Sistemas de equações lineares: Uma proposta de atividades com abordagem de diferentes registros de representação semiótica

NILZA APARECIDA DE FREITAS[1]

CELINA APARECIDA ALMEIDA PEREIRA ABAR[2]

Resumo

Este artigo é parte de uma pesquisa em desenvolvimento que investiga de que forma os alunos do Ensino Médio resolvem sistemas de equações lineares 2x2 quando a abordagem favorece a conversão e o tratamento de registros de representação semiótica. Apresenta a aplicação e análise de atividades, propostas pela pesquisadora, que utilizam os pressupostos da Engenharia Didática. Foi elaborada centrada na língua natural, algébrica e gráfica, com a utilização do software Geogebra. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval foi o suporte teórico dessa investigação.

Palavras-chave*: sistemas lineares; registros de representações semióticas; geogebra.*

Abstract

This article is part of a current research that studies the ways how High School students solve linear equation systems 2x2 when the approach facilitates the convertion and treatment of registers on semiotic representations. It presents the application and analysis of activities, carried out by the researcher, that are used on support of Didactic Engineering. It was written centering on natural language, algebric and graphic, by using the Geogebra software. Raymond Duval's semiotic representation register theory has been the theorical basis of this investigation.

Keywords*: linear systems; registers of semiotic representation; geogebra.*

Introdução

Este trabalho apresenta a aplicação e análise de atividades, propostas na pesquisa em desenvolvimento, no Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. O objetivo do trabalho foi aplicar e analisar uma sequência de atividades para alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública em São Bernardo do Campo - São Paulo, para a resolução de sistemas de equações lineares 2x2 nos registros algébrico, gráfico e na língua natural com a utilização do *software* Geogebra.

Trabalho apresentado no III Encontro de Produção Discente em Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, realizado em 23 de novembro de 2013 (modalidade comunicação oral).

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - nilza-freitas@uol.com.br

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - abarcaap@gmail.com

Na prática docente percebe-se nos alunos concluintes do terceiro ano do Ensino Médio a dificuldade em resolver problemas de Matemática envolvendo sistemas de equações lineares. Estudos preliminares confirmam essa dificuldade.

Assim, o objetivo da pesquisa é investigar de que forma os alunos do Ensino Médio resolvem sistemas de equações lineares em que a abordagem proposta favorece a conversão e o tratamento de registros de representação semiótica.

A investigação contempla a representação algébrica, língua natural e gráfica, com o recurso do *software* Geogebra, de sistemas de equações lineares 2x2 como forma de atingir um aprendizado com significado.

A sequência proposta para a resolução de sistemas consiste na conversão do registro da língua natural para o registro algébrico e do registro algébrico para resolução gráfica. Também, contempla na resolução algébrica o tratamento e no registro gráfico a discussão dos sistemas lineares de acordo com a posição relativa das retas que representam cada equação que compõe o sistema. A hipótese é que atividades que consideram a conversão e o tratamento de registros de representação semiótica podem proporcionar condições favoráveis para a resolução de sistemas de equações lineares.

1. Referencial Teórico e Metodológico

De acordo com Duval (2009) para a compreensão da Matemática é necessário estudar o funcionamento dos sistemas cognitivos que propiciam o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização, analisando, ainda, quais são os sistemas cognitivos necessários e se são próprios da atividade Matemática.

Para o funcionamento da atividade cognitiva requerida pela Matemática, que é diferenciada de outros domínios do conhecimento, a representação semiótica é uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático por duas razões: em primeiro lugar - as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado. Em segundo lugar - a existência de grande variedade de representação semiótica utilizada em Matemática como figuras geométricas, as escritas algébricas, representações gráficas e a língua natural. (DUVAL, 2009, apud MACHADO, 2009).

Segundo Duval (2009), existem dois tipos de transformações dos registros de representação semiótica: conversão e tratamento representando os diferentes signos utilizados em Matemática, tais como figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural e registro numérico.

