História da
Ciência e Ensino
Construindo interfaces

http://dx.doi.org/10.23925/2178-2911.2024v29p83-100

Conjunto, correspondência, número cardinal e muito mais: o capítulo VII do livro "As Ideias Fundamentais da Matemática" em comparação com seus manuscritos

Rodrigo Rafael Gomes

Resumo

Este trabalho aborda o capítulo VII de "As ideias fundamentais da matemática", livro de autoria do matemático, engenheiro e astrônomo brasileiro Manuel Amoroso Costa (1885-1928), publicado em 1929. O capítulo publicado apresenta os conceitos de conjunto, correspondência, número cardinal e conjunto infinito, mas os manuscritos do texto revelam muito mais: assuntos que seriam tratados e referências consultadas pelo autor foram posteriormente omitidos, o capítulo figuraria originalmente em uma ordem diferente da que ocupa na versão que veio a público e as indecisões do autor que, invisíveis no livro, produziram diversas rasuras no documento. Todos esses aspectos do processo de produção do texto, em sua interrelação com as ideias matemáticas nele contidas, são discutidas neste artigo, que também apresenta transcrições de alguns fragmentos dos dois rascunhos que Amoroso Costa produziu para o livro.

Palavras-chave: *história da matemática no Brasil, manuscritos de cientistas, arquivos digitais, teoria dos conjuntos.*

Abstract

This work addresses chapter VII of "The fundamental ideas of mathematics", a book written by the brazilian mathematician, engineer and astronomer Manuel Amoroso Costa (1885-1928) and published in 1929. The published chapter presents the concepts of set, correspondence, cardinal number and infinite set, but the manuscripts of the text reveal much more: subjects that would be treated and references consulted by the author were later omitted, the chapter would originally appear in a different order from that in the book, the author's indecisions that produced several erasures in the document. All these aspects of the text production process, in their interrelationship with the mathematical ideas contained therein, are discussed in this article, which also presents transcriptions of some fragments of the two drafts that Amoroso Costa produced for the book.

Keywords: *history of mathematics in Brazil, scientists' manuscripts, digital files, set theory.*

INTRODUÇÃO

No início de 1929, aparecia no Brasil o livro *As Ideias Fundamentais da Matemática*, de autoria do matemático, engenheiro e astrônomo Manuel Amoroso Costa, falecido no final do ano anterior, aos 43 anos, em um acidente aéreo.

Ao longo dos dezenove capítulos que compõem seu livro, Amoroso Costa busca expor, em linhas gerais, as diretrizes metodológicas e os conceitos (por ele considerados) fundamentais da matemática de sua época, entre eles a teoria dos conjuntos. Embora seja um tema que perpasse o livro como um todo, os elementos essenciais da teoria dos conjuntos são expostos no capítulo VII, que – assim como outras partes da obra publicada –, resultou de um longo processo de elaboração, conforme o atestam os manuscritos de próprio punho da obra, que hoje compõem o Arquivo de História da Ciência do Museu de Astronomia e Ciências Afins (MAST), no Rio de Janeiro.

O presente artigo discute o conteúdo de tal capítulo, bem como de outras passagens relacionadas ao tema no livro, à luz dos manuscritos deste. Amoroso Costa produziu dois rascunhos para o livro, nenhum deles idêntico à publicação, que serão referidos aqui como rascunho 1 e rascunho 2 (ou versão 1 e versão 2). Os documentos consultados pertencem à versão digital do arquivo pessoal de Amoroso Costa, que integram a base de dados digital do acervo do MAST, disponível para acesso no site do museu[1].

O CAPÍTULO VII E SEUS MANUSCRITOS

As noções de conjunto, correspondência e número cardinal[2] é o título do capítulo VII do livro de Amoroso Costa, mas, originalmente, o capítulo denominar-se-ia *As noções de conjunto e número cardinal*. A mudança sugere, à primeira vista, a elevação do status do conceito de *correspondência* ao mesmo patamar dos de *conjunto* e *número cardinal*, à medida que o trabalho de escrita convergiu para a versão que veio a público. O reconhecimento do caráter fundamental daquele conceito, porém, encontra-se registrado no rascunho 1: "outra noção já encontrada em lógica, e que desempenha um papel primordial em matemática é a noção de *correspondência*"[3]. No livro publicado, o adjetivo "primordial" foi trocado por "capital", assim o acréscimo ao título parece ser apenas a manifestação de uma condição que já era reconhecida pelo autor. Além disso, o título final remete a um capítulo do livro *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry* (1917), de John W. Young. Neste livro, mencionado no rascunho 1, há um capítulo denominado *Classe. Correspondência. Número*.

As três primeiras seções do capítulo dizem respeito, na ordem em que aparecem no título, aos três conceitos acima, e foi assim desde a primeira versão do texto. Uma quarta seção, sobre conjuntos finitos e infinitos, também presente desde a redação original, completa o capítulo. Falarei sobre cada uma delas.

Uma referência que Amoroso Costa certamente considerou para a elaboração de seu texto, conforme indicações presentes no rascunho 1 do capítulo VII, é o trabalho *The Continuum as a Type of Order*, que o matemático estadunidense Edward V. Huntington publicara em 1905, em duas partes, no *Annals of Mathematics*.

Seguindo de perto a parte inicial da exposição de Huntington, Amoroso Costa explica que um conjunto é determinado por uma condição que cada entidade, no universo das coisas consideradas, deve ou não satisfazer, e que o indivíduo que satisfaz a condição é um elemento do conjunto. Silva[4] vê, nessa explicação, uma introdução "meio-camuflada" do conceito de conjunto universo por Amoroso Costa, mas

[1] No seguinte endereço: http://zenith.mast.br.
[2] Na verdade, Amoroso Costa usa o termo "número cardeal", portanto, a rigor, o título do capítulo é *As noções de conjunto, correspondência e número cardeal*. Porém, tendo em vista que "cardinal" é sinônimo de "cardeal", emprego aqui a primeira por ser a mais comumente utilizada atualmente.
[3] Manuel A. Costa, *Manuscritos do trabalho 'Idéias Fundamentais da Matemática'* (Rio de Janeiro: MAST, s.d.), 124, http://zenith.mast.br (acessado em 17 de julho de 2022).
[4] Circe M. S. da Silva, "No paraíso dos símbolos: surgimento da lógica e teoria dos conjuntos no Brasil", in *Filosofia, Lógica e Existência: homenagem a Antonio Carlos Kroeff Soares*, org. Luiz C. Bombassaro & Jayme Paviani (Caxias do Sul: EDUCS, 1997).

