

Un panorama de las investigaciones producidas respecto a la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

ANDRES COLLANTE HUANTO¹

KATIA VIGO INGAR²

Resumen

La presente investigación tuvo como objetivo identificar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) en el área de Educación Matemática. Para eso, hicimos una investigación bibliográfica del tipo Estado del Arte. Realizamos un mapeo de los diferentes trabajos de investigación, efectuados durante los últimos quince años eligiendo palabras-clave que utilizamos en la búsqueda de datos de programas de posgrado de universidades de Perú, Brasil, Colombia, Chile y Francia. Después del análisis de los trabajos de investigación, podemos afirmar que existe predominio del enfoque algebraico en la obtención de la solución de una EDO y se otorga importancia al uso de modelamiento en la enseñanza de la EDO.

Palabras-clave: Ecuación Diferencial Ordinaria; Estado de Arte; Campo de direcciones.

Abstract

The aim of this research was to identify the difficulties that students have in the learning of the Ordinary Differential Equation (ODE) in the subject of Mathematics. For this purpose, we used the State-of-the-Art methodology. Using keywords to search for data in postgraduate programs from universities in Peru, Brazil, Colombia, and Chile, we mapped the different research papers done during the last fifteen years. After analyzing the research papers, we can state that the algebraic approach prevails in obtaining the solution for an ODE, and the use of modeling for EDO teaching is considered important.

Keywords: Ordinary Differential Equation; State of the Art; Address field.

Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), durante siglos, han desempeñado un papel importante en las Matemáticas, ya que ellas proporcionan modelos para muchas situaciones de la vida real, como por ejemplo, movimientos de cuerpos celestes, vibraciones mecánicas, problemas de mezclas, entre otros. Además, nos permiten la formulación de procesos de diversas disciplinas, tales como Mecánica, Astronomía, Física, Química, Biología, entre otras, en el lenguaje matemático.

En nuestra tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Pontificia

¹ Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. IREM-PUCP – e-mail: andres.collante@pucp.edu.pe.

² Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. IREM-PUCP – e-mail: kvigo@pucp.edu.pe.

Universidad Católica del Perú y por nuestras investigaciones de referencia, identificamos la importancia que se produce en el enfoque algebraico y no en el enfoque cualitativo, así como las dificultades de los estudiantes para entender las EDO.

La relevancia académica de la presente investigación se justifica por los trabajos de investigación realizados en el área de la Educación Matemática que tienen como objeto matemático a las EDO; la relación entre los procesos de derivación e integración y la articulación de conceptos matemáticos, como el de función, diferenciabilidad y continuidad. Además, la relevancia profesional se produce porque nuestro objeto matemático es una herramienta que nos permite representar los diferentes procesos que ocurren en las diversas carreras profesionales, como en el área de Ingeniería, Humanidades, Ciencias Sociales, entre otros.

El problema es la falta de un documento concreto que permita un control de los diferentes trabajos de investigación realizados en el área con respecto a nuestro objeto matemático, particularmente lo referido al estudio de curvas soluciones trazadas en campos direccionales de ecuaciones diferenciales ordinarias que, de acuerdo a nuestro estudio, permite concluir que es un tema poco discutido en el salón de clase y poco estudiado por los investigadores.

Por ello, realizaremos una investigación bibliográfica, tipo Estado del Arte, que tenga como objetivo realizar un mapeo de los diferentes trabajos de investigación efectuados sobre la enseñanza y aprendizaje de la EDO en el área de Educación Matemática. Para esto, elaboraremos el fichaje de las tesis de doctorado y maestría, de artículos publicados en revistas científicas y de los resúmenes de congresos en los últimos 15 años, así como también elaboraremos sus respectivas reseñas críticas.

La presente investigación permitirá tener un panorama de los estudios realizados en relación a la EDO, así como de los marcos teóricos y metodologías utilizadas en las mismas. Además, determinar si aún prevalece el uso de lápiz y papel o el uso de tecnologías y, por último, estudiar algunas de las propuestas de solución planteadas por diversos investigadores respecto a la enseñanza y aprendizaje de curvas soluciones trazadas en campos direccionales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Incluso, como criterio, priorizamos las tesis de doctorado y maestría, artículos publicados en revistas científicas indexadas y en los resúmenes de algunos congresos de los últimos 15 años, cuyo tema esté ligado a la enseñanza y aprendizaje de las EDO.

Finalmente, realizamos una búsqueda en algunas bibliotecas de diferentes universidades de Perú, Brasil, Colombia, Chile y Francia; sin embargo, pocos trabajos fueron obtenidos por medio de sites, bibliotecas virtuales y repositorios digitales, lo que conllevó a la búsqueda de producciones científicas que presentasen palabras-clave relacionadas al objeto de nuestra investigación.

1 Metodología

Esta investigación es bibliográfica de tipo Estado del Arte. Al respecto, Londoño, Maldonado y Calderón (2016) la definen como una investigación documental que permite el estudio del conocimiento que ha sido escrito durante un intervalo de tiempo dentro de un área determinada. Su finalidad es informar el conocimiento que existe respecto al material documental sometido a análisis, para así revisar, de manera precisa y cuidadosa, los documentos que abordan un tema concreto (ver figura 1).

Figura 1: Concepto de Estado del Arte



Fuente: Londoño (2016, p. 19).

Es decir, un Estado del Arte es una acumulación crítica de diversos tipos de texto de un tema o disciplina o también el proceso cognitivo de una investigación realizada por medio de la lectura de la bibliografía hallada durante la búsqueda del problema, los temas y los contextos y que serán formalizados de manera escrita.

Santos (2015) afirma que el Estado del Arte es una investigación bibliográfica en donde se realiza una recapitulación integrativa de conocimientos sobre un determinado tema que son obtenidos de tesis de maestría y doctorado, aunque puede incluir artículos publicados en revistas e incluso comunicaciones publicadas en resúmenes de congresos

y seminarios.

El objetivo es mapear y discutir los resultados académicos con respecto a un determinado campo del conocimiento para responder qué aspectos vienen siendo tratados con importancia en diferentes épocas, lugares y de qué formas y en qué condiciones esos resultados vienen siendo producidos. Inclusive, permite observar las tendencias y vacíos de un área o tema específico.

