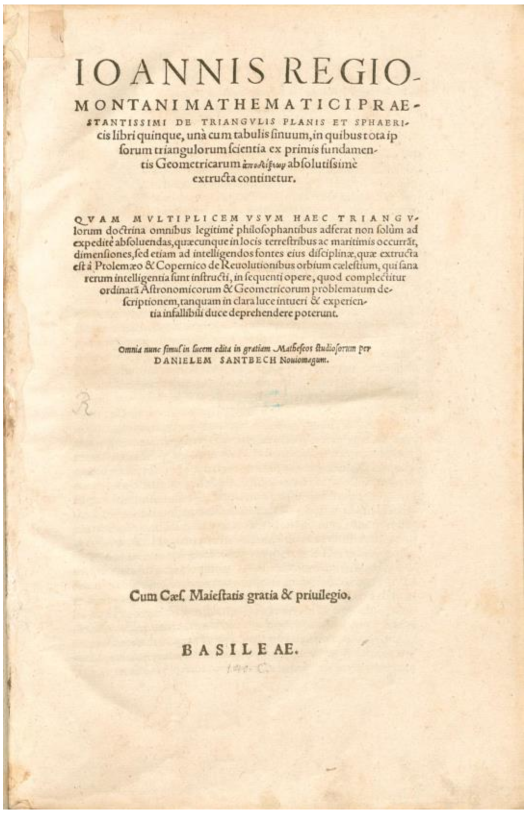
Em quais obras anteriores Regiomontanus se baseou para escrever o *De Triangulis*? Regiomontanus não revelou suas fontes em *De Triangulis.* Somente a Trigonometria na Esfera era uma extensão dos princípios iniciados no *Epítome*. Segundo Zinner[16], Regiomontanus conhecia os tratados de Menelau, Theodosius e Geber, como exposto nas suas correspondências com Giovanni Bianchini[17]. Entretanto, nenhum desses autores é relatado em *De triangulis*.

O tratado de Regiomontanus (figura 2) contém duas edições. A primeira delas foi editada por John Petreius, datada de 1533, e publicada em Nuremberg, na Alemanha. Ela, além de englobar os cinco livros, continha uma extensão com a obra *De quadratura circuli,* de Nicolau de Cusa, conjuntamente com a contestação de Regiomontanus.

A segunda, organizada por Daniel Santbech, data 1561, publicada na Basiléia, Suíça. Essa última publicação inclui onze páginas a mais, contendo tabelas de senos, fazendo alusão à primeira edição.

[13] Zinner, *Regiomontanus*, 118.
[14] Ibid.
[15] Schedel (1476) *apud* Zinner, *Regiomontanus*, 151.
[16] Zinner, *Regiomontanus.*
[17] O italiano Giovanni Bianchini (?-1469) era astrônomo e matemático. Em 1463 e 1464, ele se correspondeu com Regiomontanus. Existe cinco cartas: duas para Bianchini e três para Regiomontanus, que foram editadas várias vezes e muito se tem escrito sobre elas. A primeira carta existente está datada de 27 de julho de 1463. José Chabás & Bernard R. Goldstein, *The Astronomical Tables of Giovanni Bianchini*. Netherlands: Brill, 2009; Eves, *Introdução à História da Matemática*.

Para essa investigação, adotamos a segunda edição localizada no observatório da Universidade de Viena, na coleção de obras raras[18]. Também foi utilizado o livro *Regiomontanus on Triangles* de Barnabas Hughes, 1967, no qual encontra-se o original em latim e a tradução em inglês.



IOANNIS REGIO-
MONTANI MATHEMATICI PRAE-
STANTISSIMI DE TRIANGVLIS PLANIS ET SPHAERI-
cis libri quinque, unà cum tabulis sinuum, in quibus tota ip
sorum triangulorum scientia ex primis fundamen-
tis Geometricarum ἀποδείξεων absolutissimè
extructa continetur.

