História da
Ciência e Ensino
Construindo interfaces

http://dx.doi.org/10.23925/2178-2911.2019v20espp467-483

História dos Descobrimentos e História da Matemática, uma interseção na sala de aula

Hélder Pinto

Teresa Costa Clain

Resumo

Um dos temas mais atuais no ensino é a interdisciplinaridade entre diferentes disciplinas do currículo escolar. O programa de Matemática faz referência explícita a esta questão: "o domínio de certos instrumentos matemáticos revela-se essencial ao estudo de fenómenos que constituem objeto de atenção em outras disciplinas do currículo do Ensino Básico". Neste trabalho propomos apresentar vários tópicos de História da Matemática que podem ser introduzidos no contexto educativo a propósito dos Descobrimentos, tema essencial e central na História de Portugal. Em particular, abordaremos a aritmética comercial portuguesa daquela época, bem como o matemático Pedro Nunes e um dos seus instrumentos para a navegação astronómica. Neste texto mostraremos várias atividades práticas que têm sido implementadas pelos autores em diversas escolas básicas e secundárias, bem como o projeto «Biblioteca Escolar» da Universidade de Aveiro onde diversos tópicos de História da Ciência têm sido levados a várias escolas, geralmente da região de Aveiro. Note-se que esta abordagem multidisciplinar tem o potencial de ser benéfica para ambas as disciplinas: por um lado humaniza a disciplina de Matemática mostrando um lado mais prático e de resolução de problemas reais ao longo dos tempos e, por outro lado, apresenta uma outra faceta dos Descobrimentos, onde se mostra que também foi necessário um desenvolvimento científico e comercial substancial que acompanhasse a expansão territorial daquela época.

***Palavras-chave**: História da Matemática, Matemática, Descobrimentos.*

Abstract

One of the most current topics in teaching is the interdisciplinarity between different disciplines of the curricula. The program of Mathematics makes explicit reference to this question: "The knowledge of some mathematical instruments is essential to the study of certain phenomena that are object of attention in other disciplines of the curriculum of Basic Education." In this work we propose to present several topics of History of Mathematics that can be introduced in the educational context about the Portuguese Discoveries, a central theme in Portuguese History. We will show, in particular, the Portuguese commercial arithmetic of that time, as well as the mathematician Pedro Nunes and one of his instruments to help the astronomical navigation. In this presentation we will show several practical activities that have been implemented by the authors in several primary and secondary schools, as well as the project «Biblioteca Escolar» of the University of Aveiro where several topics of History of Science have been taken to several schools, usually in the Aveiro region. It should be noted that this multidisciplinary approach has the potential to be beneficial to both disciplines: on one hand it humanizes the Mathematics discipline by showing a more practical and real problem-solving side through the ages and, on the other hand, presents another view of the Discoveries, which shows that a substantial scientific and commercial development was necessary to attend the territorial expansion of that time.

***Keywords**: History of Mathematics, Mathematics, Portuguese Discoveries.*

Nascemos no alto mar no meio da tempestade
Ali a meio caminho
Entre o cabo das Tormentas
E o céu do Paraíso
Pedro Barroso (*Longe daqui*)

INTRODUÇÃO

Os desafios que os Descobrimentos portugueses trouxeram à sociedade portuguesa daquela época foram imensos. Em geral, a História dos Descobrimentos em contexto escolar centra-se quase em exclusivo nas questões geopolíticas dessa época (quais os novos territórios descobertos? quais as novas rotas comerciais? qual a relação de Portugal com Espanha e com os outros países europeus desse tempo?), bem como nos produtos que passaram a ser comercializados nesse período como, por exemplo, as especiarias da Índia e o ouro do Brasil. Raramente é referido em pormenor que foram necessários avanços tecnológicos e científicos significativos em várias áreas como, por exemplo, na arte da navegação astronómica, bem como na aritmética comercial, duas atividades essenciais desse tempo. Neste trabalho vamos dar exemplos de como o crescimento da navegação e do comércio foram acompanhados por uma evolução significativa da matemática existente em Portugal.

OS LIVROS DE ARITMÉTICA PUBLICADOS EM PORTUGAL DURANTE A ÉPOCA DOS DESCOBRIMENTOS

As novas rotas comerciais, bem como o aparecimento de técnicas comerciais cada vez mais complexas, exigiam que os intervenientes agissem com sabedoria. Os mercadores necessitavam de registar, calcular os ganhos e prever os riscos. Para o efeito era necessário o domínio de conhecimentos, pelos menos básicos, em aritmética. De que aritmética se tratava? De uma aritmética dos algoritmos no sentido do cálculo escrito com a utilização e vulgarização dos números indo-arábicos.

Na Lisboa quinhentista, uma cidade muito ligada às transações comerciais, surgiu, no ano de 1519, o primeiro tratado de aritmética mercantil, escrito em português. Referimo-nos ao *Tratado da Pratica d'Arismetica*[1] de Gaspar Nicolas. Seguiram-se a *Pratica d'Arismetica*[2] de Ruy Mendes (1540) e

[1] Nicolas, Gaspar. *Tratado da Pratica d'Arismetica* [facsmile]. Portugal: Livraria Civilização, 1963 [1519].