Además, para elaborar una investigación bibliográfica tipo Estado del Arte, según Romanowski (2006), se debe seguir los siguientes procedimientos:

- Definir los descriptores, es decir, las palabras claves del tema investigado para realizar la búsqueda.
- Ubicar la base de datos de investigación, catálogos, conjunto de bibliotecas y bibliotecas electrónicas que proveen acceso al texto completo de las tesis de doctorado y maestría, revistas y artículos científicos.
- Determinar qué criterios para la elección del material formarán parte del Estado del Arte.
- Recopilar tesis de maestría y doctorado catalogadas en el banco de tesis.
- Buscar y seleccionar material de investigación en las bibliotecas (Virtuales o físicas).
- Realizar la lectura de las investigaciones con la preparación del resumen preliminar, considerando el tema, los objetivos, metodologías, resultados y la relación entre el investigador y el área.
- Estudiar, organizar y sistematizar la información que nos permita determinar las tendencias de los temas y las relaciones indicadas en las tesis de maestría y doctorado.
- Realizar el análisis y elaboración de las conclusiones preliminares.

De acuerdo a lo mencionado por los dos autores mencionados anteriormente, organizamos y sistematizamos las investigaciones recolectadas, lo que permitió la búsqueda en revistas de divulgación científica, como Scielo, Latindex, Dialnet y en direcciones electrónicas de universidades y repositorios. Además, se contó con el auxilio de los portales electrónicos de la Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior de Brasil (CAPES), Hyper Articles en Ligne (HAL) y el banco de tesis de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

2 Elaboración de Fichas

Nuestra investigación está organizada en tres partes: La primera, está formada por cinco tesis doctorales; la segunda, por tres tesis de maestría y; la tercera, por tres artículos.

Elaboración de fichas de tesis doctorales:

Cuadro 1: Tesis de doctorado

Año	Institución	Autor -título de la investigación
2005	Université Joseph-Fourier - Grenoble I	Salahattin Arslam - L'approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S ³ : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?
2007	Université Joseph-Fourier - Grenoble I	Ruth Rodríguez Gallegos - Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S
2007	Universidade Estadual Paulista	Sueli Liberatti Javaroni - Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias
2009	Universidad de Burgos	María Magdalena Dullius - Enseñanza y Aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico numérico y analítico
2010	Universidad de la Laguna	Josefa Perdomo Diaz - Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de resolución de problemas

Fuente: Adaptado de Amorín

Para iniciar, se trabajó con dos tesis francesas de nivel secundario.

Ficha 1

Cuadro 2: Desarrollo de la ficha 1 para la tesis de doctorado

Autor	Salahattin Arslam
Título de la investigación	L'approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?
Año de sustentación	2005
Metodología	Ingeniería didáctica
Referencial teórico	La Teoría de los Campos conceptuales, Teoría de registros de representación semiótica,
Tecnología	Los estudiantes no utilizan
Actividad con campo de direcciones	Se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

La investigación de Arslam (2005) tiene por objetivo estudiar la posibilidad de realizar la enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo en una clase de Terminal S en Francia, donde ya enseñaban el tema desde un enfoque algebraico y numérico.

En primer lugar, el autor realiza un rápido estudio histórico de las ecuaciones diferenciales y presentó tres modos de resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO): Algebraico, numérico y cualitativo. Tras una comparación didáctica de los mismos, eligió la resolución cualitativa y justificó esta elección.

Luego, presenta las hipótesis y preguntas de investigación. Además, presenta el marco teórico elegido y cómo lo utilizará. Por último, argumenta su elección de la ingeniería didáctica como metodología y muestra los diferentes registros que se pueden utilizar para la construcción de una ingeniería para una clase Terminal.

En segundo término, presenta una breve descripción del enfoque cualitativo en los programas de enseñanza. Enseguida, realiza un estudio sobre el lugar que ocupan las ecuaciones diferenciales en el programa Terminal S. Además, con el fin de comprender mejor la evolución de la enseñanza de las EDO, toma como referencia los programas escolares actuales y anteriores.

También examina investigaciones realizadas para conocer nuevos conceptos asociados al enfoque cualitativo. Para finalizar, analiza cuatro libros de textos sobre EDO, dos representaban a programas anteriores y dos a programas actualizados.

Seguidamente, presenta la ingeniería didáctica y después realiza un análisis *a priori* de las actividades propuestas. Por último, realiza un análisis *a posteriori* y después muestra resultados de las actividades referidos a los estudiantes. Estos dieron a conocer que algunos estudiantes tuvieron dificultades en distinguir la recta tangente y la solución de una EDO. Incluso, una tendencia hacia lo algebraico y el enfoque algebraico puede ser un obstáculo para la enseñanza del enfoque cualitativo en principiantes.

Como resultado de la investigación, el autor aborda y afirma la importancia del tema de modelamiento.

³Es el último año de la escuela secundaria, modalidad científica, en Francia.

Ficha 2

Cuadro 3: Desarrollo de la ficha 2 para la tesis de doctorado

Autor	Ruth Rodríguez Gallegos
Título de la investigación	Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S
Año de sustentación	2007
Metodología	Ingeniería didáctica
Referencial teórico	La Teoría Antropológica de lo Didáctico
Tecnología	Los estudiantes no utilizan
Actividad con campo de direcciones	No se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

Esta investigación se centra en el modelamiento en las clases de Física y Matemáticas en Terminale S en la escuela secundaria, Francia. El trabajo tiene dos objetivos principales: Primero, estudiar cómo el modelamiento se utiliza en el sistema escolar francés y en los procesos cognitivos de los estudiantes ante una tarea de modelación y el segundo identificar sus dificultades cuando resuelven un problema particular.

En el proceso de modelamiento, algunos estudiantes tuvieron dificultades en hallar la representación algebraica del modelo matemático, debido a que ellos no vincularon los conceptos físicos con los conceptos matemáticos. También, presentaron problemas en entender lo que es una ecuación diferencial, que es usada como una herramienta para el modelamiento de un proceso. Asimismo, aprietos para establecer una condición inicial asociado a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) obtenidas y, por último, comprender que su solución es una función y no un número escalar.

