Engenharia Didática com o tema
Integrais Dependentes de Parâmetros – IDP's

MARIA VANISIA MENDONÇA DE LIMA[1]

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES[2]

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar os resultados parciais de uma pesquisa em andamento para o Programa de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. A pesquisa se consubstancia a partir da adoção de um design de investigação, no campo da Didática da Matemática, chamado de Engenharia Didática – ED, bem como a adoção de uma teoria que proporciona uma análise pormenorizada dos fenômenos vinculados ao ensino e aprendizagem da noção de Integrais Dependentes de Parâmetros – IDP's, conhecida por Teoria das Situações Didáticas – TSD. Dessa forma, o trabalho descreve e indica os elementos essenciais que constituem as duas etapas iniciais de uma ED, a saber: análise preliminar e análise a priori (com ênfase ao processo de elaboração de situações didáticas). Assim, perspectivamos o desenvolvimento de uma fase de experimentação em sala de aula, em que o professor-pesquisador atua numa turma de Cálculo II, do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE-Campus Cedro, com arrimo das situações aqui discutidas e outras, tendo como escopo a obtenção de maior conhecimento didático e os fatores que podem incidir sobre sua transmissão didática em sala de aula no locus acadêmico.
Palavras-chave*: Engenharia Didática; Integrais Dependentes de Parâmetros; Ensino.*

Abstract

For this work the goal is to presents the preliminar results, relatively of an ongoing study for the Academic Master´s Program in Science and Mathematics Teaching at the Federal Institute of Science and Education of State of Ceará – IFCE. The research takes a design of investigation in the field of Mathematics Education, called Didatical Engineering – DE, as well the adoption of a theory that provides a detailed analysis of a phenomena linked to the teaching and learning of the notion about Integrals Dependent of Parameters – IDP's, known as Theory of Didatical Situations – TSD. Thus, the paper describes and lists the essencial elements that make up the two initial stages of an DE, namely: preliminar analysis and a priori analysis (with emphasis on the construction of didactic situatiuons). So, the work realises the development of an experimental phase in the classroom, in which the o teacher-researcher acts in a class of discipline of calculus II, the Degree in Mathematics IFCE - cedar Campus, with the aid of the situations discussed here and, on the other hand, the scope to obtain higher educational knowledge and the factors tha may related to its didactic transmission in the classroom of academic locus.
Keywords: *Didactical Engineering; Dependent Integrals in Parameters; Teaching.*

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática – vanisialima@bol.com.br

[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – fregis@ifce.edu.br

Introdução

Nossa proposta de trabalho faz parte de um recorte de nossos estudos da dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática, mantido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE, iniciado em 2015, com previsão de conclusão até 2017, cujo assunto envolve a descrição de uma abordagem estruturada e planejada com o tema Integrais Dependentes de Parâmetros – IDP’s e apoiada na sistematização proporcionada pela Engenharia Didática – ED.

Dessa forma, assumimos como objetivo a descrição de uma abordagem para o tema IDP’s, adotando alguns elementos da ED, como aporte sistemático de organização da incursão investigativa e, tendo em vista a etapa de experimentação, a descrição das situações dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização, previstas pela TSD.

A justificativa e relevância do tema anterior pode ser rapidamente evidenciadas com arrimo da figura 1, na medida em que perspectivamos variadas alterações simbólico-conceituais relacionadas com o processo de integração em uma e em várias variáveis (ALVES, 2013a; 2013b; 2013c). Ademais, vale observar as considerações de Artigue (2003, p. 124), quando menciona que “a teoria da integração se desenvolve na universidade, primeiro com as integrais de Riemann e, depois, em um nível superior, a integral de Lebesgue. Tudo isto requer uma reconstrução sucessiva das relações que os alunos mantêm com o conceito de integral”.

