

## Uma perspectiva das pesquisas sobre o ensino dos números complexos

---

PRISCILA LOPES CARVALHO<sup>1</sup>

### Resumo

*Em fase preliminar, este trabalho propõe-se a analisar um conjunto de monografia, dissertações, artigos e trabalhos científicos que tenham como tema principal os números complexos, levando em conta aqueles que envolvem, como nível de ensino, o Ensino Médio, o Ensino Médio/Técnico e/ou o Ensino Superior. O objetivo que direciona os esforços investigativos consiste em realizar uma metanálise: verificar como as proposições neles contidas apresentam este conteúdo matemático, de que forma expõem sua relevância e quais propostas de ensino foram exploradas, tendo em vista a busca por ressignificar as atividades propostas pelos autores originais da perspectiva das estratégias didáticas com tecnologias digitais foram abordadas.*

**Palavras-Chave:** Educação Matemática; Números Complexos; Metanálise; Tecnologias Digitais.

### Abstract

*At the preliminary stage, this work proposes to analyze a set of monographs, dissertations, articles and scientific works that have as main theme the complex numbers, taking into account those involving, as a level of education, High School, High School / Technical and / or Higher Education. The objective that directs the investigative efforts is to carry out a meta-analysis: to verify how the propositions contained in them presenting this mathematical content, how they expose its relevance and what proposals of teaching were explored, in view of the search for re-signifying the activities proposed by the authors from the perspective of didactic strategies with digital technologies were addressed.*

**Keywords:** Mathematics Education; Complex Number; Meta-analysis; Digital Technologies.

### Introdução

A chamada “matemática pura”, segundo Rooney (2012), está dividida em ramos como Aritmética, Geometria e Álgebra; entretanto, dificilmente é possível separar o que o autor chama de “álgebra simples” da geometria, até porque os primeiros problemas algébricos teriam surgidos atrelados à geometria. Neste sentido, a Álgebra estuda a generalização do cálculo aritmético mediante expressões compostas por constantes (números) e variáveis (letras). Desta forma, a Álgebra, por sua vez, pode ser decomposta em Álgebra Linear (estuda espaços vetoriais e transformações lineares), Álgebra Multilinear (generaliza os métodos da álgebra linear), Álgebra Homológica (topologia algébrica), Álgebra Comutativa (construção da teoria algébrica dos números), Álgebra Booleana (estrutura algébrica que esquematiza as operações lógicas) e Álgebra Elementar (conceitos básicos da álgebra utilizando números, operadores e

---

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: aireles82@gmail.com.

variáveis). No campo da álgebra elementar, os temas são fragmentados em estruturas algébricas, operações matemáticas, polinômios e equações.

Há registros da álgebra elementar nas tábuas de argila da Babilônia as quais exibiam problemas formulados com equações quadráticas e cúbicas, no entanto, seu avanço e aceitação dependeram da concordância do sistema hindu-arábico e do zero, sendo Khayyam (1048-1131) quem definiu os princípios básicos da álgebra e usou a geometria para solucionar equações algébricas. Contudo, apenas quando a álgebra se distanciou da geometria foi possível a ideia de equação abstrata, apropriando-se da concepção de número não relacionada a medidas ou quantidades (ROONEY, 2012 p. 132), consolidando o emprego dos números negativos e complexos em estruturas deste tipo.

Na Teoria dos Conjuntos, desenvolvida por Cantor entre 1874 e 1879, viabilizou-se a manipulação de conceitos matemáticos, entre eles a divisão dos números em conjuntos e a comparação entre os mesmos. Assim, o conceito fundamental dos conjuntos pode ser descrito como “qualquer grupo de objetos ou números, tenham eles uma existência real ou não, formam um conjunto” (ROONEY, 2012 p.192).

Atualmente, no Ensino Fundamental, os números são ensinados subdivididos em conjuntos numéricos, em uma representação linear, desassociados de sua evolução histórica, como números naturais, números inteiros, números racionais, números irracionais e, enfim, os números reais. Logo, em determinado momento, para prover resultados relativos à raiz quadrada de um número negativo, surge um obstáculo quando os elementos do conjunto dos números reais não se mostram suficientes, ou seja, no conjunto dos números reais não há uma forma de representar essa “nova” solução.

Esta ideia é normalmente proposta na matriz curricular do Ensino Médio, por meio dos números complexos, que preveem o emprego de uma unidade imaginária. Sem o contexto histórico da evolução dos números, entretanto, a impressão que muitos alunos têm é que este conteúdo teria sido criado em um passe de mágica para solucionar o problema das raízes de números negativos. Some-se às abordagens inadequadas, apartadas do *background* histórico, o fato de a Matriz de Referência do ENEM não contemplar os números complexos, permitindo aventar que este tema carece de maiores cuidados, tanto do ponto de vista das abordagens adotadas, quanto das pesquisas que sobre ele se debruçam.