Huntington (em cujo trabalho o brasileiro se baseou) não diz que o que ele chama de *universo considerado* (*universe considered*) é, ele próprio, um conjunto (ou, em sua terminologia, uma classe).

Diferente do americano, que emprega a palavra "classe", o brasileiro opta pelo termo "conjunto" – que designa um conceito que, segundo ele, se confunde com a noção lógica de classe. Contudo, Amoroso Costa não oferece uma explicação sobre o que, na sua concepção, distingue os dois conceitos. Ele apenas observa, no capítulo V, tomando como referência a lógica simbólica de Whitehead e Russell, que uma classe é a "reunião de todos os indivíduos x que satisfazem uma dada função proposicional φx".[5]

Nosso autor também caracteriza a ideia de parte de um conjunto de uma outra maneira: enquanto Huntington estabelece uma distinção entre parte e subclasse (parte é uma subclasse que não coincide com a classe), Amoroso Costa define que um conjunto é *parte integrante* de outro quando todos os elementos do primeiro pertencem ao segundo,[6] ou seja, a parte, em sua concepção, pode coincidir com o conjunto.

Embora tenha registrado no verso de uma das folhas da versão 1 do capítulo VII a definição de classe vazia – que Huntington, a propósito, apresenta em seu artigo –, Amoroso Costa preferiu não a incluir nesse capítulo. A definição ficou apenas no capítulo V, no contexto da exposição sobre a lógica russelliana, como a classe correspondente a uma função proposicional φx que é sempre falsa.[7]

O produto e a soma de classes, temas também tratados no capítulo V, são reapresentados no capítulo VII, segundo a terminologia dos conjuntos. Com um viés que remete à álgebra da lógica de Boole, Amoroso Costa explica que o produto e a soma lógica de dois conjuntos são determinados quando os conjuntos possuem ou não uma parte comum. No primeiro caso, o produto lógico é a parte comum dos dois conjuntos, no segundo, a soma lógica é o conjunto de todos os elementos de ambos os conjuntos.[8] A intenção originalmente era indicar pelas notações $a \cap b$ e $a \cup b$, respectivamente, o produto e a soma de dois conjuntos a e b, mas esse simbolismo foi removido já no segundo rascunho do livro, a partir do qual também passam a ser utilizadas letras maiúsculas para designar genericamente conjuntos. A primeira dessas mudanças não justifica, pois, a observação de Silva[9] de que, nesse capítulo, "nada é comentado sobre as operações de união e intersecção de conjuntos".

Passando à seção seguinte, Amoroso Costa apresenta a noção de correspondência. "Fazer corresponder a um antecedente x um consequente y", diz, "é uma operação mental elementar, cuja significação se apreende imediatamente"[10]. Os termos "antecedente" e "consequente" remetem à teoria russelliana das relações, explicada em capítulo anterior. A correspondência nada mais é do que uma espécie

[5] Manuel A. Costa. *As Idéas Fundamentaes da Mathematica* (Rio de Janeiro: Pimenta de Mello, 1929), 66.
[6] Ibid., 86.
[7] Ibid., 66.
[8] Ibid., 86.
[9] Silva, 154.
[10] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 86.

de relação, segundo registrou na versão 1 do capítulo VII: "reduzida ao caso mais simples, a correspondência entre os indivíduos k e l é uma relação que não definiremos, mas que se pode esclarecer: estabelecer uma correspondência entre k e l é até certo ponto dizer que a ideia de k sugere a de l". [11] Nota-se, nesse fragmento, influência direta do artigo de H. Schubert, J. Tannery e J. Molk publicado no primeiro volume do tomo 1 da *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*[12] e consultado por Amoroso Costa[13]:

> Dizer que um objeto de uma coleção corresponde a um determinado objeto de outra coleção é dizer que o pensamento do objeto da primeira coleção desperta o pensamento do objeto da segunda coleção. Se, reciprocamente, é o pensamento do mesmo objeto da primeira coleção que apenas desperta o pensamento desse objeto específico da segunda coleção, diremos desses dois objetos que eles correspondem entre si. [14]

Uma correspondência não precisa existir apenas entre um antecedente e um consequente, pode também ser estabelecida entre um antecedente e vários consequentes ou entre vários antecedentes e vários consequentes, os diversos tipos sendo caracterizados pelas convenientes expressões da língua inglesa *one-one*, *one-many* e *many-many*, explica Amoroso Costa.[15] Encontram-se exemplos dessas relações no rascunho 1 do capítulo VII:

> [...] pode-se distinguir entre a correspondência *uniforme* (*many-one*), *couniforme* (*one-many*), e *biuniforme* (*one-one*). (Exemplo: sejam antecedentes os maridos, consequentes as mulheres; a poliandria, poligamia e a monogamia ilustram os três casos...)[16] A correspondência biuniforme se chama também *unívoca e recíproca*, ou ainda perfeita. [17]

[11] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 123.

[12] Editada por Jules Molk, a *Encyclopédie* era a versão francesa da *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, organizada, na Alemanha, por Felix C. Klein e Wilhelm F. Meyer. O tomo 1, volume 1, da *Encyclopédie* foi publicado originalmente em quatro fascículos entre os anos de 1904 e 1909.

[13] O artigo é referido em duas passagens do rascunho 1, na primeira vez como *Encycl. Pr. arith.*, e na segunda como *Encycl. Arith.* As duas expressões constituem abreviaturas para, respectivamente, o título da obra (*Encyclopédie*) e o título do artigo (*Principes Fondamentaux de l'Arithmétique*).

[14] Hermann Schubert, Jules Tannery & Jules Molk, "Principes Fondamentaux de l'Arithmétique", in *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. 1, vol. 1, ed. Jules Molk (reimpressão, Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1992), 2.

[15] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 86.