[2] Mendes, Ruy. *Pratica darismetica nouamente agora composta pelo licenciado Ruy Mendez: na qual se descraram por boa ordem e craro estilo as quatorze especias darte darismetica .&. as sete dellas por numeros inteyros e as outras sete por numeros quebrados: e assi mesmo trinta e cinco regras da dita arte muito sortil e breue e craramente decraradas*. Lisboa: Germão Galharde, 1540.

o *Tratado da Arte de Arismetica*[3] de Bento Fernandes (1555). Nesta secção trataremos alguns tópicos do saber matemático da época de Quinhentos através destes tratados.

De acordo com o modelo tradicional, os tratados de aritmética tinham uma vocação prática e procuravam esclarecer dúvidas dos mercadores e dos contadores do Rei. Contudo, as aritméticas práticas assumiram outras características. Referimo-nos à presença de um conjunto de problemas, visando diversos temas, que permitiram a transmissão de conhecimentos durante muitos séculos. Neste trabalho vamos analisar os temas matemáticos presentes nos tratados e ainda ver até que ponto os autores responderam aos desafios do mundo mercantil, dando às suas obras uma contextualização significativa no mundo dos negócios onde as mesmas desabrocharam. Deste modo, procuramos integrar os tratados e os seus autores na sua época de acordo com as suas contribuições para o saber matemático, reconhecendo o seu lugar na historiografia da Matemática em Portugal.

Apresentamos agora alguns eixos segundo os quais abordaremos esta questão. Comece-se por analisar o ambiente socioeconómico em que os tratados apareceram respondendo, nomeadamente, às seguintes questões: Qual era o contexto económico, social e geográfico? Quem eram os autores? O que nos dizem os autores sobre as suas motivações? Qual era o público visado?

Relativamente à primeira questão, comecemos por referir que o Império Português foi, ao mesmo tempo, sinónimo de expansão marítima e de expansão comercial. O volume avultado de negócios, a atuação de todos os envolvidos nas práticas comerciais não era feita ao acaso. Os tratados de aritmética são testemunhos de uma preparação de operações comerciais num contexto internacional e tendo em conta as realidades do "Novo Mundo" como, por exemplo, o negócio das especiarias que chegavam à Europa através do comércio português. Estes produtos nem sempre tinham as melhores condições de viagem. Os atos de pirataria, os naufrágios e as más condições atmosféricas conduziam a enormes perdas. Contudo, chegado o mercador a Portugal, eram deduzidos os impostos. Gaspar Nicolas é muito sensível a esta realidade quando trata o imposto de quarto e vintena da Casa da Índia, relatando situações de perda de mercadoria e a aplicação do imposto sobre a quantidade de mercadoria carregada na origem.

Sobre os autores os dados biográficos são escassos. Gaspar Nicolas é dado como nascido em Guimarães e, pelas repetidas referências à Casa da Índia, poder-se-á pensar que tivesse ligações àquela instituição. Ruy Mendes tinha formação em «leis» e era dado como natural de Mourão, com

[3] Fernandes, Bento. *Tratado da Arte de Arismetica*. Porto: Germão Galharde, 1555.

ligações à Casa de Bragança que, na pessoa de D. Teodósio I, apadrinhou a sua obra. Bento Fernandes era um mercador do Porto e, para mais informações, consultar Barros[4] (2013).

No prólogo de cada obra há um discurso comum sobre as motivações dos três autores: é necessário um livro de aritmética no reino! Com a leitura dos tratados observamos que, embora sejam descritos os mesmos temas, os três autores usaram diferentes metodologias para o mesmo fim. Gaspar Nicolas menciona com frequência a Casa da Índia e as dúvidas que lhe foram colocadas naquela instituição quando chegou à cidade de Lisboa e, portanto, está patente um objetivo de formar os contadores da Casa da Índia. Ruy Mendes organiza a sua obra de um modo "mais académico", começando por introduzir os temas e só depois vai tratar dos problemas. Este autor mostra-se muito familiarizado com os problemas sobre números, tema este que aparece desligado do mundo mercantil. Bento Fernandes era mercador como já referimos. A par com o relato das suas experiências nesta profissão e na vontade de formar bem os homens de negócio portugueses, o autor revela, sob a forma de problemas, um pensamento mais próximo do saber matemático que hoje conhecemos. Portanto, temos três autores e três obras com um objetivo comum: ensinar aritmética prática no reino.

Passemos agora a uma abordagem global das obras: Qual é a sua organização? Quais são os temas abordados?

Podemos observar na tabela 1 os temas e o seu enquadramento nas respetivas obras.

Tabela 1: Distribuição dos temas nos tratados dos três autores.