Figura 1 – Transição simbólica conceitual para o caso do processo matemático de integração

$$\int_a^b f(x)dx \overset{transição}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{transição}{\Rightarrow} \begin{cases} \int_a^b f(x,t)dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx \end{cases}, t\in I\!R \overset{transição}{\Rightarrow} \begin{cases} \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy, \int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz \\ \int_a^\infty\int_c^\infty f(x,y)dxdy \end{cases}$$

Fonte: Elaboração dos autores

Na figura 1 ainda, simbolizamos $\int_a^b f(x,t)dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx$, com a condição de que $t \in IR$. Doravante, a classe das integrais dependentes de parâmetros, com o parâmetro $t \in IR$, receberá a notação anterior. Não obstante, a fim de demarcar nosso campo de interesse epistêmico de discussão, no próximo segmento, relataremos alguns elementos preocupantes com um período compulsório de estudos que, no *locus* acadêmico, demanda alguns anos. Nossas análises restringir-se-ão ao caso do processo de integração.

1. Transição Interna do Cálculo – TINC

Na tese de Alves (2011), deparamos a discussão e indicação de um processo que nem sempre se mostra imediato e natural, envolvendo a evolução das relações de aprendizado dos estudantes relativamente ao conceito de limite, ao processo de derivação e de integração, num intervalo de tempo acadêmico que delimita o contato com funções de uma variável real e até funções de várias variáveis. Alves (2011) assinala elementos de transição e elementos de ruptura nesse contexto. Os primeiros são constados como fatores que atuam no sentido de auxiliar, promover e impulsionar a boa evolução das relações estabelecidas pelos sujeitos com um *corpus* teórico específico.

Por outro lado, os elementos de ruptura atuam, segundo Alves (2011, p. 248), no sentido de dificultar, retardar e impedir a boa evolução e o contato das relações entre sujeito e saber científico. Alves pontua alguns exemplos, cuja natureza é diferenciada. Por exemplo, do ponto de vista da denominação, os alunos se acostumam ao estudo das funções do tipo $y = f(x)$ deriváveis ou diferenciáveis, todavia, quando lidam com outra classe de funções, tais como $z = f(x, \mathrm{y})$ ou $w = f(x, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, os estudantes descobrem que derivabilidade não constitui ser mais sinônimo de diferenciabilidade.

Outro exemplo indicado por Alves (2011) diz respeito ao caso da regra de L´Hospital. Com efeito, os estudantes demandam muito tempo lidando com malabarismos algébricos que se mostram úteis para a resolução de classes ou tipo de limites de funções na variável real. Mas, algum tempo depois, descobrem a emblemática regra e, assim, adquirem um instrumento conceitual que autoriza se livrarem de simbologias intricadas do tipo $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0^0, \infty^0, 0^\infty$, etc. Não obstante, passados alguns anos, quando no contato do Cálculo em Várias Variáveis - CVV, não escutam mais nada sobre a referida regra. Nem mesmo os autores de compêndios especializados se dão ao trabalho de explicar o estádio de vacuidade relativo ao seu papel e a sua função no CVV.

Outro caso pode ser lembrado em relação ao Teorema Fundamental do Cálculo. Com efeito, os estudantes são conduzidos em interpretar a seguinte igualdade $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ do ponto de vista geométrico, como a obtenção de uma área limitada pelo gráfico de uma função. Não obstante, quando deparam a relação semelhante, no contexto do estudo, por exemplo, de campos vetoriais e funções vetoriais, não encontram mais nenhum vestígio geométrico do apelo intuitivo anterior que serviu como pensamento preliminar dos matemáticos do século XVII (BOS, 1985; BOURBAKI, 1984; BOYER, 1949).

Os elementos acentuados por Alves (2011) podem ser perspectivados com arrimo de uma noção fornecida por Artigue (1990, p. 265) chamada de concepção, quando caracteriza-a por "colocar evidência uma pluralidade de pontos de vistas possíveis sobre um mesmo objeto matemático, distinguir suas representações e os modos de tratamento que são associados ao mesmo, colocar em evidência sua adaptação mais ou menos eficaz a uma resolução de um ou vários problemas".