[16] É possível que esses exemplos tenham sido inspirados em Russell, que, em *Principles of Mathematics*, ao explicar que duas classes possuem o mesmo número de elementos quando é possível estabelecer uma correspondência um-a-um entre os membros dessas classes, fornece o seguinte exemplo: se, em uma comunidade, todos os homens e mulheres são casados, e a *poligamia* e a *poliandria* são proibidos, então a classe dos homens possui o mesmo número da de mulheres.

[17] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 125.

Os significados dos termos "uniforme", "couniforme" e "biuniforme" são descritos no capítulo V (os dois últimos termos foram registrados sem hífen nos rascunhos, mas receberam-no no livro): "uniforme, quando a vários antecedentes corresponde um e único consequente; co-uniforme, quando a conversa é uniforme; bi-uniforme, quando a relação é ao mesmo tempo uniforme e co-uniforme"[18]. A "conversa" de uma relação, mencionada na definição de couniforme, é um aportuguesamento da palavra inglesa "converse", utilizada por Russell (e ainda em uso na língua inglesa), e corresponde ao que chamamos atualmente no Brasil de relação inversa. Por outro lado, a ideia de relação uniforme, nos termos colocados por Amoroso Costa, não corresponde exatamente ao tipo de relação que Russell denomina "many-one" (e que chamamos de relação "unívoca"). Pois se a vários antecedentes corresponde um único consequente (caso em que a relação é uniforme), isso implica que a cada antecedente corresponde um único consequente (quando então a relação é unívoca), mas a recíproca não é verdadeira. De fato, uma relação biunívoca, que é um caso particular de relação unívoca, não é uniforme, pois a cada consequente não está associado mais do que um antecedente, ou seja, não há "vários" antecedentes ligados a um consequente. Mas é justamente uma correspondência biunívoca que Amoroso Costa tem em mente com o termo "biuniforme", assim sua definição é ambígua.

Também é dito, no fragmento acima, que as expressões "correspondência unívoca e recíproca" e "correspondência perfeita" podem ser usadas no lugar de "correspondência biuniforme". A primeira delas provavelmente foi emprestada de *unique and reciprocal correspondence*, que Russell emprega em *Principles of Mathematics*[19]. Embora Amoroso Costa a tenha omitido na versão publicada do capítulo V, essa terminologia reaparece no capítulo XVII: "A todo o segmento *corresponde* [...], *univocamente*, um número real, e a *reciprocidade dessa correspondência é afirmada*, como já vimos, por um postulado como o de Cantor-Dedekind".[20]

A denominação "relação perfeita", que, sem motivo aparente, foi riscada na primeira versão do texto (Figura 1), permaneceu nas duas últimas seções do capítulo VII, sendo usada várias vezes. O termo "perfeita", que procede do francês *parfaite*, empregado por Tannery e Molk,[21] é utilizado por Amoroso Costa logo no início da terceira seção para apresentar a definição de equivalência de conjuntos: "Estabelecer entre dois conjuntos uma correspondência *perfeita*, é fazer corresponder, a cada elemento de um deles, um e

---

[18] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 68.

[19] "Measurement of magnitudes is, in its most general sense, any method by which a *unique and reciprocal correspondence* is established between all or some of the magnitudes of a kind and all or some of the numbers, integral, rational, or real, as the case may be". Bertrand Russell. *Principles of mathematics* (reimpressão, Abingdon: Routledge, 2010), 176, grifo meu.

[20] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 211.

[21] Schubert, Tannery & Molk, "Principes Fondamentaux de l'Arithmétique". Embora Schubert seja o único autor do artigo original da versão alemã, foram Tannery e Molk que o adaptaram para a edição francesa.

único elemento do outro, com reciprocidade. Quando semelhante correspondência é possível, diz-se que os dois conjuntos são *equivalentes*”.[22]

Figura 1: Expressão riscada por Amoroso Costa em seu manuscrito.[23]

Ainda que o conceito de equivalência de conjuntos abra a discussão da terceira seção do capítulo VII, ele é apresentado no livro bem antes. Ao abordar por meio de exemplos, no capítulo II, as definições por abstração, Amoroso Costa explica que outro modo de exprimir que duas classes são equivalentes é dizer que possuem o mesmo número cardinal[24]. Então, assim como a ideia de direção deriva da relação de paralelismo de retas (duas retas paralelas têm a mesma direção), a noção de número cardinal, decorre, por abstração, da relação de equivalência de conjuntos.

Retomando essa discussão no capítulo VII, ele observa que a definição por abstração, da qual a formulação acima de número cardinal é um caso particular, possui o defeito de não mostrar a unicidade do objeto definido, pois “nada nos assegura que os conjuntos equivalentes têm apenas uma propriedade em comum; e resta então saber, de todas as propriedades que lhes são comuns, qual é a que nós chamamos número”.[25] Isso é resolvido, diz Amoroso Costa, adotando-se a definição nominal de Russell, que estabelece que o número cardinal de um conjunto A é o conjunto de A e de todos os conjuntos equivalentes a A. [26]

Embora a definição nominal vá de encontro ao nosso hábito de considerar o número uma propriedade dos conjuntos (e não um conjunto), observa, o fato de os conjuntos equivalentes entre si possuírem uma propriedade em comum significa que tais conjuntos são elementos de um conjunto determinado por essa propriedade. Amoroso Costa pretendia, nessa parte, apresentar um exemplo, que não foi colocado no livro. Ele se encontra formulado da seguinte maneira no rascunho 2:

> Sejam, por exemplo, coleções de objetos vermelhos; é indiferente dizer que *vermelho* é a propriedade comum a esses objetos, ou que *vermelho* é a coleção total formada por

[22] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 86-7, grifos do autor.
[23] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 125.
[24] Isso explica o acréscimo, em relação à versão 2 do texto, de “como já vimos” em: “A ideia de número cardinal resulta, como já vimos, da consideração dos conjuntos equivalentes”. Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 87.
[25] Ibid.
[26] Sobre esse assunto, Amoroso Costa copiou vários trechos do livro de Russel, *Principles of Mathematics*, ao longo do verso de duas folhas do rascunho 1.