Gaspar Nicolas	Ruy Mendes	Bento Fernandes
Operações com inteiros	Operações com inteiros	Operações com inteiros
Regras de três	Progressões com inteiros	Regra de três e de cinco
Regras de companhias	Raízes (quadrada e cúbica) com inteiros	Regras de companhias
Quarto e vintena	Operações com quebrados	Provas reais
Operações com quebrados	Progressões com quebrados	Outras regras de companhia
Regra de três com quebrados	Raízes (quadrada e cúbica) com quebrados	Operações com frações
Regra das oposições	Problemas com números	Regras de três com frações
Regra da conta de Flandres	Moedas, pesos e medidas	Regras de companhias com frações
Progressões	Regras de três com *preguntas*	Regra da menos diminuição
Baratos	Regra de cinco	Regra de quarto e vintena

[4] Barros, Amândio. "Os negócios e a aritmética. Bento Fernandes e as redes cristãs-novas do Porto no século XVI". In Andrade, A. (Org.), *Humanismo, Diáspora e Ciência (Séculos XVI e XVII)*. Porto: Biblioteca Pública Municipal do Porto, 2013, pp. 62-67.

Números	Regra sem nome	Regras da conta de Frandes
Preguntas	Regra de mudar	Regra de baratas
Raiz quadrada e raiz cúbica	Regras de companhias	Regra das progressões
Geometria	Regras de baratas	Regra de pagamentos em diferentes moedas
Liga da prata	Regras de quarto e vintena	Regra de desconto reduzido a um dia
	Regra da conta de Flandes	Regras e razões de mercadores
	Regra de falsa posição (simples e dupla)	Regra de duas falsas oposições
	Regras de câmbio (miúdo e real)	Problemas para a determinação de números usando a falsa posição (oposição)
	Regras da liga de prata	Raízes (todo o género e modo de raiz)
	Regras da liga de ouro	Quatro regras de raízes
		Regra da zibra moquavel

Observamos que a base comum são as operações aritméticas com os números inteiros, embora com algumas variantes. Ruy Mendes exibe as sete «especias» para os números inteiros num primeiro bloco. Para além das quatro operações aritméticas básicas, inclui as progressões e as raízes, quadradas e cúbicas. Gaspar Nicolas trata apenas as cinco operações aritméticas básicas: «numerar, conta de assomar, conta de demenuir, conta de multiplicar e repartir» [Nicolas, 1963, ff. 1f-10f]. Bento Fernandes usa um modelo idêntico ao de Gaspar Nicolas, deixando as progressões e as raízes para outra etapa. Ruy Mendes trata dos números inteiros e em seguida dos números fracionários. A sua organização remete-nos para a tendência de, numa primeira fase, apresentar as bases das duas categorias de números, inteiros e quebrados, antes de passar a outros assuntos que dependam de um bom conhecimento e de uma manipulação eficaz destes números nas regras que se seguem e que perfazem as restantes partes da sua obra. Gaspar Nicolas e Bento Fernandes apresentam as regras comerciais nas primeiras páginas dos seus tratados e, dentro destas temáticas, seguem uma ordenação muito semelhante. O primeiro trata da regra de quarto e vintena antes da regra da conta de Flandres[5]. Pela variedade dos problemas exibidos, bem como pelas referências à Casa da Índia, somos levados a crer que era um assunto de destaque para o autor. Gaspar Nicolas passa às operações com quebrados e à regra da conta de Flandres, às progressões, deixando para depois a

[5] Clain, Teresa Costa. "Les règles d'un quarte et un vingtième et des comptes de Flandre comme modélisation du réel." In L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberg (Eds.), *HPM 2016: Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting*. Montpellier: HPM, 2016, pp. 351-358.

regra de baratas. Parece haver uma vontade de intercalar temas de aritmética mercantil com assuntos matemáticos desligados do ambiente dos negócios. O seu tratado inclui ainda um conjunto de problemas que abordam as regras enunciadas, numa secção denominada «Números e Perguntas». Trata-se, não só, de um conjunto de enunciados para consolidação das regras mas também um meio de abordar outros temas.

Um assunto singular neste *corpus* aritmético é o tema «Geometria» presente no tratado de Gaspar Nicolas. Ruy Mendes deixa claro, em certas passagens da sua obra, que não se vai dedicar ao tema, como o refere no tema «raiz quadrada».

A organização temática exibida por Fernandes dá primazia às regras mercantis, tal como Gaspar Nicolas o fizera, contudo, há um bloco dedicado às regras de quarto e vintena e da conta de Flandres, que figura depois das regras de companhia e antes das baratas. As progressões parecem «perdidas» no meio de temas comerciais e entre todas as regras que o autor dedica aos mercadores. No final do tratado figuram temas de matemática desligados do mundo mercantil, como os problemas com números, já presentes nos trabalhos dos outros autores, e as «raízes de todos os tipos», como o próprio afirma, bem como a «Regra da zibra moquavel» relativa à resolução de equações algébricas.

