

Equação da reta: uma proposta de atividades para o Ensino Médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do *software* GeoGebra

RAQUEL SANTOS SILVA¹
BARBARA LUTAIF BIANCHINI²

Resumo

Este trabalho tem por objetivo investigar se a utilização de um software de geometria dinâmica, o GeoGebra, pode contribuir para uma melhor compreensão do objeto matemático reta, do ponto de vista da geometria analítica, na 3ª série do Ensino Médio. Com base nas ideias da Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi construída uma sequência de atividades com foco no trabalho com a reta e suas diferentes formas de representação. Para o desenvolvimento das atividades o software GeoGebra foi utilizado como apoio. Foram utilizados aspectos da Engenharia Didática como metodologia. Nesta pesquisa percebeu-se que os alunos conseguem realizar a maior parte das conversões e tratamentos propostos e que se bem trabalhada a sequência pode favorecer o aprendizado.

Palavras-chave: *Software GeoGebra; Reta; Registros de representação semiótica.*

Abstract

The article objective is to investigate if the using of a dynamic geometry software, GeoGebra, can contribute for a better comprehension for the mathematics object, the line, studied in the analytics geometry in High School. It was built a sequence of activities focused on the line and the different forms of representation that was supported by the Semiotic Registers of Representation theory. For the development of the activities, the students used software GeoGebra. As a methodology, some aspects of Didactics Engineering were used. In this research, it was noticed that the students do the majority of the conversions and treatments and if the sequence is well developed, it can favor the knowledge.

Keywords: *Software GeoGebra; Line; Semiotic Registers of Representation.*

Introdução

A geometria analítica é parte integrante do currículo da 3ª série do Ensino Médio (EM), mas muitas vezes não é tratada com a sua real importância. Tendo em vista que este conteúdo é importante para a conclusão do EM e que também poderá subsidiar a continuidade dos estudos, daqueles que decidirem por uma carreira na área das ciências exatas, decidiu-se refletir um pouco mais sobre o assunto e criar uma proposta de ensino que abordasse este tema. A união entre álgebra e geometria é sempre um desafio para o

Trabalho apresentado no III Encontro de Produção Discente em Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, realizado em 23 de novembro de 2013 (modalidade comunicação oral)

¹ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - emaildaraquel@uol.com.br

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - barbara@pucsp.br

professor de Matemática, segundo Hajnal (2007, p. 18) “[...] percebemos que os alunos apresentam dificuldades em trabalhar e compreender tópicos fundamentais da geometria analítica.”. Um exemplo claro dessa dificuldade é o estudo da reta.

Apesar de o estudo da reta não ser uma novidade observa-se que ao chegar na 3ª série do EM os alunos ainda apresentam muitas dificuldades. A equação da reta começa a ser estudada a partir do 8º ano do Ensino Fundamental (EF), tem continuidade no 9º ano e é consolidado na 1ª série do EM, nesta série os coeficientes da equação de primeiro grau são explorados e associados à representação gráfica de uma reta. Mesmo com todas as informações das séries anteriores, muitos alunos chegam à 3ª série do EM com a ideia de que uma reta é simplesmente um traço retilíneo e que não há relação com as equações. Então mostrar uma reta de forma geométrica é muito simples, basta construir o gráfico. Uma questão difícil para eles é “enxergar” uma reta em um registro algébrico, ou seja, em uma equação por exemplo.

Em meio a todas essas situações observou-se que seria muito interessante investigar este tema da geometria analítica. Essa investigação deu-se por meio de uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra. Segundo Gravina (2001, p. 40) “Na pesquisa matemática atual, objetos e processos até então restritos aos “olhos da mente” são agora externalizados através de precisas, objetivas e dinâmicas visualizações na tela do computador [...]”. Acredita-se que o uso do computador pode contribuir muito para o desenvolvimento das atividades.

Então considera-se a hipótese do uso do *software* auxiliar na compreensão do objeto matemático *reta* e na identificação de suas diferentes formas de representação.