Ficha 3

Cuadro 4: Desarrollo de la ficha 3 para la tesis de doctorado

Autor	Sueli Liberatti Javaroni
Título de la investigación	Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias
Año de sustentación	2007
Metodología	Cualitativa
Referencial teórico	No esta explícito
Tecnología	Uso de <i>Excel</i> , <i>Winplot</i> y <i>Maple</i>

Actividad con campo de direcciones	Si se desarrolla
-------------------------------------------	------------------

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

Según la autora, esta investigación tiene por objetivo analizar las posibilidades de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir del enfoque cualitativo. Además, la pregunta de investigación que plantea fue: ¿Cuáles son las posibilidades de enseñanza y aprendizaje de la introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias por medio del análisis cualitativo de los modelos matemáticos, con el auxilio de Tecnología de Información y Comunicación?

La investigación fue realizada a nivel universitario con tres parejas y un trío de estudiantes de Matemáticas, quienes participaron voluntariamente en el estudio. Se realizó un curso de extensión titulado "Modelamiento y Métodos Computacionales en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", donde estos alumnos investigaron: Objeto en caída libre, crecimiento poblacional de *Malthus*, crecimiento poblacional de *Verhulst* y la ley de enfriamiento y para ello utilizaron como herramientas de apoyo el *Excel*, *Winplot* y *Maple*.

Según la autora, la representación geométrica se hizo atractiva debido al uso de la computadora que favoreció la exploración y visualización de la solución de una EDO. Identifica que los estudiantes presentaron dificultades en entender el uso del *Software*, específicamente en el uso de comandos, el concepto de la derivada y su significado geométrico, así como el concepto de campo de direcciones. Además, las mismas se mostraron al analizar el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial a través de su campo de direcciones, interpretar el gráfico que esboza el *Software* y su significado para el modelo y al relacionar la representación algebraica y la representación gráfica de la solución de una EDO.

Los datos fueron recolectados por medio de las grabaciones hechas por el *Software Camtasia*, instalado en cada equipo utilizado por los estudiantes. Después del análisis general de los *videoclips* generados, se seleccionaron algunos episodios que ofrecen posibles caminos para responder a la pregunta de investigación. Del análisis de estos episodios, surgieron varios temas.

En primer lugar, el proceso de visualización de las actividades investigadas que están

asistidas por los medios informáticos; en segundo término, abordajes algebraicos y geométricos mediante el uso de los medios informáticos y, finalmente, el conocimiento como una red de significados, es decir, para aprender un nuevo conocimiento se necesita de uno antiguo. La interacción entre los estudiantes y el *Software* utilizado favoreció el uso del enfoque cualitativo en los modelos estudiados.

Ficha 4

Cuadro 5: Desarrollo de la ficha 4 para la tesis de doctorado

Autor	María Madalena Dullius
Título de la investigación	Enseñanza y Aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico numérico y analítico
Año de sustentación	2009
Metodología	No está explícito, pero observamos que se trata de una investigación cualitativa.
Referencial teórico	La Teoría de Aprendizaje de Ausubel y la Teoría Socio-interaccionista de Vygotsky
Tecnología	La planilla de cálculos de <i>OpenOffice</i> y el <i>Software Powersim</i> .
Actividad con campo de direcciones	No se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

La investigación de Dullius (2009) tiene varios objetivos. Primero, identificar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales; segundo, elaborar una propuesta pedagógica que ayude en la superación de las dificultades identificadas y a percibir la importancia del contenido para su formación; tercero, estudiar las bondades del uso de recursos computacionales en el proceso enseñanza y aprendizaje de las EDO y; cuarto y último, estudiar el aporte de la dialéctica entre el profesor, estudiante, material didáctico, en el aprendizaje significativo.

En la investigación, participaron estudiantes de los cursos de Ingeniería y Química Industrial del Centro Universitario UNIVATES (Brasil), matriculados en la asignatura de Cálculo III.

Dullius (2009) usa como marco teórico la teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel y la teoría Socio-interaccionista de Vygotsky. En el desarrollo, hace uso de la tecnología como ayuda para el proceso de los estudios planteados. Además, la

metodología usada es la metodología cualitativa. En las actividades que forman parte de su estudio, utiliza la tecnología, como el *Software Powersim* y la Planilla de Cálculo de *OpenOffice*.

La investigadora divide el estudio en cuatro partes. En primer lugar, elabora un Estudio Preliminar, que consta de una entrevista a dos profesores de Física y a dos profesores de Matemáticas. Luego, realiza un cuestionario y un diario de campo a 34 estudiantes del curso Ciencias Exactas. En esta parte, la autora tiene el propósito de identificar las dificultades de aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

En segundo término, diseña el Estudio 1 que consta de un cuestionario, entrevista, guías de actividades y diario de campo a 59 estudiantes de los cursos de Ingeniería y Química Industrial. También elabora el Estudio 2 que está formado por un cuestionario, entrevista, guías de actividades, diario de campo, test inicial y final de conocimientos a 31 estudiantes de los cursos de Ingeniería y Química Industrial.

Finalmente, diseña el Estudio 3 en la que se realizó un cuestionario, entrevista, guías de actividades, diario de campo, test inicial y final de conocimientos a 60 estudiantes de los cursos de Ingeniería y Química Industrial.

Según la autora, el estudio preliminar realizado arrojó como resultado que los estudiantes no saben contenidos de Matemática, como por ejemplo sistemas lineales, integrales y derivadas. Además, asevera que los estudiantes tuvieron problemas con la interpretación de la derivada, concepto que está vinculado con las EDO. También afirma que los estudiantes no aceptaron con facilidad a las funciones como solución de una EDO, debido a que están acostumbrados a ver números como solución de una ecuación algebraica.

Asimismo, consideraron que la constante de proporcionalidad en la EDO es un número sin unidades, lo que es un error, porque se debe verificar que la ecuación esté dimensionalmente bien definida. Ante esto, la autora manifiesta que los estudiantes le dan más importancia a la representación algebraica de una función que a la representación gráfica y numérica. Inclusive, indica que no comprendieron el vínculo entre la EDO y el sistema modelado.