A maioria dos temas abordados nas três obras são os mesmos, contudo, detetámos diferenças em termos de organização. Rui Mendes exibe uma divisão em partes, e cada uma procura ter uma estrutura homogénea. A obra em si, desenvolve-se no sentido de trabalhar as bases (neste caso as operações com números inteiros e com números fracionários) para atingir um bom domínio das regras. O autor evitou uma mistura de assuntos que, à partida, tivessem pouca relação entre si, agrupando temáticas com afinidades em tratados. Recordemos o que nos diz no prólogo: «...as quaes cousas a meu parecer vam tambem decraradas e tam bem divididas e por tam boa ordem» [Mendes, 1540, prologo]. Podemos observar na Tabela 1 que conseguiu uma organização única entre os três tratados.

Como já referimos, as novas rotas comerciais, onde circulavam produtos em variedade e quantidade enormes, careciam de uma organização diferente da até aí conhecida. Emergiam práticas comerciais mais complexas, numa população mercantil nem sempre esclarecida. Os mercadores deveriam dominar os cálculos e efetuá-los de modo rápido e seguro de modo a conhecer ganhos e a evitar riscos. Sendo assim, os conhecimentos das operações aritméticas impunham-se. Também os negócios deveriam ser realizados “sem enganos”, como muitas vezes referem os três autores. A imagem de um mercador honesto era muito importante e, em parte, isso era conseguido através de bons modelos matemáticos aplicados ao comércio.

De seguida, considere-se uma abordagem em torno da linguagem matemática das obras: Quais são os conceitos abordados? Qual é o vocabulário científico utilizado? De que aritmética se tratava?

Estas obras visavam uma aritmética prática, a aritmética dos algoritmos baseados no cálculo e na difusão dos números indo-arábicos. Começamos por apresentar os cálculos básicos associados às operações básicas da aritmética, tais como, multiplicar em gelozia de acordo com tabelas de multiplicação previamente definidas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Figura 1: Tabela de multiplicação de Ruy Mendes (f. 13).

O método de gelosia, muito simples e prático, permitia facilitar os cálculos aos mercadores, dado que a multiplicação de números «grandes» é decomposta em multiplicações parciais, que não necessitam de «guarder» números em memória, e em somas (nas sucessivas diagonais), como podemos observar na Figura 2. Quando apresentamos este algoritmo aos alunos ele é rapidamente adotado. Contudo, podemos questionar porque razão este desapareceu dos currículos escolares atuais.

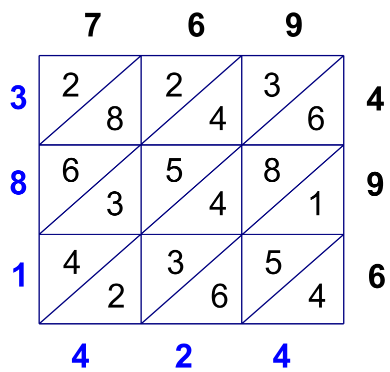

Figura 2: Multiplicação em gelozia por Gaspar Nicolas (769 x 496 = 381424).

Refira-se ainda a divisão inteira em «galera». Este método de divisão era um processo bastante elaborado e conhecido como «dividir em galera». Um exemplo deste algoritmo é-nos descrito de forma minuciosa por Gaspar Nicolas e acompanha-o o seguinte esquema:

	0	2					
	3	5	6				
0	4	7	8				
1	2	3	2	9			
9	**8**	**7**	**6**	**5**	(2	2	8
4	**3**	**2**	2	2			
	4	3	3				
		4					

Figura 3: Um exemplo de divisão em «galera».

No exemplo descrito, 98765 é o dividendo e 432 é o divisor. Pode-se observar a complexidade do algoritmo sugerido na figura 3. As etapas presentes podem ser descritas na execução de algoritmos que envolvem algumas propriedades bem conhecidas dos alunos, tal como se pode observar nos passos seguintes:

$$987 - 2 \times 432 = 123$$

$$\begin{aligned} 1236 - 2 \times 432 &= 1236 - 2 \times (400 + 30 + 2) = 1236 - (800 + 60 + 4) = (1236 - 800) - (60 + 4) \\ &= 376 - 4 = 372 \end{aligned}$$

(note-se que o 0 e 4 aparecem inicialmente no algoritmo pois começava-se da esquerda para a direita e, posteriormente, era necessário «corrigir» quando se tinha de subtrair um número por outro maior que ele)

$$\begin{aligned} 3725 - 8 \times 432 &= 3725 - 8 \times (400 + 30 + 2) = (3725 - 3200) - (240 + 16) = (525 - 240) + 16 \\ &= 285 - 16 = 269 \end{aligned}$$

(a nota anterior é válida para o 5 e para o 8 que surgem no algoritmo)

Comparativamente ao algoritmo atualmente utilizado no ensino básico, as diferenças intermédias, exceto a primeira, fazem-se na diagonal e da esquerda para a direita, daí a posição do resto da divisão, 269. O quociente (228) vem, como já é conhecido, ao longo das etapas.

Realce-se ainda que é possível trabalhar estes conceitos em sala de aula, convidando os estudantes a interpretar o esquema e a refletir sobre este processo de divisão à luz do algoritmo usualmente ensinado nas nossas escolas.