Mas, em nosso caso, no decurso dos estudos acadêmicos, quando deparam a seguinte cadeia $\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\substack{INTEGRAIS \\ DEFINIDAS}} \overset{TRANSIÇÃO}{\Rightarrow} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}_{\substack{INTEGRAIS \\ GENERALIZADAS}} \overset{TRANSIÇÃO}{\Rightarrow} \underbrace{\int_a^b f(x,t)dx}_{IDP´s}$, que elementos de transição e que elementos de ruptura incidem no âmbito do ensino e da aprendizagem?

2. Um pouco sobre a Engenharia Didática

Na seção anterior, indicamos um questionamento que carece de maior precisão, posto que, manifestamos especial interesse pelo ensino das IDP´s. Isso posto, reformulamos nosso questionamento anterior por outro: Que elementos de transição e que elementos de ruptura incidem no âmbito do ensino e da aprendizagem das IDP´s?

Ora, quando apresentamos um questionamento extraído de uma problemática identificada como relevante, efetuamos um primeiro passo para o início de uma ED como assim explica Douady (2008). Antes, porém, cabe recordar que os institutos de Investigação do Ensino em Matemática (IREM) foram criados na França, com o intuito de arrefecer um caos instalado no ensino de Matemática, sobretudo nos anos 60, e forte influência bourbakiana (DIEUDONÉE, 1987; 1989).

Douady (1995, p. 3) esclarece que nos IREM´s, trabalhavam professores de todos os níveis de ensino interessados em investigações no âmbito do ensino de Matemática. E, a partir da sinergia dos grupos de trabalhos, se formulou um trabalho e uma nova problemática. "Com respeito à aprendizagem, se fazia ênfase ao significado e, por conseguinte, os problemas fontes de aprendizagem e de desequilíbrios para os quais os alunos não manifestam todos os conhecimentos para a sua solução" (DOUADY, 1995, p. 4).

Passados alguns anos, constatamos a demarcação de uma episteme distinguida, capaz de elevar ao status de área de estudos ou campo de investigação, nominada de Didática da Matemática (BROUSSEAU, 2002). Assim, surgiu a Engenharia Didática, no seio da Didática da Matemática, no começo dos anos 80. Sob a égide de um pensamento plasmado a partir da esfera de atuação de um engenheiro, que busca realizar e ajustar, quando necessário, um processo preciso, a Engenharia Didática – ED declara seu interesse por trabalhar com objetos depurados nas Ciências e, mais precisamente, da Matemática.

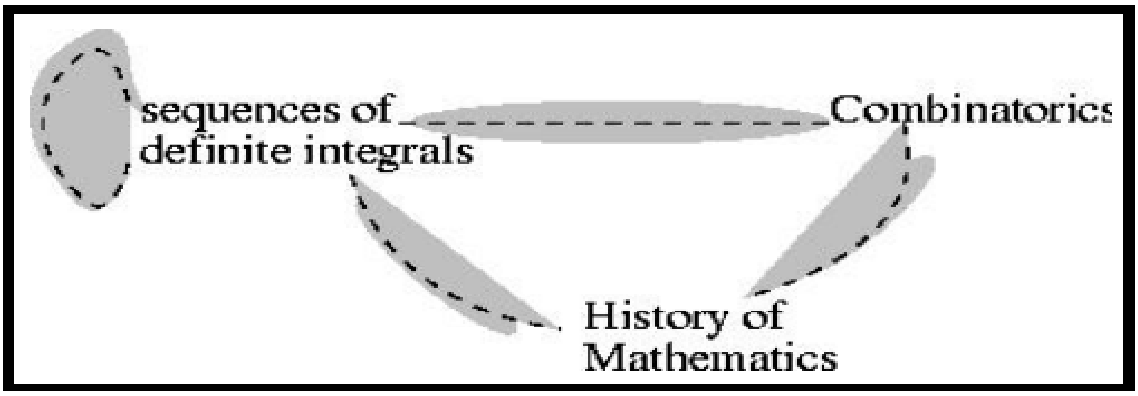
De acordo com extensa literatura, identificamos as etapas: (1) análises preliminares; (2) análise *a priori*; (3) experimentação; (4) análise *a posteriori* e validação. Adotaremos a perspectiva de Almouloud (2007) com o intuito de distinguir na etapa da análise *a priori*, o momento de descrição e concepção de situações didáticas para o ensino das IDP´s.

