Resolução de questões relacionadas ao cálculo e o uso da intuição e do rigor

ANDRÉ LÚCIO GRANDE[1]

BENEDITO ANTONIO DA SILVA[2]

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo realizar um estudo didático e epistemológico sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), onde será efetuada uma proposta didática de uma sequência de ensino baseada em possíveis situações-problema que auxiliem na compreensão da forte e íntima relação existente entre as operações de integração e diferenciação, emergindo tais relações e fazendo com que as mesmas sejam evidenciadas. Pesquisas realizadas no Brasil e em outros países reiteram a incompreensão da essência do teorema por parte dos alunos, que privilegiam o uso e a manipulação de fórmulas e algoritmos memorizáveis, influenciados em grande medida por um curso de Cálculo em que a exposição dos conceitos é carregada de formalismo e rigor. Com isso pode-se formular o seguinte questionamento: como criar uma sequência de ensino da relação existente entre as operações de integração e derivação em que os conceitos são estruturados e desenvolvidos em um quadro de processo de ensino que encontram um terreno intuitivo favorável? Como fundamentação teórica serão utilizadas as ideias ligadas ao intuicionismo segundo a visão do matemático e filósofo francês Henri Poincaré bem como o ponto de vista da teoria do uso da intuição nas Ciências e na Matemática, proposta pelo psicólogo Efrain Fischbein. Essa pesquisa se caracteriza como sendo do tipo qualitativa, onde serão analisados livros sobre a história do Cálculo, teses e artigos sobre o ensino e aprendizagem do TFC, além da análise da resolução de algumas questões relacionadas ao Cálculo efetuadas por alunos de uma faculdade pública do estado de São Paulo.

Palavras-chave*: teorema fundamental do cálculo; intuição; rigor; formalismo; sequência de ensino.*

Abstract

This research, forms part of a doctoral thesis in development, aims to conduct a study on the didactic and epistemological Fundamental Theorem of Calculus (FTC), which will be performed a didactic proposal of a teaching sequence based on possible problem situations that assist in the understanding of the strong relationship between the operations of integration and differentiation, these emerging relationships and causing them to be evidenced. Research conducted in Brazil and other countries reiterate their misunderstanding of the essence of the theorem by students who favor the use and manipulation of memorized formulas and algorithms, driven largely by a course in Calculus that exposure of concepts is charged formalism and rigor. In this article, will be described and analyzed some resolutions prepared by the students who responded to

Trabalho apresentado no II Encontro de Produção Discente em Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemácia, realizado em 1 de dezembro de 2012. Apoio: CAPES.

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – andremath@uol.com.br

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – benedito@pucsp.br

a questionnaire pilot double on some issues related to the calculation. Will be used as theoretical ideas related to intuitionism in the view of the french mathematician and philosopher Henri Poincaré and the point of view of the theory of the use of intuition in Science and Mathematics, proposed by psychologist Efrain Fischbein. This research is characterized as qualitative, which will be analyzed books about the history of calculus, theses and articles on teaching and learning of TFC, as well as analysis of the resolution of some issues related to the calculation made by students at a public college in the state of São Paulo.
***Keywords**: fundamental theorem of calculus; intuition;rigo ; formalism ; teaching sequence.*

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) constitui uma importante área do conhecimento matemático. Esta disciplina ocupa um lugar de destaque nos cursos onde a mesma é ministrada. De um modo geral, o CDI é estudado nos primeiros anos nos cursos de graduação de diversas áreas, como Matemática, Física, Química, Engenharia, Tecnologia, Economia, Biologia, por exemplo.

Dentre os problemas estudados num curso de Cálculo, dois merecem destaque pela sua importância e o legado deixado no estudo histórico de sua resolução, a saber:

- o problema da área limitada pelo sob o gráfico da função, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ -o problema da tangente consiste em encontrar a declividade m (coeficiente angular) da reta tangente num ponto x_0 do gráfico de uma função $f(x)$.

Esses dois problemas (quadratura e tangente) aparentemente não relacionados deram origem, respectivamente, a dois conceitos matemáticos considerados essenciais do Cálculo: a integral e a derivada.