Outros temas expostos nos tratados são as progressões. Os alunos estão familiarizados com estes conceitos e a nossa proposta é fazê-los analisar problemas que recorram às progressões, aritméticas ou geométricas.

Na obra de Gaspar Nicolas observamos um conjunto de problemas de “caminhadas” onde, para resolvê-los, devem ser tidas em conta várias etapas. Estes problemas podem ser colocados aos nossos estudantes com o guião seguinte: ler o texto original e compreender o problema proposto; analisar e perceber a solução do autor; resolver o mesmo problema utilizando os conhecimentos adquiridos na escola; comparar e refletir sobre os dois processos de resolução. Para ilustrar o que se pretende temos o seguinte problema de Gaspar Nicolas:

> Dois homens fazem uma caminhada. Um dos homens anda, em cada dia, nove léguas e o outro vai crescendo cada dia uma légua. Em quantos dias serão juntos estes homens? [Nicolas, 1963, f. 52]

Para clarificar o enunciado, Gaspar Nicolas explica aos leitores o que é “crescer” cada dia uma légua. Em seguida resolve o problema explicando que, segundo a “regra geral”, duplicamos 9 e retiramos uma unidade, e o resultado é 17. Em linguagem matemática atual, o problema enunciado conduz-nos à resolução da equação do segundo grau $9n = \frac{n(n+1)}{2}$. Para evitar a equação de grau dois, Nicolas trabalha com uma expressão equivalente $9 = \frac{n+1}{2}$ e encontra a solução $n = 9 \times 2 - 1 = 17$. Atualmente, podemos referir que ao percurso do segundo homem está associada uma progressão aritmética de razão 1. Pretende-se calcular a soma dos n primeiros termos consecutivos desta progressão: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, que nos vai dar o número de léguas percorridas em n dias. Quanto ao primeiro homem, em n dias terá percorrido $9n$ léguas.

Os temas “clássicos” da Matemática, tais como as progressões e as raízes quadradas e cúbicas, sendo assuntos desligados do mundo mercantil, marcam a sua presença nos tratados portugueses de aritmética. Estes temas estão associados a técnicas calculatórias e a sua presença nas obras portuguesas mostra um interesse pelo saber matemático desligado das práticas mercantis.

Observe-se agora uma abordagem ligada a características locais: De que modo as temáticas expostas foram adaptadas à realidade portuguesa? Quais são as regras específicas no comércio português?

Os tratados de aritmética tinham como objetivo principal servir as práticas comerciais e desenvolver estratégias de cálculo facilitadoras. Entre as regras consideradas clássicas, tais como as regras de companhias, as regras de baratas e as ligas da prata e do ouro, temos, nos tratados portugueses, regras específicas de comércio. Trata-se da regra de quarto e vintena e da regra da conta de Flandres. A regra de quarto e vintena assenta num princípio concreto ligado à existência de um imposto cobrado na Casa da Índia. Baseando-se nesta realidade fiscal, Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e

Bento Fernandes abordaram o assunto através de um conjunto de problemas que traduzem vários cenários, desde a simples aplicação do modelo para o cálculo do imposto, até aos casos em que se confirmam quebras nas mercadorias transportadas durante as longas viagens marítimas, com consequente prejuízo para os mercadores.

O quarto e vintena é um imposto que tem por base a cobrança de um quarto mais a vintena dos restantes três quartos, ou seja, $\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{4}=\frac{23}{80}$ da quantidade inicial. Estabeleciam-se assim, dois modelos por aplicação da regra de três. Por um lado, 80---23---*a* para o imposto devido ao rei, por outro lado, o que cabe ao mercador: 80---57---*a* (*a* é a quantidade de mercadoria). Este imposto era uma importante fonte de receitas já que correspondia a 28,75% de ganhos sobre a mercadoria carregada na origem, chegasse ou não, a totalidade da mesma à Casa da Índia, como já referimos. Estamos de acordo com Marques de Almeida[6] ao afirmar que os tratados de aritméticos portugueses propõem modelos (algoritmos) aritméticos concretos aplicados a situações concretas e objetivas das realidades mercantil. A regra da conta de Flandres era uma regra de conversão entre unidades de «pesos», «medidas» e «moedas» apoiada na regra de três simples e muito necessária dado que as mercadorias viajavam por vários países da Europa.

Uma regra comercial muito popular era a regra de companhia. A definição de «companhia» está assente numa associação de homens com vista a obter lucros. Uma prova da divulgação e popularidade das companhias comerciais podemos obtê-la nos tratados portugueses de aritmética. Os problemas de partilha de lucros seriam uma prática corrente entre todos os envolvidos nas transações comerciais e disso são testemunho os enunciados que visam determinar a distribuição de ganhos pelos associados. Sobre estas regras, e atendendo a que os estudantes estão familiarizados com a partilha proporcional, é possível propor-se alguns enunciados, tais como o do exemplo seguinte:

> Três mercadores, Pedro, Luís e André fizeram uma companhia na qual o Pedro pôs 56 cruzados, o Luís 78 e o André 85. E tratando todos três com eles ganharam cem tostões. Pergunta-se agora quantos viram a cada um segundo o cabedal que pôs na companhia. [Mendes, 1540, f. 71 f]

É conveniente orientar os alunos para obter a relação entre os ganhos de cada um segundo o modelo

$$\frac{g_{Pedro}}{i_{Pedro}}=\frac{g_{Luís}}{i_{Luís}}=\frac{g_{André}}{i_{André}}=\frac{100}{56+78+85}$$

---

[6] Almeida, Adelino. *Aritmética como descrição do real (1519-1679)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1994, p. 255.