Uma conversão é uma transformação de uma representação, mudando de um registro para outro. Por exemplo, ao utilizar um gráfico cartesiano para representar um sistema de equações realiza-se uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

O tratamento é uma operação efetuada dentro de um mesmo registro de representação, por exemplo, ao multiplicar uma equação do sistema por um número real diferente de zero para escaloná-lo, realiza-se um tratamento desse registro algébrico.

Quando se utiliza um *software* de geometria dinâmica, efetua-se um tratamento no registro gráfico ao movimentar a figura ou quando reescreve-se o enunciado de uma atividade de outra forma aplica-se um tratamento na língua natural.

Desse modo, apresentamos uma proposta de atividades orientadas pelo referencial teórico acima exposto.

Para responder a questão de pesquisa é utilizada, como metodologia, os pressupostos da engenharia didática para analisar as situações propostas.

A engenharia didática como produto resultante de uma análise a *priori*, é caracterizada por Artigue (1988, apud Machado, 2010, 235) *como em esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino*.

O processo experimental da Engenharia Didática se compõe das fases: análises preliminares; concepção e análise a *priori*; experimentação; análise a *posteriori* e validação.

Nas análises preliminares buscou-se considerações do referencial teórico, dos documentos oficiais e conhecimentos didáticos já desenvolvidos sobre o assunto, considerando os objetivos da pesquisa.

Embasados nesses levantamentos, elaborou-se para a fase da concepção e análise a *priori* uma sequência didática aplicada em sala de aula aos alunos participantes da experimentação, de tal forma que permita a observação e a análise no desenvolvimento das atividades. O desenvolvimento das atividades prioriza a resolução dos sistemas lineares 2x2 com a conversão dos registros de representação semiótica.

A fase da experimentação é a fase da realização da engenharia didática com a população de alunos considerada. A análise a *posteriori* e a validação das atividades foram feitas depois do término da respectiva fase da experimentação, com base nos dados colhidos, nas observações e nas produções dos alunos durante a fase de experimentação. As hipóteses levantadas à luz de nosso referencial teórico são validadas ou não pela confrontação das análises a *priori* e a *posteriori.*

2. Estudos Preliminares

Procurou-se orientações em documentos oficiais para saber como o assunto é apresentado. Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 77) *no estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria*.

A resolução de um sistema de duas equações a duas incógnitas está associada à posição relativa das retas no plano que representam cada uma das equações que formam o sistema, dependendo de sua intersecção, paralelismo ou coincidência há existência ou não de solução. Com operações elementares simples a solução pode ser confirmada.

Tal fato é reforçado nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - PCN+ (BRASIL, 2002) afirmando que se deve construir uma conexão entre as diferentes linguagens, associando situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice versa.

Discutir a resolução de sistemas de equações significa interpretar sob o ponto de vista algébrico as posições relativas de retas. É o entendimento de formas geométricas via álgebra. Pode-se perceber nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p.77).

> No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2X2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de reta.

É importante observar que o documento destaca a valorização do raciocínio matemático na discussão dos conteúdos e o abandono da simples aplicação de regras e fórmulas e, para tanto, aborda a existência de *softwares* que instigam a exploração e construção de conceitos matemáticos por permitirem aos alunos fazerem experimentos, testar hipóteses, esboçar conjecturas e criar estratégias para resolver problemas.

Duas pesquisas com o tema em questão contribuíram para este estudo. Jordão (2011) desenvolveu, analisou e aplicou uma sequência didática visando a resolução dos registros algébricos e gráficos dos sistemas lineares 2D e 3D no *software* Winplot. Constatou que o uso do *software* na conversão do registro algébrico para o gráfico contribui para a construção do conhecimento. Battaglioli (2008) demonstra nos livros didáticos analisados a exploração tímida da mudança de conversão de registros, como também, uma predominância da conversão do registro da língua natural para o algébrico e nenhuma proposta que tenha o registro gráfico como ponto de partida.