QVAM MVLTIPLICEM VSVM HAEC TRIANGV-
lorum doctrina omnibus legitimè philosophantibus adferat non solùm ad
expeditè absoluendas, quæcunque in locis terrestribus ac maritimis occurrãt,
dimensiones, sed etiam ad intelligendos fontes eius disciplinæ, quæ extructa
est à Ptolemæo & Copernico de Reuolutionibus orbium cælestium, qui sana
rerum intelligentia sunt instructi, in sequenti opere, quod complectitur
ordinatã Astronomicorum & Geometricorum problematum de-
scriptionem, tanquam in clara luce intueri & experien-
tia infallibili duce deprehendere poterunt.

Omnia nunc simul in lucem edita in gratiam Mathefeos studiosorum per
DANIELEM SANTBECH *Nouiomagum.*

Cum Cæs. Maiestatis gratia & priuilegio.

BASILEAE.

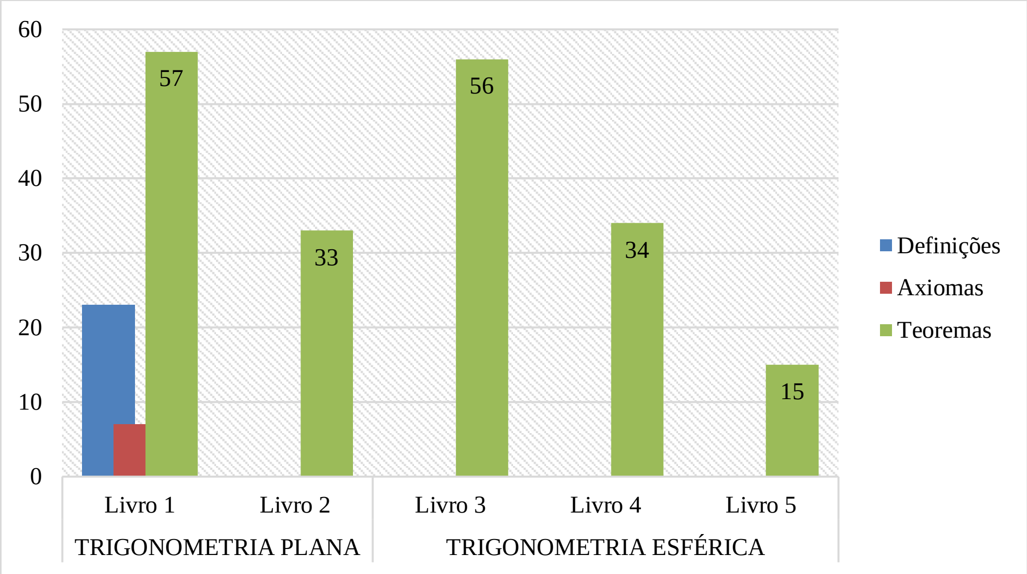
Figura 2: Capa da obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*[19]

O tratado está dividido em cinco livros: os dois primeiros versam sobre a Trigonometria Plana, sendo dedicadas 57 páginas a eles; os três últimos livros, a Trigonometria Esférica, recurso essencial no estudo da Astronomia, numa extensão de 74 páginas.

Regiomontanus em sua obra utilizou o estilo euclidiano de organização, colocando uma forte ênfase ao método-dedutivo. Essencialmente, cada tomo começa com definições e/ou axiomas, decorrendo de teoremas e suas demonstrações. A maior parte dos teoremas demonstrados traz notas abrangendo proposições originárias dos "Elementos" de Euclides que irão explicar algumas etapas de sua demonstração. Além disso, deparamo-nos com 23 definições, 7 axiomas e 195 teoremas. Vejamos no gráfico 1 uma visão geral do *De Triangulis*:

[18] Rare Book Collection at the Vienna University Observatory, http://www.univie.ac.at/hwastro/ (acessado em 10 de setembro de 2015).
[19] Regiomontanus, 1561.