En la enseñanza tradicional, el rol del profesor es el de emisor de conocimientos y el del estudiante, el receptor. Además, el principal medio de enseñanza es la clase magistral, que se fortalece los aprendizajes memorísticos y mecanicistas.

Dullius (2009) asevera que usualmente la enseñanza tradicional del tema de ecuaciones diferenciales empieza a partir de su definición y luego se presentan técnicas de análisis para su solución. Además, se abordan algunas aplicaciones recogidas de los libros de texto, como la revalencia de los métodos de enseñanza tradicionales frente a las alternativas más innovadoras, como por ejemplo el uso de una calculadora o computadora, lo que se debió a diversos motivos, como describió Moreno y Azcárate (Citado por Dullius, 2009), pero los motivos que tienen más relevancia, según los autores, fueron el *comfort* de los profesores y la apatía por la enseñanza, ya que en general, los profesores prefieren atribuir las responsabilidades del fracaso de la enseñanza a sus estudiantes, sus actitudes y su escasa formación matemática.

Según la investigadora, los estudios indican que la metodología dominante en el contexto de enseñanza de las EDO está fuertemente orientada a determinar la solución algebraica, lo que ocasiona un aprendizaje mecánico sin que el estudiante perciba su potencial y su importancia como una herramienta matemática para resolver problemas en contexto.

Moreno y Azcárate (Citado por Dullius, 2009) señalan que los métodos de enseñanza tradicional siguen vigentes por varias razones. En primer lugar, los profesores opinan que los estudiantes aprenden por imitación y memorización y que tienen poco conocimiento matemático, poco raciocinio y creación y; en segundo lugar, una nueva forma de enseñar usando tecnología y problemas en contexto implicaría que a los profesores les tomaría más tiempo en preparar sus clases.

Según la autora, el uso de tecnología en las actividades motiva a los estudiantes a aprender, facilita la visualización y resolución numérica de los problemas y reduce el tiempo para efectuar las soluciones analíticas y numéricas, en detrimento de sus habilidades matemáticas básicas, como derivar e integrar, debido a que no lo practican manualmente, sino que la máquina lo efectúa.

También afirma que los estudiantes se encuentran satisfechos con la solución de las situaciones problemas en aula, pero que estos consideraron que la poca duración del curso (Cuatro meses) y la dificultad del mismo, para que adquieran la capacidad de interpretar los resultados y alcanzar un aprendizaje significativo de los contenidos.

Ficha 5

Cuadro 6: Desarrollo de la ficha 5 para la tesis de doctorado

Autor	Josefa Perdomo Díaz
Título de la investigación	Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de resolución de problemas
Año de sustentación	2010
Metodología	Cualitativa
Referencial teórico	Marco conceptual
Tecnología	Uso de la calculadora <i>Voyage 200</i>
Actividad con campo de direcciones	Si se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

El trabajo de Perdomo (2010) tiene dos etapas. En la primera, analiza los conocimientos que recibieron los estudiantes universitarios de las licenciaturas de Matemáticas y Física al responder preguntas, así como soluciones de problemas vinculados con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y; en la segunda, realiza el diseño y el desarrollo de la clase de un Módulo de Enseñanza dirigido a estudiantes del primer curso de la licenciatura en Química en una universidad española.

La autora utiliza elementos de diferentes teorías, como aquellas que describen los elementos que intervienen en su aprendizaje y las que permiten describir la comprensión de los estudiantes. En el primer caso, considera a Kilpatrick y, en el segundo, a Duval.

La teoría cognitiva de Kilpatrick (Citado por Perdomo, 2010) propone cinco conceptos que los estudiantes deben desarrollar como parte del aprendizaje de las Matemáticas y que serían los aspectos cognitivos de la enseñanza, es decir, comprensión conceptual, fluidez con los procedimientos, competencias estratégicas, razonamiento adaptivo y predisposición productiva.

Según Perdomo (2010), estos cinco componentes se consideran para la elaboración de módulos de enseñanza y también sirven como base para analizar el conocimiento matemático y la competencia matemática de los estudiantes. En consecuencia, constituyen parte fundamental en las dos etapas de esta investigación. Por otro lado, no especifica puntualmente la metodología de su investigación, pero a nuestro entender utiliza la metodología cualitativa y se limita a describir el procedimiento metodológico.

Perdomo (2010) afirma que en la primera etapa de investigación participaron 21 estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas y Física. Al momento en el que se

desarrolla la investigación, los alumnos de ambas licenciaturas habían recibido la formación relativa al estudio de las EDO de primer y segundo orden.

La investigadora indica que, en esta primera etapa, la enseñanza de las EDO, basada en la definición formal, la clasificación de los tipos de ecuaciones diferenciales y la resolución algebraica de las mismas, no garantizó que los estudiantes movilizaran, de manera articulada, las representaciones gráficas de funciones, las propiedades de las mismas y sus derivadas, la integración y métodos de resolución de ecuaciones diferenciales para la resolución de los problemas planteados. También, señala que la enseñanza de las EDO, a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución, no brindó las herramientas necesarias para resolver problemas en un contexto diferente a los problemas resueltos en aula.

Perdomo (2010), en esta etapa, identifica que los estudiantes tuvieron dificultades en relacionar la derivada de una función con una EDO, identificar los diferentes significados de la solución de una EDO (Solución particular, solución general, entre otros.), recordar los diferentes significados de la derivada de una función, establecer relaciones entre diferentes tipos de representaciones y recordar el significado geométrico de la derivada, el cual permite la construcción del campo de direcciones de una EDO.

Respecto a la segunda etapa, la autora empieza su investigación con la elaboración del Módulo de Enseñanza y toma en cuenta los objetivos planteados para esta etapa. Además, el Módulo debería contribuir a reafirmar los diferentes significados de la derivada, vincular la derivada de una función con la EDO. Asimismo, los problemas planteados estaban en contexto con carrera profesional de los estudiantes.

Según la autora, se realizaron las actividades con apoyo de la calculadora *Voyage 200* y participaron 15 estudiantes de un primer curso de la licenciatura en Química.