Desse modo, a proposta de atividades desta pesquisa se orienta também pelos estudos acima expostos.

3. Procedimentos Metodológicos

Os sujeitos desta pesquisa são seis estudantes de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio matutino de uma escola pública da cidade de São Bernardo do Campo, São Paulo. Foram escolhidos por já saberem, hipoteticamente, resolver sistemas de equações lineares algebricamente e graficamente. Chamaremos os alunos de A1, A2, A3, A4, A5 e A6.

A pesquisa foi desenvolvida no laboratório de informática da escola em três sessões. Os alunos já conheciam o *software* Geogebra e já utilizaram o método de construção manual das retas que representam cada equação do sistema em anos anteriores. Destacamos que o uso do *software* permitiu um número maior de experimentações.

A perspectiva é que os alunos consigam determinar a solução dos sistemas lineares das atividades propostas, fazendo conexão com outras formas de representação relacionando os coeficientes das equações das retas que compõem o sistema com a posição relativa dessas retas representadas com o *software* Geogebra, analisando suas resoluções.

A sequência proposta é composta por seis atividades e aqui são apresentadas as quatro primeiras, foram desenvolvidas para um trabalho de aprendizagem específico que contemple a diversidade de sistemas de representação, pois, segundo Duval (2009, p.

19) *a coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. Sua colocação não resulta automaticamente de aprendizagens clássicas muito diretamente centradas sobre conteúdos de ensino.*

As diferentes formas exploradas nas atividades dos sistemas de equações lineares têm por objetivo favorecer a comparação entre os diferentes tipos de registros confrontando as resoluções encontradas.

3.1 Sequência de Atividades

Atividade 1:

Encontre a solução do seguinte problema: A soma das idades de Maria e Ana é 25 anos. A soma da idade de Maria com o dobro da idade de Ana é 40 anos. Qual é a idade de cada uma? (Questão adaptada do livro de Dante, p. 133).

Análise a *priori* da atividade 1:

A expectativa é de que os alunos utilizem como estratégia a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, identificando a idade de cada uma por uma incógnita, bem como utilizem seus conhecimentos prévios considerando os tratamentos necessários no sistema obtido para determinar a idade de Maria e Ana. Espera-se também que os alunos façam a verificação da solução no sistema.

Experimentação da atividade 1:

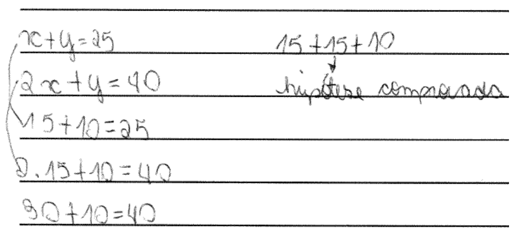
Os alunos A1 e A2 fizeram a conversão de registro da língua natural para o algébrico, utilizaram cálculo aritmético e substituíram os valores encontrados para comprovar o resultado.

O aluno A5 efetuou a conversão e o tratamento algébrico necessário.

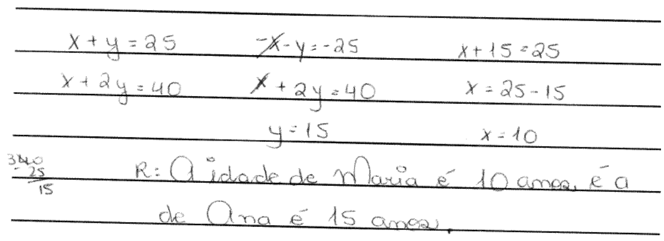
Os alunos A3, A4 e A6 utilizaram o cálculo aritmético.

A seguir alguns protocolos dos alunos:

Protocolo do aluno A1


$x+y=25$ 15+15+10
$2x+y=40$ hipótese comparada
$15+10=25$
$2.15+10=40$
$30+10=40$

Protocolo do aluno A5


$x+y=25$ $-x-y=-25$ $x+15=25$
$x+2y=40$ $x+2y=40$ $x=25-15$
$y=15$ $x=10$
$40-25=15$ R: A idade de Maria é 10 anos, e a de Ana é 15 anos.