1. Teoria dos Registro de Representação Semiótica

As ideias de Duval na Teoria dos Registros de Representação Semiótica mostram-se muito interessantes para este trabalho e serão empregadas neste estudo. Duval (2011) afirma que um mesmo objeto matemático pode ser representado de diferentes formas. Para o aprendizado desse objeto matemático é preciso que essas diferentes formas de representação sejam estudadas profundamente e que as relações existentes entre elas sejam estabelecidas.

Há uma tendência em confundir-se a representação de um objeto matemático com o próprio objeto matemático. Essa distinção entre o objeto e as diferentes formas de

representação deve ser clara para o seu entendimento.

[...] não se pode ter compreensão em matemáticas, se nós não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, [...] com suas representações [...] porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. (DUVAL, 2009, p. 14)

O aprendizado dar-se-á no momento em que o aluno é capaz de entender o objeto matemático, de identificar suas diferentes representações e fazer as conversões e tratamentos entre os diferentes tipos de representação para o mesmo objeto matemático.

A matemática estuda objetos abstratos, que não é possível percebê-los em uma situação real, os objetos matemáticos. Para Duval as representações podem apresentar-se de três maneiras: representações subjetivas e mentais, representações internas ou computacionais e representações semióticas.

As representações subjetivas e mentais podem ser encaradas como “fantasias”, ou seja, são as concepções feitas pelas pessoas em relação a fenômenos físicos e naturais. As representações internas e computacionais são aquelas nas quais o sujeito realiza tarefas sem pensar em todas as etapas necessárias para tal. Os algoritmos de computador são um exemplo claro, o sujeito utiliza mas não se dá conta que aquela ação está sendo realizada por uma máquina e não por ele mesmo.

As representações semióticas são externas e conscientes do sujeito. Essas representações se referem a um sistema particular de signos que tem suas dificuldades particulares de significado e funcionamento. As representações semióticas podem ser resumidas em dois aspectos: forma e conteúdo. A forma refere-se ao representante e o conteúdo ao representado.

O principal objetivo para ela auxiliar no processo de aprendizagem de um objeto matemático é a conversão dos diferentes tipos de representação. Essa conversão consiste em mudar a maneira como o objeto matemático é representado.

Sem as representações semióticas seria impossível a construção do conhecimento. Segundo Duval, “semiósis” (representação) é a apreensão ou a produção de uma representação e “noésis” (conceitualização) é a apreensão conceitual de um objeto. Duval (2009, p. 17) afirma que “[...] Não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que

determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*.”. Conclui-se então que a conceitualização só ocorrerá após a representação e a apreensão dos objetos matemáticos só será possível após o sujeito ter coordenado vários tipos de representação.

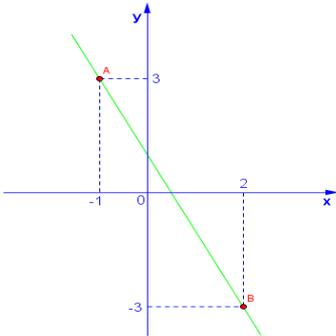
Duval apresenta três atividades cognitivas ligadas a *semiósis*: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

É importante não fazer confusão entre tratamento e conversão. O tratamento ocorre dentro do registro e a conversão dar-se-á entre registros diferentes. É por meio da passagem de um registro para outro que verifica-se a importância da forma das representações.

A coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. [...] Um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas possibilidades próprias, sobre sua comparação por colocar em correspondência e sobre suas “traduções” mútuas uma dentro da outra parece necessário para favorecê-la. Porém, quando um tal tipo de trabalho é proposto, constata-se uma modificação completa nas iniciativas e nas atitudes dos alunos para efetuar os tratamentos matemáticos, para os controlar, para a rapidez de execução e também para o interesse colocado na tarefa.[...] Esse salto qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances aparece ligado à coordenação de sistemas semióticos dos alunos. (DUVAL, 2009, p.19)

O objeto matemático em questão neste estudo é a reta. Na geometria analítica o estudo da reta dar-se-á por meio da construção de gráficos e da representação algébrica. Então é possível mostrar quatro registros de representação semiótica para representá-la pelo menos, conforme o quadro a seguir.