3. Análise preliminar

Almouloud (2007, p. 172) aponta de modo mais pragmático as seguintes etapas: (i) estudo da organização matemática; (ii) análise didática do objeto matemático escolhido. De modo específico, concernente ao item (i) nos atemos: ao estudo da gênese histórica envolvendo a noção das IDP´s (BOTTAZZINI, 1986; MEDVEDEV, 1991); sua funcionalidade atual na Matemática (limitações para o uso didático e metodológico); obstáculos relativos aos conceitos relacionados com as IDP´s; a estrutura atual do ensino do referido conteúdo.

No que concerne ao item (i), tendo em vista identificarmos algumas concepções presentes no ensino atual das IDP´s, adotamos uma perspectiva que se aproxima da proposta da abordagem de Dana-Picard (2005a; 2005b; 2005c; 2010; 2012a; 2012b) e, apontamos, como justificativa a escassez de trabalhos que discutam mediações didáticas para a noção de IDP´s. Nesse sentido, comentamos a figura 2, que envolve a noção de vizinhança cognitiva (*cognitive neighborhood*).

Figura 2 – Noção de vizinhança cognitiva para o ensino de Integrais Dependentes de Parâmetros – IDP's, na concepção de Dana - Picard



Fonte: Dana-Picard (2005a, p. 980).

Na figura 2, observamos alguns elementos característicos do que Dana-Picard (2005) nomina como vizinhança cognitiva (*cognitive neighborhood*). O autor reserva atenção especial nas atividades dos alunos, tendo em vista a exploração do ambiente computacional. Na figura 2, identificamos os elementos: Sequência de Integrais Definidas, Combinatória e História da Matemática (vértices). Outros elementos podem intervir na atividade de investigação do estudante, na medida em que busca resolver atividades envolvendo a noção das IDP´s.

Assumimos posição concorde com Dana-Picard (2004), na medida em que as situações problemas que ensejamos descrever envolvem elementos (variáveis-didáticas) que buscam evitar o trato eminentemente analítico e formal dispensado por parte dos compêndios especializados de livros. Por exemplo, vamos considerar a seguinte integral $\int_0^1 f(x,t)dx = \int_0^1 (2x+t^3)^2 dx$. Quando desenvolvemos uma preocupação eminentemente formalista, exigiremos do aluno que considere situações do tipo $\int_0^1 f(x,t)dx = \int_0^1 (2x+t^3)^2 dx = \left.\frac{(2x+t^3)^3}{6}\right|_{x=0}^{x=1} = 4/3 + 2t^3 + t^6 = g(t)$. Em seguida, a diferenciação sob o símbolo de integral é, então, determinada: $\frac{d}{dx}\int_0^1 (2x+t^3)^2 dx =$

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(2x+t^3)^2\,dx = \int_0^1 (12t^2x+6t^5)dx = [6t^2x^2+6t^5x]_{x=0}^{x=1} = 6t^2+6t^5 = h(t)\,.$$

De modo simplificado, integramos na variável ‘x’ e obtemos algo que depende do parâmetro ‘t’. Tal procedimento é fundamentado, do ponto de vista formal, num teorema devido a Leibniz (1646-1716) e deverá garantir a validez das argumentações que discutiremos logo adiante.

Recordamos que a *parte preditiva* desta fase centra-se nas características da situação didática que tencionamos levar aos estudantes. Consideramos também o que pode ser posto em funcionamento pelos sujeitos em circunstância de ação, seleção, decisão, controle e validação dos resultados. Reparemos, entretanto, que “os elementos considerados nesta fase podem ser retomados na etapa seguinte” (ALMOULOUD, 2007, p. 173).

