

## Estórias da História da Matemática

---

Sandra Ricardo

Elza Amaral

Ângela Macedo

Elisete Correia

### Resumo

*Se perguntassem a um matemático quais as virtudes e os defeitos da Matemática, ouviriam certamente dizer “poupança de esforço” e “satisfação” versus “ansiedade” e “medo”. Neste trabalho vamos contar algumas Estórias da História da Matemática que, em parte, ilustram as três formas de economia em que assenta a Matemática: a ordem, a generalização e a representação concisa.*

**Palavras-chave:** Matemática, Estórias, História.

### Abstract

*If one asks a mathematician about the virtues and defects of mathematics, the expressions "effort-saving" and "satisfaction" versus "anxiety" and "fear" would certainly appear. In this work, we will tell some Math History Stories, which, in part, illustrate the three forms of economics on which mathematics is based: order, generalization and concise representation.*

**Keywords:** Mathematics, Stories, History.

### 1. INTRODUÇÃO

A História da Matemática brinda-nos com uma ampla diversidade de estórias, lendas, contos, autênticas preciosidades repletas de sabedoria, cultura e tradição. Muitas vezes envoltas em misticismo, fruto da época e das crenças, deliciam-nos o espírito, cumprindo por um lado uma missão de entretenimento, e, por outro, veiculando informação de geração em geração. Conhecimentos matemáticos que se perpetuaram, sendo retomados, ao longo dos séculos, e despertando a atenção de mentes brilhantes da História da Matemática.

De um modo geral, todas as sociedades humanas têm estórias, lendas ou contos, que cumpriram em tempos a função crucial de transmitir conhecimentos e/ou informações valiosas entre gerações, especialmente numa época em que não se dispunha de outra forma para o conseguir. Esta forma de expressão da criatividade humana alia inteligência e entretenimento, ingredientes certamente cruciais para se perpetuar no tempo. E, como “quem conta um conto acrescenta um ponto”<sup>1</sup>, multiplicam-se as versões, situadas em lugares e tempos distintos, mas mantendo-se o cerne da estória.

---

<sup>1</sup> Provérbio de origem popular.

Neste trabalho iniciamos com um conto de Malba Tahan, que coloca a Matemática como base do progresso e sucesso de uma sociedade. A seguir refletiremos sobre quatro estórias da História da Matemática: a lenda de *Lo Shu*, a lenda do tangram, a lenda do tabuleiro de xadrez e a lenda da torre de Hanói. Em todas estas estórias encontraremos como fatores comuns: a simplicidade (qualquer pessoa as pode entender); a beleza do conto, inserido num contexto de época que por si só desperta a atenção; um desafio matemático eminente. Com um início muito remoto, elas perpetuam-se no tempo e têm repercussões no mundo atual, em particular no ensino da Matemática. Exemplificamos com uma aplicação em sala de aula, recorrendo ao quadrado mágico de Dürer. Esta aplicação pode ser adaptada consoante o nível de ensino e a temática a desenvolver com os alunos.

## 2. A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA REFLETIDA NUM CONTO DE MALBA TAHAN

Defendida como uma ciência por si mesma, a Matemática é muitas vezes referida como a base de todas as ciências e de todas as artes. Albert Einstein considerou num dos seus livros a Matemática como superior às outras ciências. Talvez esta inspiração tenha levado Malba Tahan ao conto que se segue <sup>2</sup>:

*Asad-Abu-Carib, rei do Iêmen, ao repousar certa vez, na larga varanda de seu palácio, sonhou que encontrara sete jovens que caminhavam por uma estrada. Em certo momento, vencidas pela fadiga e pela sede, as jovens pararam sob o sol causticante do deserto. Surgiu, neste momento uma formosa princesa que se aproximou das peregrinas, trazendo-lhes um grande cântaro cheio de água pura e fresca. A bondosa princesa saciou a sede que torturava as jovens e estas, reanimadas, puderam reiniciar a jornada interrompida.*

*Ao despertar, impressionado com esse inexplicável sonho, determinou Asad-Abu-Carib viesse à sua presença um astrólogo, chamado Sanib, e consultou-o sobre a significação daquela cena a que ele - rei poderoso e justo - assistira no mundo das Visões e Fantasias. Disse Sanib: "Senhor! As sete jovens que caminhavam pela estrada eram as artes divinas e as ciências humanas: a Pintura, a Música, a Escultura, a Arquitetura, a Retórica, a Dialética e a Filosofia. A princesa prestativa que as socorreu simboliza a grande e prodigiosa Matemática". "Sem o auxílio da Matemática - prosseguiu o sábio - as artes não podem progredir e todas as outras ciências perecem". Impressionado com tais palavras, determinou o rei que se organizassem em todas as cidades, oásis e aldeias do país, centros de estudo de Matemática. Hábeis e eloquentes ulemás<sup>3</sup>, por ordem do soberano, iam aos bazares<sup>4</sup> e*

<sup>2</sup> Malba Tahan, *O Homem que Calculava* (Rio de Janeiro: Editora Record, 2008).

<sup>3</sup> Ulemá - doutor teólogo, entre os Árabes e os Turcos (retirado de [www.infopedia.pt](http://www.infopedia.pt))

<sup>4</sup> Bazar - mercado público nos países orientais (*ibidem*).

