

Um panorama de proposições teóricas sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall

MARCIO VIEIRA DE ALMEIDA¹

SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI²

Resumo

No presente artigo apresento a proposta de minha pesquisa de Mestrado no âmbito do Programa de Estudo Pós-graduado em Educação Matemática da PUC-SP. Trata-se de uma pesquisa teórica, inserida no campo da Educação Matemática no Ensino Superior, que visa a organização de um panorama, segundo Lorenzato e Fiorentini, de proposições teóricas sobre a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, de artigos de autoria (ou com a colaboração) do pesquisador inglês David Tall, da Universidade de Warwick. O objetivo da pesquisa é o de realizar sínteses de resultados relevantes e evidenciar construtos teóricos apresentados em artigos desse pesquisador com o intuito de contribuir com a análise de dificuldades do ensino e aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, em especial os conceitos de função, número real e limite. A fonte de dados do projeto de pesquisa é o sítio acadêmico do pesquisador inglês, o qual possui um amplo acervo dos artigos produzidos. No presente artigo exponho o objeto de estudo, os objetivos e a relevância do projeto de pesquisa. Além disso, trago os resultados de um levantamento de dissertações e teses no banco da CAPES e exponho a ficha de leitura utilizada na coleta desses dados. Por fim, indico passos a serem executados para alcançar o objetivo pretendido

Palavras-chave: limites; ensino de cálculo; conceito imagem e conceito definição.

Abstract

This article aims at presenting a proposal of a Master's degree research under the Program of Graduate Studies of Mathematics Education at PUC-SP. It is a theoretical research, in the context of Mathematics Education in undergraduate courses, which the objective is to organize a proposition outline on the learning of Differential and Integral Calculus through the reading of articles written by the English research David Tall. The purpose of this research is to summarize the results and prove the theoretical constructs presented in Tall's articles in order to contribute to the analysis of the difficulties on the teaching and learning of concepts of Differential and Integral Calculus. The source of information is the academic website of the English researcher, in which one can find a variety of written articles, divided into seventeen sections. The object of study, purposes and relevance of this research project are exposed in this article. Furthermore, the results obtained through a survey in the CAPES Thesis Database and the reading files used in data acquisition are also exposed. Finally, we have reflected on the next steps towards fulfilling the aim of this research project.

Keywords: limits; teaching of calculus; concept image and concept definition.

Trabalho apresentado no II Encontro de Produção Discente em Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, realizado em 1 de dezembro de 2012.

¹ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – marcioalmeidasp@gmail.com

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – sigliori@pucsp.br

Apresentação

Neste artigo apresento meu projeto de pesquisa que visa a organização de um panorama de proposições teóricas sobre a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, cuja principal fonte de dados são artigos de autoria (ou com a colaboração) do pesquisador inglês David Tall.

O presente projeto está inserido no campo da Educação Matemática do Ensino Superior. Esse campo se estabeleceu recentemente, tanto no cenário internacional quanto no nacional (PINTO, 2002). Segundo Iglori (2009), as pesquisas relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem no Ensino Superior possuem as seguintes características:

[...] a investigação de fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado; investigar fatores que dificultam a aquisição de conceito da Matemática avançada; expandir a faixa etária das teorias da aprendizagem para a aquisição de conceitos complexos da Matemática; investigar abordagens de ensino que favoreçam apreensão dos conceitos, entre outros temas (IGLIORI, 2009, p. 12)

Um ponto relativo ao Ensino Superior que gostaria de ressaltar é a forma como a aprendizagem é concebida, diferentemente daquela do Ensino Básico. Segundo Iglori (2009, p.11 e 12), ocorre uma mudança na forma como os conteúdos curriculares são tratados e na atitude dos estudantes. Esses conteúdos são considerados como “objetos de ensino”, ao invés de “objetos de aprendizagem”, os quais devem ser compartilhados entre professores e estudantes. Com isso, os estudantes adquirem maior responsabilidade pelo sucesso (ou insucesso) de sua aprendizagem.

Em vista das peculiaridades apresentadas nesse campo de pesquisa houve a necessidade de formular outras teorias específicas para atender essa modalidade de ensino, as quais formaram um corpo teórico próprio. Dentre os pesquisadores que se debruçam sobre os problemas e especificidades da Educação Matemática no Ensino Superior destaco o trabalho de David Tall, pesquisador da Universidade de Warwick, no Reino Unido. A seguir apresento alguns dados sobre a biografia desse importante autor.