> essas coleções. Pela mesma visão, *cinco* é o conjunto de todos os conjuntos equivalentes ao dos tipos dos poliedros regulares. [27]

Não há nos manuscritos qualquer indício dos motivos que levaram Amoroso Costa a retirar a explicação acima do texto final. O exemplo é interessante porque a cor não é uma propriedade dos conjuntos de objetos vermelhos, mas dos objetos que formam esses conjuntos. Seria então esse fragmento um vestígio de que nosso autor estivesse imbuído, naquele momento, de uma concepção "mereológica" de conjunto?

A definição de produto lógico de conjuntos apresentada no capítulo VII sugere, de fato, que Amoroso Costa visse os conjuntos como agregados, isto é, como entidades sujeitas a relações do tipo parte-todo.[28] Entre essas relações, não se encontra uma distinção entre elemento e subconjunto, e não há conjunto sem elementos.[29] A parte comum de duas coleções é, sob esse ponto de vista, a pluralidade dos elementos que essas coleções possuem em comum, não havendo parte comum se nenhum objeto está simultaneamente em ambas as coleções.

Pensando em um caso particular, as árvores que compõem uma floresta podem ser entendidas como antecedentes em uma relação parte-todo com a última, considerada uma totalidade cujas partes são árvores. Faz sentido dizer, sob esse ponto de vista, que a coleção (agregado) das árvores, se identificada com a própria floresta, possui um atributo em comum com seus elementos (partes): a cor verde. Dentro dessa linha de raciocínio, o exemplo fornecido por Amoroso Costa em seus rascunhos está longe de ser absurdo. O caráter parte-todo da situação é explícito: se as árvores forem todas removidas, não haverá mais floresta – ou seja, não há coleção sem os elementos –, e uma coleção formada por uma única árvore (embora não possa ser considerada uma floresta ainda é uma coleção) será identificada com seu único elemento, isto é, com a própria árvore.

Na perspectiva "conjuntista", por outro lado, uma coleção (conjunto) não se confunde com a pluralidade de seus elementos (um conjunto unitário, por exemplo, é algo diferente do único elemento que contém). O produto lógico de dois conjuntos é sempre possível, pois mesmo que dois conjuntos não compartilhem elementos, seu produto lógico ainda é um conjunto (conjunto vazio). Como, aqui, as relações

---

[27] Manuel A. Costa, *Manuscritos do trabalho 'Sobre a Concepção da Matemática Pura'* (Rio de Janeiro: MAST, s.d.), 105, grifos do autor, http://zenith.mast.br (acessado em 17 de julho de 2022).

[28] Grattan-Guinness distingue dois modos de lidar com coleções na pré-história da lógica matemática, no século XIX: um baseado na perspectiva parte-todo e o outro, na da teoria dos conjuntos. Ivor Grattan-Guinness, *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel* (Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2000).

[29] Convém observar que não foi antes do final do século XIX que foi explicitada a distinção entre pertinência e inclusão. Michael Potter, *Set Theory and its Philosophy: A Critical Introduction* (New York: Oxford University Press, 2004).

de inclusão e pertinência não se confundem, dois conjuntos que não têm nenhum elemento em comum ainda possuem uma parte (subconjunto) comum.

Embora a menção ao conjunto dos tipos dos poliedros regulares na citação anterior também tenha sido removida da terceira seção do capítulo VII, ela reaparece no início da seção seguinte, enquanto exemplo de coleção finita. Mas o adjetivo "conjunto", explica Amoroso Costa, não se restringe a coleções desse tipo (de um número finito de elementos), ele também se aplica às coleções "que compreendem uma infinidade de elementos – como a das retas de um plano".[30]

Seguramente inspirado no artigo da *Encyclopédie*, Amoroso Costa então discute como a noção de conjunto finito pode ser definida negativamente a partir da de conjunto infinito,[31] considerando a propriedade fundamental estabelecida por Bolzano em *Paradoxen des Unendlichen* (1851),[32] a saber, que um conjunto infinito pode ser colocado em correspondência biunívoca com uma parte de si mesmo. "Como essa propriedade caracteriza os conjuntos infinitos", diz, "os conjuntos finitos serão definidos negativamente. Diremos que um conjunto é finito, quando não existe nele uma parte que se lhe possa fazer corresponder perfeitamente".[33] E embora proceder assim pareça "uma inversão de sentido", escreveu na versão 1 do capítulo VII, "e que o conjunto finito deveria ser definido em primeiro lugar; do ponto de vista lógico, não há porém precedência absoluta".[34]

Olhando para o rascunho 2, vê-se o quanto nosso autor estava indeciso quanto à redação dessa parte, que terminou sendo cortada[35]: "Pode parecer que se procede aqui em sentido contrário ao que seria natural, mas do ponto de vista lógico não há razão alguma para que a definição dos conjuntos finitos deva preceder a dos infinitos". "É como se faz habitualmente", conclui, depois de riscar "É apenas por um hábito de espírito que nós assim fazemos" (Figura 2).

[30] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 88.

[31] Uma coleção pode ser *finita* ou *infinita*. É bastante difícil definir estes dois termos. Se olharmos para o significado do primeiro conforme nos é dado pela experiência, podemos olhar para o segundo como sendo definido negativamente. Uma coleção finita não pode ter o mesmo número que uma de suas partes; pelo contrário, podemos estabelecer uma correspondência perfeita entre uma coleção infinita e uma das suas partes, de modo que, segundo a definição anterior, a coleção (infinita) tenha o mesmo número que uma das suas partes. Nada nos impede de considerar esta última proposição como contendo uma *definição positiva* do termo infinito: *Uma coleção é infinita quando existe uma parte desta coleção que lhe corresponde perfeitamente*; mas então o termo finito é definido negativamente: *Uma coleção é finita quando não há nenhuma parte dessa coleção que lhe corresponda perfeitamente*. Schubert, Tannery & Molk, "Principes Fondamentaux de l'Arithmétique", 2-3, grifos dos autores.

[32] A obra de Bolzano é mencionada no artigo de Huntington e no da *Encyclopédie*.

[33] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 89.

[34] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 129.

[35] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 107-8.