Tabela 1: Registros de Representação Semiótica para a reta

Registro da Língua Natural	Registro Simbólico	Registro Gráfico	Registro Algébrico
Existe uma reta r que contém os pontos A e B de coordenadas $(-1,3)$ e $(2,-3)$, respectivamente.	\overleftrightarrow{AB} $A(-1,3)$ e $B(2,-3)$		$y = -2x + 1$

Fonte: Tabela elaborada pela autora.

Na tabela observa-se a presença de quatro registros para representar a reta. Na geometria analítica é necessário realizar as conversões de um registro para outros. Normalmente os enunciados, as definições, as proposições estão no registro da língua natural e a partir deles é possível representar em uma linguagem simbólica. A conversão do registro da língua natural para o registro simbólico funciona como um tratamento para que se chegue ao registro gráfico, pois a partir dele é possível construir a reta no registro gráfico.

O registro gráfico é uma outra maneira de representação, este registro está associado à ideia de reta pois logo que se fala em reta esse tipo de representação vem à cabeça. O registro algébrico é aquele que exige mais tratamentos, ou seja, mais conhecimento dos recursos algébricos para serem utilizados de modo que se chegue a uma equação.

2. Metodologia

Nesse estudo foram empregados aspectos da Engenharia Didática como metodologia. Esta metodologia foi desenvolvida na França, por Michèle Artigue, na década de 80. É utilizada para a concepção, realização, observação e análise de situações de ensino, quando há uma parte experimental.

A Engenharia Didática pode ser dividida em quatro fases principais: *Análises preliminares*, na qual é feito o levantamento bibliográfico sobre o assunto a ser pesquisado; *Concepção e análise a priori das situações didáticas*, nesta fase a sequência de atividades é construída e se descreve quais são os resultados esperados durante a experimentação; *Experimentação* que é a aplicação da sequência para os sujeitos de pesquisa e por fim a *Análise a posteriori e validação*, nesta fase constata-se se as respostas dadas pelos sujeitos de pesquisa foram conforme o esperado ou não. E a validação ocorre internamente, ou seja, são comparadas as análises *a priori* com as análises *a posteriori*.

Para a concepção das atividades foi realizado o levantamento bibliográfico e podemos destacar cinco pesquisas: Varella (2010), Hajnal (2007), Andrade (2007), Castro (2001) e Gravina (1999).

Varella (2010) aponta que os alunos mostram muita dificuldade em argumentar a respeito de conjecturas, o que reflete em uma dificuldade em relação às provas e

demonstrações. Hajnal (2007) cita que os alunos apresentam dificuldades em compreender tópicos de geometria analítica. Andrade (2007) menciona a falta de motivação dos alunos em aprender determinados conteúdos matemáticos devido à falta de contextualização dos mesmos. Castro (2001) indica a dificuldade dos alunos em transitar entre os vários registros que representam um objeto matemático.

Gravina (1999) destaca que o uso do computador pode auxiliar muito na compreensão de um objeto matemático devido a todos os recursos disponíveis e às inúmeras possibilidades de utilização que apresenta. Acrescenta que os *softwares* podem representar uma ferramenta importante durante o processo de ensino e aprendizagem.

Os programas que fazem “traduções” entre diferentes sistemas de representação apresentam-se como potentes recursos pedagógicos, principalmente porque o aluno pode concentrar-se em interpretar o efeito de suas ações frente as diferentes representações, até de forma simultânea, e não em aspectos relativos a transição de um sistema à outro, atividade que geralmente demanda tempo. (GRAVINA, 1999, p. 80)

Além das pesquisas, documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e o Currículo do Estado de São Paulo propõem que inicie-se a 3ª série do EM, com o estudo da geometria analítica. Esse estudo dar-se-á por meio das equações e propriedades da reta, da circunferência e das cônicas.