A proposta de pesquisa que aqui se descreve inclui a busca de trabalhos científicos que

abordam os números complexos, levando em conta aqueles que envolvem, como nível de ensino, o Ensino Médio, o Ensino Médio/Técnico e/ou o Ensino Superior. Desta maneira, realiza-se uma investigação, de caráter qualitativo e com delineamento definido pela metanálise, a qual, até o momento, levou à consulta e sistematização de 112 trabalhos do banco de teses e dissertações da CAPES. Este universo de trabalhos permitiu um recorte, envolvendo 36 dissertações e artigos sobre o tema “números complexos”, devido ao fato de os mesmos terem relação direta com a Educação Matemática, no sentido de conterem abordagens didáticas propostas para o trabalho com este tema. Por consequência, estes textos serão analisados com o propósito de verificar como as proposições neles contidas exploram este conteúdo matemático, de que forma expõem sua relevância e quais propostas de ensino foram abordadas, tendo em vista a busca por ressignificar as atividades propostas pelos autores originais do ponto de vista de estratégias didáticas com tecnologias digitais.

## 1 Números Complexos

Os números complexos já foram conhecidos ao longo da história como “impossíveis”, “fictícios” “sofisticados”, “inexplicáveis”, “imaginários”, quantidades “falsas”, entre outros; tais nomenclaturas se relacionam à forma como foram compreendidos em diferentes tempos e aos obstáculos encontrados no decorrer de sua evolução como conceito.

A Teoria dos Conjuntos de Cantor viabilizou definir os números complexos como um conjunto munido de duas operações, adição e multiplicação, e que satisfaz as propriedades comutativa, associativa, elemento neutro, inverso multiplicativo e distributiva. Isto se tornou possível por meio da ideia de *corpo* (BIEZUNER, 2006).

Os números complexos não representam quantidades e surgem, por exemplo, na resolução de equações de 3º e 4º grau propostas por Tartaglia e Ferrari. Bombelli dispôs os números  $a$  e  $b$ , designando a *parte real* e *imaginária*, enquanto Euler propôs a letra  $i$  como unidade imaginária, para representar e definir a  $\sqrt{-1}$ . Estes números podem ser expressos na forma algébrica  $z = a + bi$  ou  $z = x + yi$ , sendo  $a$ ,  $b$ ,  $x$  e  $y$  números reais e  $i$  a unidade imaginária, de forma que  $z$  designe o sistema de coordenadas 3D  $(x, y, z)$  (MEHA, 2016), o que, por sua vez, possibilita associar as coordenadas de um ponto  $(x, y)$  à interpretação geométrica do número complexo no Plano Complexo ou Plano de

Argand-Gauss, ou, ainda, associá-las ao vetor descrito pelo número complexo, representado pela distância da origem ao ponto, permitindo representar as operações soma, subtração e multiplicação. Ademais, podem ser escritos nas formas trigonométrica ou polar e matricial.

## **2 Sobre os procedimentos de pesquisa**

No primeiro momento da investigação aqui descrita, foi realizada a classificação das pesquisas encontradas na busca feita na base de dados da CAPES, que resultou em 112 trabalhos, sendo 1 monografia para trabalho de conclusão de curso de graduação, 15 artigos e 96 dissertações. Em relação às dissertações, 76 foram apresentadas para obtenção do título de Mestre em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT (programa coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática). As 20 restantes foram apresentadas para obtenção do título de Mestrado Profissional em Ciências e Matemática ou de Mestre em Educação Matemática em diversas instituições de pós-graduação do país.

Em um segundo momento, buscou-se definir o material a ser analisado, considerando todos os estudos mais relevantes associados à área da Educação Matemática que apresentavam propostas didáticas passíveis de análise e crítica, e, por fim, classificar qual a abordagem proposta por cada pesquisa selecionada. Foram selecionados ao todo 38 pesquisas, cuja análise possibilitou identificar as abordagens histórica, geométrica, tecnológica e de formação de formadores.

Neste artigo, apresenta-se a síntese de algumas dissertações dentre as 38 selecionadas, sendo uma para cada abordagem supramencionada. No entanto, para o texto final da pesquisa, serão levadas em consideração as descrições produzidas para um grupo maior de trabalhos, envolvendo as 38 pesquisas encontradas. As próximas seções contêm este primeiro ensaio de análise, de acordo com a divisão determinada pelas categorias que foram definidas pelas abordagens.