O teorema que estabelece a relação entre tais problemas é denominado Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Esse teorema demonstra que a integração e a diferenciação são operações inversas uma da outra, o que se pode concluir que os problemas de áreas limitadas sob o gráfico de uma função num intervalo e o problema da determinação da inclinação da reta tangente num ponto da função podem ser resolvidos juntos, pois resolvido um problema o outro também passa a ser solucionado.

Entretanto, nos últimos anos, no ensino e aprendizagem das noções elementares do CDI, as operações de integração e diferenciação não têm sido relacionadas e fortemente conectadas por meio do TFC. Isso é evidenciado nas pesquisas em Educação

Matemática voltadas ao Ensino Superior, onde se observa a incompreensão por parte de alunos desse teorema, a ausência da ênfase dessa relação nos livros didáticos e da falta de exploração desses elementos por parte dos professores ao lecionarem a disciplina de Cálculo.

Segadas Vianna (1998) em sua pesquisa investigou a compreensão que os alunos apresentavam quanto ao TFC, com o objetivo de procurar identificar as dificuldades que eles apresentavam com relação aos conceitos envolvidos mesmo, como continuidade de uma função, por exemplo, que interferem em sua compreensão de maneira explícita ou implícita.

A autora concluiu que os alunos não interpretam e não identificam o teorema na representação gráfica, e segundo a autora, as representações gráficas em geral são pouco utilizadas como facilitadores na resolução de alguns problemas ou como auxiliadores na compreensão de uma definição ou teorema.

Artigue (2002) analisando a concepção dos estudantes sobre alguns conceitos ministrados num curso de Cálculo e Análise Real encontrou alguns resultados semelhantes aos de Segadas Vianna, como a constatação de que os alunos não trabalham graficamente com questões relacionadas com o TFC, sendo que os mesmos não dominam o conhecimento de aplicar o teorema em situações principalmente referentes a relacionar o gráfico de uma função definida num intervalo e o respectivo gráfico de sua função primitiva.

Essa falta da manipulação do registro gráfico nas questões que envolvem a aplicação do TFC pode ser encontrada na pesquisa de Campos (2007), que ao analisar alguns livros de CDI constatou que os autores privilegiam o registro algébrico na abordagem do teorema e na resolução de exercícios sobre o mesmo.

Anacleto (2007) em sua pesquisa procurou investigar os conhecimentos mobilizados pelos alunos que cursaram a disciplina CDI e que já haviam estudado o TFC quanto à inter-relação entre diferenciação e integração. Dentre alguns resultados obtidos, a autora concluiu que os alunos envolvidos na pesquisa apresentaram uma mobilização incompleta dos conceitos de derivada, integral e continuidade de uma função, e consequentemente um domínio parcial do conhecimento do TFC, por apresentarem em suas resoluções apenas conteúdos e algoritmos memorizados.

Os resultados de pesquisa de Picone (2007) alertam que grande parte dos professores entrevistados em seus trabalhos não explora graficamente o TFC em suas aulas, fazendo com que seus alunos em grande medida fiquem restritos apenas a manipulações algébricas relacionando uma função primitiva e sua respectiva derivada e vice-versa.

Além das dificuldades dos alunos na compreensão do TFC e principalmente da forte ligação existente entre as operações de integração e diferenciação, alguns resultados de pesquisas também apontam a falta de conexão entre a representação gráfica e a analítica de uma função, que segundo Segadas Vianna interferem na interpretação gráfica do TFC.

Segundo Tall (1991) os alunos apresentam uma compreensão tipicamente algébrica e não visual dos principais conceitos relacionados ao TFC, pois os mesmos se utilizam apenas de algoritmos e técnicas memorizáveis e quando necessitam da interpretação geométrica, de acordo com Segadas Vianna, são utilizados imagens e esquemas interiorizados pelos alunos que nem sempre correspondem com a definição formal de um conceito.

Essa utilização de algoritmos e técnicas algébricas é decorrente, de certa forma, do modelo de ensino do Cálculo que privilegia a apresentação dos conceitos por meio de definições, demonstrações e exercícios e não favorece inicialmente o desenvolvimento cognitivo do aluno como o uso de analogias e da intuição na construção do conhecimento, seguido da apresentação de exemplos e contraexemplos até a etapa da demonstração, o que em grande medida se reflete nas propostas de ensino dos conceitos fundamentais do Cálculo.