Tall cursou a graduação em Matemática no *Wadham College* de Oxford, no período 1960 a 1966. Nessa mesma instituição, ele obteve o doutorado em Matemática no ano de 1967. Nos anos de 1966 a 1969 foi professor de Matemática na *Sussex University* quando escreveu o seu primeiro livro *Functions of a Complex Variable*. Desde 1969, ele fez parte do corpo docente da Universidade de Warwick e obteve o doutoramento em Educação, no ano de 1986. No período de 1969 à 1980, Tall lecionou aulas de Matemática, com interesse especial em Educação, no *Mathematics Institute* do Departamento de Ciência da Educação, no período de 1980 a 1994, onde ele atuou como professor pleno. No final desse período aposentou-se por motivos de saúde permanecendo como membro, em tempo parcial, do *Institute of Education* da Universidade de Warwick, onde ele escolheu ser denominado *Professor*³ em Pensamento Matemático. Outro ponto importante da biografia desse brilhante autor é a organização do livro *Advanced Mathematical Thinking* (TALL, 1991). Esse livro trouxe o resultado das discussões do grupo de trabalho, criado no ano de 1985, no Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (IGPME, comumente abreviado como PME). Esse livro contou com a participação de pesquisadores como Ed Dubinsky, Michèle Artige, Sholmo Vinner, Bernard Cornu, Tommy Dreyfus, dentre outros.

Uma das contribuições desse pesquisador a ser destaca é a proposição do construto teórico: conceito imagem e conceito definição. Esse construto foi elaborado em parceria com o pesquisador Shlomo Vinner. O conceito imagem é descrito como:

[...] a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, a qual inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ele é construído ao longo dos anos por meio das experiências de todos os tipos, mudando quando o sujeito encontra novos estímulos e amadurece (TALL; VINNER, 1981, p. 152).⁴

E o conceito definição como:

[...] a forma que as palavras foram utilizadas para especificar aquele conceito. Ele pode ser aprendido por um sujeito de uma forma rotineira ou aprendido mais significativamente e relacionado, em maior ou menor grau, com o conceito. Também pode ser uma reconstrução pessoal do estudante de uma definição (TALL; VINNER, 1981, p. 152).⁵

³ Segundo o dicionário eletrônico *Cambridge Dictionaries Online* a palavra inglesa *Professor* significa o “professor que possui o maior grau de uma universidade britânica, ou um professor de alto escalão em uma universidade ou faculdade americana” (Tradução nossa). Endereço eletrônico do dicionário consultado: <http://dictionary.cambridge.org/>

⁴ Tradução nossa.

⁵ Tradução nossa.

A proposta é elaborar o panorama pretendido de artigos de Tall, realizando sínteses de resultados e evidenciando construtos teóricos apresentados nos mesmos. Com isso busco contribuir com a análise de dificuldades do ensino e aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Tais artigos são buscados no sítio acadêmico do pesquisador⁶, em específico em uma seção, com um total de 15 artigos. O estudo refere-se ao ensino e aprendizagem do Cálculo considerando sua importância na constituição de noções fundamentais para a Matemática (IGLIORI, 2009, p. 13), tais como conceito de número real, infinito, funções, entre outros.

Um ponto que vale a pena ser salientado é que a escolha de artigos como objeto de estudo tem a perspectiva levantada pelos autores, Burzryn, Drummond e Nascimento (2010), para os quais é por meio de artigos que os pesquisadores de todo o mundo podem: “[...] divulgar os resultados de suas pesquisas, os métodos que usam, os conceitos que adotam ou propõem, as teorias que os orientam” (p. 17).

Essa citação reforça o fato de que os artigos são um importante canal de comunicação entre pesquisadores. Suponho que por meio dos artigos o panorama pretendido represente os pensamentos do autor sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

A relevância deste estudo no cenário do ensino e aprendizagem de Matemática do Ensino Superior está no entendimento de que sínteses são necessárias, de que a comunidade de pesquisa precisa mapear linhas de pesquisa em desenvolvimento e buscar canais que desenvolverão práticas educacionais coerentes nessa modalidade de ensino (MAMONA-DOWNS; DOWNS, 2008, p. 154).

No restante do artigo mostro quais foram as atividades realizadas por mim até presente momento sendo que, na última seção, exponho quais serão os próximos passos a serem percorridos no projeto de pesquisa.

⁶ Endereço eletrônico: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>. Acesso em: 12 de setembro de 2012.