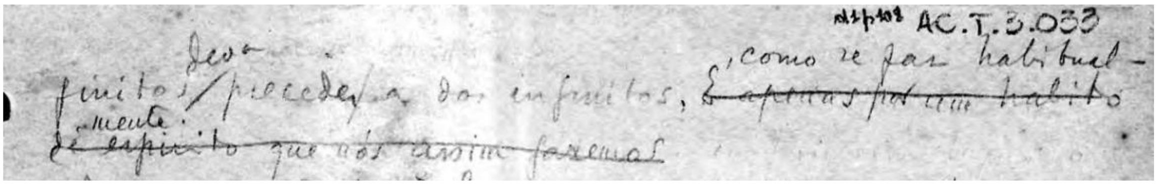

Figura 2: Marcas de trabalho de Amoroso Costa em seu manuscrito.[36]

Para ilustrar a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, assinala Amoroso Costa, se pode encontrar exemplos aritméticos ou geométricos muito simples. Do primeiro tipo, ele menciona a correspondência (biunívoca) que a cada número real n do intervalo $[0,1]$ associa o número $\frac{n}{2}$ do intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, e do segundo, genericamente, que "de modo análogo estabeleceríamos uma correspondência perfeita entre os pontos de um segmento dado e os pontos de outro segmento qualquer, contido ou não no primeiro".[37]

O exemplo aritmético mencionado acima está no texto do rascunho 2, que nada diz do caso geométrico, sobre o qual há algumas anotações no verso de uma das folhas que compõem o rascunho 1. Essas anotações dizem respeito a um exemplo de Huntington, que John W. Young explica em detalhes no livro *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*, já mencionado. Em seu artigo, Huntington assinala ser possível estabelecer uma correspondência um-a-um entre a classe de pontos de um segmento AB e a classe de pontos de um segmento CD contido em AB, pondo essas duas classes em correspondência um-a-um com a classe dos pontos de um segmento auxiliar HK, conforme a Figura 3:

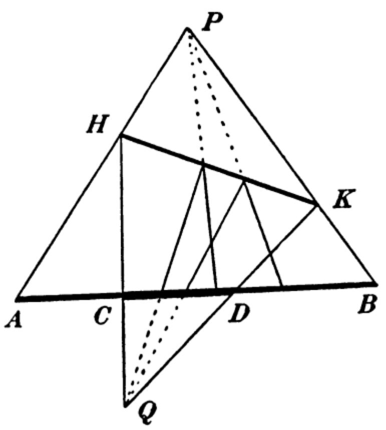

Figura 3: Imagem fornecida por Huntington em seu exemplo.[38]

[36] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 108.
[37] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 89.
[38] Edward V. Huntington, "The Continuum as a Type of Order: An Exposition of the Modern Theory", *Annals of Mathematics* 6, nº 4 (jul. 1905): 155.

A figura não visa somente ilustrar a construção, ela mesma é parte da construção sugerida, em linhas gerais, por Huntington, que, aparentemente, não desejava desviar-se da discussão principal de seu texto fornecendo detalhes. Coube a Young fazê-lo no próprio livro, ao explicar como os pontos de um segmento AB podem ser colocados em correspondência biunívoca com os pontos de um segmento $A'B'$. Amoroso Costa seguiu de perto essa exposição,[39] tendo então registrado:

> Sejam dois segmentos de retas AB e $A'B'$, coplanares mas não situados sobre a mesma reta; O o ponto de intersecção das retas AA' e BB' (as quais podem aliás ser paralelas). A cada ponto P de AB corresponde o ponto P' de $A'B'$, que está sobre a reta PO. Assim, estabelece-se uma correspondência perfeita entre o conjunto de pontos de AB e o conjunto de pontos de $A'B'$. [40]

A Figura 4 ilustra a explicação acima. Note que o segmento $A'B'$ faz o papel do segmento HK da "construção" de Huntington:

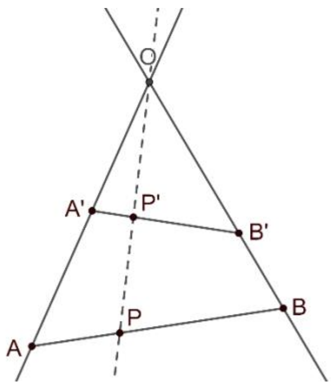

Figura 4: Correspondência um-a-um entre os segmentos AB e $A'B'$, conforme Amoroso Costa.[41]

Amoroso Costa admite, na passagem anterior, que as retas AA' e BB' podem ser paralelas, mas não acrescenta, como Young o faz, que, nesse caso, "a reta PO" deve ser substituída por "reta paralela a AA' que passa por P", pois não haverá ponto de intersecção entre AA' e BB'. Dessa construção, assinala Young, segue que as classes de pontos de um segmento AB e de um segmento contido em AB possuem

[39] Eis a explicação de Young: "seja O o ponto de intersecção das retas AA' e BB'. Se, então, a qualquer ponto P de AB fizermos corresponder o ponto P' de $A'B'$ que está sobre a reta OP, estabelecemos uma correspondência do tipo desejado entre a classe de pontos do segmento AB e a classe de pontos no segmento $A'B'$". John W. Young, *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry* (New York: The Macmillan Company, 1927), 61.
[40] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 124.
[41] Elaborado pelo autor deste trabalho.

o mesmo número cardinal; basta, para tanto, que a mesma correspondência feita entre AB e $A'B'$ seja estabelecida entre $A'B'$ e uma parte de AB.[42] "Tomando em seguida um ponto O'", escreveu por sua vez Amoroso Costa, "pode-se estabelecer uma correspondência perfeita entre os pontos de $A'B'$ e os pontos de um segmento $A''B''$ de AB".[43] [44] Embora não tenha explicitado que O' é ponto de intersecção das retas $A'A''$ e $B'B''$, isso é indicado em um desenho, que emprestou do livro de Young (Figura 5).

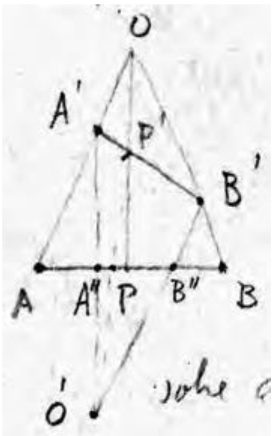

Figura 5: Desenho feito por Amoroso Costa a partir de figura do livro de Young.[45]

Faltou Amoroso Costa concluir que a transitividade da relação de equivalência de conjuntos conduz à conclusão de que o conjunto dos pontos do segmento AB é equivalente a uma parte sua, porém, de qualquer modo, o exemplo não pertence à discussão principal. Não é certo, portanto, que o estivesse considerando incluir em seu livro.