*caravançarais<sup>5</sup> lecionar Aritmética aos caravaneiros<sup>6</sup> e beduínos<sup>7</sup>. Ao termo de poucos meses, verificou que o país era agitado por um surto de incomparável prosperidade. Paralelamente ao progresso da ciência, cresciam os recursos materiais; as escolas viviam repletas; o comércio desenvolvia-se de maneira prodigiosa; multiplicavam-se as obras de arte; erguiam-se monumentos; as cidades viviam repletas de ricos forasteiros e curiosos.*

*O país do lêmén teria aberto as portas do Progresso e da Riqueza se não viesse a fatalidade (estava escrito) pôr termo àquele fervilhar de trabalho e prosperidade. O rei Asad-Abu-Carib cerrou os olhos para o mundo e foi levado pelo impiedoso Anjo da Morte para o céu de Alá<sup>8</sup>. A morte do soberano fez abrir dois túmulos: um deles acolheu o corpo do glorioso soberano e ao outro foi atirada a cultura científica do povo. Subiu ao trono um príncipe vaidoso, indolente e de acanhados dotes intelectuais. Preocupavam-no mais os divertimentos do que os problemas administrativos do país. Poucos meses decorridos, todos os serviços públicos estavam desorganizados, as escolas fechadas e os artistas e ulemás forçados a fugir sob a ameaça dos perversos e ladrões. O tesouro público foi criminosamente dilapidado em ociosos festins e desenfreados banquetes. E o país, levado à ruína pelo desgoverno, foi atacado por inimigos ambiciosos e facilmente vencido.*

### **3. A LENDA DE LO SHU E O QUADRADO MÁGICO**

Um quadrado mágico é uma tabela quadrada de ordem  $n^9$ , com números, onde a soma dos números das linhas, das colunas e das duas diagonais é constante, designando-se por constante mágica, sendo que nenhum dos números se repete ao longo de uma linha, de uma coluna e das duas diagonais.

A origem do quadrado mágico remonta a tempos longínquos, havendo algum consenso em atribuir aos chineses ou japoneses a sua invenção.

Uma das versões da lenda de “Lo Shu”<sup>10</sup> conta que, por volta do ano 2800 a.C., ocorreram sucessivas inundações do rio Lo, um afluente do rio Amarelo, na China, destruindo culturas e campos e provocando o desespero da população. Procurando aplacar a fúria do deus do rio, a população colocou várias oferendas nas margens do rio. De cada vez que era feita uma oferenda, emergia das águas do

<sup>5</sup> Caravançarai - grande edifício onde podem repousar gratuitamente as caravanas, no Médio Oriente (*ibidem*).

<sup>6</sup> Caravaneiro - guia de caravana (*ibidem*).

<sup>7</sup> Beduíno - árabe nómada dos desertos do Norte de África e do Médio Oriente (*ibidem*).

<sup>8</sup> Alá - Deus, em arábico (*ibidem*).

<sup>9</sup> Uma tabela com  $n$  linhas e  $n$  colunas.

<sup>10</sup> Shu significa livro em chinês; Lo é o nome dum afluente do rio Amarelo na China. *Lo Shu* é tradicionalmente traduzido como o livro do rio.

rio uma tartaruga, que dava uma volta à oferenda realizada, mas as inundações continuavam para desespero da população.

A certa altura, alguém (numas versões uma criança, noutras versões o imperador Yu, que viveu no terceiro milénio a.C.<sup>11</sup>) reparou que a tartaruga que emergia das águas exibia um padrão na carapaça. Nesse padrão distinguia-se uma grelha ou quadro onde existiam pontos que correspondiam a números (figura 1).

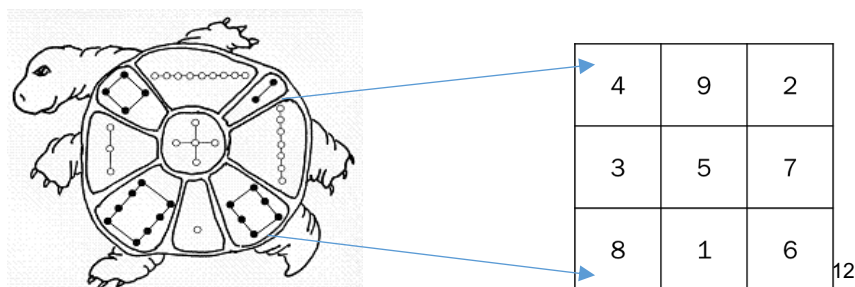


Figura 1: Quadrado mágico de Lo Shu

Somando esses números, por linha, por coluna ou na diagonal, obtinha-se sempre o mesmo número: 15 (figura 2).

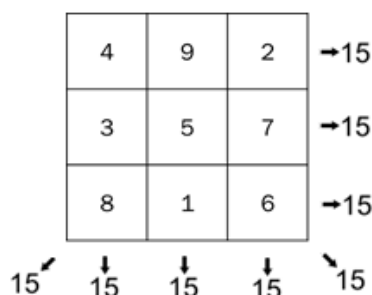


Figura 2: A constante mágica no quadrado de Lo Shu

Entendeu-se então que 15 era o número de ofertas que deveriam ser feitas e assim se procedeu. A tartaruga reapareceu e caminhou em torno das oferendas, surgindo de seguida o deus do rio que aceitou as oferendas e garantiu que o rio não tornaria a inundar os campos.

A lenda de Lo Shu, que para a maioria dos historiadores é considerada com origem na China, por volta de 2800 a.C., viajou mais tarde para a Índia e para o Egito e daqui até à Europa, mantendo-se ligada durante muito tempo, e ainda atualmente, ao esoterismo e à superstição. O padrão exibido na carapaça da tartaruga ficou conhecido como quadrado mágico ou quadrado de *Lo Shu*. Este é

<sup>11</sup> [http://www.taliscope.com/LoShu\\_en.html](http://www.taliscope.com/LoShu_en.html) (consultado a 23 de julho de 2019).