Um recurso muito interessante apresentado durante as aulas em nosso curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, foi o *software* de geometria dinâmica. Houve a oportunidade de conhecer alguns, mas a maior familiarização foi com o GeoGebra. Esta é uma ferramenta muito rica e com ela torna-se possível dar um tratamento diferente a esse estudo. A visualização de um objeto geométrico e suas propriedades algébricas é muito importante para consolidar o aprendizado.

De acordo com o Currículo do estado de São Paulo (2011) existem três grandes blocos em relação ao estudo da matemática: Geometria, Números e Relações. Todo o desenvolvimento realizado nesses blocos nos ensinos fundamental e médio serve de apoio para o seu estudo.

A geometria analítica está inserida tanto no bloco da Geometria quanto no bloco das Relações, pois com o seu estudo pretende-se que o aluno consiga estabelecer conexões entre as figuras estudadas em geometria, as equações estudadas em álgebra, as medidas estudadas no bloco dos números, etc.

Há, ainda, no Ensino Médio, um rico leque de possibilidades para o cruzamento das Relações como um bloco de conteúdos com os demais, tanto os Números quanto a Geometria. Na geometria analítica, por exemplo, fundem-se as perspectivas das relações de interdependência, da linguagem algébrica e dos objetos geométricos, numa verdadeira comunhão de interesses entre as três vertentes de temas disciplinares. (SÃO PAULO, 2011, p. 44)

Ao pensar em uma reta, normalmente imagina-se apenas a representação gráfica, essa representação é muito eficiente mas não é suficiente para a compreensão da noção de reta. O objetivo nessa pesquisa é que os alunos trabalhem com essas conversões de registros e também com os tratamentos em uma sequência de atividades, com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, e o escolhido para tal propósito foi o GeoGebra.

Na figura a seguir, observa-se o exemplo dado anteriormente na tela do *software* GeoGebra.

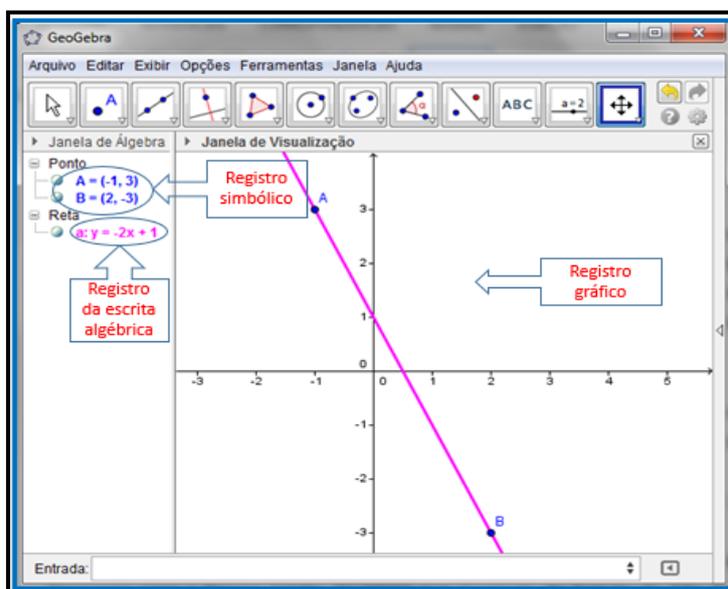


FIGURA 1: Exemplo de representação de uma reta na tela do software GeoGebra
FONTE: Tela do GeoGebra, criada pela autora.

É possível observar na tela do GeoGebra três registros de representação semiótica. O registro simbólico é expressado pelas coordenadas dos pontos que pertencem à reta. O registro da escrita algébrica está expresso na Janela de Álgebra do *software* por meio da equação da reta. O registro gráfico, a reta construída com o auxílio do sistema de coordenadas cartesianas, está na janela de visualização.

