

Atividade de construção do instrumento “quadrante num quarto de círculo” e o Pensamento Matemático Avançado¹

WILSON MONTEIRO²

FUMIKAZU SAITO³

Resumo

*Este trabalho faz parte da pesquisa de mestrado acadêmico em educação matemática que está em fase de finalização. Nele buscamos apresentar alguns processos do Pensamento Matemático Avançado exigidos que podem ser desenvolvidos pelos participantes nas ações e operações solicitadas por uma atividade que articula história e ensino de matemática, elaborada a partir de um documento histórico intitulado *Del modo di misurare* (1564). O conhecimento matemático não é abordado nesta atividade como objeto, mas sim como ferramenta, o que nos remeteu a seguinte indagação: que contribuições trazem esse tipo de abordagem? Para responder a esse questionamento utilizamos o aporte teórico Pensamento Matemático Avançado e a metodologia de análise foi estruturada com base na análise de conteúdo.*

Palavras-chave: Educação Matemática; História da Matemática; Pensamento Matemático Avançado.

Abstract

*This paper is part of a research on mathematics education which is being concluded. The aim here is to discuss some processes of the advanced mathematics thinking which can be developed by the participants within actions and operations requested by a certain activity, which sought to articulate history and the teaching of mathematics. The activity was developed from a historical document entitled *Del modo di misurare* (1564) and mathematical knowledge herein was not addressed as object, but rather as tool, which makes us to raise the following question: what contributions are brought up by this kind of approach? For answering this question, we made use of the theoretical contribution of Advanced Mathematics Thinking and the methodology of analysis which was based on the analysis of the content.*

Keywords: Mathematics Education; History of Mathematics; Advanced Mathematical Thinking.

Introdução

A preocupação de pesquisadores e educadores em analisar o papel da história na educação matemática e ou articular essas duas áreas de conhecimento não é recente. Segundo Ferreira (1996, p. 05), um dos primeiros trabalhos que buscou abordar sobre

¹ Trabalho apresentado no IV Encontro de Produção Discente em Educação Matemática, realizado em 29 de outubro de 2011. Apoio: CAPES

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – wilsonmonteiro@ymail.com

³ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – fsaito@pucsp.br

esse assunto pode ser encontrado no século XVIII, citando a obra *Éléments de géometrie* de Alexis Claude Clairaut publicado em 1765.

Atualmente, encontramos vários trabalhos que abordam sobre esse tema (MIGUEL, BRITO, 1996; VALENTE, 1999; BRITO, CARVALHO, 2005; BRITO, MIORIM, 2009; SOUZA, 2009; NUNES, ALMOULOU, GUERRA, 2010; DIAS, MORETTI, 2011), que buscam não somente apontar para a importância da história no ensino da matemática, mas também apresentam diferentes perspectivas pedagógicas articuladas às diversas concepções de história, mostrando diferentes caminhos de abordagem.

O grupo de estudo e pesquisa HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática) discutiu e discute, por meio de seminários e de pesquisas, sobre essa articulação e sobre as potencialidades pedagógicas que a história pode propiciar. Um dos resultados dessas reflexões foi à elaboração de uma atividade baseado no tratado *Del Modo Di Misurare* (1564) de Cosimo Bartoli (1503-1572), intitulado construção do instrumento “quadrante num quarto de círculo”. Essa atividade consiste na construção de tal instrumento utilizando apenas os materiais disponibilizados para essa finalidade. Dentre esses materiais, constam instruções traduzidas do tratado *Del modo dimisurare* (1564), um breve relato da procedência do documento, régua sem graduação e compasso. Para maiores informações consultar Saito e Dias (2011).

As pesquisas e reflexões do grupo HEEMa sobre a atividade em questão verificou que ela “não visa uma abordagem da matemática como um objeto, mas como uma ferramenta” (SAITO; DIAS, 2011, p. 27), ou seja, os conceitos matemáticos são solicitados para auxiliar na execução de determinadas tarefas. Essa afirmação nos remeteu a seguinte indagação: que contribuições trazem esse tipo de abordagem?

O aporte teórico escolhido para auxiliar nossa reflexão sobre a questão acima foi o Pensamento Matemático Avançado (PMA), pois possibilita trazer para a nossa discussão alguns elementos importantes na construção dos conceitos matemáticos, tais como a abstração, a generalização e a representação.

Estamos partindo da hipótese de que o Pensamento Matemático Avançado (PMA) contribui na construção dos conceitos matemáticos, nesse sentido, o nosso objetivo nesse artigo é analisar se alguns de seus processos estão presentes nas tarefas solicitadas pela atividade construção do instrumento “quadrante num quarto de círculo”.