<sup>12</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Lo\\_Shu\\_Square](https://en.wikipedia.org/wiki/Lo_Shu_Square) (consultado a 23 de julho de 2019).

considerado o mais antigo dos quadrados mágicos, tendo sido usado, no Oriente e na Europa, na prática de magia e como amuleto para atrair boa sorte e afastar doenças. Pensava-se que este símbolo reunia os princípios básicos que formavam o universo, onde os números pares simbolizavam o princípio feminino, o Yin, e os números ímpares simbolizavam o princípio masculino, o Yang.

Num quadrado mágico de ordem 3, considerava-se que os números de 1 a 9 representavam todo o conhecimento, sendo que cada número representava um caminho de uma etapa espiritual com um significado próprio. O número 5 representava a Terra e ao seu redor estavam distribuídos os quatro elementos principais, a água 1 e 6, o fogo 2 e 7, a madeira 3 e 8 e os metais 4 e 9. Acreditava-se que quem possuísse um quadrado mágico teria sorte e felicidade para toda a vida.

O número de ocorrências de quadrados mágicos na cultura humana é bastante considerável. Na Índia, século I, o alquimista Nagarjuna trabalhou por forma a obter quadrados mágicos de ordem 4, ligando estes objetos a noções matemáticas. No século VI, também na Índia, foi publicado um trabalho escrito pelo astrólogo, físico e matemático Varahamihira, que fez estudos combinatórios recorrendo a um quadrado mágico de ordem 4. Nas tradições gregas, latinas e árabes, existem referências a sete quadrados mágicos de ordem três a nove, associados a Saturno, Júpiter, Marte, Sol, Vénus, Mercúrio e Lua, respetivamente. Pensa-se que os quadrados mágicos terão sido introduzidos na Europa no século XI, num livro que estabelecia a sua ligação aos planetas.

Por volta do ano 1315, o grego Manuel Moschopoulos redigiu um tratado sob um ponto de vista puramente matemático, intitulado “Tratado de Quadrados Mágicos”, abandonando o misticismo a eles associado até então. Contudo, este tratado ficou esquecido até ao século XVII, continuando os quadrados mágicos a serem associados à alquimia e astrologia e usados como talismãs ou amuletos.

Em 1514, o pintor e matemático alemão Albrecht Dürer (1471-1528), na sua gravura intitulada *Melancolia I*, incluiu um quadrado mágico de ordem 4, cuja constante mágica é 34 (figura 3).

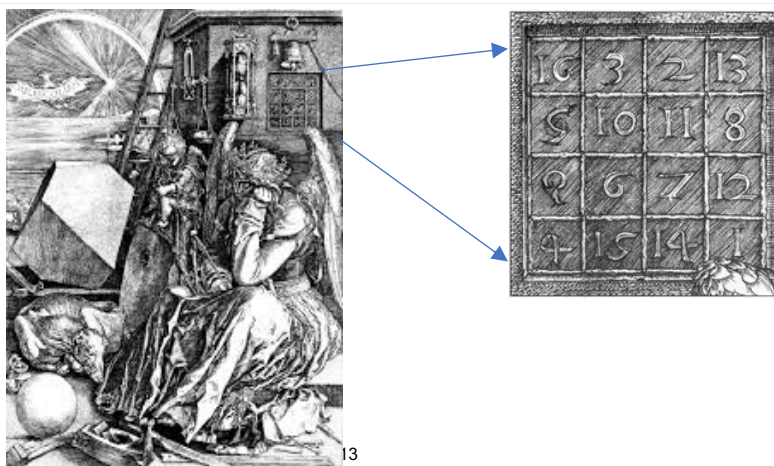


Figura 3: Quadrado mágico na gravura *Melancolia I*

Esta é considerada uma das primeiras manifestações do quadrado mágico na arte ocidental.<sup>14</sup> Outro artista que está associado aos quadrados mágicos é o arquiteto catalão Antoni Gaudí (1852-1926). Na sua obra-prima, a catedral da Sagrada Família, um templo católico localizado em Barcelona, Espanha, pode ser visto um quadrado mágico de ordem 4, junto à escultura representando o Beijo de Judas na fachada da paixão. Trata-se de um quadrado mágico modificado (figura 4) para que a constante mágica seja 33, a idade que, segundo a tradição cristã, Jesus Cristo tinha ao falecer.

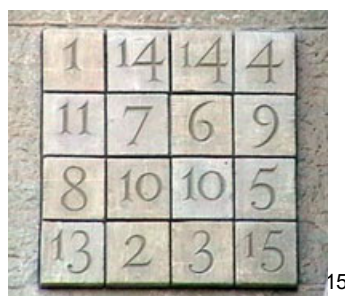


Figura 4: Quadrado mágico na fachada da paixão, Catedral da Sagrada família, Barcelona, Espanha.

A partir do século XVII aumenta o interesse dos matemáticos em relação à construção, classificação e enumeração de quadrados mágicos. Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), Claude-Gaspar Bachet (1581-1638), Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783) e Thomas Heath (1861-1940) estudaram algumas propriedades de quadrados mágicos de diferentes ordens e suas generalizações. Atualmente o quadrado mágico é utilizado em diversas áreas da Matemática e

<sup>13</sup> [https://pt.wikipedia.org/wiki/Melancolia\\_I](https://pt.wikipedia.org/wiki/Melancolia_I) (consultada em 23 de julho de 2019).

<sup>14</sup> O ano em que a gravura foi feita aparece no centro da última linha e os quadrados externos da última linha são uma assinatura codificada do autor, pois os números 1 e 4 indicam a primeira e a quarta letra do alfabeto alemão: A e D.