4. Análise *a priori*

De modo *standard*, e como mencionamos nas seções anteriores, o componente do estudo epistemológico desempenha papel visceral logo nas etapas iniciais de uma incursão investigativa com amparo na ED. Salientamos que a ED é uma metodologia de pesquisa, sendo assim, torna-se indispensável o uso de teorias que servem para fundamentar nossa investigação e para a leitura/interpretação dos dados possivelmente produzidos pelos estudantes.

Ademais, na análise *a priori*, temos o interesse em determinar o controle do “comportamento dos alunos e seu sentido” (ARTIGUE, 1995, p. 258). E, acentuamos, tendo em vista o caráter matematizado das situações que buscamos estruturar, prevermos a presença do professor na participação do debate coletivo que deve ser instalado, a partir das relações entre a tríade (alunos – professor – conhecimento) (DOUADY, 1995).

5. Descrição e concepção de situações

Almouloud (2007, p. 174) nos auxilia ao indicar elementos que não podem se mostrar negligenciados e, assim, ao assumirmos uma posição concorde com esse autor, sublinhamos que: o problema envolve vários domínios de conhecimentos (álgebra, geometria e domínio numérico); os conhecimentos dos alunos relativamente ao Cálculo Integral em uma variável real devem funcionar como pré-requisitos.

Situação-problema I: Decidir o caráter de convergência da seguinte integral dependente de parâmetro indicada por $\int_{?}^{?} x^n \cdot e^{-x} dx$.

Comentários: Com origem num quadro de representação gráfico e numérico (figura 3), os alunos devem ser instigados na produção de conjecturas relativas ao significado e a escolha dos limites de integração da integral acima, que grafamos provisoriamente por $\int_{?}^{?}$ evitando, assim, a determinação arbitrária de uma integral imprópria que se insere em nosso escopo de investigação.

Situação de ação: Com arrimo da exploração dinâmica da construção que exibimos na figura 3, os estudantes deverão iniciar um debate científico em sala de aula. Num momento preliminar de experimentação, os alunos poderão verificar que $\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 1!$. Com origem na figura 3 - II, indicamos ao lado direito, a existência de retas horizontais que assumem os valores indicados por $y_n = n!$, com $n \geq 1$. Na figura, observamos a evolução das contribuições de área correspondentes à integral de Euler, que aponta os valores que descrevem a convergência desta integral, ao lado esquerdo, para valores correspondentes à variável real (figura 3 – I).

Por outro lado, ao lado direito, os alunos são estimulados a perceber valores discretos aproximados, tendo em vista a presença de assíntotas horizontais. A “soma visual” de todas as informações coligidas nessa primeira fase dialética deverá culminar a determinação da fase seguinte.

Situação de formulação: Hairer & Wanner (2008, p. 261) explicam que ao longo de sua vida, Euler se interessou pela interpolação de fatoriais. A descrição exibida na figura 3, proporcionada pelo *software Geogebra* permite uma exploração dinâmica e entendimento das propriedades dos números fatoriais que ocorrem no plano (ao lado direito). Os alunos devem ser estimulados ao debate sobre a convergência/divergência da integral proposta na situação e, possivelmente, o motivo da integral correspondente ser construída de uma integral imprópria ou generalizada.