Análise a *posteriori* da atividade 1.

Metade dos alunos fez a mudança para o registro algébrico e representaram o sistema, mas tiveram dificuldades na resolução do mesmo, pois não realizaram adequadamente o tratamento algébrico na articulação das duas equações para eliminar uma das incógnitas na utilização do método da adição ou da substituição. Apresentaram dificuldades para conseguir os coeficientes simétricos no método da adição.

A análise da atividade 1 resolvida pelos alunos demonstra que alguns efetuaram a transformação do registro de representação semiótica, ou seja, a conversão da língua natural para o registro algébrico, mas apresentaram dificuldades de tratamento na escolha de um método que assegurasse a resolução. Os outros alunos não necessitaram do registro algébrico.

Validação da atividade 1.

Na análise *a priori* não tinha-se previsto que os alunos poderiam ser valer de outros registros de representação semiótica.

Constatou-se alguns protocolos de alunos que não transitaram pelo registro algébrico, fizeram a conversão e o tratamento no registro numérico.

Atividade 2:

Resolver graficamente um sistema é classificá-lo de acordo com a posição relativa das retas representadas pelas equações do sistema.

Com a utilização do programa Geogebra, resolva graficamente os sistemas de equações abaixo, em seguida utilize o registro algébrico para conferir os resultados.

a) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

Análise a *priori* da atividade 2:

Espera-se dos alunos a utilização da estratégia conversão do registro algébrico para o gráfico com a utilização do *software* Geogebra empregando seus conhecimentos prévios para relacionar os coeficientes das incógnitas x e y e do termo independente com a representação da reta que representam as equações dos sistemas para conferir os resultados, bem como, realizar o tratamento no registro algébrico para determinar a resolução do sistema.

Elaboramos uma sequência didática com as ferramentas que serão utilizadas no programa e um resumo da discussão de um sistema de acordo com a posição relativa das retas que representam cada uma de suas equações.

Experimentação da atividade 2:

Os alunos comentaram que não tinham visto ou esquecido a classificação de sistemas lineares de acordo com a posição das retas que representam cada equação e afirmaram que sem a colocação do quadro explicativo não seriam capazes de resolver a atividade proposta. Não apresentaram dificuldades na classificação no registro gráfico. Apesentaram dificuldades de resolução do registro algébrico. Os seis alunos não prosseguiram no tratamento algébrico já que um dos sistemas não tinha solução e o outro impossível. Como podemos observar nos protocolos a seguir.

Protocolo do aluno A2

3) Na janela de visualização, qual é a posição relativa entre as duas retas? Responda qual é o tipo de sistema.

É um sistema impossível, pois são retas paralelas, distintas e não apresentam ponto comum.