Em relação ao exemplo acima, ele ainda acrescentou em suas notas que ele "se pode representar aritmeticamente", mas não se encontra indício algum na versão seguinte do capítulo VII de conexão entre tal exemplo e o que o levou ao caso particular efetivamente fornecido no livro, que não tem relação com o exemplo aritmético encontrado em Huntington e em Young.[46]

O QUE FICOU DE FORA DO CAPÍTULO VII: PARTES INÉDITAS

Quando escreveu as primeiras versões de seu livro, Amoroso Costa pensava em uma organização diferente daquela que encontramos na publicação. Nesta, o capítulo *As noções de conjunto, correspondência e número cardinal* está entre os capítulos *VI - A evolução histórica da noção de número* e

[42] Young, *Lectures on Fundamental Concepts*.
[43] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 124.
[44] O segmento $A''B''$ corresponde, assim, ao segmento CD da imagem fornecida por Huntington, e o ponto O', a Q.
[45] Ibid.
[46] Tal exemplo é o da correspondência (biunívoca) entre inteiros positivos e inteiros positivos pares.

VIII - A generalização algébrica da noção de número, mas nos rascunhos ele vem após esses dois capítulos[47].

Essa mudança ensejou alterações na própria estrutura do capítulo VII (antes capítulo VIII). No rascunho 2 do capítulo, encontra-se a seguinte introdução, que não foi inserida no livro:

> Os dois capítulos precedentes devem ser considerados como de introdução ao estudo mais sistemático que vamos agora iniciar. A noção de número apareceu-nos sucessivamente no seu desenvolvimento histórico e na sua generalização algébrica. Um terceiro ponto de vista é ainda possível, no qual a teoria do número, em vez de proceder por extensões crescentes, apresenta a estrutura puramente lógica e formal de uma dedução no gênero das que foram estudadas na primeira parte deste livro. Essa teoria será oportunamente considerada.[48]

Essas considerações iniciais – que claramente visam expor as conexões entre esse capítulo e os que o antecedem – não se encontram no rascunho 1, portanto constituem um acréscimo em relação à primeira versão. Em uma manifestação de concisão, depois de fazer o registro acima, Amoroso Costa riscou "dois" em "Os dois capítulos precedentes" e "lógica e" em "estrutura puramente lógica e formal"[49]. O manuscrito apresenta marcas que indicam que ele também apagou algumas linhas do texto original, tendo escrito por cima a última frase da introdução e o seguinte parágrafo:

> Devemos, porém, analisar agora algumas noções que se vão encontrar a cada passo na exposição dos princípios da matemática e que se relacionam com as noções fundamentais da lógica. É curioso observar que nessa exposição apareceu desde o começo certas noções cuja importância só foi posta em evidência por trabalhos muito recentes.[50]

A redação desse parágrafo – dentro do qual "e que se relacionam com as noções fundamentais da lógica" foi inserido posteriormente dentro da linha onde terminava a frase (Figura 6) – foi modificada antes

[47] De acordo com o rascunho 1, o capítulo *A generalização algébrica da noção de número* denominar-se ia, originalmente, *As extensões sucessivas da noção de número*.
[48] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 102.
[49] Sua intenção era, pois, antes de decidir modificar a ordem dos capítulos, entregar a seguinte redação: "*Os capítulos precedentes* devem ser considerados como de introdução ao estudo mais sistemático que vamos agora iniciar. [...] Um terceiro ponto de vista é ainda possível, no qual a teoria do número, em vez de proceder por extensões crescentes, apresenta a *estrutura puramente formal* de uma dedução no gênero das que foram estudadas na primeira parte deste livro". Ibid.
[50] Ibid.

da publicação, pois o começo do capítulo VII no livro publicado está com redação ligeiramente diferente.[51] Observa-se, porém, que, diferente da remoção da introdução acima transcrita, esta não se trata de uma alteração que seja decorrente da permutação dos capítulos.

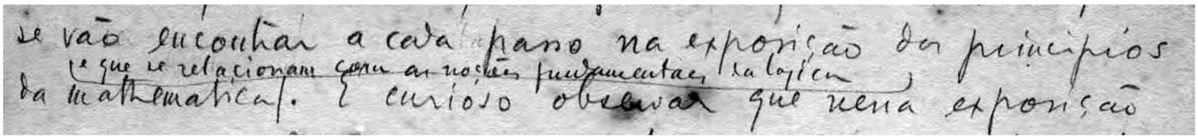
se vão encontrar a cada passo na exposição dos principios [e que se relacionam com as noções fundamentaes da logica] da mathematica. É curioso observar que nessa exposição

Figura 6: Acréscimo feito por Amoroso Costa no rascunho 2 do capítulo VII. [52]

Conforme explicado por Amoroso Costa na introdução removida, ele pretendia expor um ponto de vista sobre o conceito de número diferente do dos outros dois capítulos nos quais ele abordou esse mesmo assunto. Por isso, o capítulo VII conteria duas seções além das quatro que permaneceram: *A definição do número* e *Número e ordem*.[53] Na primeira delas, o foco é a concepção "puramente lógica de número", uma discussão na qual:

> [...] convém nunca perder de vista o caráter essencialmente relativo de toda a definição. Pode-se construir um desenvolvimento da matemática na base do qual se encontre o termo "número" representando uma ideia primitiva e não-definida. Tal é, por exemplo, a exposição axiomática da aritmética, no *Formulario Mathematico* de Peano (a que já nos referimos), construída sobre as ideias primitivas de *número cardinal*, *zero* e *o seguinte de*, ligadas entre si por cinco proposições primitivas.[54]

A obra de Peano é, de fato, como dito acima, mencionada em capítulos anteriores. No capítulo *III - As noções e proposições primitivas*,[55] os postulados da aritmética do italiano são, inclusive, apresentados

---

[51] "Passando agora a examinar metodicamente as noções que formam a estrutura da matemática, encontraremos desde logo algumas que se relacionam com os princípios lógicos anteriormente estudados, mas cuja importância só foi posta em relevo por trabalhos muito recentes." Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 225.

[52] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 102.