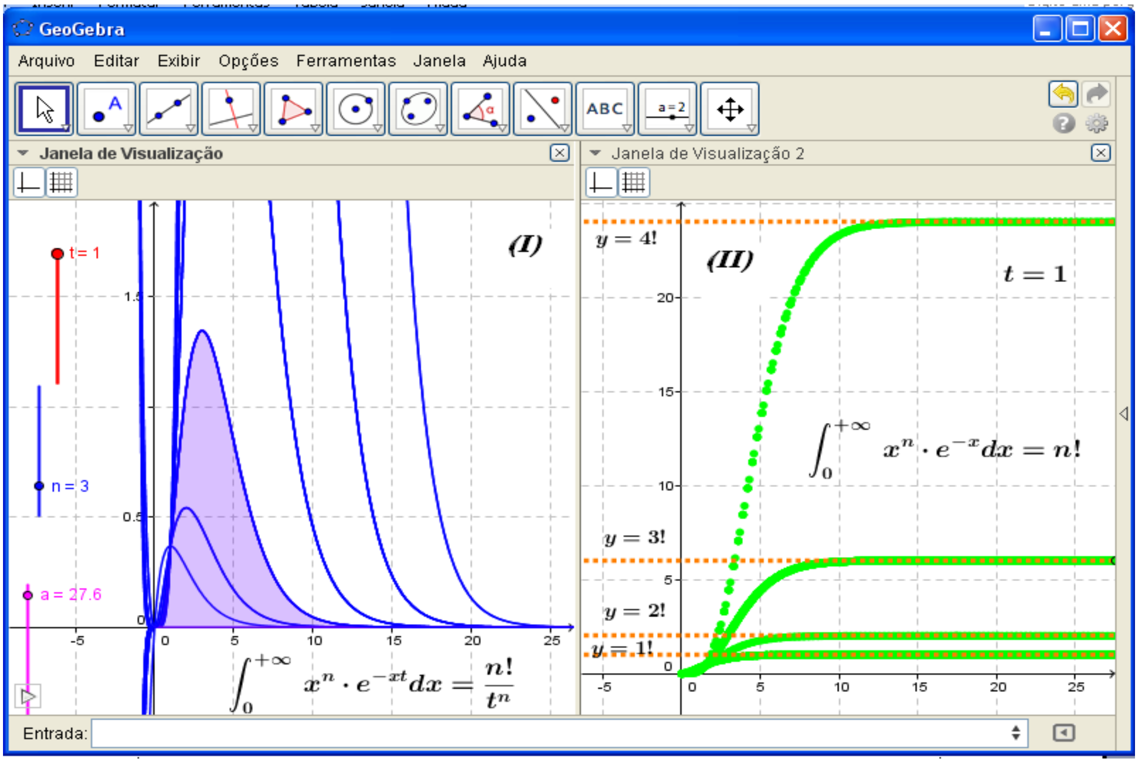
Situação de validação: Diferentemente da etapa anterior, se mostra necessário “provar o que foi afirmado na fase anterior” (ARTIGUE, 1984, p. 7 – 8). Apoiar-nos-emos na argumentação de Zajta & Goel (1989), por meio da introdução de um parâmetro $t \in IR$ e o cálculo de derivação repetida do seguinte modo: $t > 0$ e

$x = t \cdot u \therefore 1 = \int_0^\infty e^{-x} dx = \int_0^\infty t \cdot e^{-tu} du$. Segue, então, que $\int_0^\infty e^{-tu} du = \frac{1}{t}(t > 0)$. Daí em diante, empregar-se-á a Regra de Leibniz, diferenciando sob o símbolo da integral. Escrevemos em seguida que:

$$\int_0^\infty x e^{-tx} du = \frac{1}{t^2}; \int_0^\infty x^2 e^{-tx} du = \frac{2}{t^3}; \int_0^\infty x^3 e^{-tx} du = \frac{6}{t^4}; \int_0^\infty x^4 e^{-tx} du = \frac{24}{t^5}; \int_0^\infty x^5 e^{-tx} du = \frac{120}{t^6}; \ldots$$

O padrão correspondente às expressões acima nos permitem conjecturar que $\int_0^\infty x^n e^{-tx} du = \frac{n!}{t^{n+1}}$. Por fim, assumindo de modo particular $t = 1 \leftrightarrow x = 1 \cdot u \therefore \int_0^\infty x^n e^{-x} du = n!$.

Figura 3 – Interpretação gráfico-numérico para a noção de uma IDP



Fonte: Alves (2014, p. 9).