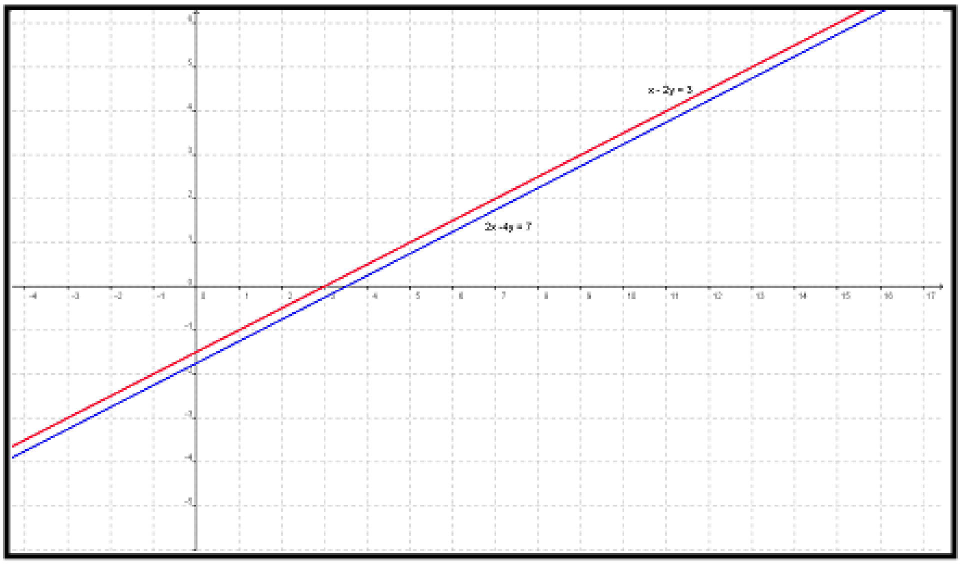
4) Veja os valores de x e y do ponto de intersecção das duas retas, quando for o caso. Resolva algebricamente para conferir.

Olhando diretamente nas equações, pode se perceber que não existe um ponto de intersecção entre as retas "r" e "s"

$r: x - 2y = 3$

$s: 2x - 4y = 7$

Solução no registro gráfico. Sistema Impossível. Conversão feita pela ferramenta no Geogebra.



Análise a *posteriori* da atividade 2:

Graficamente todos os alunos classificaram corretamente os sistemas propostos. Nenhum conseguiu confrontar os resultados no registro algébrico

A análise da atividade 2 desenvolvida pelos alunos evidencia que não apresentaram dificuldades quanto a classificação dos sistemas, visto que a retomada da classificação do sistema com base nas retas que representam cada uma de suas equações foi um facilitador.

A grande dificuldade foi efetuar um tratamento algébrico para comparar com o registro gráfico. Segundo Almouloud e Bianchini (1996) os alunos apresentam dificuldade em encontrar as soluções de um sistema indeterminado devido a dificuldade de apresentarem a solução de uma de uma incógnita em função de outra e nos sistemas impossíveis é difícil para o aluno concluir que ele possa ser sem solução, os alunos acreditam que devem encontrar uma resposta numérica.

Validação da atividade 2.

Todos os alunos identificaram corretamente, no registro gráfico, os sistemas como: impossível, quando as retas das equações foram distintas e paralelas; possível e indeterminado, pela representação das retas coincidentes de cada equação ou possível e determinado, na existência de um ponto de intersecção entre as duas retas que representam cada equação do sistema e, neste caso, identificaram o ponto comum como solução do sistema.

Quanto ao registro algébrico demonstraram grande dificuldade para encontrar um tratamento algébrico que garanta a resolução do sistema linear, principalmente se os sistemas forem possíveis e indeterminados e impossíveis.

Após analisar os protocolos dos alunos, compreende-se a importância de empregar outro registro, de acordo com Duval (2009), as atividades não podem ser desenvolvidas em um único registro, visto que possibilita ao aluno refletir, comparar e analisar resultados.

Atividade 3:

Para essa atividade foi desenvolvida uma sequência de instruções para o aluno experimentar no Geogebra um grande número de movimentações dos parâmetros que representam coeficientes das incógnitas de cada equação do sistema.

Item 1 $\begin{cases} 5x + 2y = 5 \\ 5x + 2y = c \end{cases}$

Item 2 $\begin{cases} ax + by = c \\ 2ax + 2by = 2c \end{cases}$

Item 3 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ \end{cases}$

$ax + y = c$

Análise a *priori* da atividade 3.