[53] A quinta seção do capítulo no rascunho 1 se chama *Zero* e corresponde a uma discussão desse conceito sob o ponto de vista da teoria russelliana. Não foi possível determinar, a partir da versão digital do manuscrito, se o rascunho 1 contém as duas seções acima, pois falta uma folha do manuscrito (correspondente às páginas d1p130 e p131 do documento digital). É possível que a folha esteja no arquivo físico e não tenha sido digitalizada.

[54] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 108-9, grifos do autor.

[55] Amoroso Costa estava bastante indeciso quanto à nomenclatura desse capítulo. De acordo com o primeiro rascunho produzido, ele considerou o título *Axiomas e noções primeiras*, inicialmente, que mudou para *Noções e proposições primeiras* quando da redação da segunda versão, tendo cogitado ainda, nesta, *A estrutura dos postulados*.

e discutidos brevemente. Mas a análise do conceito de número, explica Amoroso Costa, pode ser levada adiante:

> [...] e procurar definir o número em termos de noções mais fundamentais, isto é, mais puramente lógicas. A definição de Russell, acima apresentada, se funda sobre os conceitos de conjunto ou classe e de correspondência. Mas essas noções, que pelo seu caráter intuitivo prestam-se a servir de ponto de partida em uma exposição como a que estamos fazendo, podem ser ainda decompostas em elementos lógicos mais simples. A redução total da matemática a esses elementos simples é o objeto do livro de Whitehead e Russell, *Principia Mathematica*, no qual não se encontram outras ideias e proposições primitivas que não sejam as da lógica formal. [56]

A transcrição acima corresponde a uma versão "limpa" do texto, isto é, na qual ainda estão ausentes as rasuras feitas por nosso autor[57]. Este posteriormente inseriu nessa passagem, por exemplo, a observação de que a redução mencionada – das noções de classe e correspondência a conceitos (lógicos) mais simples – já fora vista no livro, e riscou a última parte, omitindo, assim, a menção ao trabalho de Whitehead e Russell[58]. Como esse é um assunto contido no capítulo *V - A lógica simbólica e a matemática*,[59] é possível que Amoroso Costa tenha concluído não ser necessário repetir a informação de que se trata do tema em discussão em *Principia Mathematica*.

A seção ainda traria uma conclusão, com as seguintes observações a respeito do programa proposto pela dupla de autores britânicos:

[56] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 109, grifo do autor.

[57] Feita essa escolha, não se está dizendo aqui que as rasuras tenham sido produzidas todas após a escrita do fragmento acima. Algumas delas, como acréscimos e substituições, podem ter ocorrido concomitantemente ao processo de escritura.

[58] Considerando todas as rasuras feitas por Amoroso Costa, a esse fragmento seria dada a seguinte redação: "e definir o número em termos de noções mais propriamente lógicas. A definição de Russell, acima apresentada, se funda sobre os conceitos de classe e de correspondência. Mas essas noções, que pelo seu caráter intuitivo prestam-se a servir de ponto de partida em uma exposição como a que estamos fazendo, podem ser ainda decompostas (como já vimos) em elementos mais simples". Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 109.

[59] Nesse capítulo, Amoroso Costa explica, em linhas gerais, que Russel e Whitehead adotam oito conceitos como ideias primitivas de seu sistema (proposição elementar, função proposicional elementar, asserção de uma proposição, asserção de uma função proposicional elementar, negação de uma proposição, soma de lógica de duas proposições, função proposicional verdadeira para todos os valores da variável e função proposicional verdadeira para certos valores da variável), a partir das quais o cálculo de classes e relações é constituído.

> Quando se leva a esse ponto a dissociação das noções matemáticas, a análise se torna excessivamente longa. Em *Principia Mathematica* encontram-se algumas centenas de páginas de um simbolismo extremamente compacto, antes de se chegar à definição do número cardinal. É certo que, uma vez estabelecidos os prolegômenos, a cadeia dos teoremas se desenrola muito mais rapidamente, mas a complexidade da análise preliminar é tal que, apesar do seu admirável rigor, alguns autores duvidam de que nela não se tenha introduzido qualquer petição de princípio. [60] [61]

A transcrição acima, como a anterior, não leva em conta as rasuras do manuscrito, que indicam que Amoroso Costa também iria retirar desse parágrafo – se este tivesse permanecido no livro – a alusão à obra de Whitehead e Russell. O fato é que mesmo com tal omissão, permanece nesse fragmento o criticismo ao projeto russelliano.

Na verdade, conforme assinalado por Silva,[62] Amoroso Costa foi bastante preciso em sua avaliação do alcance e limitações do projeto arquitetado pela escola logicista. "Seria temerário afirmar", diz ele ao final do capítulo V, que tal escola tenha executado "integralmente e impecavelmente o seu programa, ou mesmo que o programa seja exequível", pois ainda que "toda a nossa matemática atual se possa exprimir em termos de um sistema de noções primitivas, nada prova que o seu desenvolvimento ulterior dispense a adjunção de novas noções primitivas". [63]

Amoroso Costa não nega a utilidade do rigor da lógica matemática para o aprofundamento da análise da estrutura matemática, porém, destaca ele:

> A grande maioria dos trabalhos sobre esta ciência continuará a ser escrita na forma semi-rigorosa a que estamos habituados, sem que em geral sofra com isso a exatidão dos resultados obtidos. Nessa forma semi-rigorosa, há de fato o apelo constante a princípios lógicos que tanto o autor como o leitor subentendem por hábito. [64]

Estando, pois, a parte removida da segunda versão do capítulo VII em consonância com as considerações acima, é difícil encontrar uma explicação para a sua não inclusão no livro. Talvez o sintetismo

[60] É possível que Amoroso Costa tenha registrado no rascunho 1 do capítulo VII os autores que, segundo ele, duvidam de que na cadeia de teoremas de *Principia Mathematica* "não se tenha introduzido qualquer petição de princípio". Não foi possível, contudo, checar essa informação para o presente trabalho, uma vez que a folha que poderia conter tal informação não está entre os fólios da versão digital do manuscrito (cf. nota 46).
[61] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 109, grifo do autor.
[62] Silva, "No paraíso dos símbolos".
[63] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 71.
[64] Ibid.

tenha sido um fator decisivo para tal escolha, aliado ao fato de que, conforme Amoroso Costa registrou em seu manuscrito, "uma discussão detalhada do assunto sairia [...] dos limites deste livro".[65]

A sexta seção, *Número e ordem*, em três parágrafos, introduziria o assunto do então capítulo seguinte, *IX - As noções de ordem e de continuidade*.[66] A relação entre os conceitos de número e ordem é mencionada anteriormente no capítulo VII, no último parágrafo da terceira seção: "Cada número cardeal se define assim independentemente dos outros, sem que nisso intervenha a noção da *ordem* relativa segundo a qual eles se possam dispor. Essa noção de *ordem*, capital em tudo o que se segue, será estudada mais adiante", [67] [68] escreveu Amoroso Costa na versão 2.