Gráfico 1 Visão geral da Obra *De Triangulis*[20]



Essencialmente, Regiomontanus se baseou em três referências para a composição de seu tradado: definições implantadas no começo da sua obra (Livro I) que baseia todos os outros teoremas seguintes; os "Elementos" de Euclides; e escritos de sua autoria. Zeller[21] faz uma comparação interessante: o que Nasir Eddin al-Tusi[22] fez dois séculos antes, para a Matemática no Oriente, Regiomontanus fez para o Ocidente.

O tratado apresentado nos remete a conceitos, a definições e a teoremas importantes na História da Trigonometria Moderna. A nomenclatura utilizada por Regiomontanus é bastante análoga a de Ptolomeu, principalmente quando exibe a divisão da circunferência, dividindo o diâmetro do círculo em 120 partes e a circunferência em 360 partes iguais.

Dentre os pontos principais da obra *De Triangulis*, podemos destacar os seguintes:

Livro I, Teorema 20: Definição de Seno;

Livro II, Teorema 1: Lei dos senos para triângulos planos;

Livro II, Teorema 26: primeira fórmula trigonométrica para a área do triângulo;

Livro II, Teorema 12 e 23: Uso da Álgebra;

Livro IV, Teoremas 16,17, 26: Lei dos Senos para Triângulos Esféricos;

Livro V, Teorema 2: Lei dos Cossenos para Triângulos Esféricos.

---

[20] Gráfico elaborado pelas autoras.

[21] Mary C. Zeller, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (Ann Arbor: University of Michigan doctoral dissertation, 1944).

[22] O árabe Nasir Eddin al-Tusi (1201-1274) foi Matemático e Astrônomo que muito colaborou para a Trigonometria plana e esférica e a Astronomia, sendo suas conclusões, inclusive, empregadas por Copérnico. Escreveu o primeiro trabalho sobre Trigonometria, tratando-a independente da Astronomia. Zeller, *The development of Trigonometry*.

Sem dúvida, o tratado *De Triangulis* marcou o século XVI e serviu como base para estudos de renomados cientistas, matemáticos e astrônomos, tais como o polonês Nicolaus Copérnico (1473–1543) e o austríaco Georg Joachim von Lauchen Rheticus (1514-1574).[23]

A LEI DOS COSSENOS DA OBRA *DE TRIANGULIS*

O livro V é uma extensão da solução de problemas envolvendo triângulos esféricos arbitrários. É nele que encontramos a primeira aparição da Lei dos Cossenos (Figura 3) na Europa. Embora Peuerbach tenha dado uma solução para o problema envolvendo a altitude do Sol, que é relativamente equivalente à de Regiomontanus, ele nunca representou a Lei de forma independente.[24]

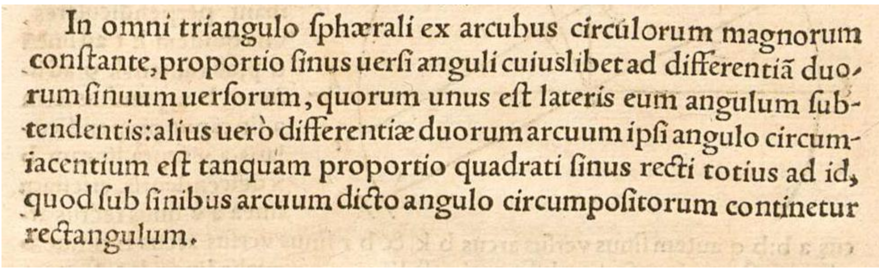

In omni triangulo ſphærali ex arcubus circulorum magnorum
conſtante, proportio ſinus uerſi anguli cuiuslibet ad differentiã duo-
rum ſinuum uerſorum, quorum unus eſt lateris eum angulum ſub-
tendentis: alius uerò differentiæ duorum arcuum ipſi angulo circum-
iacentium eſt tanquam proportio quadrati ſinus recti totius ad id,
quod ſub ſinibus arcuum dicto angulo circumpoſitorum continetur
rectangulum.