Para alcançar esse objetivo, analisamos as instruções que ensina a construir o

instrumento em questão. Escolhemos essa atividade porque faz parte da pesquisa que estamos realizando no mestrado acadêmico em educação matemática na PUC-SP. A metodologia de análise que utilizaremos é a análise do conteúdo, proposta por Bardin(1979). Essa opção justifica-se por ser um instrumento que facilita a ação exploratória e a interpretação dos conteúdos do texto orientado pelo referencial teórico e pela questão/objetivo da pesquisa.

A seguir, apresentaremos brevemente alguns dos processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) que abordaremos em nossa análise.

1. O Pensamento Matemático Avançado (PMA)

Pensamento Matemático Avançado (PMA) é geralmente definido como um conjunto de atividades matemáticas e mentais, encontrado na aprendizagem de vários conceitos matemáticos complexos que podem aparecer em diferentes níveis de escolaridades, tais como, generalização, abstração e representação Dreyfus (1991).

A representação, segundo Dreyfus (1991), envolve três processos: a visualização, a representação simbólica e a representação mental.

A visualização auxilia no processo de formação de imagens, permitindo que o indivíduo perceba os objetos do mundo real, e na medida em que suas propriedades são analisadas e descritas, ocorre o desenvolvimento da dedução e da demonstração.

A representação simbólica, indispensável na matemática, consiste na representação, verbal ou escrita, dos objetos e suas propriedades. Portanto, está envolvida nesse processo uma relação entre signos e significados.

A representação mental corresponde aos esquemas internos ou imagens internas do sujeito, que está associado a um determinado objeto e suas propriedades. Para que o indivíduo possa comunicar o seu pensamento sobre um determinado objeto matemático, esse processo é fundamental.

Segundo Dreyfus (1991), para que um sujeito tenha sucesso em matemática, é recomendável que ele tenha várias representações mentais ricas dos conceitos matemáticos.

Dizemos que representações matemáticas são ricas quando há ligações múltiplas entre elas, ou seja, quando o indivíduo percebe que algumas representações são

complementares, consequentemente, há a possibilidade de integrá-las em um único conceito, quando verifica a possibilidade de chamar diferentes representações em uma mesma situação, para que juntas, auxiliem na resolução de um determinado problema mais facilmente, quando o indivíduo consegue passar determinada propriedade matemática de uma representação para outra, e quando identifica uma representação num processo ou objeto não matemático.

Nesse sentido, podemos dizer que a representação auxilia no processo de abstração, que envolve dois processos: a generalização e síntese.

Generalização consiste na capacidade do indivíduo em identificar características e propriedades numa determinada situação particular, estendendo essas características e propriedades para uma situação mais ampla. Enquanto a síntese é a composição ou combinação de partes para formar um todo enquanto entidade.

É importante salientarmos que a abstração não é apenas uma somatória dos processos de generalização e de síntese. Isso se deve a natureza cognitiva diferenciada da abstração, que é essencialmente construtiva, ou seja, há uma modificação nas idéias do indivíduo.

Quando o indivíduo trabalha com o processo de abstração, ele desloca sua atenção para as propriedades e estruturas do objeto, relacionando essas propriedades e estruturas com outras representações matemáticas.

Baseado nesse aporte teórico, pretendemos, portanto, discutir sobre os processos de representação, generalização, síntese e abstração presentes na atividade construção do instrumento “quadrante num quarto de círculo”, elaborada a partir do tratado *Del modo dimisurare*, que apresentamos no próximo tópico.

2. Análise da atividade a luz do Pensamento Matemático Avançado

Durante as primeiras leituras das instruções que ensina a construir o instrumento quadrante num quarto de círculo, foi possível dividir as tarefas relatadas em dois grupos: as que necessitam dos conhecimentos matemáticos para serem executadas e as que não necessitam desses saberes para serem realizadas corretamente.

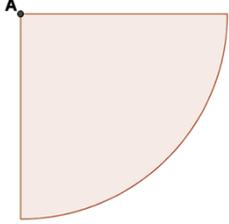
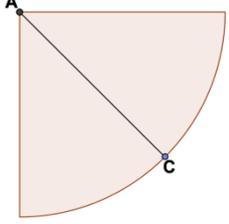
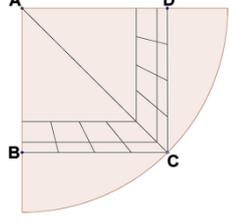
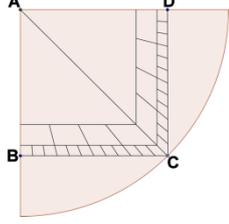
A partir dessa divisão, definimos as unidades de significados que constituem todas as tarefas que mobilizam os conhecimentos geométricos para serem concluídas adequadamente. Analisando as unidades de significados, definimos as categorias de análise que constituem um conjunto de tarefas que utilizam um determinado saber

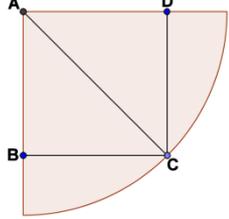
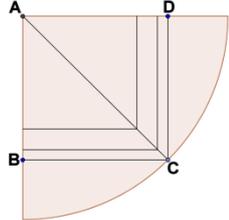
matemático para que sejam executadas adequadamente (vide tabela 1).