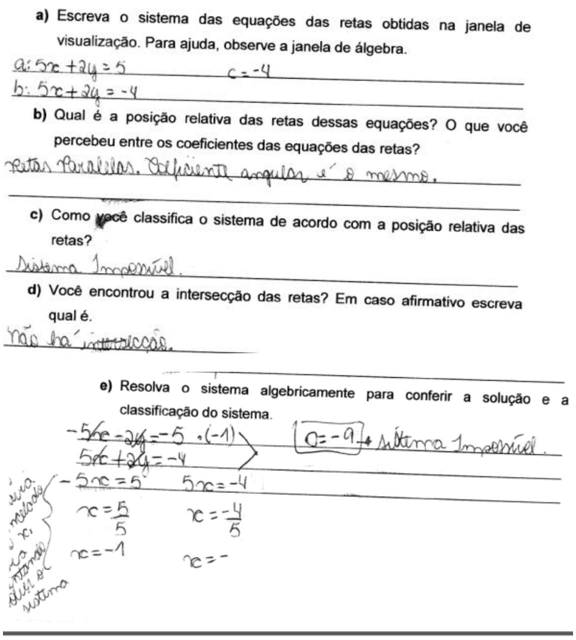
Acreditamos que esta atividade, pelo grande número de experimentações propostas na movimentação dos parâmetros coeficientes das equações das retas no *software*, irá permitir que os alunos identifiquem as relações pontuais sobre a interferência dos coeficientes no movimento das retas. Um estudo nessa abordagem é recomendado por Duval (apud Moretti, 2011). Espera-se que os alunos com base na sequência didática proposta utilizem como estratégia:

- A conversão do registro algébrico para o registro gráfico, utilizando como recurso o *software* Geogebra. O aumento do número de experimentações dar-se-á pela ferramenta controle deslizante que introduz como parâmetros os coeficientes das equações.
- A mobilização dos conhecimentos prévios para perceber e relacionar os coeficientes das incógnitas x e y e do termo independente com a representação da reta das equações dos sistemas.
- A conferência dos resultados, realizando o tratamento no registro algébrico para determinar a resolução do sistema algebricamente.

Experimentação Atividade 3

A pesquisadora iniciou com uma revisão de sistemas de equações lineares e trabalhou com os alunos os tratamentos algébricos necessários para resolução nos métodos da adição e substituição. Foi trabalhado um sistema de cada tipo, os alunos tiraram suas dúvidas e desenvolveram sem dificuldade a atividade, como observamos no protocolo do aluno A2 abaixo:

Protocolo do aluno A1


a) Escreva o sistema das equações das retas obtidas na janela de visualização. Para ajuda, observe a janela de álgebra.

a: 5x + 2y = 5   c = -4

b: 5x + 2y = -4

b) Qual é a posição relativa das retas dessas equações? O que você percebeu entre os coeficientes das equações das retas?

Retas Paralelas. Coeficiente angular é o mesmo.

c) Como você classifica o sistema de acordo com a posição relativa das retas?

Sistema Impossível.

d) Você encontrou a intersecção das retas? Em caso afirmativo escreva qual é.

Não há intersecção.

e) Resolva o sistema algebricamente para conferir a solução e a classificação do sistema.

$-5x - 2y = -5 \cdot (-1)$ $\boxed{0 = -9}$ sistema Impossível.

$5x + 2y = -4$

$-5x = 5$ $5x = -4$

$x = \frac{5}{5}$ $x = -\frac{4}{5}$

$x = -1$ $x = -$

Análise a *posteriori* da atividade 3:

Os alunos alteraram o parâmetro representando o termo independente percebendo o sistema impossível pela posição relativa entre as retas paralelas, que representam cada equação e pelas experimentações permitidas pelo *software* que duas equações representam uma mesma reta caracterizando o sistema como possível e indeterminado.

Pela análise da atividade 3 desenvolvida percebemos que a partir dessa atividade os alunos começaram a relacionar os coeficientes da equação formada com a movimentação dos parâmetros, a melhora foi notória.