Assim, o capítulo terminaria retomando a ideia acima. A condição de ineditismo do texto justifica a sua reprodução integral (o nome de Russell encontra-se riscado no manuscrito):

> No conjunto dos números cardinais que essa definição de Russell permite formar um por um, não introduzimos ainda nenhuma relação particular entre dois ou mais elementos. Cada um deles é até aqui um objeto independente dos demais.
>
> Nesse conjunto não organizado, vamos estabelecer agora uma ordem, isto é, dispor os números cardinais segundo certas relações recíprocas. Em termos mais usuais, vamos definir as noções de *inferior a* (ou *menor que*) e *superior a* (ou *maior que*).
>
> As noções de número e de ordem são, como se vê, independentes uma da outra, conquanto se prendam a uma mesma ideia, a de conjunto. [69]

Para além do capítulo VII: o enfoque "conjuntista"

Conforme mencionado na introdução a este trabalho, a teoria dos conjuntos é um tema que não está restrito, no livro de Amoroso Costa, ao capítulo VII. Embora os elementos mais ligados à teoria cantoriana dos conjuntos, como os ordinais e cardinais transfinitos, sejam apresentados em capítulos posteriores, há ainda um outro aspecto do campo de estudos "conjuntistas" que pode ser encontrado no livro: o reconhecimento da teoria dos conjuntos como linguagem básica da matemática. De fato, quando *As Ideias Fundamentais da Matemática* foi publicado, a comunidade matemática já estava majoritariamente adotando esse ponto de vista.[70]

---

[65] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 110.
[66] *A noção de ordem*, na versão 1.
[67] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 106.
[68] No livro, esse parágrafo foi divido em dois, com redação ligeiramente diferente.
[69] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 110, grifos do autor.
[70] José Ferreirós, "O surgimento da abordagem conjuntista em matemática", *Revista Brasileira de História da Matemática* 2, nº 4 (out. 2002): 141-154.

Sinais explícitos da compreensão de Amoroso Costa acerca do papel metodológico da teoria dos conjuntos podem ser encontrados logo na introdução ao livro, quando ele admite a indispensabilidade da linguagem de tal teoria para o exame das noções que formam o arcabouço da análise matemática. No restante do livro, o "enfoque conjuntista" é dado mais em alguns capítulos do que em outros. Por exemplo, na explanação sobre sistemas categóricos de axiomas, no capítulo III, e sobre as sucessivas extensões dos sistemas numéricos, no capítulo VIII, fala-se timidamente em classes de objetos, classes de números. Também no capítulo XVI, sobre a geometria euclidiana, nota-se o emprego sútil de uma terminologia de cunho "conjuntista" na apresentação dos axiomas de Oswald Veblen, que, originalmente, não possuem tal conotação.[71] Por outro lado, é possível perceber manifestações contundentes da teoria dos conjuntos nas discussões sobre os fundamentos da matemática no capítulo IX, onde as propriedades da densidade e da continuidade são estabelecidas em termos de conjuntos ordenados, no capítulo XI, onde são tratados os conceitos de variável e vizinhança, e no capítulo XV, cujo foco é a teoria dos grupos, apenas para dar alguns exemplos.

Considerações finais

O foco deste artigo foi o capítulo VII do livro *As ideias fundamentais da matemática*, texto no qual são introduzidos ao público brasileiro do final da década de 1920 conceitos da "nova teoria dos conjuntos". A análise aqui conduzida se pautou nos documentos de trabalho do autor, revelando dimensões que estão ocultas no texto publicado e que vão além dos conceitos nele apresentados.

Vimos que Amoroso Costa considerou, no percurso de elaboração de seu texto, trabalhos de autores que não citou em seu livro. A identificação dessas referências nos manuscritos foi fundamental para se poder entender suas escolhas e colocar em contexto os conceitos que abordou, mostrando que o processo de produção da obra exigiu a consulta a um volume muito mais amplo de estudos do que a versão editada por si só sugere.

Por outro lado, as marcas de trabalho materializadas em rasuras e alterações entre uma versão e outra do texto, revelam um processo dinâmico, no qual conceitos e recursos textuais se influenciam mutuamente e um não pode ser inteiramente compreendido sem o outro. Teríamos um livro diferente caso as mudanças aqui apontadas não tivessem sido empreendidas e isso mostra o quanto a visão do autor a respeito da forma e do conteúdo do texto se modificou ao longo do percurso de escrita.

[71] É o caso dos postulados III e V do sistema de Veblen, que o brasileiro denomina P3 e P5, respectivamente. Amoroso Costa fala em "pontos que *pertencem* à reta", o que alude à relação "conjuntista" de pertinência. O próprio Veblen não usa essa terminologia. Oswald Veblen, "The Foundations of Geometry", in *Monographs on Topics of Modern Mathematics relevant to the Elementary Field*, 2ª ed., ed. Jacob W. A. Young (New York: Longmans, Green, and Co., 1924), 1-51.

Os elementos da teoria dos conjuntos expostos em *As ideias fundamentais da matemática* não se resumem, conforme foi assinalado aqui, aos temas expostos no capítulo VII do livro. Essa constatação motiva uma análise mais completa da obra, com a realização de novos recortes. É o que se pretende em trabalhos futuros.

SOBRE O AUTOR:

Rodrigo Rafael Gomes
IFSP
rodrafagomes@ifsp.edu.br

Artigo recebido em 01 de dezembro de 2023
Aceito para publicação em 06 de maio de 2024