Para que as tarefas possam ser compreendidas pelo leitor fora do contexto das instruções da atividade de como construir o instrumento “quadrante num quarto de círculo”, foi necessário reelaborá-las e reescrevê-las sem alterar a idéia constante no texto, além de apresentamos o desenho geométrico resultante quando realizadas adequadamente.

É importante salientar que pode utilizar somente os seguintes recursos na execução das tarefas descritas na tabela 1: compasso, régua sem graduação, lápis ou caneta e esquadro (que pode ser construído pelos próprios participantes).

Tabela 1: unidades de significados e categorias de análise

<i>Categorização</i>	<i>Unidade de significados (tarefas)</i>	<i>Desenho geométrico resultante</i>
<i>Divisão em partes iguais</i>	<i>Tarefa 1: Desenhe quarta parte de um círculo de tal modo que as duas linhas, que partem do centro A do círculo, formem entre si um ângulo reto.</i>	
	<i>Tarefa 2: Divida a quarta parte do círculo com uma linha reta que parte do centro A e chega em C, ponto que está situado no meio do arco.</i>	
	<i>Tarefa 5: Divida cada um dos lados BC e CD em quatro partes iguais. Utilizando a régua, colocada no centro A, mova-a na direção em que se queira para as divisões, ou pontos que foram feitos, traçando linhas abaixo dos ditos intervalos a partir da primeira e da segunda linha em direção ao centro A.</i>	
	<i>Tarefa 6: Divida cada uma das quatro partes dos lados BC e CD em outras três igualmente. Utilizando a régua, colocada no centro A, mova-a na direção em que se queira para as divisões, ou pontos que foram feitos, traçando linhas abaixo dos ditos intervalos a partir da primeira e da segunda linha em direção ao centro A.</i>	

<p><i>Diâmetro do círculo e diagonal do quadrado</i></p>	<p><i>Tarefa 3: Com uma régua colocada no ponto C, que está situado no meio do arco de $\frac{1}{4}$ de um círculo, trace duas linhas CB e CD de modo a obter um quadrado ABCD dividido no meio pelo diâmetro AC.</i></p>	
<p><i>Paralelismo</i></p>	<p><i>Tarefa 4: Trace duas outras duas linhas paralelas a BC e CD na parte interna do quadrado, isto é, na parte que vai em direção ao centro A. Estas linhas paralelas deverão ser traçadas de tal modo que o intervalo que está mais próximo do centro A seja duas vezes mais largo do que aquele outro que está fora do quadrado.</i></p>	

Analisando as tarefas descritas acima, percebemos que para executá-las corretamente podem ser mobilizados os conhecimentos geométricos de mediatriz, de bissetriz, do teorema de Tales, do paralelismo, do perpendicularismo, das retas, das propriedades do quadrado, da circunferência e do triângulo retângulo.

Referente à categoria “divisão em partes iguais”, todas as tarefas solicitam a divisão em partes iguais de um dos seguintes objetos geométricos: segmento de reta, arco e circunferência.

Na tarefa 1, o sujeito deve desenhar a quarta parte de um círculo de tal modo que as duas linhas, que partem do centro A do círculo, formem entre si um ângulo reto.

Durante a execução podem entrar em cena as representações mentais dos objetos matemáticos da circunferência, dos números fracionários sob a concepção parte-todo, do segmento de reta, do ângulo, da proporcionalidade.

Na divisão dos seguimentos em partes iguais – duas ou três partes – pode entrar em cena a representação mental dos conceitos do segmento de reta, da mediatriz, do teorema de Tales, da proporcionalidade.

Portanto, percebe-se que na categoria “divisão em partes iguais” faz-se necessário recorrer a diferentes representações mentais de objetos geométricos e suas propriedades para execução de cada uma das tarefas. Essa característica está presente também nas outras duas categorias.

Outra característica que encontramos na categoria “divisão em partes iguais” é a

possibilidade do sujeito em perceber que as representações mentais mobilizadas na resolução das tarefas dessa categoria – mediatriz, bissetriz, quarta parte de uma circunferência – podem fazer parte de um único conceito: divisão em partes iguais.