Por exemplo, o ganho do Pedro na dita companhia pode ser calculado do seguinte modo:

$$\frac{g_{Pedro}}{56} = \frac{100}{219} \Leftrightarrow g_{Pedro} = \frac{100 \times 56}{219}$$

De modo análogo, é possível determinar os ganhos dos outros participantes na companhia. No âmbito da divisão proporcional inerente às regras de companhias, observam-se também a presença de outros problemas, com características lúdicas, tal como o que se reproduz a seguir:

> Um homem estava para morrer e tinha a sua mulher prenha e, fez testamento desta maneira e disse que ele deixava em dinheiro 600 cruzados os quais mandava repartir deste modo: sendo caso que a mulher parisse filho macho que seu filho havia $\frac{2}{3}$ dos 600 cruzados e sua mulher $\frac{1}{3}$. Se sua mulher parisse filha, que a filha tivesse $\frac{1}{3}$ e a mulher $\frac{2}{3}$. Ora o homem faleceu e a mulher pariu filha e filho juntos. Pergunto, como se devem partir os 600 cruzados para que cada um tenha o que é seu sem nenhum ser enganado?” [Fernandes, 1555, f. 101]

A resolução apresentada no tratado é a seguinte:

> O filho macho leva 2 tanto que a mãe e por conseguinte, a mãe leva 2 tanto que a filha. Agora direis assim, se são três pessoas que hão de haver 600 cruzados e a primeira deve haver 2, tanto que a segunda e a segunda deve haver dois, tanto que a terceira. Pergunto quanto vem a cada pessoa? Ora se a primeira metesse 4 convém que a segunda metesse 2 e a terceira 1. Pela regra de companhia, ajuntareis o corpo da companhia que é 4 e 2 e 1 que fazem 7, que é o partidor. [Fernandes, 1555, f. 101].

Tendo em conta o princípio aplicado no problema anterior, poder-se-ia ter

$$\frac{g_{filho}}{i_{filho}} = \frac{g_{mãe}}{i_{mãe}} = \frac{g_{filha}}{i_{filha}} = \frac{600}{1+2+4}$$

Os tratados quinhentistas de aritmética são compostos por um elevado número de problemas. Alguns conteúdos matemáticos podem ser descortinados nas resoluções apresentadas pelos autores. Através das histórias contadas na biblioteca escolar e dos exemplos descritos, os estudantes apercebem-se que muitos dos assuntos que estudam na escola já faziam parte do saber matemático há muitos anos, embora os instrumentos de trabalho fossem diferentes. Há um apelo constante ao cálculo mental e a linguagem simbólica é inexistente. Contudo, o pensamento matemático estava presente do mesmo modo que o sentimos atualmente.

PEDRO NUNES, O MATEMÁTICO PORTUGUÊS DOS DESCOBRIMENTOS

Nesta secção iremos abordar Pedro Nunes[7] (1502-1578), matemático, professor e cosmógrafo iminente na época dos descobrimentos. Note-se que este matemático se encontra representado no monumento «Padrão dos Descobrimentos», existente na cidade de Lisboa, onde são homenageadas as principais figuras portuguesas desta época histórica (https://padraodosdescobrimentos.pt/conjunto-escultorico/, acedido em outubro de 2019). A maioria da sua obra científica/matemática está relacionada com a arte de navegação marítima, área onde publicou imensas obras [Reis, 2003], mas também se dedicou à matemática teórica no qual se destaca o seu "*Livro de Algebra, en Arithmetica y Geometria*" (publicado em castelhano no ano de 1567).

Pedro Nunes apresentou nas suas obras vários instrumentos de medida para serem utilizados na navegação astronómica. Um destes instrumentos era o *Instrumento de Sombras*[8] que permite medir a inclinação dos raios solares em relação à horizontal ("a altura do Sol"). Trata-se de um instrumento simples, de aparência semelhante a um relógio de Sol, mas com uma inovação muito engenhosa que permite obter diretamente a "altura do Sol" através da utilização das sombras por si projetadas. Esta medição era de extrema importância para a navegação astronómica daquela época, pois auxiliava os navegadores na determinação da sua posição geográfica em alto mar.

O Instrumento de Sombras consistia numa prancha, geralmente quadrada, com um círculo desenhado e num triângulo retângulo isósceles fixado perpendicularmente como mostra a figura 4 (o comprimento do cateto do triângulo era igual ao raio do círculo; a tangente ao círculo em *T* estava igualmente marcada na prancha).