<sup>15</sup> [https://pt.wikipedia.org/wiki/Templo\\_Expiat%C3%B3rio\\_da\\_Sagrada\\_Fam%C3%ADlia](https://pt.wikipedia.org/wiki/Templo_Expiat%C3%B3rio_da_Sagrada_Fam%C3%ADlia) (consultada em 16 de julho 2019).

constitui um recurso didático para o ensino de várias noções matemáticas. Um exemplo de aplicação é apresentado na secção 7.

#### 4. A LENDA DO TANGRAM

O tangram (figura 5) é um jogo de origem chinesa, formado por sete peças (conhecidas originalmente como *tans*) de formas geométricas bem conhecidas: um quadrado, um paralelogramo e triângulos.



Figura 5: Tangram esculpido em marfim com a sua caixa original, data de aproximadamente 1802 (Museu Ryerss, Filadélfia)

Trata-se dum jogo tipo *quebra-cabeças*, *puzzle* ou *enigma*, cujo desafio consiste em organizar as sete peças, 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo, por forma a criar uma variedade de figuras diferentes. As regras clássicas do jogo são simples: em cada figura formada, todas as sete peças do tangram devem ser usadas, ficar planas, encostadas e nenhuma se pode sobrepor<sup>1718</sup>.

Não se sabe ao certo quem inventou o tangram, nem a data do seu aparecimento. Contudo, há algum consenso de que terá tido origem na China, durante a dinastia Song (960–1279 d.C.), sendo transportado para a Europa por navios comerciais no início do século XIX<sup>19</sup>. É conhecido na China por “Tch'i Tch'iao pan”, que significa “As sete tábuas da sabedoria”, sendo um dos mais famosos “testes” utilizados, na China antiga, para estudar a inteligência humana. No século XIX, este jogo espalhou-se de tal forma pela Ásia, Europa e América que se tornou um dos jogos mais populares. Entre os

<sup>16</sup> <http://chinesepuzzles.org/tangram-puzzle/> (consultada a 12 de julho 2019).

<sup>17</sup> Sam Loyd, *The Book of Tangrams : 700 Puzzles* (New York: Dover Publications Inc., 2019).

<sup>18</sup> Ronald C. Read, *Tangrams : 330 Puzzles* (New York: Dover Publications Inc., 1965).

<sup>19</sup> <https://en.wikipedia.org/wiki/Tangram> (consultada a 12 de julho 2019) e referências indicadas.

fervorosos adeptos do jogo encontramos nomes como Napoleão Bonaparte (1769-1821), Edgar Allan Poe (1809-1849), Lewis Carrol (1832-1898) e Thomas Edison (1847-1931).

Por se tratar de um jogo simples de entender, que requer essencialmente tempo e paciência, e oferece uma dose certa de desafio, atrai pessoas de todas as idades. Em particular, tem-se vindo a afirmar como ferramenta educativa, fomentando a coordenação espacial, promovendo o desenvolvimento do raciocínio e da imaginação geométrica e permitindo explorar conhecimentos de geometria<sup>20</sup>. Permite também explorar conceitos de proporcionalidade, congruências e semelhanças<sup>21</sup>.

Existem várias versões da lenda do tangram<sup>22</sup>. Optamos aqui pela versão seguinte:

*Diz a lenda que um sábio chinês deveria levar ao Imperador uma placa de jade, de forma quadrada, mas, no meio do caminho, o sábio tropeçou e deixou cair a placa que se partiu em sete pedaços geometricamente perfeitos. Eis que o sábio tentou remendar e, a cada tentativa, surgia uma nova figura. Depois de muito tentar, ele, finalmente, conseguiu formar novamente o quadrado e levou ao seu Imperador. Os sete pedaços representariam as sete virtudes chinesas, onde uma delas, com certeza, seria a paciência. O sábio mostrou a seus amigos as figuras que havia conseguido montar e cada um construiu o seu tangram.*

De acordo com Samuel Loyd (1841–1911), matemático americano dedicado à Matemática recreativa, o deus Tan inventou este jogo há 4000 anos e explicou-o nos sete livros de Tan. Cada volume continha mais de 1000 puzzles que supostamente ilustravam a criação do mundo e a origem das espécies. As sete peças foram tiradas do Sol, da Lua e de cinco planetas: Marte, Júpiter, Saturno, Mercúrio e Vénus. Esta estória foi considerada sem base e fruto da imaginação, mas ilustra a importância atribuída às peças do jogo.

## 5. A LENDA DO TABULEIRO DO XADREZ

O xadrez é também um jogo muito antigo, de origem enredada em lendas e estórias cuja veracidade é questionável. A maioria dos historiadores parece concordar com a origem deste jogo na Índia, por volta do Século VI, designando-se nessa altura por Chaturanga<sup>23</sup>.

<sup>20</sup> Dorothy S. Russell & Elaine M. Bologna. "Teaching Geometry with Tangrams." *The Arithmetic Teacher* 30, no. 2 (1982): 34-38. <http://www.jstor.org/stable/41192134>.

<sup>21</sup> <https://www.mathed.page/geometry-labs/gl/gl-10.pdf> (consultada a 23 de julho de 2019).

<sup>22</sup> <http://restlessmindboosters.blogspot.com/2011/11/we-can-find-lot-of-legends-about.html> (consultada a 23 de julho de 2019).

<sup>23</sup> Uma minoria de historiadores localizam a origem do jogo na China.