Ávila (2011) explicita e defende o ponto de vista do ensino baseado em características intuitivas:

> A ideia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico-dedutivos – uma ideia muito difundida, mesmo entre professores de Matemática – é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta. O pensamento matemático vai muito além do raciocínio dedutivo. Em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes até mais que da dedução. (ÁVILA, 2011, p. 4)
> .

Com relação ao ensino e aprendizagem do TFC, percebe-se pelos resultados de algumas pesquisas descritas, que na maioria dos casos num curso de Cálculo não se dá um tratamento da relação mútua entre as operações de integração e diferenciação, seja por meio de atividades propostas pelos professores, ou até mesmo na abordagem dos livros didáticos que não enfatizam a respeito do tema.

Diante da questão da ausência do enfoque das relações existentes entre as essas operações, e procurando respostas para tais questionamentos e indagações, o meu problema de pesquisa pode ser resumido da seguinte maneira: existe algum tipo de intervenção que pode ser realizada no ensino de Cálculo, especificamente sobre o TFC, que promova a compreensão da forte e íntima relação existente entre as operações de integração e diferenciação, criando-se uma sequência de ensino que apresentasse uma situação-problema que emergisse tais relações e que faça com que as mesmas sejam evidenciadas?

Portanto, essa pesquisa tem como objetivo realizar um estudo didático e epistemológico sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. Como resultado desse estudo, será feita uma proposta didática de uma sequência de ensino do TFC, baseada em possíveis situações-problema que auxiliem na compreensão dos conceitos envolvidos no mesmo e principalmente da relação e conexão entre integral e derivada.

Além disso, diante de tal problema. pode-se formular ainda o seguinte questionamento: como criar uma sequência de ensino da relação existente entre as operações de integração e derivação em que os conceitos são estruturados e desenvolvidos em um quadro de processo de ensino que encontram um terreno intuitivo favorável? Quais são as implicações dessa abordagem para o ensino e a aprendizagem do CDI?

1. Referencial Teórico

Como referencial teórico serão utilizadas as ideias ligadas ao intuicionismo segundo a visão do filósofo e matemático francês Henri Poincaré, que discute em suas obras como *A Ciência e a Hipótese* (1902), *O Valor da Ciência* (1905), *Ciência e Método* (1908), alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico bem como o uso da intuição e do rigor descritas por Efrain Fischbein.

Com relação às características do raciocínio intuitivo, Poincaré distingue os tipos de intuição da seguinte maneira:

> - **o apelo aos sentidos e à imaginação**, também denominada de intuição sensível, com o uso de representações geométricas, por exemplo. Essa intuição, segundo Poincaré, não pode nos dar a certeza, entretanto a mesma possui a

propriedade de instrumento da invenção do conhecimento matemático.

Como exemplo dessa intuição geométrica, Poincaré considera a seguinte afirmação: "Se numa reta o ponto *C* está entre *A* e *B* e o ponto *D* esta entre *A* e *C* então o ponto *D* esta entre *A* e *B*".

Para comprovar a veracidade de tal afirmação, somos levados ao recurso geométrico imaginando tal situação.

- a **intuição ao número puro**, que pode ser a geradora do verdadeiro raciocínio matemático, sendo o número desprovido de qualquer característica geométrica, de onde se origina a generalização por indução e pode-se encontrar de forma explícita nas ciências experimentais. Esse tipo de intuição, para o autor, apresenta a propriedade de invenção em menor grau, sendo o instrumento da lógica formal, da demonstração. Esse raciocínio também pode ser descrito como raciocínio por recorrência, que Poincaré defende ser único instrumento que possibilita uma passagem do finito para o infinito. Essa intuição pode ser resumida no seguinte princípio conhecido como princípio da indução matemática ou lei por recorrência.

Fischbein (1987) afirma que a Matemática pode ser considerada sob dois pontos de vista: como corpo do conhecimento formal, rigoroso e dedutivo, exposto em alguns tratados e livros didáticos e como uma atividade humana, defendida de maneira análoga pelos construtivistas.

O autor discute a interação existente entre três componentes básicos da Matemática como uma atividade humana: o formal, o algorítmico e o intuitivo.