Percurso da pesquisa

Com o foco do projeto de pesquisa em mente, e, visando dimensionar o peso da utilização das teorias de Tall entre as pesquisas brasileiras, realizei, inicialmente, uma busca no banco de teses de dissertações da CAPES⁷. Abaixo descrevo como foi feita a referida busca.

Utilizei a ferramenta de busca disponível no sítio sob o critério “Assunto” com as palavras “Cálculo Diferencial e Integral”. Após isso, obtive um total de 136 dissertações e teses de Instituições de Ensino Superior espalhadas por todo o território nacional. Do montante total de pesquisas, primeiramente, excluí aquelas que não se relacionavam ao campo da Educação Matemática. Em resultado dessa análise restaram 88 pesquisas. Desse novo conjunto de trabalhos, por motivo de dificuldade de encontrar versões digitais das dissertações e teses, resolvi considerar apenas pesquisas posteriores ao ano 2000, com isso obtive um total de 72 trabalhos. Por fim, um último corte no conjunto de trabalhos foi necessário ser feito, porque, mesmo entrando em contato com os pesquisadores responsáveis pelas pesquisas e consultando sítios de bibliotecas digitais de várias Instituições de Ensino Superior, não foi possível encontrar a versão digital de alguns trabalhos, com isso a nossa amostra final contou com 58 pesquisas.

Desse total de teses e dissertações procurei no texto de cada uma delas a existência de alguma citação do pesquisador David Tall. Após essa primeira análise, eu obtive o total de 23 pesquisas que citavam o pesquisador. Analisei cada pesquisa que satisfizesse o critério anterior, com o objetivo de compreender o contexto de cada uma das citações do autor. Após análise foram identificadas oito pesquisas (sete dissertações e uma tese) nas quais Tall é referencial teórico. A seguir apresento, de maneira sintética tais pesquisas, com o intuito de indicar quais elementos teóricos de Tall são utilizados no ensino de Cálculo Diferencial Integral.

Do total de oito pesquisas encontradas no levantamento quatro utilizaram o construto teórico conceito e conceito definição.

⁷ Endereço eletrônico: <http://capesdw.capes.gov.br/capesdw/>. Acesso em: 29 de agosto de 2012.

Miranda (2010) em seu trabalho desenvolveu uma proposta de ensino e aprendizagem para Cálculo Diferencial e Integral, na qual os conteúdos envolvidos foram funções de duas variáveis e gráficos do \mathbb{R}^3 , com auxílio de uma tecnologia: a informática.

Souza (2007) analisou as relações entre as concepções sobre o conceito de Integral revelada por professores, bem como a maneira que eles analisam a produção dos alunos, de forma a obter indícios sobre as práticas educativas desses profissionais.

Abreu (2011) analisou relações entre a intuição e o rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual manifestadas por 56 alunos, que cursavam Cálculo I em relação aos conceitos de limite e continuidade.

Luz (2011) em sua dissertação investigou e analisou, qualitativamente, os resultados obtidos por uma proposta de intervenção, na qual um curso de Cálculo foi ministrado sob a perspectiva da resolução de problemas em um ambiente computacional.

O segundo elemento teórico, de Tall, destacado no levantamento de teses e dissertações foi a utilização do computador e *software* no ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática avançada. Esses elementos “são fontes ricas de imagens visuais que seriam, por vezes, impossíveis de serem obtidas sem esse recurso” (Barbosa, 2009, p. 57). Sobre a utilização do computador e *softwares*, Tall e Dubinsky (1991, p. 236) afirmam que eles podem ser considerados como:

[...] uma ferramenta – uma ferramenta poderosa – mas qualquer ferramenta pode somente ser utilizada na sua capacidade máxima por aqueles que vão utilizá-las. A situação é paralela ao uso de uma calculadora simples: elas não ensinam a criança como somar (ou dividir), mas elas são ferramentas úteis para somar e dividir quando se conhece a aritmética.⁸

Ainda Tall (2000) considera o computador e os *softwares* como “organizadores genéricos”⁹, ele define esse elemento como: “[...] *um ambiente (ou micromundo), o qual permite ao aprendiz manipular exemplos e (se possível) contraexemplos de um conceito matemático específico ou um sistema relacionado de conceitos*” (p. 13).¹⁰

Nessa perspectiva foram observadas duas dissertações e uma tese. A primeira pesquisa é

⁸ Tradução nossa.