Figura 6: Peças de xadrez em pasta de pedra vidrada, século XII

A maioria das lendas ou histórias associadas à invenção do jogo refere-se a um problema que envolve “o arroz e o tabuleiro de xadrez”. Consoante a versão, o arroz é substituído por milho ou trigo, mas o mais relevante é que o problema nos conduz a diferentes noções matemáticas, nomeadamente a de crescimento exponencial e de progressão geométrica.

*Conta uma dessas lendas que na Índia, um poderoso rajá de nome Balhait pediu a um brilhante matemático indiano, chamado Sessa, que inventasse um jogo em que prevalecessem as qualidades nobres, como a prudência, a diligência, a lucidez e a sabedoria, opondo-se às características de aleatoriedade e fatalidade observadas em outros jogos indianos. Sessa inventou um jogo que consistia num tabuleiro com 64 casas e 16 peças em cada lado. Este jogo terá deixado o rajá tão feliz que este disse que o matemático poderia pedir o que desejasse como recompensa. O matemático disse contentar-se com um pagamento em grãos de trigo sobre o tabuleiro: um grão de trigo na primeira casa do tabuleiro, dois grãos de trigo para a segunda casa, quatro para a terceira, e assim por diante, dobrando a quantidade até chegar à sexagésima quarta casa.*

*O Rajá que inicialmente se sentiu ofendido com um pedido que lhe pareceu tão insignificante, insistiu para que Sessa escolhesse uma recompensa mais adequada e valiosa. Mas Sessa foi irreduzível, desejando apenas a recompensa pedida. O Rajá acabou por pedir aos seus matemáticos que calculassem os grãos de trigo necessários para pagar a Sessa. Estes calcularam, calcularam, calcularam e... concluíram não haver nos celeiros de toda a Índia trigo suficiente para atingir a quantidade necessária para pagar a dívida! Nem todo o trigo do mundo seria bastante!<sup>25</sup>*

<sup>24</sup> Peças de xadrez, século XII, expostas na coleção *Heilbrunn Timeline of Art History*. New York: The Metropolitan Museum of Art. <https://www.metmuseum.org/art/collection/search/452204> (Consultado em 23 de julho de 2019).

<sup>25</sup> História escrita com base em diversas fontes. Ver por exemplo, [https://pt.wikipedia.org/wiki/Sessa\\_ibn\\_Daher#cite\\_note-britanica.1823.p.549-1](https://pt.wikipedia.org/wiki/Sessa_ibn_Daher#cite_note-britanica.1823.p.549-1);

O jogo ter-se-á expandido da Índia para a Pérsia, e daqui para o mundo islâmico, aquando da invasão da Pérsia pelos Árabes. Por volta do século X, o jogo chegou à Europa, onde conquistou rapidamente muitos adeptos. Várias alterações foram sendo introduzidas no jogo, tendo o xadrez adquirido a sua atual forma no Século XV. As regras modernas do jogo foram padronizadas no Século XIX, altura em que o jogo atingiu projeção em larga escala. Em 1886 realizou-se o primeiro campeonato mundial de xadrez nos EUA<sup>26</sup>. Já no século XX, em 1924, foi fundada a Federação Internacional de Xadrez (FIDE) em Paris<sup>27</sup>. Os avanços da computação permitiram passar a jogar o jogo também *online* contribuindo para uma maior expansão. Atualmente o jogo de xadrez é um dos jogos mais jogados e que mais adeptos tem.

Vários estudos demonstram os benefícios do jogo de xadrez no desenvolvimento cognitivo e social dos alunos, assim como a melhoria do desempenho escolar.<sup>28</sup> Se por um lado a lenda que está por trás do jogo envolve conceitos matemáticos, despertando a curiosidade do aluno, por outro, o jogo em si envolve raciocínio e estratégia, contribuindo para o desenvolvimento lógico-matemático do aluno. Áreas de interseção da Matemática com o xadrez incluem a lógica, geometria, combinatória, teoria de grafos e teoria de jogos.

## 6. A LENDA DA TORRE DE HANÓI

A torre de Hanói é um jogo inventado em 1883, pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891). Basicamente é um brinquedo constituído por três pinos, num dos quais existe uma torre com vários discos, inicialmente empilhados por tamanhos decrescentes (figura 7). O objetivo é transferir a torre inteira para um dos outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor.

---

<http://jornaljanselmo.blogspot.com/2012/03/estorias-com-matematica.html> (consultados a 23 de julho de 2019).

<sup>26</sup> [https://pt.wikipedia.org/wiki/Campeonato\\_Mundial\\_de\\_Xadrez\\_de\\_1886](https://pt.wikipedia.org/wiki/Campeonato_Mundial_de_Xadrez_de_1886) (consultada a 23 de julho de 2019).

<sup>27</sup> A Federação Internacional de Xadrez (FIDE) foi fundada em 20 de julho de 1924, Paris ([https://pt.wikipedia.org/wiki/Federa%C3%A7%C3%A3o\\_Internacional\\_de\\_Xadrez](https://pt.wikipedia.org/wiki/Federa%C3%A7%C3%A3o_Internacional_de_Xadrez)).

<sup>28</sup> Alexandre António de Almeida RUIZ et al., "Estudo dos efeitos do jogo do xadrez no ensino da matemática nas turmas de sétimos anos da E.E. Dr. José Carlos Braga de Souza em Itanhaém-SP e suas implicações na aprendizagem," *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, Ano 04, Ed. 03, Vol. 08, pp. 81-99, (março de 2019).



Figura 7: Torre de Hanói com 8 discos

De origem desconhecida, uma das versões da *lenda da torre de Hanói* (também conhecida como a *lenda da torre de Brahma*, ou ainda, a *lenda do “fim do mundo”*) deve ter servido de inspiração para a invenção do jogo.