Perdomo (2010) afirma que hay una discontinuidad de aprendizaje entre las ecuaciones algebraicas y las ecuaciones diferenciales. Además, plantea realizar la investigación de cómo enseñar el concepto de EDO a través del concepto ecuación algebraica. También asevera que, a partir de la aplicación de este Módulo de Enseñanza, pudo observar que las funciones constantes pueden ser fuentes de error en la solución de las EDO, debido a que algunos estudiantes no tomaron en cuenta a la función constante para modelar situaciones en que la variación es nula.

Por otro lado, afirma que los estudiantes, en la primera etapa, presentaron dificultades en el proceso de llevar el lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa. Esto también se evidencia al aplicar el Módulo de Enseñanza. Ante esto, la autora recomienda prestar mayor atención a este hecho, en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática.

Según Perdomo (2010), la introducción del concepto de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y los significados de la derivada se vieron fortalecidas a través del Módulo de enseñanza, que se elaboró utilizando elementos de diferentes teorías. También considera que el uso de la tecnología, como la calculadora *Voyage 200*, permite que los estudiantes focalicen su atención en los procesos de razonamiento, reflexión y resolución de problemas y que sean protagonistas y responsables de su propio aprendizaje.

La autora también afirma que los estudiantes, al comienzo del Módulo de Enseñanza, se abocaron en la búsqueda de expresiones algebraicas, debido a la creencia de que hallar la solución de un problema matemático no llevaba mucho tiempo. Inclusive, si no se hallaba una respuesta es que el problema está mal planteado y, por último, se debe recurrir al profesor para que lo resuelva.

La Metodología basada en la Resolución de Problemas trata de romper con estas creencias de los estudiantes y, a medida que fueron avanzando las sesiones de clase, se observó que los estudiantes mostraban menos dependencia de la figura del profesor y reflexionaban más sobre las cuestiones que se les planteaban antes de responder.

Elaboración de fichas de tesis de maestría:

Cuadro 7: Tesis de maestría

Año	Institución	Autor -título de la investigación
2008	Pontificia Universidade Catolica de Minas Gerais	Murilo Barros Alves - Equações diferenciais ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática - Formulação, resolução de problemas e Introdução à Modelagem Matemática.
2010	Pontificia Universidade Católica de são paulo	Vagner Donizeti Tavares Ferreira – A modelagem matemática na introdução ao estudo de equações diferenciais em um curso de engenharia
2017	Universidade Tecnológica Federal Do Paraná	Talita Breschiliare Piffer Freire - Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de equações diferenciais ordinárias

Fuente: adaptado de Amorin

Para este estudio, empezamos con tres tesis de maestría de origen brasileñas. Todas ellas abordan el tema de modelamiento.

Ficha 1

Cuadro 8: Desarrollo de la ficha 1 para la tesis de maestría

Autor	Murilo Barros Alves
Título de la investigación	Equações diferenciais ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática - Formulação, resolução de problemas e Introdução à Modelagem Matemática.
Año de sustentación	2008
Metodología	Cualitativa
Referencial teórico	No está explícito
Tecnología	Uso de la calculadora <i>Voyage 200</i>
Actividad con campo de direcciones	Sí se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

El objetivo de la investigación es construir una propuesta metodológica para el estudio de las Ecuaciones Diferenciales, proporcionando un mayor entendimiento de los conceptos de derivada y tasa de variación.

El autor presenta la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo la ecuación diferencial, la resolución de problemas e iniciación al modelado en ciencias complementa el aprendizaje de la derivada reafirmando como tasa de variación?*

Las actividades fueron aplicadas a estudiantes del curso de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Estatal de Maranhão, en la ciudad de Imperatriz. Los resultados apuntaron al hecho de que la metodología propuesta contribuyó para un aprendizaje significativo de las ecuaciones diferenciales.

Según el autor, el profesor tecnista trabaja la ecuación diferencial privilegiando el estudio de los algoritmos y técnicas de resolución; sin embargo, el estudio del objeto matemático comprende dos etapas: Una que consiste en su resolución y otra en su aplicación, con resolución y formulación de problemas e iniciación al modelado de situación-problema en Ciencias y en Matemáticas.

En primer lugar, realiza un estudio sobre las ecuaciones diferenciales, se presentaron los conceptos de Cálculo Diferencial e Integral, Tasa de Variación, Algoritmos de solución y los tipos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. También, se dieron a conocer algunos elementos de la Historia del Cálculo; en segundo término, se presenta un

enfoque sobre el modelado, la formulación y la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales. Luego, se aborda la forma de estudio de Ecuaciones Diferenciales en cursos de Licenciatura y Libros Textos. Además, se analiza aún su influencia en el estudio de Cálculo y Tasa de variación y se identificaron algunos aspectos metodológicos relevantes para el desarrollo de la formación del profesor en cursos de Licenciatura de Matemáticas.

A continuación, se realiza una descripción de la producción académica del Cálculo Diferencial e Integral y Ecuaciones Diferenciales, donde también se presenta la metodología de la investigación realizada y se analizan los resultados de la misma. Por último, se realiza una aplicación de actividad investigativa para proponer un nuevo enfoque en la enseñanza de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, el autor afirma que los estudiantes tienen varias dificultades, como interpretar el texto de la actividad; elaborar el gráfico de la solución; hallar la ecuación diferencial, ya que no tienen claro el concepto de tasa de variación; resolver la ecuación diferencial; aplicar las condiciones iniciales y frontera y determinar una función que relacione las variables que actúan en el fenómeno.

Ficha 2

Cuadro 9: Desarrollo de la ficha 2 para la tesis de maestría

Autor	Vagner Donizeti Tavares Ferreira
Título de la investigación	A modelagem matemática na introdução ao estudo de equações diferenciais em um curso de engenharia
Año de sustentación	2010
Metodología	Cualitativa
Referencial teórico	Modelación
Tecnología	Los estudiantes no utilizan
Actividad con campo de direcciones	No se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

En este trabajo, se trata de responder las siguientes preguntas de investigación: La primera consiste en si el modelo matemático es una herramienta que permite al estudiante de Ingeniería relacionar una ecuación diferencial con problemas ligados a fenómenos reales, a fin de entenderlo y tomar decisiones sobre ellos y la segunda, ¿Qué contribuciones al modelamiento matemático, como metodología de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales, puede traer al estudiante del curso de

Ingeniería?