Com este tipo de proposta pretende-se consolidar noções sobre equação da reta. Vale ressaltar o fato de os alunos que participaram da pesquisa já conhecerem o assunto, porém a experiência ter sido de uma forma tradicional, ou seja, sem o uso do

computador.

A partir de todas as observações feitas foi possível criar uma sequência de atividades que consiste em quatro atividades. Na Atividade 1 é tratada a condição de alinhamento de três pontos. Na Atividade 2, os tipos de equação da reta e seus coeficientes. Na Atividade 3, o estudo das posições relativas entre as retas e na Atividade 4 uma situação contextualizada para que os alunos utilizem as noções já trabalhadas nas atividades anteriores. Nesse artigo apresenta-se a Atividade 1, da sequência criada.

TABELA 2: Atividade 1 da sequência de atividades criada para o experimento

ATIVIDADE 1	
<p>1 - Abra o <i>software</i> GeoGebra. No campo de entrada na parte inferior da tela digite os pontos $A=(-1,1)$, $B=(1,3)$ e $C=(2,4)$. Em seguida, ligue os pontos com o auxílio da ferramenta “<i>reta definida por dois pontos</i>” - , localizada na barra de ferramentas.</p> <p>Os três pontos que você digitou, A, B e C são colineares? Por quê?</p>	<p>2 - Agora, também no campo de entrada digite os pontos $D=(-2,-1)$, $E=(4,-3)$ e $F=(0,5)$. Em seguida ligue os pontos com o auxílio da ferramenta “<i>polígono</i>” -  localizado na barra de ferramentas.</p> <p>Os pontos D, E e F são colineares? Por quê?</p>
3 - O que aparece na janela de álgebra?	
4 - De acordo com o que você estudou, qual é o método para verificar se três pontos são colineares?	
5 - No espaço abaixo use o método que você já estudou para verificar se os três pontos estão alinhados, no caso dos pontos A, B e C. Em seguida use o mesmo processo para D, E e F.	
6 - Compare o método utilizado acima com os elementos que você já observou na janela de álgebra. Qual a sua conclusão?	
Complete:	
7 - Três pontos estão alinhados se:	8 - Quando três pontos não estão alinhados:

FONTE: Criada pela autora.

Nesta atividade espera-se que os alunos leiam os enunciados e consigam realizar a conversão do registro da língua natural para a linguagem simbólica e vice versa. Em seguida espera-se que relacionem o assunto já estudado com o conteúdo das atividades realizadas. No próximo passo, utilizando lápis e papel pede-se que resolvam o determinante de ordem 3, formado pelas coordenadas dos pontos fornecidos e por x e y . E a partir dos resultados encontrados concluam que os pontos A, B e C estão alinhados pois o resultado do determinante é zero e que os pontos D, E e F não estão alinhados pois o determinante tem resultado 40, ou seja, diferente de zero.

Para realizar esta atividade são solicitadas as conversões do registro da língua natural para o registro simbólico, do registro simbólico para o registro da escrita algébrica. Neste registro vários tratamentos têm que ser feitos até chegar ao resultado. Em seguida o aluno tem que relacionar as informações observadas na tela do GeoGebra com os resultados encontrados. Espera-se que os alunos respondam que quando o determinante é igual a zero os pontos estão alinhados e quando o determinante é diferente de zero os pontos não estão alinhados.

Os participantes dessa pesquisa são alunos da terceira série do EM, do período da manhã de uma escola pública da rede estadual de São Paulo. Vale ressaltar que os alunos já estudaram o assunto no início do ano letivo de 2013. Vamos destacar a parte da atividade na qual tiveram que resolver o determinante e compará-lo ao que já fora observado na tela do computador.