O **aspecto formal** se refere aos axiomas, definições, notações, teoremas e demonstrações. Esses elementos são criados ou aprendidos, organizados, testados e usados nas atividades pelos estudantes. Cabe ressaltar que acredito na hipótese de que os teoremas, conceitos, notações e demonstrações não devem ser meramente decorados pelos estudantes, pois o rigor é um componente essencial no desenvolvimento de atividades matemáticas, no sentido de validar, dar coerência aos objetos e descobertas. O que se deve levar em conta é que o conhecimento desses elementos e suas restrições e implicações constituem um fator imprescindível no processo de ensino e aprendizagem, pois segundo o autor, mesmo analisando a Matemática como um processo humano, não se deve deixar de levar esse aspecto em conta.

O **componente algorítmico** diz respeito às técnicas de resolução de problemas e as estratégias padronizadas. Segundo Fischbein, é uma mera ilusão acreditar que o conhecimento de axiomas, teoremas, demonstrações, da maneira que encontramos formalmente nos livros-texto de Matemática, ou seja, o aspecto formal descrito anteriormente é condição suficiente para que um estudante seja capaz de resolver problemas matemáticos. Além do aspecto formal, se faz necessário criar habilidades e não somente à compreensão dos conceitos, sendo essas habilidades adquiridas somente pela pratica e o treino sistemático.

O terceiro componente diz respeito à **intuição**, sendo um tipo de cognição que é aceito diretamente sem o sentimento de que algum tipo de justificação e solicitada. A principal característica da intuição é a denominada auto-evidência, em que as afirmações são aceitas sem que seja solicitada uma verificação ou demonstração a priori.

Essas componentes não podem ser analisadas nem se desenvolverem de maneira isolada, pois são as inter-relacionadas entre essas componentes que promovem o desenvolvimento das atividades matemáticas.

Fischbein alerta sobre a complexidade da relação entre os componentes formal, o algorítmico e a intuição. Essas interações e conflitos na atividade matemática não são facilmente identificados e compreendidos, todavia análises teóricas, observações atentas e estudos experimentais têm colaborado com as pesquisas em Educação Matemática para identificar possíveis dificuldades, interações e a importância dos componentes descritos anteriormente.

2. Metodologia e Procedimentos Metodológicos

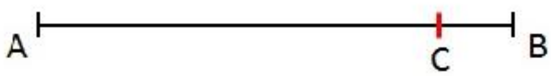
A pesquisa realizada constituiu-se de duas fases: na primeira foi realizado um questionário-piloto com a participação de 14 alunos de uma faculdade pública do estado de São Paulo; na segunda após a análise dos resultados obtidos no questionário-piloto, elaborou-se uma intervenção de ensino com os alunos da mesma instituição.

A faculdade selecionada na qual leciono as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II e Métodos Quantitativos para Gestão está localizada numa cidade da região metropolitana do estado de São Paulo e possui cursos de graduação em tecnologia nas seguintes modalidades: Polímeros, Logística e Informática para Negócios.

Os 14 alunos que participaram do questionário-piloto estão regularmente matriculados nos cursos de Tecnologia em Polímeros (10 alunos) e Tecnologia em Logística (04 alunos). Esses 14 alunos participantes se organizaram em sete duplas, que se formaram por escolha própria, sendo que as mesmas foram convidadas e compareceram num único encontro que foi agendado previamente. Nesse encontro experimental, os alunos responderam a um questionário-piloto constituído por quatro questões abertas. A resolução das questões sendo feita em duplas tem por finalidade gerar discussões entre os alunos de cada dupla de quais elementos são utilizados e quais as dificuldades encontradas na resolução dessas questões. A seguir será descrita a primeira questão e a análise da resolução da mesma feita pelos estudantes que participaram da pesquisa.

A primeira questão $\mathbf{Q_1}$ foi sugerida baseando-se em uma das atividades propostas por Fischbein (1987) que em seus trabalhos diagnosticou e classificou quais são os níveis de raciocínios intuitivos que seus alunos demonstraram na resolução de algumas questões. Ela tem por finalidade observar como o aluno utiliza os conceitos geométricos, tais como segmento de reta, ponto médio de um segmento para justificar sua resposta, além do conhecimento sobre números racionais, irracionais e a incomensurabilidade de segmentos.