⁹ Tradução do termo *generic organiser* (TALL, 2000, p. 13).

de Santos (2008) na qual os sujeitos eram alunos, do segundo ano de um curso de Licenciatura em Matemática, que cursavam Cálculo Diferencial e Integral II desenvolvido por meio de modelagem matemática mediadas pelo uso do computador.

A segunda pesquisa, a tese de Barbosa (2009), teve por objetivo investigar como um coletivo formado por alunos ingressantes no curso de Matemática produz os conhecimento de Função Composta e Regra da Cadeia.

Por fim, a última pesquisa foi Fonseca (2011) na qual o pesquisador analisou qual o impacto da utilização das novas tecnologias na visualização e representação de superfície geométrica, dando ênfase às quádricas¹¹. Os sujeitos de pesquisa foram alunos de um curso de Engenharia.

O último tópico, que eu destaco dentre os elementos teóricos de David Tall, é a função da visualização (TALL, 1991) na aprendizagem. Segundo esse pesquisador, negar esse elemento no ensino “é negar as raízes de muitas de nossas ideias matemáticas mais profundas”¹² (ibidem, p. 1). O trabalho que eu encontrei nessa perspectiva foi Couy (2008). O pesquisador investigou o uso do pensamento visual no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, especificamente, os conceitos relativos às variações de funções reais de uma variável.

Essa busca, no banco da CAPES, possibilitou a constatação de que elementos teóricos de Tall, em certo grau, são utilizados em pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral em nosso país.

A análise dos artigos da seção *Limits, Infinity & Infinitesimals* e das dissertações e teses aqui apresentada de forma sucinta, reforçou a minha percepção da importância de Tall como teórico da Educação Matemática do Ensino Superior, o que deve ser cada vez mais confirmado com a finalização do levantamento bibliográfico, ainda em andamento.

Destaco a seguir procedimentos que nortearão a análise dos documentos da seção selecionada.

Este projeto de pesquisa insere-se entre as pesquisas histórico–bibliográficas. Segundo

¹⁰ Tradução nossa.

¹¹ Segundo Stewart (2002), “uma quádrica é um conjunto de pontos que obedecem a uma equação do segundo grau nas variáveis x , y e z ” (p. 822).

Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 102) nesse tipo de pesquisa a coleta de informações é feita por meio de fichamentos de leituras. Esses elementos ajudam a organizar de maneira sistemática os registros relativos a informações obtidas. A seguir, exibo quais são os itens dessa primeira ficha de leitura.

Para a construção da ficha de leitura dos artigos consultamos Fiorentini (1994). Os trabalhos de Junho (2003), Oliveira (2003) e Ardenghi (2008) também auxiliaram nessa construção. Como os documentos considerados neste projeto são artigos, considerei também as indicações de Bursztyn, Drummond e Nascimento (2010). Até o presente momento a coleta de dados foi organizada a partir de uma ficha de leitura com os seguintes itens:

1. Autores;
2. Título do trabalho;
3. Ano de publicação;
4. Local e evento onde o artigo foi publicado;
5. Nota existente no site do autor;
6. Nível de ensino investigado no artigo;
7. Problemática;
8. Tópico matemático considerado no artigo;
9. Referencial teórico do artigo;
10. Resultados obtidos;
11. Resenha do artigo;

Agora justifico os motivos que nortearam a construção de cada um dos itens da ficha de leitura apresentada. Os itens **1**, **2** e **3** foram considerados com vistas a fornecer informações gerais do artigo. O item **4** estão indicados os eventos em que o artigo foi publicado. O item **5** visa detectar as impressões de David Tall sobre o artigo considerado, analisando a descrição existente no site. Com o item **6**, o objetivo foi identificar o nível de ensino abordado no artigo porque considero que alguns tópicos do Cálculo Diferencial e Integral, como funções, números reais e infinito, não são objetos de estudo apenas no Ensino Superior.

¹² Tradução nossa.