No espaço abaixo use o método que você já estudou para verificar se os três pontos estão alinhados, no caso dos pontos A, B e C. Em seguida use o mesmo processo para D, E e F.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 4 \\ & & & & 0 \end{vmatrix} \quad -3 + 2 + 4 - 6 + 4 - 1 = -10 + 10 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 \\ & & & & + \end{vmatrix} \quad 6 + 0 - 20 - 0 + 10 + 4 = 40$$

Compare o método utilizado acima com os elementos que você já observou na janela de álgebra. Qual a sua conclusão?

Ambedos foram iguais, pois obtivemos o mesmo resultado de diferentes maneiras.

Complete:

Três pontos estão alinhados se:
 O valor do determinante for igual a zero.

Quando três pontos não estão alinhados:
 O valor do determinante é diferente de zero e forma-se um triângulo.

FIGURA 2: Atividade 1 realizada pelos alunos.
FONTE: Protocolos das atividades realizadas pelos alunos.

Nesta atividade convém destacar o fato de os alunos ao resolverem o determinante de ordem 3 formado pelas coordenadas dos pontos fornecidos e x e y conseguiram estabelecer as relações que eram esperadas entre o que foi observado na tela do computador e o que já havia sido estudado. Conforme foi destacado na figura apresentada anteriormente os alunos conseguiram relacionar e coordenar três registros de representação semiótica, o registro simbólico, do resultado do determinante, o registro da língua natural, ao escrever a respeito do triângulo e o registro gráfico, do

triângulo que foi construído no *software* GeoGebra.

Além das conversões citadas, também podemos destacar que os alunos conseguiram realizar o tratamento no registro da escrita algébrica ao resolverem o determinante.

Considerações finais

A atividade aplicada foi muito bem aceita pelos alunos que se interessaram bastante pelo *software* apresentado, o GeoGebra. Apesar de o assunto tratado, a equação da reta, já ser conhecido por eles a atividade trouxe um novo olhar para esse assunto. Percebeu-se que conseguiram alcançar o objetivo proposto que é de auxiliar na compreensão do objeto matemático reta.

Os alunos mostraram durante o desenvolvimento da atividade que as várias formas de representação da reta ficaram bem claras para eles. Assim verificou-se que o *software* pode ajudar na compreensão de um assunto a ser tratado desde que seja utilizado em conjunto com uma sequência de atividades bem elaborada e adequada à situação que se queira trabalhar. O trabalho do professor para elaborar, conduzir e auxiliar na realização das atividades é indispensável. Esse trabalho associado a utilização de um *software* pode revelar-se muito produtivo.

Referências

- ANDRADE, R. C. D. (2007) *Geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio*. 121 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Núcleo pedagógico ao desenvolvimento científico, Universidade Federal do Pará – UFPA. Pará, 2007.
- BRASIL. (2000) *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 58 p. Brasília, 2000.
- CASTRO, S. C. (2001) *Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação*. 111 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2001.
- DUVAL, R; CAMPOS, T. M. M. (org.). (2011) *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. 1.ed.São Paulo. PROEM. 2011. 160 p. Volume I.
- _____, R; LEVY, L.F; SILVEIRA, M. R. A. (trad.). (2009). *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. 1. ed. São Paulo. Editora Livraria da Física. 2009. 110 p. Fascículo I.
- GRAVINA, M. A.(1999) A aprendizagem da Matemática e ambientes informatizados. *PGIE-UFRGS. Informática na educação: Teoria e Prática*. v. 2. n. 1. p. 73-88.

HAJNAL, F.(2007) *O estudo do paralelismo no ensino da geometria analítica plana: do empírico ao dedutivo*. 2007. 236 p. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2007.

MACHADO, S. D. A. (org.) (2010) *Educação Matemática: Uma nova introdução*. 3. ed.. São Paulo. EDUC. 254 p. Série Trilhas.

SÃO PAULO. (2011) *Currículo do estado de São Paulo – Matemática*. 76 p. São Paulo. 2011.

VARELLA, M. (2010) *Prova e demonstração na Geometria Analítica: Uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos*. 2010. 213 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2010.