### **2.1 Sobre a abordagem histórica**

Eli (2014) propõe o ensino dos números complexos sob a perspectiva histórica em uma pesquisa participante, realizada com alunos do Ensino Médio e de Licenciatura em Matemática. O autor apresenta uma sequência de atividades com o objetivo de compreender a concepção dos estudantes sobre raízes quadradas de números negativos,

identificando dificuldades conceituais relativas à potência quadrada, ao uso da regra de sinais da multiplicação dos números reais e uma diversidade de respostas equivocadas relacionadas à raiz quadrada de números negativos. O texto apresenta, também, tópicos da história dos números complexos e suas aplicações na física e na geometria fractal. Do ponto de vista teórico, a investigação foi fundamentada em documentos como PCN, PCN+, Orientações Curriculares para o Ensino Médio e DCN, além de usar autores como D'Ambrosio, Caraça, Cury, Cajori, Eves, Baier, Boyer, Nahim, Carneiro, Milies, Pérez Echeverría, Sad e Silva, Silva e Pinto. Ao final da aplicação, o autor percebeu que alguns acadêmicos não tinham estudado números complexos, constatando uma mudança após a aplicação das atividades, ocorrida pela aceitação da raiz quadrada de números negativos viabilizada pela exposição dos fatos históricos aos estudantes que visualizaram as dificuldades passadas pelos matemáticos e o tempo que levou para os números complexos serem aceitos. Ainda aponta como consequência “o fortalecimento da decisão de professores extirparem esse conteúdo do ensino básico, por concluírem equivocadamente o desuso desse objeto de ensino” (ELI, 2014 p.117).

## **2.2 Sobre a abordagem geométrica**

Guimarães (2013) desenvolveu sua pesquisa com alunos ingressantes do curso superior de Engenharia Mecânica visando avaliar e analisar os conhecimentos prévios sobre os números complexos, considerando que os alunos haviam acabado de concluir o Ensino Médio. Seu objetivo era buscar uma forma mais eficaz de compreender os números complexos e a associação e aplicação dos mesmos à geometria, e mais especificamente à trigonometria. A fundamentação teórica levou em consideração a Teoria de Van Hiele, além dos trabalhos de Brousseau, Pavanello, Lorenzato, Eves, Garbi, Iezzi, Meyer, entre outros, e documentos como os PCNs e a LDB. A autora entende que a apresentação didática dos números complexos deve basear-se em aplicações e objetos concretos, associando a história dos números complexos a representação de um ponto ou vetor, tendo a perspectiva geométrica para concluir a visão algébrica. Deve considerar, igualmente, sua importância perante o desenvolvimento científico e intelectual, além de justificar a existência dos conjuntos numéricos em face à evolução da sociedade. Em relação à metodologia e à estrutura da pesquisa, a autora empregou um questionário socioeconômico, um questionário investigativo sobre a aprendizagem de números complexos e suas aplicações geométricas e um teste de nível (aplicado 2 vezes). Além disso, a autora apresentou a história dos números complexos antes de proceder à

aplicação de uma sequência didática. Finalmente, usou um questionário após a aplicação da sequência, que chamou de “Números complexos no ensino superior e suas aplicações geométricas”. A autora conclui que, embora poucos alunos tenham apresentado dificuldades em alguns conceitos matemáticos básicos, a maioria conseguiu associar o uso da raiz quadrada negativa à desmistificação do surgimento dos números complexos. Na sequência, foi utilizado o software Régua e Compasso para o reconhecimento de conceitos fundamentais associados à geometria e as quatro operações, como os de translação e rotação. A autora aponta como positiva a avaliação do que foi visto quando da integração da abordagem dos números complexos a partir de uma visão geométrica, tendo por base a Teoria de Van Hiele, fazendo com que o aluno evolua e chegue a conclusões a cada passo bem orientado e finalizado.