Validação da atividade 3

Confrontando as análises a *priori* e a *posteriori* percebe-se que os alunos observaram a proporcionalidade entre os coeficientes e termos independentes no registro algébrico com a posição das retas que representam uma equação. E, a alteração desses parâmetros, gera uma modificação na posição de suas retas. Duval (1988) identifica que toda movimentação de uma imagem gera modificação na expressão algébrica correspondente, ocasionando uma variável visual para a interpretação gráfica. E, destaca, como necessário perceber todas as alterações possíveis dessa imagem e seu efeito na expressão algébrica.

Atividade 4:

Escreva uma equação no interior do retângulo para que o sistema represente:

a) Duas retas paralelas

$$\begin{cases} -3x + 7y = -3 \\ \boxed{} \end{cases}$$

b) Duas retas coincidentes

$$\begin{cases} -3x + 7y = -3 \\ \boxed{} \end{cases}$$

c) Duas retas concorrentes

$$\begin{cases} -3x + 7y = -3 \\ \boxed{} \end{cases}$$

Análise a *priori* da atividade 4.

Espera-se que o aluno faça a conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Não foi solicitado para determinarem as soluções.

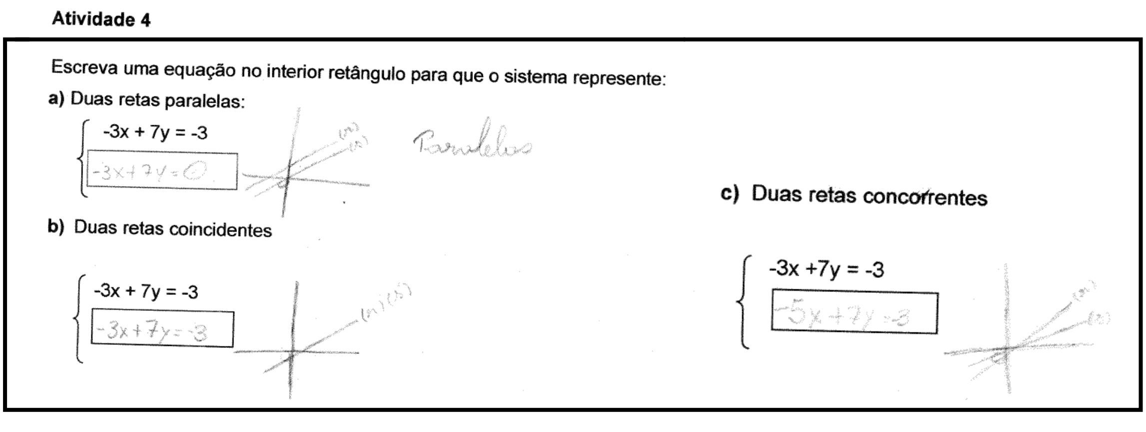
Experimentação da atividade 4

Alguns alunos trabalharam a forma reduzida da reta.

Os alunos mostraram segurança em determinar uma segunda equação da reta que atendesse a posição pedida.

O aluno A3 já trabalhou os dois registros simultaneamente, mesmo não sendo solicitada a construção do gráfico no Geogebra.

Protocolo do aluno A3.


Atividade 4

Escreva uma equação no interior retângulo para que o sistema represente:

a) Duas retas paralelas:

$$\begin{cases} -3x + 7y = -3 \\ \boxed{-3x+7y=0} \end{cases}$$

Paralelas

b) Duas retas coincidentes

$$\begin{cases} -3x + 7y = -3 \\ \boxed{-3x+7y=-3} \end{cases}$$

c) Duas retas concorrentes

$$\begin{cases} -3x + 7y = -3 \\ \boxed{-5x+7y=-3} \end{cases}$$

Análise a *posteriori* da atividade 4.

Os alunos a partir da posição relativa das retas solicitadas e com uma equação conhecida conseguiram determinar sem problemas a segunda equação. Saíram do registro gráfico para o algébrico.

A análise da atividade 4 resolvida pelos alunos demostra que efetuaram a transformação do registro de representação semiótica com tranquilidade, é o que Duval (apud, Moretti, 2011) coloca em seu artigo pontuando que o aluno adquirirá segurança no registro gráfico quando perceber todas as implicações relacionadas ao movimento de uma reta nas alterações de seus parâmetros. O aluno passa a ter uma visão global.