La investigación tiene como objetivo indagar cómo la utilización del modelamiento en la introducción al estudio de ecuaciones diferenciales en un curso de Ingeniería puede contribuir a estimular la habilidad de relacionar las Matemáticas con fenómenos del mundo real que involucran variación, además de tomar decisiones acerca de tales fenómenos, con base en la interpretación de las informaciones contenidas en la solución de la ecuación.

Con esto, Tavares (2010) espera que el estudiante de Ingeniería tenga una mejor visión de las Matemáticas como una herramienta que le ayudará en la comprensión de los fenómenos encontrados en la naturaleza. El estudio se realiza en una institución particular de enseñanza superior ubicada en el municipio de São Paulo y participaron de forma voluntaria 15 estudiantes de Ingeniería, los cuales trabajaron en cinco grupos de tres.

La investigación desarrolla un total de seis actividades durante cuatro reuniones, donde en primer lugar, se presenta el problema de investigación y su importancia para el área, además de las preguntas de investigación y el objetivo principal del trabajo; en segundo término, se muestra la fundamentación teórica en la que se basó este trabajo. Este se dividió en cuatro sub-puntos: a) Se tratan algunos tópicos referentes a la historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, su definición y observaciones sobre su resolución; b) Se aborda el modelamiento matemático; c) Las vertientes del modelamiento como método científico o estrategia de enseñanza y aprendizaje; d) Los enfoques de modelamiento matemático.

A continuación, se presentan los procedimientos metodológicos, el contexto académico que involucró a los participantes del trabajo, la planificación y las estrategias que utilizaron en el desarrollo del experimento y de las actividades. Seguidamente, se muestra el análisis de los datos recolectados, con enfoque cualitativo y las intervenciones y cuestionamientos de los estudiantes para cada encuentro del proyecto. Estos análisis se efectuaron mediante dos enfoques distintos: En un primer momento, describen y analizan los protocolos resultantes de las actividades elaboradas para los cuatro encuentros y las discusiones realizadas en el interior de los grupos referentes a toda clase; en un segundo momento, seleccionan un grupo para analizar su desempeño en lo que se refiere a todas las actividades realizadas en el curso de la investigación, buscando indicar su evolución en el transcurso del proceso y, por último, se presentan

las consideraciones finales, elaboradas con base en el análisis y también algunas sugerencias para la continuidad del estudio relativo a la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales por medio del modelamiento matemático.

El autor, por su práctica docente, afirma que los estudiantes tienen dificultades en percibir que la incógnita de una ecuación diferencial es una función o una familia de funciones, transformar un proceso del mundo real en un modelo matemático e interpretar los resultados obtenidos e identificar que una función es solución.

Ficha 3

Cuadro 10: Desarrollo de la ficha 3 para la tesis de maestría

Autor	Talita Breschiliare Piffer Freire
Título de la investigación	Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de equações diferenciais ordinárias
Año de sustentación	2017
Metodología	Cualitativa
Referencial teórico	Teoría del Aprendizaje Significativa concebida por David Ausubel, modelación
Tecnología	Uso por los estudiantes de Geogebra, Excel
Actividad con campo de direcciones	Si se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

Esta investigación tiene como objetivo proponer, implementar y analizar una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa (UEPS) para el estudio de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en una clase del sexto semestre de 2016 de un curso de Licenciatura en Matemáticas. Cabe destacar que la autora, para este trabajo, actuaba como profesora.

El Producto Educativo vinculado a la investigación está formado por la unidad de enseñanza, la cual utiliza recursos tecnológicos y actividades de Modelamiento Matemático. Además, las unidades de enseñanza que se plantean están fundamentadas en la Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel.

Los datos que se analizaron están formados por los registros de los estudiantes en el cuaderno pedagógico, audios y videos realizados durante las clases, actividades guardadas en archivos digitales y la evaluación final de los estudiantes, además de cuestionarios digitales.

Como los datos a analizar están compuestos por 115 documentos, se usa el *Software*

Atlas TI 8.0 como ayuda en el análisis de datos cualitativos, ya que facilita el análisis de varios formatos de archivos, como textos, audios, vídeos y figuras. En este proceso, se identifican tres categorías de análisis: Modelamiento Matemático, Recursos Tecnológicos y Aprendizaje Significativo. Esto permitió identificar evidencias sobre el Aprendizaje Significativo de los estudiantes y concluir que la propuesta se consolidó como una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa exitosa.

Elaboración de fichas de artículos:

Cuadro 11: Artículos escritos en revistas

Año	Revista	Autor -título de la investigación
2014	Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	Aníbal Ataides Barros Filho, João Bosco Laudares, Dimas Felipe De Miranda - A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica
2015	Unión: revista iberoamericana de educación matemática	Claudia Marianela Zang, Gretel Alejandrina Fernandez von Metzen, Maria Natilia Leon - Reflexiones sobre la implementación de problemas de modelado para la construcción y resignificación de objetos matemáticos vinculados a las ecuaciones diferenciales
2017	Revista de Produção Discente em Educação Matemática	Rieuse Lopes Pinto, Gabriel Loureiro De Lima - Ensino de equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia Mecânica

Fuente: Adatado de Amorin

De los tres artículos que abordan el tema de modelamiento, dos de ellos usaron tecnología y el otro, realiza una actividad con campo de direcciones.

Ficha 1

Cuadro 12: Desarrollo de la ficha 1 para los artículos

Autor	Aníbal Ataides Barros Filho, João Bosco Laudares, Dimas Felipe De Miranda
Título de la investigación	A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica
Año de publicación	2014
Metodología	Cualitativa
Referencial teórico	No esta explicito, pensamos que es el modelamiento
Tecnología	Lo estudiantes utilizan el <i>Maple</i>
Actividad con campo de direcciones	Sí se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

En este trabajo, se presentan resultados de una Investigación de Maestría, cuyo objetivo es buscar las contribuciones de las metodologías de Resolución de Problemas y Descubrimiento Guiado con situaciones problemáticas de las Ciencias, mediadas por Tecnologías de Información y Comunicación, buscando un aprendizaje más significativo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOS). Se elaboran cinco actividades con EDOS de 1ª y 2ª orden, usando los enfoques analítico y geométrico con énfasis en el análisis gráfico apoyado por el *Software Maple*.