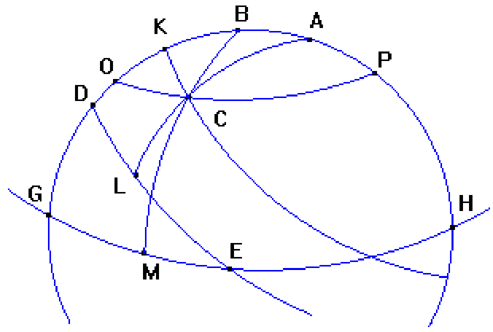
Figura 3. Enunciado do teorema 2 do quinto livro de *De Triangulis* em latim[25]

Essa foi a primeira vez que a lei dos cossenos foi dada de forma útil para o cálculo. Segue o Teorema 2:

> Em todo triângulo esférico que é construído a partir de arcos de grandes círculos, a razão do seno versado de qualquer ângulo para a diferença de dois senos versados, do qual o seno versado do lado subtendido a este ângulo, quando o outro é o seno versado da diferença dos dois arcos incluindo este ângulo, assim como a razão do quadrado do seno reto total para o produto retangular dos senos dos arcos colocado ao redor do ângulo mencionado[26].
>
> **Demonstração**

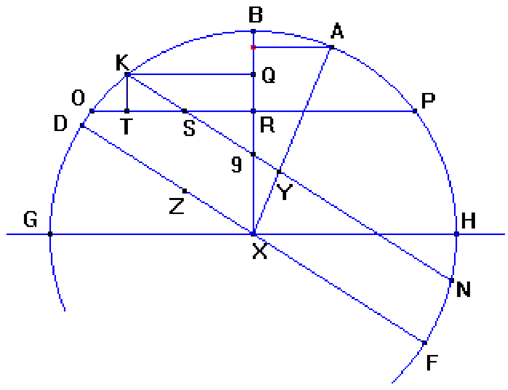
[23] Ibid.
[24] van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth.*
[25] Regiomontanus, 1561, p. 119
[26] In every spherical triangle that is constructed from the arcs of great circles, the ratio of the versed sine of any angle to the difference of two versed sines, of which one is [the versed sine] of the side subtending this angle while the other is [the versed sine] of the difference of the two arcs including this angle, is as the ratio of the square of the whole right sine to the rectangular product of the sines of the arcs placed around the mentioned angle. Hughes, *Regiomontanus on triangles,* 271.

Admita ABG[27] ser um triângulo deste tipo, tendo dois lados desiguais, AC maior que AB, e cada um deles menor que um quadrante. Ao redor dos pontos A e B como extremidades, admita que dois grandes círculos sejam descritos, de modo que as circunferências interceptam no ponto E; admita que o arco AB seja estendido em ambos os lados até que encontre o círculo descrito ao redor de A nos pontos D e F e [até que se encontre] o círculo



traçado ao redor de B nos pontos G e H. É estabelecido que o arco GD é igual ao arco AB. Além disso, cada um dos arcos ED e EG [é estabelecido] ser um quadrante da circunferência grande. Logo, admita dois arcos AC e BC serem contínuos até cada um deles ser um quarto da circunferência, e forme o arco anterior DE no ponto L enquanto o posterior [encontra] o arco GE no ponto M. Novamente, como os pontos A e B são extremos, admita um círculo pequeno KN ser descrito na esfera ao redor da extremidade A com o comprimento da corda AC [como linha polar], e admita um círculo pequeno OP [ser descrito] ao redor de B com o comprimento de B[28] [como linha polar]. Então, o arco BK será a diferença dos dois arcos AB e AC; o arco BO será igual ao arco BC; e, além disso, o arco DL determinará o tamanho do ∠BAC. Então, isto pode ser dito que a razão do seno versado de DL está para a diferença dos dois senos versados que formam os arcos BK e BC assim como o quadrado do seno reto total está para o produto dos dois senos retos dos arcos AB e AC.