Para Bursztyn, Drummond e Nascimento (2010), um artigo científico possui três características fundamentais: o foco em um único problema ou em problemas integrados, comunicação dos resultados de uma determinada pesquisa ou estudos e a explicação das teorias, conceitos e metodologias utilizadas (ibidem, p. 31). Com base nesses três pontos de um artigo científico foram criados os itens **7**, **8**, **9** e **11** da ficha de leitura. Os itens **7** e **8** foram norteados pela primeira característica pois, nesses itens procurei identificar, durante a leitura de cada artigo, qual o tópico relacionado à Matemática e à problemática do artigo. Entendo por problemática de um artigo “o contexto de que emerge a questão” (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 91). Com isso, nesses itens analisei qual é o objetivo principal do artigo. Após a identificação da problemática, considerei qual é o referencial teórico utilizado pelo(s) autor(es) do artigo, no item **9**. Isso auxiliará no mapeamento dos referências teóricos utilizados por Tall na análise de fenômenos relacionados ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. No item **10** apresento um resumo do artigo por mim produzido, com o intuito de explicitar os principais tópicos e assuntos discutidos. Por fim no item **11**, explicito os resultados de cada artigo, mesmo sendo conhecedor da não obrigatoriedade da apresentação explícita de resultados, no caso de um artigo (BURSZTYN; DRUMMOND; NASCIMENTO, 2010, p. 34).

Considerações finais

Neste texto apresentei o percurso do projeto de pesquisa realizado até o presente momento, no qual levantei algumas pesquisas, no âmbito nacional, que utilizaram os elementos teóricos concebidos, ou em colaboração, de David Tall e procedimentos para a elaboração da ficha de leitura utilizada para coletar os dados dos artigos da seção *Limits, Infinity & Infinitesimals* do sítio acadêmico do pesquisador¹³.

A leitura dos artigos está sendo finalizada, e os próximos passos seriam: alistar os elementos teóricos desenvolvidos por David Tall; ampliar o estudo de cada um desses e relacionar construtos teóricos propostos por Tall para o estudo da aprendizagem de tópicos do Cálculo Diferencial e Integral. Por fim, pretendo apresentar sínteses dos resultados dos artigos levantados.

Referências

- ABREU, O. H. (2011). *Discutindo Algumas Relações Possíveis Entre Intuição e Rigor e Entre Imagem Conceitual e Definição Conceitual no Ensino de Limites e Continuidade em Cálculo I*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.
- BARBOSA, S. M. (2009). *Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.
- BURSZTYN, M.; DRUMMOND, J. A.; NASCIMENTO, E. P. (2010). *Como escreve e publicar um trabalho científico: Dicas para pesquisadores e jovens cientistas*. Rio de Janeiro: Garamond, 17-41.
- COUY, L. (2008). *Pensamento Visual no Estudo da Variação de Funções*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- FIORENTINI, D. (1994). *Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática*. Tese (Doutorado em Educação: Metodologia de Ensino). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. (2009). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3ª Edição. Campinas: Autores Associados.
- FONSECA, R. C. (2011). *Uma Abordagem Geométrica para Cálculo do Volume das Quádricas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Severino Sombra, Vassouras.
- IGLIORI, S. B. C. (2009). Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.) *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, 11-26.
- JUNHO, B. A. P. (2003). *Panorama das Dissertações em Educação Matemática sobre o Ensino Superior da PUC/SP de 1994 a 2000*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- LUZ, V. M. (2011). *Introdução ao Cálculo: uma Proposta Associando Pesquisa e Intervenção*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- MAMONA-DOWNS, J.; DOWNS, M.L.N. (2008). Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. In: ENGLISH, L. (Org.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 2ª ed. New York: Routledge, 154-174.
- MIRANDA, A. M. (1991). *As Tecnologias da Informação no Estudo do Cálculo na Perspectiva da Aprendizagem Significativa*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

¹³ Endereço eletrônico: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/limits-infinity.html>

OLIVEIRA, E. A. (2003). *A Educação Matemática & Ensino Médio: um panorama das pesquisas produzidas na PUC/SP*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PINTO, M. M. F. (2002) Educação Matemática no Ensino Superior. *Educação em Revista*, Belo Horizonte. N. 36, 223-238.

SANTOS, F. V. (2008). *Modelagem Matemática e Tecnologia de informação e comunicação: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SOUZA, F. E. (2007). *A Integral de Visão de Professores de Cálculo Diferencial e Integral Frente à Produção de Alunos*. Dissertação (Mestrado em Educação de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

STEWART, J. (2002). *Cálculo*. vol. II, 4ª edição, São Paulo: Thompson.

TALL, D. O.; VINNER, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*. N. 12, 151-169.

TALL, D. O. (Org.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer.

TALL, D. O. (1991). *Intuition and rigor: the role of visualization in the calculus*. MAA Notes. N. 19, 105-119.

TALL, D. O. (2000). Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: *Proceedings of Asian Technology Conference in Mathematics*, 5, 2000, Chiang Mai. Blackwood: ATCM.