En este artículo, se presenta una de las actividades con su estructura y resolución. El autor presenta las dificultades encontradas en los estudiantes, las cuales fueron: a) Interpretación del texto; b) Determinación de las variables y c) Uso y familiarización del *Software Maple*.

El análisis de los datos permite inferir que el ambiente creado, las interacciones y las negociaciones de significados entre estudiantes, así como los recursos computacionales, proporcionaron un aprendizaje eficaz de EDOS. Además, en la investigación se afirma que el estudio de los fenómenos naturales y artificiales, cuyos modelos matemáticos son ecuaciones diferenciales, se puede realizar al graficar la solución de la ecuación diferencial, que se facilita gracias al uso de un Software, evitando de esta manera los cálculos y trazos de gráficos tediosos y otorgando al estudiante una postura más crítica y analítica sobre la solución obtenida por medio del uso de la tecnología.

Ficha 2

Cuadro 13: Desarrollo de la ficha 2 para los artículos

Autor	Claudia Marianela Zang, Gretel Alejandrina Fernandez von Metzen, Maria Natilia Leon
Título de la investigación	Reflexiones sobre la implementación de problemas de modelado para la construcción y resignificación de objetos matemáticos vinculados a las ecuaciones diferenciales
Año de publicación	2015
Metodología	Ingeniería didáctica
Referencial teórico	Teoría de situaciones didácticas
Tecnología	Los estudiantes no la utilizan
Actividad con campo de direcciones	No se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

La investigación realizada por Zang, Metzen, y León tiene varios objetivos. El primero es estudiar en qué medida los estudiantes recurren a conocimientos básicos para la solución de situaciones problemáticas en las que se utilicen las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO); la segunda es examinar las estrategias que utilizan en la resolución de problemas, los obstáculos más comunes a los que se enfrentan y; la tercera, elaborar propuestas de enseñanza que permitan reafirmar sus saberes previos, haciéndolos evolucionar hacia conocimientos nuevos.

Las autoras utilizan como marco teórico la teoría de Situaciones Didácticas y como metodología la Ingeniería Didáctica. La investigación se lleva a cabo en las Facultades de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQN) y de Ciencias Económicas (FCE) de la Universidad Nacional de Misiones (UNM), Argentina.

Zang, Metzen y León (2015) observan y analizan dos clases del curso de Análisis IV en el año 2012. Dicho curso se dicta en las carreras de Profesorado de Matemáticas y Profesorado de Física de FCEQN, donde las edades de los estudiantes varían entre 20 y 24 años.

Las autoras observan la primera clase del curso, donde se plantea un problema relacionado al modelado utilizando una EDO de primer orden, de manera que la ecuación diferencial que representa el fenómeno se presenta implícitamente en el enunciado. La segunda lección observada se dio después que los estudiantes ya habían escuchado la mitad del curso y el tema que se trata es sistemas de EDO de primer orden, donde se presenta un problema de una especie depredadora que convive con otra especie, que es la presa (modelo Lotka-Volterra).

Según las investigadoras, los estudiantes tuvieron dificultad en obtener la EDO que modele un problema. Además, según Artigue (Citado por Zang et al, 2015), los alumnos presentaron inconvenientes en la comprensión de temas de cálculo como, por ejemplo, funciones. Asimismo, según Moreno Moreno (Citado por Zang et al, 2015), en abordar un problema mediante un tratamiento cualitativo y numérico, el primero por medio de un registro gráfico y el segundo, vinculado a la solución aproximada.

Zang, Metzen, y León afirman: a) En los textos, se explica la construcción de modelos matemáticos de ciertos fenómenos, ya que elaborar un modelo matemático para las ciencias experimentales o sociales demandaría tiempo y amplio conocimiento científico;

b) Los estudiantes que participaron de las actividades no recurren de forma inmediata a sus conocimientos de derivada y función exponencial; c) El proceso de modelado no se desarrolla en forma instantánea, ya que se requiere tiempo de las clases para el estudio y análisis; d) Las actividades de este tipo permiten al estudiante compartir ideas, elaborar conjeturas, escuchar y debatir y, por último, formular una propuesta grupal; e) Este tipo de actividades incrementa el interés de los estudiantes y reafirman contenidos matemáticos desarrollados en cursos anteriores. Asimismo, la intervención del profesor en las actividades puede afectar para bien o mal los resultados del trabajo.

Ficha 3

Cuadro 14: Desarrollo de ficha 3 para los artículos

Autor	Rieuse Lopes Pinto, Gabriel Loureiro De Lima
Título de la investigación	Ensino de equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia Mecânica
Año de publicación	2017
Metodología	Cualitativa
Referencial teórico	Matemática en el Contexto de las Ciencias
Tecnología	Los estudiantes no la utilizan
Actividad con campo de direcciones	No se desarrolla

Fuente: Propia del autor

Reseña crítica

En este artículo se presenta un avance de una tesis doctoral que están desarrollando, cuyo objetivo es discutir la enseñanza y el aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) lineales de 1ª y 2ª orden en un curso de Ingeniería Mecánica, bajo la óptica de las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias, donde afirman que en este trabajo están utilizando, como base teórica, a las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC) así como la metodología cualitativa.

Según los autores, los estudiantes presentaron dificultades relacionadas al aprendizaje y aplicación de las EDO en el contexto de las Ingenierías. Uno de los factores que posiblemente contribuye al recurrente fracaso de los estudiantes en esta disciplina es la frecuente desconexión con que los conceptos del Cálculo son trabajados en relación a sus aplicaciones en la Ingeniería.