[7] Reis, Fernando (2003). "Pedro Nunes (1502-1578)". In *Centro Virtual Camões – Ciência em Portugal, Personagens e Episódios*. Retirado de http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/p1.html, consultado em novembro de 2018.

[8] Crato, Nuno. "O Instrumento de Sombras". In *Centro Virtual Camões – Ciência em Portugal, Personagens e Episódios*. Retirado de http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e32.html, consultado em novembro de 2018.

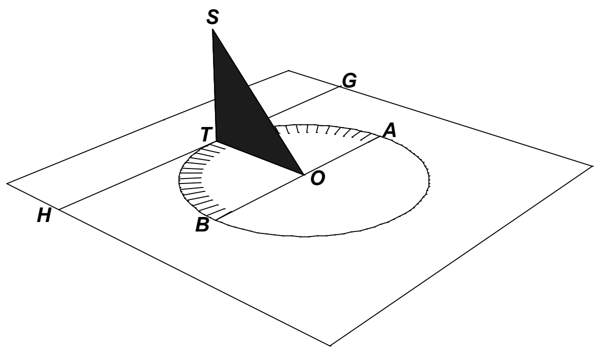

Figura 4: Esquematização do *Instrumento de Sombras* do matemático Pedro Nunes.

No círculo estava ainda traçado o diâmetro paralelo à tangente *GH* e os dois quadrantes do círculo mais próximos da tangente estavam graduados de 0º a 90º, desde esse diâmetro até ao ponto de tangência *T*. Note-se que o triângulo isósceles vertical estava assente no segmento *OT*.

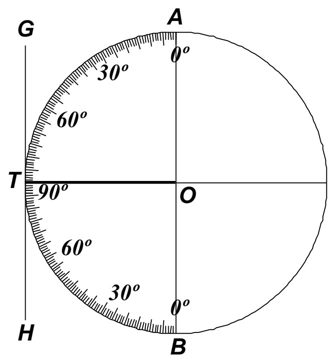

Figura 5: O círculo graduado que se encontrava na placa do *Instrumento de Sombras*.

Esta graduação permite obter diretamente o ângulo que os raios solares fazem com o plano horizontal. O Instrumento de Sombras era utilizado do seguinte modo:

• Colocar a prancha na horizontal.

• Rodar o instrumento até que a sombra do cateto [*ST*] coincida com a reta tangente ao círculo, ou seja, com *GH*; designe-se por *S’* a sombra do ponto *S*.

• A intersecção da sombra que a hipotenusa do triângulo faz na prancha com o arco da circunferência entre os pontos *A* e *T* indica o valor do ângulo que os raios solares fazem com a horizontal; designe-se por *X* esse ponto.

A justificação geométrica para o funcionamento deste instrumento é bastante simples e recorre a conceitos bem conhecidos e trabalhados na matemática escolar. Basta observar que os triângulos [*S’TS*] e [*S’TO*] são iguais (ambos são retângulos no vértice *T*, partilham um lado comum *TS'*, e *TS* e *TO* têm o mesmo comprimento por construção do instrumento – critério lado-ângulo-lado); por outro lado, tem-se ainda que os ângulos *TS'O* e *XOA* são iguais pois são ângulos alternos internos de retas paralelas (*AB* e *GH*). Finalmente, por transitividade (note-se que o ângulo *TS'O* é igual ao ângulo *TS'S*), conclui-se que o ângulo *TS'S* (a altura do Sol) e o ângulo *XOA* (o ângulo que se "lê" no instrumento) são iguais (Fig. 6).

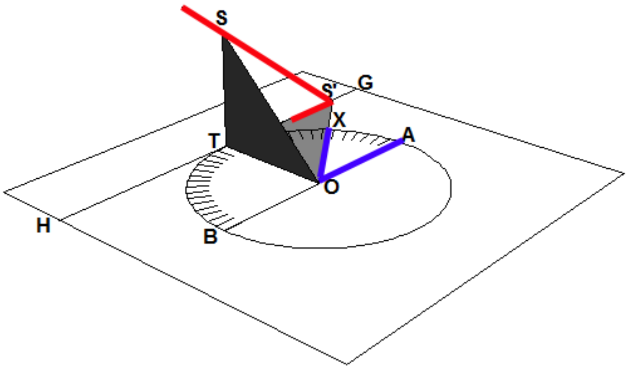

Figura 6: Esquematização do *Instrumento de Sombras* onde estão indicados o ângulo que o Sol faz com a horizontal (a vermelho) e o ângulo medido pelo Instrumento (a azul).

Este instrumento pode ser facilmente replicável na sala de aula como se pode observar na figura 7 (para mais informações de como aplicar em sala de aula, consultar Pinto (2009)[9] e (2011)[10]).

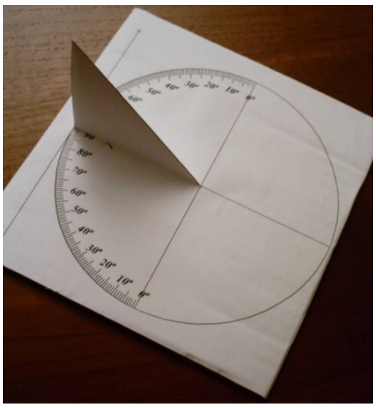

Figura 7: Uma réplica feita de papel e cartão do *Instrumento de Sombras* de Pedro Nunes.