De forma que isto pode ser mostrado mais claramente, outra construção também será usada. Nesta, da mesma maneira que na primeira construção, admita que exista um círculo, GBH, ao redor do centro X que também é o centro da esfera. Admita que a linha de interseção dos círculos GBH e GEH seja o diâmetro de GH que não era apropriado traçar na primeira figura, evitando confusão. Além disso, admita que a interseção dos círculos GBH e DEF seja a linha DF. Semelhantemente, os dois círculos GBH e KCN interceptam outro círculo na linha



[27] Para ABG leia ABC.
[28] Para B leia BC.

KN. Finalmente, os dois círculos GBH e OCP são mostrados [interceptam] na linha reta OP. Logo, admita dois raios da esfera ser traçado - XA que intercepta a linha KN no ponto Y e XB interceptando OP no ponto R. Além disso, é estabelecido pelos Teoremas 7, 14 e 17 do Livro Três, queKN é o diâmetro do círculo KCN e a linha OP é o diâmetro do círculo OCP devido o círculo grande GBH passar pelas extremidades de cada um deles.

O ponto Y será o centro do círculo KCN e ponto R o centro do círculo OCP. Novamente, do ponto K admita duas perpendiculares emergindo - uma, KT, para a linha OP e outra, Kq, para a linha BX. Semelhantemente, admita que o ponto A seja o topo da perpendicular AV descendo para a linha BX. Então, a linha AV será o seno reto do arco AB; além disso, BQ será o seno versado do arco BK, e BR será o seno versado do arco BO, ou BC. A diferença destes senos versados é a linha QR, igual a linha KT. Novamente, quando o ponto S é marcado, os dois diâmetros dos círculos KCN e OCP - isto é, as linhas KN e OP – se encontrarem, será entendido que a linha KS é o seno versado do arco KC da primeira figura. Para os senos cada um dos círculos KCN e OPC são erguidos ortogonalmente um círculo GBH que atravessa seus extremos como ensina o Teorema 17 do Livro Três dos Triângulos, então sua linha de interseção que atravessa o ponto S pela Proposição [não dada] do Livro XI dos Elementos de Euclides, será erguido ortogonalmente no círculo GBH. Então, pela discussão da definição de uma linha erguida perpendicularmente em uma superfície, esta linha reta intercepta a perpendicular KN - isto é, o diâmetro do círculo KCN. Então, o diâmetro KN bifurca esta linha de interseção, e a metade dessa [linha de interseção] será o seno reto do arco KC. Assim, KS é o seno versado do mesmo [arco KC]. Então, a reta [linha] DF é o diâmetro de círculo DEF, a linha DZ - isto é, o seno versado do arco DL - é usado nisso. KS será [DZ], pois o raio KY do círculo KCN está para o raio DX do círculo DEF. Os dois arcos KC e DL são semelhantes pelo Teorema 23 do Livro Três dos Triângulos, porque os dois arcos AD e AL descem das extremidades dos dois círculos KCN e DEF e inclui os arcos mencionados.

Até agora chegamos ao lugar onde podemos mostrar primeiro que os dois triângulos KTS e AVX [são] equiláteros, deste modo: os dois ângulos TKS e RqS, e então XqY, são iguais devido o paralelismo das linhas KT e Rq. Daí, cada um dos ângulos KTZ e XYq é um [ângulo] reto, e permanecendo o $\angle$KST será igual ao outro YXq, ou AXV. Além disso, o $\angle$AVX foi disposto a [ser] um [ângulo] reto. Então, os dois triângulos KTS e AVX são equilátero, e assim, pela Proposição 4 do Livro VI dos Elementos de Euclides, a razão de XA está para AV assim como SK está para KT e rearranjando. Além disso, a razão de DZ - isto é, o seno versado do $\angle$BAC – para a linha KT - isto é, a diferença dos dois senos versados mencionados acima - é composta das duas [razões], isto é, da razão do seno DZ para KS e a razão de KS para KT. Além disso, DZ para KS era DX - isto é, o seno total – para a linha KY que é o seno reto do arco AK ou AC. E a razão de KS para KT foi como a de AX - o seno reto total – da linha AV que é o seno reto de arco AB. Então, a razão do seno versado do arco DL, ou ∠BAC, para a diferença dos senos versados mencionada acima é composto de duas razões - isto é, da razão do seno reto total para seno reto do arco AC e da razão do seno reto total para o seno reto do arco AB. Agora a partir destas duas razões também está composto à razão do quadrado do seno reto total para o produto dos senos retos dos dois arcos AB e AC. Então, a razão do seno versado do ∠BAC está para a diferença dos dois senos versados dos dois arcos BO e BK assim como a razão do quadrado do seno reto total está para produto dos dois senos retos dos dois arcos AB e AC.