Conclusiones

Teniendo en cuenta los trabajos de investigación analizados, los 11 dieron importancia al tema de modelamiento; donde siete de estos usaron tecnología en el desarrollo de las actividades; seis desarrollan actividades, donde se desarrolló el campo de direcciones que tiene que ver con la solución cualitativa de una ecuación diferencial; cinco otorgaron importancia a la modelamiento, tecnología y campo de direcciones. Por ello, podemos concluir que se está dando más importancia al tema de modelamiento.

Después de realizar un estudio de las investigaciones elegidas, podemos afirmar que la mayoría de ellas consideran que existe un predominio del enfoque algebraico en la solución de una ecuación diferencial, lo que es un obstáculo para la enseñanza del enfoque cualitativo.

Además, se presentaron dificultades que los estudiantes cometen, como son: Entender el concepto de una Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO); identificar los diferentes significados de la derivada; relacionar la derivada de una función con la EDO; relacionar las diversas representaciones de la solución de una EDO; hallar una EDO que modele un problema; dar una interpretación geométrica a la derivada de una función (Lo que impide construir un campo direccional); determinar los diferentes significados de la solución de una EDO; relacionar la EDO con el proceso que se ha modelado; interpretar el texto de la actividad; elaborar el gráfico de la solución; distinguir la recta tangente y la solución de una EDO; interpretar el texto de la actividad; elaborar el gráfico de la solución; entender el concepto de campo de direcciones; analizar el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial a través de su campo de direcciones; interpretar el gráfico que esboza el Software y su significado para el modelo; establecer una condición inicial asociado a una EDO; comprender que la solución de una ecuación diferencial es una función y no un número escalar; entender que la constante de proporcionalidad de una EDO tiene dimensiones; comprender el concepto de tasa de variación; llevar del lenguaje natural al lenguaje matemático y realizar procedimientos algebraicos debido al uso de un *Software*.

Dar una interpretación geométrica de la derivada de una función $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ significa graficar la función $f(x)$, luego trazar una recta tangente a la gráfica de f en el punto dado y comprender que el valor de la derivada en dicho punto es el valor de la pendiente de la recta tangente. Este es uno de los conceptos que

debe manejar el estudiante para graficar el campo de direcciones y que es parte del enfoque cualitativo.

El uso de Software nos permite graficar campo de direcciones, hallar soluciones algebraicas y graficar soluciones de una EDO, pero siempre se debe hacer el uso de lápiz y papel para no perder la habilidad realizar cálculos sencillos.

Agradecimientos

Agradecemos a la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú – PUCP – especialmente a la maestría Enseñanza de las Matemáticas, línea investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática – TecVEM, por el apoyo brindado para concretizar la presente investigación.

Referencias

- ALVES, M. B. **Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática-Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática**. 2008. 90 f. Dissertação (Maestría en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas) - Programa de Estudios Postgrados en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas. Pontificia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.
- AMORIM, S. C. **Números inteiros: Panorama de Pesquisas Produzidas de 2001 a 2010**. 2012. 127 f. Dissertação (Maestría Profesional en Enseñanza de las Matemáticas) - Programa de Estudios de Postgrados en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.
- ARSLAN, S. **L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S: est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences?**. 2005. 288 f. Tese (Doctor en Didáctica de las Matemáticas.) - Programa de Postgrado en Educación Matemática. Universidad Joseph-Fourier-Grenoble I, Grenoble, 2005.
- BARROS FILHO, A. A.; LAUDARES, J. B.; DE MIRANDA, D. F. A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 16, n. 2, p.323-348, 2014.
- DULLIUS, M. M. **Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico**. 2009, 502 f. Tese (Doctorado en Enseñanza en Ciencias). Programa internacional de Doctorado en Enseñanza de la Ciencias. Universidad de Burgos. Burgos, 2009.
- FERREIRA, V. T. **A modelagem matemática na introdução ao estudo de equações diferenciais em um curso de engenharia**. 2010. 111 f. Dissertação (Maestría profesional en Enseñanza de las Matemáticas) - Programa de Estudios de Postgrado en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidade Católica De São Paulo, São Paulo, 2010.
- FREIRE, T. B. P. **Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de equações diferenciais ordinárias**. 2017. 187 f. Dissertação (Maestría profesional en Enseñanza de las Matemáticas) - Programa de Estudios de Postgrado en

Enseñanza de las Matemáticas. Universidade Tecnológica Federal Do Paraná, Londrina, 2017.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. 2007. 231 f. Tese (Doctorado en Educación Matemática). Programa de Postgrado en Educación Matemática. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2007.

LONDOÑO, O. L.; MALDONADO, L. F.; CALDERÓN, L. C. **Guías para construir estados del arte**. Bogotá; ICNC, 2016. Disponible en <<http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/4637>>

PERDOMO-DÍAZ, J. **Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de Resolución de Problemas**. 2010. 318 f. Tese (Doctorado). Universidad de la Laguna. San Cristóbal de Laguna, 2010.

PINTO, R. L.; DE LIMA, G. L. Ensino de equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia Mecânica. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**. v. 6, n. 2, p. 18-29, 2017.

RODRIGUEZ, R. **Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S**. 2007. 500 f. Tese (Doctorado en Didáctica de las matemáticas). Programa de Postgrado en Didáctica de las Matemáticas. Université Joseph-Fourier-Grenoble I, Grenoble, 2007.

ROMANOWSKI, J. P. **As licenciaturas no Brasil: um balanço das teses e dissertações dos anos 90**. 2002. 146 f. Tese (Doctorado en Educación) - Programa de Postgrado en Educación. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002. Disponible en:<<https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10941>>

SANTOS, R. M. dos, et al. **Estado da arte e história da pesquisa em Educação Estatística em programas brasileiros de pós-graduação**. 2015. 347 f. Tese (Doctorado en Educación). Programa de Postgrado en Educación. Universidade Estadual De Campinas, Campinas, 2007.

ZANG, C. M.; VON METZEN, G. A. F.; LEÓN, M. N. Reflexiones sobre la implementación de problemas de modelado para la construcción y resignificación de objetos matemáticos vinculados a las ecuaciones diferenciales. **Unión**, n. 42, p. 150-165, nov. 2015.