### **2.2.1 Sobre a abordagem Vetorial**

Em seu artigo, Assemány e Harab (2013) apresentam uma oficina realizada com os alunos do Ensino Médio, na qual estabelecem uma abordagem que denominam “geometria vetorial” para a conexão que atribuem para os conteúdos de geometria plana e vetores com os números complexos, “abdicando do algebrismo” e focando na representação geométrica, de forma a explorar os conteúdos do Ensino Médio sob a perspectiva da geometria vetorial. Para as autoras, a geometria vetorial contribui para a visualização dos números complexos como um vetor no plano, associando os conceitos de módulo e argumento de números complexos a módulo e inclinação de vetores, seguindo intuitivamente a forma trigonométrica. A igualdade, o conjugado, as operações de adição, subtração e multiplicação por um número real são apresentadas por meio das coordenadas dos vetores formados pela origem com a extremidade no afixo no plano complexo, ou seja, a partir do momento que os conteúdos se relacionam, a proposta dos números complexos passa a ter outro sentido, principalmente com o enfoque geométrico, associado ao vetor. A multiplicação e a potenciação são abordadas de maneira tradicional, a partir da forma trigonométrica, obtendo-se a primeira Fórmula De Moivre. As raízes complexas são determinadas por meio de atividades investigativas realizadas com base em um polígono e definidas pela quantidade de rotações partindo de uma raiz conhecida (ASSEMANY, HARAB, 2013, p. 640). Concluíram que o ensino da geometria vetorial em sua abordagem diferenciada resultou em um facilitador para a resolução, compreensão e significação para as questões relacionadas ao ensino dos números complexos.

### **2.3 Sobre a Abordagem Mudança de Registros**

Contini (2016) realizou um estudo investigativo sobre a aprendizagem das conversões entre representações semióticas de números complexos com o objetivo de desenvolver uma pesquisa diagnóstica sobre a aprendizagem da passagem entre os registros gráfico, algébrico e da língua materna (conversões). O autor busca responder o que os alunos sabem sobre as conversões entre as representações semióticas de números complexos entre pelo menos dois dos registros, considerando o gráfico, o algébrico e o da língua materna, e quais dessas conversões apresentam maior dificuldade. A pesquisa foi realizada com alunos do Ensino Médio e alunos do curso Técnico de Meio Ambiente Integrado ao Ensino Médio, e fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, em livros didáticos de Matemática indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio, utilizados em escolas estaduais do Estado de São Paulo. Como metodologia, o autor empregou a Engenharia Didática para desenvolver uma sequência com atividades que exploram o aspecto gráfico dos números complexos em um ambiente informático, com suporte do GeoGebra. Em suas conclusões, aponta que as questões que envolviam o uso do registro gráfico apresentaram maiores dificuldades para efetuar as conversões, o que o fez considerar o quanto os professores valorizam o ensino de números complexos e seu registro gráfico. Constata que o déficit se relaciona à dificuldades com a representação gráfica em si, o que é anterior ao ensino dos números complexos, afetando os conceitos tratados a partir dessa representação, como noções de simetria axial e central, os quais não foram bem desenvolvidos com estes alunos.

### **2.4 Sobre a abordagem Tecnológica**

Pinto (2015) propõe a construção de um objeto de aprendizagem para processos educativos ligados ao ensino e à aprendizagem de números complexos, de maneira geral, para alunos de um curso de nível médio na área técnica de eletroeletrônica. O autor argumenta ser possível realizar análises fasoriais, considerando a representação gráfica de funções senoidais, o que se pode considerar uma importante aplicação dos números complexos na área técnica mencionada. No trabalho, não se percebe um marco teórico que permitisse estruturar referenciais muito específicos, mas um conjunto de construtos de ordem teórica, envolvendo ideias relativas à informática educativa, de forma mais geral, e aos objetos de aprendizagem, mais especificamente. Pinto (2015), o

autor analisa 3 livros didáticos aprovados pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) e desenvolveu um objeto de aprendizagem (OA), denominado “Descomplicando os Complexos”, composto por uma sequência didática com 6 atividades com aplicações na área da eletroeletrônica. Para cada atividade, foi criado um questionário de múltipla escolha com quatro opções de respostas e apenas uma correta, sendo que cada questionário foi desenvolvido a partir de uma tela de animações construídas com o GeoGebra, tornando possível a representação geométrica e dinâmica das situações existentes nas atividades. Neste caso, quando as questões eram respondidas corretamente, surgia a mensagem “Parabéns! Continue assim”; em contrapartida, quando uma resposta incorreta era fornecida, uma mensagem sugeria explorar mais amplamente as ferramentas do OA, permitindo ao estudante experimentar, testar, conjecturar, fazer inferências e tomar decisões para responder o questionário. Nas conclusões, o autor elenca 4 objetivos formulados e cumpridos para o trabalho desenvolvido; dentre eles, destaca os desafios na elaboração das atividades, sendo as duas primeiras abordando todo o conteúdo referente aos números complexos do Programa do Ensino Médio regular e as outras quatro aplicações básicas na análise de circuitos elétricos, salientando a última atividade “que conta com uma tela de animações que dinamiza os fasores dos elementos de um circuito, contextualizando a parte algébrica e geométrica dos números complexos numa mesma tela” (PINTO, 2015, p.83).