CQD[29]

Primeiramente, alguns elementos da trigonometria esférica precisam ser retomados. No enunciado do teorema, Regiomontanus cita os arcos de grandes círculos e seno versado. O círculo máximo ou grande círculo é o círculo sobre a superfície da esfera de maior diâmetro, dividindo-a em dois hemisférios. As interseções de dois círculos máximos formam entre si um ângulo esférico, e esses arcos são lados de um triângulo esférico (figura 4).

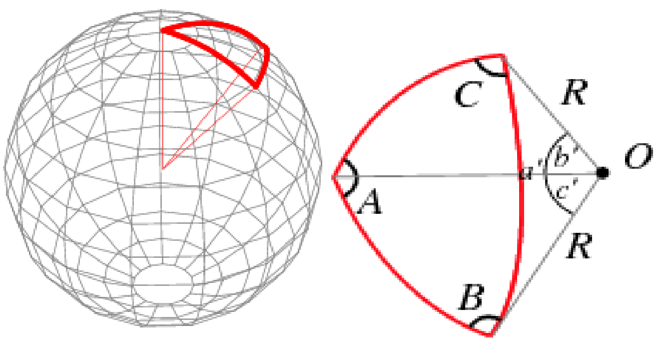


Figura 4: Exemplo de triângulo esférico[30]

O seno versado mencionado no teorema é dado por (r – cosθ), onde r é o raio da esfera e θ o ângulo esférico. Usando a notação moderna de Trigonometria, o enunciado do teorema nos diz,

$$\frac{sen\ vers\ A}{sen\ vers\ A\text{-}\ sen\ vers(b\ \text{-}\ c)} = \frac{1}{senb \cdot senc}$$

[29] Pereira, "A Obra 'De Triangulis Omnimodis Libri Quinque'," 312-315. Na versão original, utiliza-se Quod erat demonstrandum **que** é uma expressão em latim que significa "Como se Queria Demonstrar", ou seja, CQD.
[30] Fonte: http://mathworld.wolfram.com/. Acessado em: 11.11.2015.

Vale ressaltar que a função seno versado (r - cos θ) ainda pode ser encontrada no Teorema 11[31] e nas demonstrações dos Teoremas 3[32], 10[33] e 12[34] do Livro V de Regiomontanus. Ressaltamos que essa fórmula determina a lei dos cossenos em relação aos lados do triângulo esférico e não com relação aos ângulos. Para a demonstração, ele secciona a esfera passando pelo seu centro, podendo utilizar identidades da trigonometria plana.

Para encontrar a notação atual, admitimos que r = 1 e substituiremos $sen\ vers\ A$ por $(1 - \cos A)$ e $sen\ vers(b - c)$ por $(1 - \cos(b - c))$:

$$\frac{1-\cos A}{1-\cos A\text{-}\,[1-\cos(b - c)]} = \frac{1}{senb \cdot senc}$$

$$\frac{1-\cos A}{-\cos A+\cos(b - c)} = \frac{1}{senb \cdot senc}$$

$$(1-\cos A)\cdot senb \cdot senc = -\cos A + \cos(b - c)$$

$$senb \cdot senc - \cos A \cdot senb \cdot senc = -\cos A + \cos(b - c)$$

$$\cos A = \cos A \cdot senb \cdot senc + \cos(b - c) - senb \cdot senc$$

Utilizando a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos para triângulos planos, ou seja, $\cos(b - c) = senb \cdot senc + \cos b \cdot \cos c$, temos que $\cos b \cdot \cos c = \cos(b - c) - senb \cdot senc$.