O caminho que o sujeito percorre para alcançar essa percepção envolve o processo de abstração. Isso porque o sujeito deverá identificar, por exemplo, que para dividir um segmento de reta em três partes iguais necessitará da mobilização do teorema de Tales, e que essa técnica auxiliará na divisão de qualquer segmento de reta em partes iguais (processo de generalização). Deverá perceber que a quarta parte de uma circunferência, metade de um arco, divisão de um segmento em duas ou três partes iguais pode formar um único conceito: divisão em partes iguais (processo de sintetização). Caso o indivíduo tenha uma visão restrita do conceito divisão em partes iguais, limitado, por exemplo, ao número fracionário parte-todo, ele poderá através dessa atividade modificar essa idéia.

Referente à categoria “diâmetro do círculo e diagonal do quadrado”, para executar a tarefa 3 com é fundamental que o sujeito perceba que o que o segmento de reta AC é ao mesmo tempo o diâmetro do arco e a diagonal do quadrado ABCD, e que o segmento de reta AB é paralela ao segmento de reta DC e que o segmento de reta AD seja paralelo a BC. Essa descrição não é mencionada pelo texto, porém faz parte das propriedades do quadrado, exigindo do indivíduo a capacidade de identificação dessas propriedades, podendo estendê-las para uma situação mais ampla.

No processo de percepção de que o segmento da reta AC é ao mesmo tempo o diâmetro do arco e a diagonal do quadrado ABCD, pode envolver a capacidade do indivíduo em passar uma representação mental de um objeto matemático para outra.

Na execução da tarefa 4, pode entrar em cena os conceitos matemáticos de paralelismo, de retas, de múltiplo, de proporcionalidade.

Verificamos que a tarefa 4 é a única que solicita a mobilização do conceito matemático pelo seu termo para que o aluno possa executá-la. Mesmo nessa situação, o conceito é utilizado como uma ferramenta.

Considerações finais

Podemos perceber na análise da atividade construção do instrumento “quadrante num quarto círculo” que uma única tarefa exige a mobilização de vários conceitos

matemáticos, criando condições necessárias para que o processo de ensino e aprendizagem auxilie o estudante a construir representações matemáticas mais ricas, estabelecendo múltiplas ligações entre eles.

Referências

- BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. (1999). A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In BICUDO, M. A. V (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: UNESP, 129-136.
- BRITO, A. de J.; CARVALHO, D. L. de. (2005). Utilizando a história no ensino de geometria. In BRITO, A. de J. et al (Orgs.). *História da matemática em atividades didáticas*. Natal, RN: Editora UFRN, 11-52.
- BRITO, A. de J.; MIORIM, M. A. (2009). Grupo HIFEM: reflexões sobre uma experiência. In MIORIM, M. A.; VILELA, D. S. (Orgs.). *História, filosofia e educação matemática: práticas de pesquisa*. Campinas, SP: Editora Alínea, 15-40.
- DREYFUS, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 25-41.
- DIAS, M. da S.; MORETTI, V. D. (2011) *Números e operações: elementos lógico-históricos para atividade de ensino*. Curitiba, PR: Ed. IBPEX.
- DIAS, M. da S.; SAITO, F. (2010). A resolução de situações-problema a partir da construção e uso de instrumentos de medida segundo o tratado *Del modo dimisurare*(1564) de CosimoBartoli, In *Anais Congresso Internacional – PBL 2010: Aprendizagem baseada em Problemas e Metodologias Ativas de Aprendizagem – Conectando pessoas, idéias e comunidades (8 a 11 de fevereiro de 2010, São Paulo, Brasil)*. São Paulo: Pan American Network of Problem Based Learning/USP.
- DIAS, M. da s.; SAITO, F. (2010). O ensino da matemática por meio de construção de instrumentos de medida do século XVI, In: UTSUMI, M. C. *Anais do X Encontro Paulista de Educação Matemática: X EPEM*. 1. ed. São Carlos: SBEM, 1-4.
- DIAS, M. da S.; SAITO, F. (2010). História e Ensino de Matemática: construção e uso de instrumentos de medida do século XVI. In *História da Ciência e Ensino: construindo interfaces*, v. 2. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/hcensino>>. Acesso em: 20/03/2010.
- MIGUEL, A.; BRITO, A. de J. (1996). A História da Matemática na formação do professor de matemática. In FERREIRA, E. S. (Org.). *Caderno CEDES 40*. Campinas, SP: Papirus.
- NUNES, J. M. V.; ALMOULOU, S. A.; GUERRA, R. B. (2010). O contexto da História da Matemática como Organizador Prévio. In *Bolema*, Rio Claro, SP, v. 23, n. 35B.
- SOUZA, E. da S. (2009). A prática social do cálculo escrito na formação de professores: a história como possibilidade de pensar questões do presente. In MIORIM, M. A.; VILELA, D. S. (Orgs.). *História, filosofia e educação matemática: práticas de pesquisa*. Campinas, 59-88.
- VALENTE, W. R. (1999). *Uma história da matemática no Brasil (1730-1930)*. São Paulo, SP: Annablume.