*Segundo um mito indiano, o centro do mundo encontra-se sob a cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. No início dos tempos, Deus colocou nesta cúpula três hastes contendo 64 discos concêntricos de ouro. Também foi criada uma comunidade de monges cuja única tarefa era mover os discos da primeira para a terceira haste. Os monges deveriam cumprir esta tarefa seguindo a regra: apenas um disco poderia ser movido de cada vez e nunca um disco maior poderia ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronar-se-ia e o mundo desapareceria.*

Descansa-nos a Matemática que garante que se a lenda fosse verdadeira, mesmo que os monges deslocassem os discos a um ritmo de um disco por segundo, usando o número mínimo de movimentos possível que é dado por  $2^{64} - 1$  (ou seja, 18.446.744.073.709.551.615 movimentos), seriam necessários  $2^{64} - 1$  segundos para terminarem a sua gigantesca tarefa, o que corresponde a cerca de 42 vezes a idade atual do universo<sup>30</sup>.

As regras do jogo são muito simples e de fácil assimilação, adaptando-se a objetivos de ensino/aprendizagem de níveis de ensino diferentes, desde os primeiros anos do ensino básico até ao ensino universitário. Sendo um jogo muito versátil, com numerosas possibilidades quer didáticas quer lúdicas, o grau de dificuldade depende do número de discos considerados na torre inicial. Permite trabalhar a concentração, o desenvolvimento cognitivo, a socialização e permite passos significativos na abstração Matemática. Pode ser utilizado na forma tradicional com pinos e discos ou, ser jogado como um jogo eletrônico, disponível na internet em muitas plataformas educativas.

<sup>29</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Tower\\_of\\_Hanoi](https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi) (consultada em 23 de julho de 2019).

<sup>30</sup> A idade atual do universo é estimada em  $13,82 \times 10^{12}$  anos.

A torre de Hanói tem ainda sido utilizada como ferramenta de avaliação psicológica, quer no desenvolvimento cognitivo (por exemplo, em alunos com necessidades educativas especiais<sup>31</sup>), quer no desempenho de funções executivas em adultos<sup>32</sup>.

## 7. UMA APLICAÇÃO PARA A SALA DE AULA RECORRENDO AO QUADRADO MÁGICO DE DÜRER

Como referido no final da secção 3, o quadrado mágico é utilizado em diversas áreas da Matemática, podendo constituir um recurso didático para o ensino de várias noções matemáticas. Nesta secção iremos apresentar um exemplo de aplicação em sala de aula, recorrendo ao quadrado mágico de Dürer. Pretende-se, com esta atividade, levar o aluno a realizar uma pesquisa que o permita descobrir certas propriedades das operações aritméticas, nomeadamente a comutatividade e associatividade da adição, bem como alguns conceitos geométricos, de que destacamos a reflexão central, a reflexão axial e a rotação. Esta atividade adequa-se ao 2.º ciclo do ensino básico, podendo ser adaptada para outros níveis de ensino.

### Título da proposta de atividade: Construção do quadrado mágico de Dürer, com ênfase nas transformações geométricas

#### A. O quadrado como figura geométrica

A1. Desenhe um quadrado e assinale os respetivos eixos de simetria.

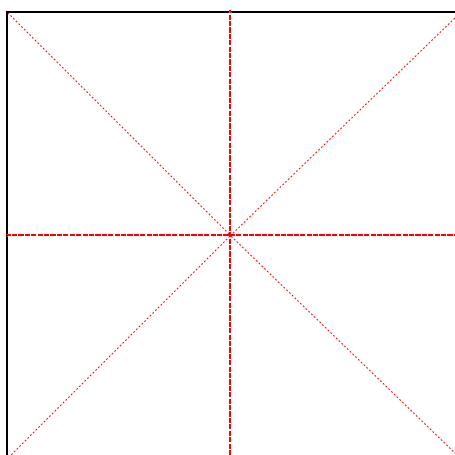


Figura 8: Quadrado e respetivos eixos de simetria

<sup>31</sup> C. Coelho et al., "Torre de Hanói: O espaço Lúdico como Intervenção," in *II Congresso Internacional TIC e Educação* (Lisboa: Universidade de Lisboa, 2018): 1954-1972. <http://ticeduca.ie.ul.pt/atas/pdf/13.pdf>.

<sup>32</sup> Michael Rönnlund et al., "Adult Age Differences in Tower of Hanoi Performance: Influence From Demographic and Cognitive Variables" *Aging, Neuropsychology, and Cognition*, 2001, 8:4,269-283, DOI: 10.1076/anec.8.4.269.5641.

A2. Assinale o ponto de interseção dos eixos de simetria.