Finaliza falando sobre o objeto de aprendizagem, ao argumentar que “à medida que os estudantes se familiarizavam com as telas de animações, aumentavam a autonomia e a postura crítica em relação ao item em questão” (PINTO, 2015, p. 83).

## **2.5 Sobre a abordagem direcionada a formação de professores**

Almeida (1992) propõe fazer a análise didática do curso de especialização no Centro de Ciência e Matemática, Físicas e Tecnologias da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo intitulado “Sobre os Números Complexos”, direcionado aos professores do 1º e 2º grau, como se denominava à época, sobre aspectos da Teoria dos Números Complexos na perspectiva didático-epistemológica, motivada pela incerteza apresentada entre os professores sobre o assunto. Seu objetivo era responder “Por que transportar a realidade histórica em termos de didática e, de um modo mais geral, no ensino da matemática?”. A autora fundamenta sua pesquisa na leitura e análise dos textos originais de D’Alembert, De La Chapelle, Euler, Argand e Boyer sobre as “quantidades

imaginárias” e as diferentes representações dos números complexos ao longo da história, possibilitando revelar a importância destes números. Utilizou como metodologia aulas expositivas, leitura e análise dos textos em grupos e posterior apresentação das conclusões. Como encerramento do curso, a autora aplicou um questionário para avaliar o mesmo e concluiu, analisando as respostas, que “os professores pretendiam alterar sua postura referente ao ensino dos números complexos” (ALMEIDA, 1992, p. 17).

### **Considerações finais**

Analisando as pesquisas realizadas sobre números complexos, percebe-se uma preocupação sobre o ensino dessa temática, havendo muitas discussões sobre a permanência deste conteúdo no currículo do Ensino Médio, considerando não fazer parte da Matriz de Referência do ENEM. O tema, independentemente de sua abordagem, quando bem estudado e estruturado pelo professor em seu plano de aula, seja com o uso de recursos tecnológicos digitais ou não, apresenta resultados positivos, em relação à aprendizagem ou ressignificação realizadas. Esta constatação leva a crer que o ensino dos números complexos, quando parte de uma perspectiva histórica e quando a representação geométrica é explorada, atrelada às aplicações, parece levar à compreensão efetiva do tema, representando uma abordagem que tende a trazer maior qualidade ao processo de ensino.

Por outro lado, com base nas investigações mencionadas, observa-se uma preocupação maior de trabalhos sobre números complexos conduzidos para o Ensino Médio na área Técnica e para o Ensino Superior: das cinco sínteses apresentadas aqui, duas são direcionadas para o Ensino Superior, sendo uma delas voltada também para o Ensino Médio, duas são voltadas para o Ensino Médio na área Técnica, e uma é dirigida para a formação de professores. Apenas com essa amostra de trabalhos, ainda não é possível concluir se há a possibilidade de o ensino dos números complexos ser mais voltado para o Ensino Médio na área Técnica ou para o Ensino Superior.

### **Agradecimentos**

O presente trabalho foi resultado de um trabalho conjunto entre orientando e orientador que direcionou a pesquisa e contribuiu para a apresentação deste estudo, realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Referências

- ALMEIDA, N. S. de. **Uma experiência didática de formação matemática-epistemológica com professores do segundo grau**. 1992. 221f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1992.
- ASSEMANY, D.; HARAB, L. Potencializando o ensino dos números complexos a partir da abordagem vetorial. **VII CIBEM**. Montivideo, 2013. p. 636-645, 2013.
- BIEZUNER, R. J. **Notas de Aula: Álgebra Linear**. 2006. Disponível no site <[http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas\\_de\\_aula/algebralinear.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/algebralinear.pdf)>. Acesso em 26/10/2018.
- CONTINI, Fe. **Um diagnóstico da aprendizagem das conversões de registro, no caso dos números complexos**. 2016. 199f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.
- ELI, J. **Números Complexos e suas aplicações: uma proposta de Ensino contextualizado com a abordagem histórica**. 2014. 171f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2014.
- GUIMARÃES, M. da C. B. C. **Números Complexos e suas aplicações geométricas no Ensino Superior**. 2013, 155f. Dissertação (Mestre em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Federal Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2013.
- MEHA, M. **Why are complex numbers denoted by z?** Disponível em <<https://www.quora.com/Why-are-complex-numbers-denoted-by-z>>. Acesso em 26/10/2018.
- ROONEY, A. **A História da Matemática** – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil Editora, 2012.
- PINTO, J. E. **Objeto de aprendizagem para o Ensino de números complexos com aplicações na área técnica em eletroeletrônica**. 2015. 112f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.