01. Considere um segmento de reta $\overline{AB}$ e sobre esse segmento escolhe-se aleatoriamente um ponto C, entre A e B, conforme a figura a seguir:



Divida o segmento $\overline{AB}$ em duas partes iguais, e novamente, divida cada uma das partes obtidas em duas metades. Repita novamente a divisão nas outras partes obtidas anteriormente. Se continuarmos dividindo cada uma das novas partes obtidas em duas outras partes iguais, será que chegaremos a uma situação tal que um dos pontos da divisão coincida com o ponto C, ou seja, será que conseguimos acertar ou atingir o ponto C? Justifique a sua resposta.

Quadro 01 – Questão-Piloto 01 (AUTOR, 2012)

Embora o enunciado seja igual ao apresentado nos estudo de Fischbein, descreveremos a seguir algumas sugestões de resoluções elaboradas por nós que não foram citadas nos trabalhos do autor.

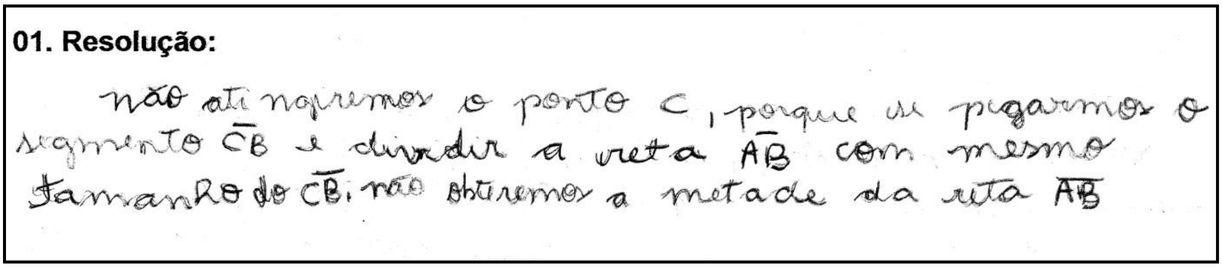
Na tentativa de responder a questão, por exemplo, um aluno por meio de um raciocínio intuitivo pode concluir que sendo possível sempre dividir cada segmento obtido em duas partes iguais, indefinidamente, em uma determinada divisão o ponto C será alcançado, pois dividindo-se o segmento em partes infinitamente pequenas, o ponto C será alcançado embora se não houver um segmento “sobraria” apenas um ponto que poderia ser o ponto C.

Esse raciocínio constitui-se de uma cognição intuitiva denominada convicção intrínseca, onde o aluno tem o sentimento de certeza mesmo a questão aparentemente não se constituir como auto-evidente. Entretanto, o modo com que os professores trabalham em sala de aula conceitos como infinito, divisão de um segmento indefinidamente pode causar o que Fischbein descreveu como efeito coercitivo, que afeta a compreensão do ponto C ser possível ou não de se alcançar.

Algumas estratégias poderão ser utilizadas para encontrar a solução para a questão, como a utilização de sequencia numérica, onde por meio de um raciocínio por recorrência, constata-se que se o comprimento segmento $\overline{AB}$ seja dado por número racional e o segmento obtido $\overline{AC}$ ou vice-versa, o ponto nunca será alcançado. Essa situação traz em sua essência, mesmo os alunos não pensando em tal conceito, o conhecimento da incomensurabilidade de segmentos, que constitui um exemplo da falibilidade do raciocínio intuitivo, conforme se verificou no contexto histórico, e que foi resolvido com a teoria das proporções elaborada por Eudoxo.

Essa questão foi respondida parcialmente correta por apenas uma dupla (D_4) dentre as sete participantes. As outras seis duplas afirmaram que a divisão sendo feita indefinidamente, ou “tendendo ao infinito”, o ponto C será atingido.

Quanto às resoluções elaboradas pelas duplas, a dupla D_4 utilizou-se do seguinte argumento para responder à questão:



01. Resolução:

não atingiremos o ponto C, porque se pegarmos o segmento $\overline{CB}$ e dividir a reta $\overline{AB}$ com mesmo tamanho do $\overline{CB}$, não obteremos a metade da reta $\overline{AB}$

FIGURA 1: Resolução da questão Q_1 feita pela dupla D_4

FONTE: (AUTOR, 2012)

Durante a resolução dessa questão, observou-se que essa dupla utilizando-se de uma régua graduada procurou "medir" os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, o que corresponde a uma estratégia parcialmente incorreta. Essa tomada de decisão realizada pela dupla manifesta duas características: o uso da intuição geométrica como técnica de resolução do problema e a falta do rigor e do componente formal necessário para a elaboração da resposta. Esse tipo de intuição, mesmo carecendo da falta de rigor, não foi prevista como uma possível resolução para a questão.