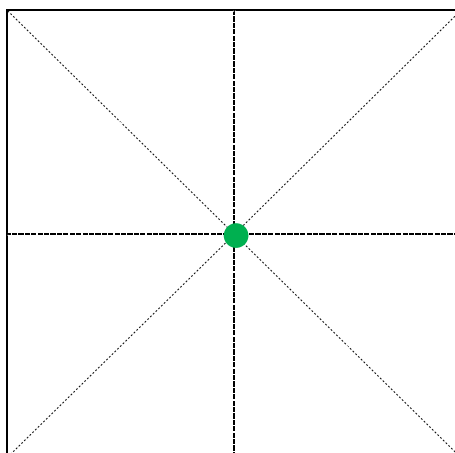


Figura 9: Ponto de interseção dos eixos de simetria

A3. Divida o quadrado que desenhou em 16 quadrados geometricamente iguais

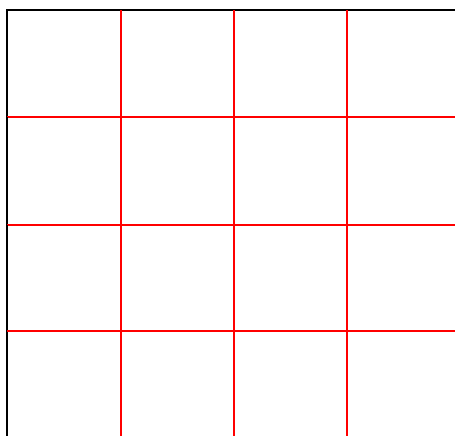


Figura 10: Divisão do quadrado

A4. Disponha em cada um desses quadrados os números de 1 a 16, por ordem crescente e da esquerda para a direita, começando no canto superior esquerdo.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figura 11: Preenchimento do quadrado com números de 1 a 16

**B. Partes de um todo**

B1. Exclua os números que aparecem nas diagonais, obtendo uma “cruz”.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

Figura 12: Disposição em “cruz”

B2. Qual o resultado da soma dos elementos que se dispõem na parte vertical da “cruz”?

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

Figura 13: Elementos em destaque na parte vertical da “cruz”

E na parte horizontal da “cruz”?

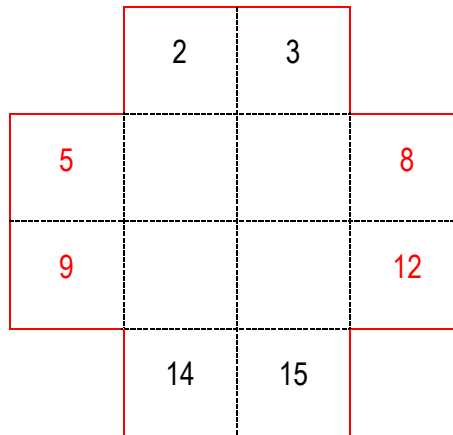


Figura 14: Elementos em destaque na parte horizontal da “cruz”

B3. Deslocando-se no sentido dos ponteiros do relógio:

- Some os primeiros elementos em cada um dos extremos da “cruz”

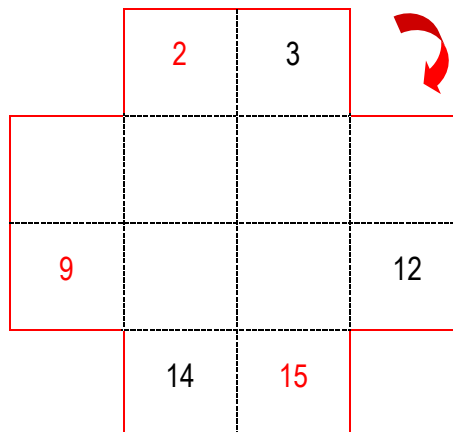


Figura 15: Elementos em destaque nos extremos da “cruz”- primeira posição, sentido dos ponteiros do relógio

- Some os segundos elementos em cada um dos extremos da “cruz”

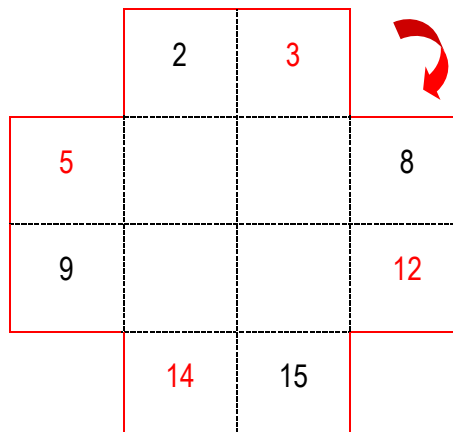


Figura 16: Elementos em destaque nos extremos da “cruz”- segunda posição, sentido dos ponteiros do relógio

B4. Deslocando-se agora no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio:

- Some os segundos elementos em cada um dos extremos da “cruz”;

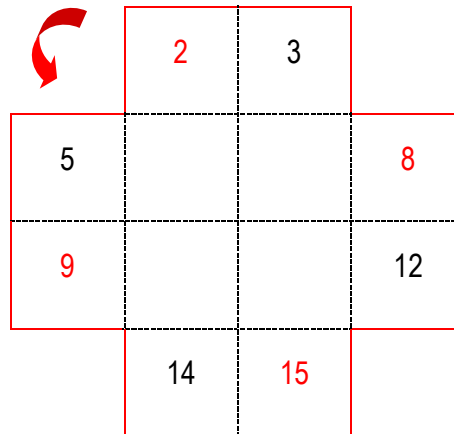


Figura 17: Elementos em destaque nos extremos da “cruz”- segunda posição, sentido contrário ao dos ponteiros do relógio

- Some os primeiros elementos em cada um dos extremos da “cruz”

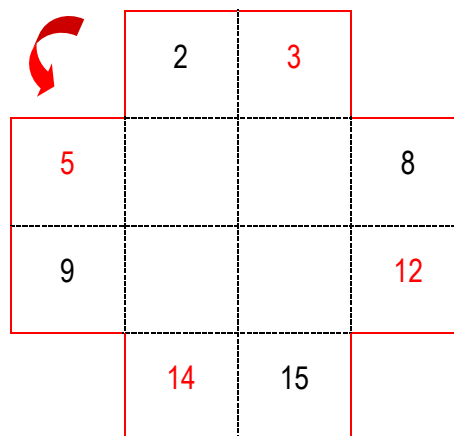


Figura 18: Elementos em destaque nos extremos da “cruz”- primeira posição, sentido contrário ao dos ponteiros do relógio

B5. É relevante a ordem pela qual soma os números em B3 e B4?