Dessa forma temos,

$$\cos A = \cos A \cdot senb \cdot senc + \cos b \cdot \cos c$$

Segundo Hughes (1967), Regiomontanus teve o primeiro contato com a Lei dos Cossenos quando, em Viena, estudava a obra de al-Battānī, *De motu stellarum.* Ele reconheceu sua importância e refez a Lei em sua primeira fórmula prática. Atualmente essa fórmula é aplicada na determinação da distância angular entre estrelas.

---

[31] Quando o seno versado de algum arco tem uma razão conhecida do seno reto do mesmo arco, o próprio arco é conhecido. Pereira, "A Obra 'De Triangulis Omnimodis Libri Quinque'," 324.

[32] Quando três lados dados de um triângulo esférico são construídos por arcos de grandes círculos, todos os ângulos de seus [triângulos] podem ser medidos. Pereira, "A Obra 'De Triangulis Omnimodis Libri Quinque'," 318.

[33] Se existem dois triângulos retângulos dos quais o ângulo agudo de um é igual ao ângulo agudo do outro e [do qual] os dois lados que subtendem os ângulos retos têm uma diferença conhecida, e similarmente se os dois lados subjacentes ao ângulo reto e os ângulos agudos, dado tem uma diferença conhecida, todos os lados destes [dois triângulos] podem ser encontrados. Pereira, "A Obra 'De Triangulis Omnimodis Libri Quinque'," 322.

[34] Se há dois triângulos retângulos dos quais um ângulo agudo de um é igual a um dado ângulo agudo do outro, e se a diferença dos lados opostos aos ângulos retos é dada juntamente com a diferença dos lados que subtendem aos ângulos agudos, então todos os lados dos triângulos podem ser encontrados. Pereira, "A Obra 'De Triangulis Omnimodis Libri Quinque'," 325.

Brummelen (2013) traz uma versão simplificada da demonstração das Leis dos Cossenos para triângulos esféricos utilizando a mesma ideia da Lei dos Cossenos para triângulos planos, encontrada no Livro II, proposições 12 e 13[35] dos Elementos de Euclides.

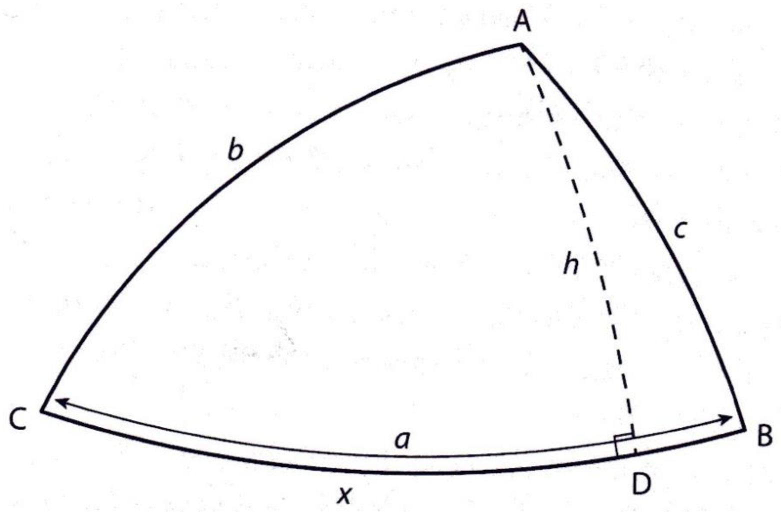


Figura 5. Triângulo esférico ABC[36]

Aplicamos o teorema de Pitágoras na esfera para os triângulos (figura 5): CDA e BDA. Dessa forma, temos:

$$cosb = cosx \cdot cosh$$

$$cosc = cosh \cdot \cos(a - x)$$

Colocando em evidência $cosh$:

$$\frac{cosb}{cosx} = cosh$$

$$\frac{cosc}{\cos(a - x)} = cosh$$

E igualando ambas as equações temos:

$$\frac{cosb}{cosx} = \frac{cosc}{\cos(a - x)}$$

$$cosc \cdot cosx = cosb \cdot \cos(a - x)$$

[35] Nos triângulos obtusângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo obtuso é menor do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo agudo por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo agudo, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada internamente pela perpendicular relativa ao ângulo agudo. Euclides, *Os Elementos de Euclides*, trad. Irineu Bicudo (São Paulo: Editora UNESP, 2009), 149.