A apresentação deste instrumento na sala de aula permite dar uma nova visão sobre a época dos descobrimentos, em particular dos avanços científicos (e matemáticos) que foi preciso

[9] Pinto, Helder. *História da Matemática na Sala de Aula*. Lisboa: Associação Ludus, 2009.
[10] Pinto, Helder. "The History of Mathematics in the classroom – some activities". In E. Barbin, M. Kronfellner & C. Tzanakis (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the Sixth European Summer University – (ESU-6)*. Wien: Holzhausen Verlag, 2011, pp. 245-257.

alcançar para que as viagens marítimas pudessem alcançar distâncias e locais nunca antes atingidos. Por outro lado, dada a sua simplicidade, este instrumento poderá ser um bom ponto de partida e de motivação para dar a conhecer aos alunos outros instrumentos mais conhecidos e elaborados como, por exemplo, o astrolábio. Mostrar a história dos descobrimentos, e a própria matemática, como uma ciência de avanços e recuos permite humanizar as disciplinas, o que poderá aproximar a relação dos alunos com essas mesmas áreas do saber.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Note-se que as atividades aqui apresentadas já foram expostas em escolas básicas e secundárias através do projeto «Histórias com Ciência na Biblioteca Escolar», uma iniciativa conjunta entre a Universidade de Aveiro e a Rede de Bibliotecas Escolares, um programa pertencente ao Ministério da Educação. Este projeto consiste num ciclo de várias palestras que percorrem as bibliotecas de diversas escolas onde são apresentados tópicos de História da Ciência aos estudantes (astronomia, medicina, química, matemática, etc.). Este projeto tem como principal objetivo aumentar a literacia histórica e científica dos estudantes tornando-os cidadãos mais capazes de compreender a evolução da Humanidade em diferentes áreas do conhecimento. Como exemplo, apresentam-se na figura 9 os cartazes das palestras efetuadas no âmbito da “Semana da Ciência e Tecnologia da ESCT” (Caldas das Taipas).

Figura 8: Os cartazes a anunciar as palestras na Escola Secundária de Caldas das Taipas.

A nossa experiência neste âmbito com os estudantes e professores das duas disciplinas – Matemática e História de Portugal – mostrou-se bastante produtiva, tendo os alunos evidenciado bastante recetividade aos temas propostos. De seguida, transcreve-se, como exemplo, a opinião de uma aluna participante numa destas sessões:

> A turma considerou que a palestra foi muito enriquecedora, construtiva, e adequada pois abordou a matemática no contexto histórico, mais especificamente, nos Descobrimentos. Permitiu-nos adquirir uma perceção de como eram efetuados os cálculos nessa época e o quanto a mesma evoluiu desde então. O facto de termos posto em prática alguns dos processos utilizados na época dos Descobrimentos, tornou a palestra mais dinâmica, interessante e proveitosa. Dada a vastidão do tema, sentimos que foi pouco tempo pois muito mais havia para abordar. Em suma, a turma considerou que este género de atividades devem ser implementadas mais frequentemente.

Com esta abordagem interdisciplinar[11] entre a História de Portugal e a História da Matemática, pretende-se alterar a perspetiva dos estudantes em relação à disciplina de Matemática, apresentando-a como o produto do esforço de várias gerações e vários povos. Por outro lado, desta ligação surge o entendimento que a matemática não é apenas teórica e abstrata, mas que também foi desenvolvida de modo a resolver problemas concretos que afetavam o dia-a-dia de vários profissionais, como era o caso dos comerciantes e dos navegadores da época dos Descobrimentos. Deste modo, humaniza-se a disciplina, ajudando os estudantes a perceber que a matemática pode ser encarada de várias perspetivas, isto é, que a matemática pode "servir maravilhosamente, tanto para contentar os curiosos, como para facilitar as artes e diminuir o trabalho dos homens" [12].

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pelo CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projeto UID/MAT/04106/2019.

[11] Existem vários autores a defender atualmente a utilização da História da Matemática em contexto escolar. Para uma primeira abordagem a este tema, consultar, por exemplo, os seguintes autores clássicos: Katz, Victor (Ed.). *Using History to Teach Mathematics: an International Perspective*. Nova York: Cambridge University Press, 2000 e Swetz, Frank. *Learning Activities from the History of Mathematics*. Portland: J. Weston Walch Publisher, 1994.
[12] Descartes, René. *Discurso do Método*. Lisboa: Guimarães Editores, 2004 [1637], p. 14.

SOBRE OS AUTORES:

Helder Pinto
Instituto Piaget e CIDMA – UA (Portugal)
helder.pinto@gaia.ipiaget.pt

Teresa Costa Clain
Escola Secundária D. Maria II e CIDMA – UA (Portugal)
tcostacaracol@gmail.com