Validação da atividade 4

Os alunos a partir da posição relativa das retas solicitadas e com uma equação conhecida determinaram sem problemas a segunda equação de cada sistema.

Atingiram plenamente o objetivo desta atividade e identificaram a variável visual relacionando-a com o registro algébrico Duval (1988).

Considerações finais

Nas três sessões de desenvolvimento da proposta, percebemos que os alunos inicialmente não tinham conhecimento da representação de um sistema de equações lineares por meio de vários registros, porém, a partir da segunda sessão o desenvolvimento dos alunos foi notório. Podemos concluir que a introdução de uma atividade que permitisse a tramitação dos sistemas de equações lineares nos vários registros de representação semiótica e o conhecimento de quais alterações feitas no registro algébrico provoca mudanças no registro gráfico, nos demostrou que foi um facilitador para a melhora do desempenho dos alunos. Esperamos dar nossa contribuição para a aprendizagem dos alunos no tema em questão e incentivar outros estudos deste tema nas pesquisas da Educação Matemática.

Referências

www.pucsp.br/Geogebrasp. Acesso: 16 de março de 2013.

ALMOULOUD, S. A., BIANCHINI, B. L. (1996). *O Erro Ligado ao Ensino Aprendizagem de Sistemas Lineares in* Anais do IV EPEM. São Paulo: SBEM. p. 216-223.

ARTIGUE, M. (1988). *Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*. v. 9, n. 3. Grenoble.

BATTAGLIOLI, C. S. M. (2008). *Sistemas Lineares no 2º ano do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos.* 2008. 114 f. Dissertação de Mestrado Profissional (PUC/SP) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso 17 de março de 2013.

______ Secretaria de Educação Média e Tecnológica**.** (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC.

______ Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília: MEC/SEF.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso 17 de março de 2013.

______ Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (2002). *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN+: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Mec. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso 17 de março de 2013.

DANTE, L. R. (2010). *Contexto e Aplicações***.** 1ª São Paulo: editora Ática. 384 p. (2º).

______ **(**2007). *Tudo é Matemática***.** 2ª São Paulo: editora Ática. 288 p. (7ª).

DUVAL, R. (2009). *Cognitivo da Compreensão Matemática***.** *In*: MACHADO, S, D, A. (org.) Aprendizagem em Matemática, Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus. (Coleção Papirus Educação). p. 11-33.

DUVAL, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I)*. São Paulo: Livraria da Física. 110p.

DUVAL, R. (2011). *Ver e Ensinar a Matemática de outra forma: Entrar no modo Matemático de Pensar: os registros de representação semiótica*. São Paulo: Proem Editora. 160 p.

JORDÃO, A. L. I. (2011). *Um Estudo sobre a Resolução Algébrica e Gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio.* 192 f. Dissertação de Mestrado Profissional (PUC/SP) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

MACHADO, S. D. A. (org.). (2009). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. 5. ed. São Paulo: Papirus Editora. 160 p.

MORETTI, M. T. (2011). *Tradução: Gráficos e equações: a articulação de dois registros*-Duval, R. REVEMAT, e ISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), v.6, n. 2, p. 96-112.

RIBEIRO, J. (2010). *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*. 1ª São Paulo: editora Scipione, 2010. 328 p. (2º).

São Paulo (Estado). Secretaria de Educação. SEESP, São Paulo (Estado). Secretaria de Educação. (2013*). Caderno do Aluno: Matemática, Ensino Médio – 2ª Série, v. 2,* São Paulo: SEE.

_______ São Paulo (Estado). Secretaria de Educação. (2009). *Caderno do Professor:*

Matemática, Ensino Médio – 2ª Série, v. 2, São Paulo: SEE.

______ São Paulo (Estado). Secretaria de Educação. (2010). *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias*. SEESP.