[36] Brummelen, 2013, p. 97.

Substituindo $\cos(a-x) = cosa \cdot cosx + sena \cdot senx$, temos:

$$cosc \cdot cosx = cosb \cdot [cosa \cdot cosx + sena \cdot senx]$$

$$cosc = \frac{cosa \cdot cosb \cdot cosx}{cosx} + \frac{sena \cdot cosb \cdot senx}{cosx}$$

Simplificando a expressão temos:

$$cosc = cosa \cdot cosb + sena \cdot cosb \cdot tgx \text{ (I)}$$

Segundo Brummelen (2013, p. 97), "para chegar ao termo tgx aplicamos a quarta identidade da primeira coluna dos Teoremas da Regra de Napier"[37]. Utilizando a identidade, $cosA = cotgc \cdot tgb$, e aplicando no triângulo esférico CDA temos:

$$cosC = cotgb \cdot tgx \rightarrow cosC = \frac{1}{tgb} \cdot tgx \rightarrow cosC \cdot tgb = tgx$$

Substituindo na expressão (I) temos:

$$cosc = cosa \cdot cosb + sena \cdot cosb \cdot cosC \cdot tgb$$

Como, temos, $cosc = cosa \cdot cosb + sena \cdot cosb \cdot cosC \cdot \frac{senb}{cosb}$. Simplificando, temos que $cosc = cosa \cdot cosb + sena \cdot senb \cdot cosC$.

CQD.

Dessa forma, apresentamos duas possibilidades de estudo da Lei dos cossenos para triângulos esféricos, contribuindo para discussões em torno do tema.

NOTAS FINAIS

O *De Triangulis* é um marco de uma nova era da história da Trigonometria Moderna, e atraiu muita atenção com o passar do tempo. Infelizmente, Regiomontanus nunca o terminou. O Livro V, com as suas aplicações da lei dos cossenos, apresentados pela primeira vez em sua obra, é apenas um fragmento.

O tratado segundo Brummelen (2009) tinha o potencial de ser desenvolvido e completado de muitas maneiras diferentes; este potencial foi realizado por numerosos estudiosos posteriormente, os quais seguiram suas ideias. Assim, todo o desenvolvimento posterior de trigonometria no Ocidente teve a influência do *De Triangulis.*

A lei dos cossenos exposta na sua obra está relacionada apenas aos lados dos triângulos esféricos. Não encontramos essa mesma lei para triângulos planos. Seu diferencial está no modo que é

[37] Sobre as regras dos teoremas de Napier, ver Glen van Brummelen, *Heavenly Mathematics: The forgotten Art of Spherical Trigonometry* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 2013), 73-85.

demonstrada, utilizando artifícios da trigonometria plana, inclusive a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos. Esse teorema pode ser utilizado como forma de reviver momentos da história da trigonometria, retomando o antigo, aprofundados no estudo da esfera, fazendo um elo entre os conceitos dos dois campos.

Consideramos que, como se trata de uma fonte histórica do século XV, deve ser feito um "tratamento didático" para uma melhor compreensão da demonstração do teorema e uma possível utilização na sala de aula. Nossa proposta aqui não é a de realizar esse tratamento, mas sim reviver algumas passagens da história da Matemática.

SOBRE AS AUTORAS:

Ana Carolina Costa Pereira
Universidade Estadual do Ceará (UECE).
(e-mail: carolina.pereira@uece.br)

Bernadete Barbosa Morey
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).
(e-mail: bernadetemorey@gmail.com)

Artigo recebido em 28 de março de 2016
Aceito para publicação em 12 de outubro de 2016