Como classifica as propriedades que ficam em evidência nas somas efetuadas em B3 e B4.

B6. Obtém-se os cantos do quadrado (figura 19), permutando entre si os elementos 1 e 16, assim como os elementos 4 e 13 do quadrado da figura 11.



16	2	3	13
5			8
9			12
4	14	15	1

Figura 19: Números nos cantos do quadrado

Em alternativa, o professor pode fazer menção às designações de diagonal principal e diagonal secundária, aproveitando este facto para se referir ao procedimento anterior como permuta dos extremos na diagonal principal e permuta dos extremos na diagonal secundária.

**B7.** Indique e caracterize as transformações geométricas envolvidas no procedimento anterior?

Faça uma ilustração de cada uma das transformações geométricas que indicou.

**B8.** Na figura obtida e concentrando-se apenas nas colunas 2 e 3 do quadrado, proceda a uma simetria axial, relativamente ao eixo de simetria vertical do quadrado.

16	3	2	13
5			8
9			12
4	15	14	1

Figura 20: Resultado da simetria axial, aplicada às colunas 2 e 3, relativamente ao eixo de simetria vertical

**B9.** Considere os quadrados centrais (interseção da parte vertical com a parte horizontal da “cruz”), assinalados a vermelho, na figura 21:

	6	7	
	10	11	

**A**

16	3	2	13
5			8
9			12
4	15	14	1

**B**

Figura 21: A – quadrado central da figura 11; B – figura 20 onde se assinalou o quadrado central (ainda não preenchido).

Para obter os elementos em falta na figura 21B – elementos no quadrado central assinalado a vermelho - considere uma reflexão axial relativamente ao eixo de simetria horizontal, no quadrado central assinalado a vermelho da figura 21A.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 22: Elementos em destaque no quadrado central, obtido como interseção da parte horizontal da “cruz” com a vertical da “cruz”

**B10.** Efetue a soma dos elementos obtidos em B9.

**B11.** Efetue a soma dos números em cada linha, em cada coluna e em cada uma das diagonais.

**B12.** (i) Considere os eixos de simetria horizontal e vertical do quadrado.

(ii) Em quantos quadrantes se divide o quadrado inicial, mediante os eixos de simetria considerados? Assinale-os.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 23: Quadrado dividido em quatro quadrantes

(iii) Efetue a soma dos números em cada um dos quadrantes, conforme figura 23.

Certamente verificou que as somas efetuadas são constantes. Parabéns! Obteve um quadrado mágico, cuja constante mágica é 34!

Mais ainda, obteve um quadrado mágico conhecido como o quadrado mágico “mais perfeito” de todos, o quadrado mágico de Dürer (ver secção 3). Além do mais, este quadrado mágico tem as seguintes particularidades:

Soma dos números por linha = 34 (ver B11)

Soma dos números por coluna = 34 (ver B11)

Soma dos números por diagonal = 34 (ver B11)

Soma dos números nos cantos do quadrado = 34 (ver B6)

Soma dos números apresentados no quadrado interno = 34 (ver B10)

Soma dos números por quadrante = 34 (ver B12)

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mistério, magia, abstração, estética, eficiência e harmonia são ingredientes das histórias da História da Matemática em geral, e em particular das cinco histórias que aqui trouxemos. Frutos da inspiração e da criatividade humana, reproduzem originalidade, beleza e utilidade, num contexto de época que não se encerra. Antes, perpetuam-se, dando origem a novas formas e invenções, projetando-se no futuro. São deleite para o espírito, que gosta de entretenimento e de desafios, enquanto, simultaneamente, estimulam o pensamento e a imaginação.

Por tudo isto, acreditamos que o professor de Matemática também deve ser um contador de Estórias da História da Matemática. As estórias são uma forma lúdica de fazer chegar conhecimento e cultura aos alunos e contribuem para desenvolver a capacidade de comunicar Matemática e de resolver e interpretar problemas. Conhecer estas e outras estórias ligadas, direta ou indiretamente, à Matemática lança desafios para o futuro, sendo, além do mais, um fator motivador da aprendizagem. A diversidade de atividades que podem ser desenvolvidas a partir destas estórias são uma mais-valia quer para o aluno quer para o professor/educador. Na verdade são fonte de experiências significativas para a aprendizagem, constituindo também uma ferramenta preciosa que alia o aspeto lúdico ao desenvolvimento da intuição matemática.

## 9. AGRADECIMENTOS

Elza Amaral e Ângela Macedo foram financiadas por Fundos Portugueses através da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia - no âmbito do Projeto UID / MAT / 00013/2013 e Elisete Correia foi parcialmente financiada por Fundos Portugueses através da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do Projeto UID / Multi / 04621/2019.

### SOBRE OS AUTORES:

Sandra Ricardo  
Departamento de Matemática  
UTAD, Vila Real, Portugal  
ISR - UC  
[sricardo@utad.pt](mailto:sricardo@utad.pt)

Elza Amaral  
Departamento de Matemática  
UTAD, Vila Real, Portugal  
CMAT-Polo UTAD  
[eamaral@utad.pt](mailto:eamaral@utad.pt)

Ângela Macedo  
Departamento de Matemática  
UTAD, Vila Real, Portugal  
CMAT-Polo UTAD  
[amacedo@utad.pt](mailto:amacedo@utad.pt)

Elisete Correia  
Departamento de Matemática  
UTAD, Vila Real, Portugal  
CEMAT/IST-ID  
[ecorreia@utad.pt](mailto:ecorreia@utad.pt)