Dentre as respostas apresentadas por outras duplas, algumas estratégias merecem ser destacados e que revelam em grande medida uma das principais características da intuição descritas por Fischbein: a auto-evidência, que no caso da questão, efetuando-se o número de divisões tender ao infinito, é possível atingir-se todos os pontos do segmento $\overline{AB}$.

A dupla D_1 coloca que o segmento $\overline{AB}$ possui um número de pontos, e o ponto C em um instante será atingido, com a ressalva de que se devem conhecer as medidas dos segmentos para que isso seja possível. Provavelmente essa dupla utilizou o termo limitado como sendo sinônimo de finito. Essa mesma dupla ainda coloca que se a divisão fosse efetuada em uma semi-reta ou reta, o ponto C não seria atingido, por não serem entes geométricos ditos "limitados". De maneira análoga a dupla pode ter considerado ilimitado como sinônimo de infinito. Isso pode ser explicado em grande medida ao confundirem operações que são realizadas com grandezas finitas são processadas de maneira análoga com infinitas.

Essas concepções de finito como limitado e infinito como ilimitado possui implicações na compreensão do conceito de limite, em que um conjunto sendo finito o limite pode ser alcançado e sendo infinito nada se pode concluir.

Essas afirmações refletem o aspecto intuitivo do poder coercitivo no modo com que o conceito de infinito, limite e limitado são ensinados pelos professores em sala de aula e como essa abordagem pode ser interiorizada pelos alunos. No caso particular do infinito, os alunos demonstraram uma visão do denominado "infinito potencial", ou seja, que o segmento de reta sendo formado por infinitos pontos, todos esses pontos podem ser alcançados potencialmente.

A maioria das duplas, por meio de suas respostas, demonstrou o aspecto da intuição da convicção intrínseca, da certeza que a divisão feita indefinidamente atinge todos os pontos do segmento, conforme afirmaram as duplas D_5 e D_7.

Apenas uma dupla (D_3) tentou estabelecer algebricamente a resolução da questão na tentativa de demonstrar a possibilidade de atingir-se o ponto C, porém não obteve sucesso. Os alunos dessa dupla se valeram do rigor algébrico para justificar a sua resposta.

Com isso, conclui-se de um modo geral os participantes, no que se refere ao a noção de infinitas divisões de um segmento, os alunos não utilizam o aspecto rigoroso e que apenas utilizando-se apenas do componente intuitivo procuraram responder a questão de maneira parcialmente correta.

Considerações parciais

As resoluções elaboradas pelos alunos reiteram algumas características intuitivas descritas por Fischbein que suscitam maior reflexão e discussão do papel dos componentes formal, algorítmico e intuitivo no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo e o equilíbrio que deve existir entre os três na formação do conhecimento matemático bem como suas implicações em que os professores de Matemática de um modo geral devem levar em conta em suas práticas de ensino.

Referências

ANACLETO, G. M. C. (2007). *Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ARTIGUE, M. (2002). Analyses. In: TALL, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Londres: Dordrecht Kluwer Academic, 167-198.

ÁVILA, G. S. S. (2011). *Várias Faces da Matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral.* 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher.

CAMPOS, R. P. (2007). *A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FISCHBEIN, E. (1991). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic.

______. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel.

PICONE, D. F. B. (2007). *Os registros de representação semiótica mobilizados por* *professores no ensino do teorema fundamental do Cálculo.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

POINCARÉ, H. (2008). *Ensaios Fundamentais.* Rio de Janeiro: Contraponto.

______. (2000). *O valor da ciência.* Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto.

______. (1984). *A Ciência e a Hipótese.* Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB.

SEGADAS VIANNA, C. C. (1998). *Student´s Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an Exploration of Definitions, Theorems and Visual Imagery*. Tese (Doutorado em educação), Institute of Education Universitiy of London, London.

TALL, D. O. (1991). Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. *Mathematics Teaching*, 137, 29-32.