Situação de institucionalização: Nessa fase, os alunos deverão desenvolver um olhar de transição que envolve a modificação do *status* de instrumento matemático para objeto. Visto que, o conhecimento matemático que o *expert* deverá convencionar ou fixar (ARTIGUE, 1984, p. 8), segue os rituais acadêmicos, indicando o estatuto cognitivo de um novo saber e rico em relações conceituais. Assim, os alunos são conduzidos em apreciar a última igualdade estabelecida e que indicamos por: $\int_0^\infty x^n e^{-x} du = n! \in \mathrm{IN}$.

Ora, o elemento que deve ser acentuado diz respeito ao método pouco usual da obtenção da definição de um fatorial, neste caso, por intermédio de uma integral. Ademais, ao lado esquerdo, os alunos devem compreender um modelo matemático regido por um parâmetro 'n' e um número real 'x', ao passo que, no lado direito, vislumbram somente o termo $n!$.

Situação-problema II: Decidir o caráter de convergência da seguinte integral dependente de parâmetro indicada por $I_n = \int_?^? x^n\sqrt{a^2-x^2}dx$ para $n \geq 0$

Comentários: Esperamos que os sujeitos participantes da discussão do problema determinem um intervalo que corresponde a uma definição da integral imprópria. Outrossim, assumimos o pressuposto que ocorrerá uma busca por um método de integração adequado, todavia, toda manipulação dependerá do comportamento da parâmetro 'n' e dos valores assumidos por 'a'.

Situação de ação: Vejamos que para $n=0$, teremos que $I_0 = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$. Inicialmente, pode-se trabalhar com a integral $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ e posteriormente retomar os limites de integração. Assim, os alunos, possivelmente, deverão tomar $x = asen\theta \Rightarrow dx = acos\theta d\theta$, em que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, para $x \geq 0$. Então, devem encontrar que: $x = asen\theta \Rightarrow sen\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = arcsen\frac{x}{a}$ e ainda que $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-(asen\theta)^2} = \sqrt{a^2(1-sen^2\theta)} = \sqrt{a^2(cos^2\theta)}$. Mas, tendo em vista a condição $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, decorre que $\sqrt{(cos^2\theta)} = cos\theta$. Segue, pois, que: $\sqrt{a^2-x^2} = acos\theta$ o que produz o seguinte: $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int acos\theta acos\theta d = \int a^2cos^2\theta d\theta$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \frac{1+cos2\theta}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}\int (1+cos2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}sen2\theta\right).$$

Por outro lado, reparemos que $\frac{1}{2}sen2\theta = \frac{1}{2}(2sen\theta cos\theta) = \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$.

Assim, retornando à variável inicial, vamos fazer a substituição em I_0 de

$\theta = arcsen\frac{x}{a}$ e $\frac{1}{2}sen2\theta = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$. E, dessa forma, encontraremos:

$$I_0 = \frac{a^2}{2}\left(arcsen\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}\right) = \frac{a^2}{2}arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a = \frac{a^2}{2}arcsen(1),$$

Ou ainda o seguinte valor:

$$I_0 = \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

No passo seguinte, vejamos o comportamento de $I_1 = \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx$, no caso de $n = 1$.

Ora, já sabemos que $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$ e, assim $x = asen\theta \Rightarrow sen\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = arcsen\frac{x}{a}$. Então, segue a seguinte expressão $I_1 = \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx$. Pode-se resolver a integral $\int x\sqrt{a^2 - x^2}dx$ e, posteriormente trabalhar com os limites de integração. Então, retomando as substituições anteriores, veremos que:

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}dx = \int (asen\theta acos\theta acos\theta)d\theta = a^3 \int (sen\theta cos^2\theta)d\,\theta$$

Resolvem em separado a seguinte integral $a^3\int\left(sen\theta\cos^2\theta\right)d\theta$, notando que:

$$u = cos\theta \Rightarrow du = -sen\theta d\theta \Rightarrow sen\theta d\theta = -du.$$

Segue que:

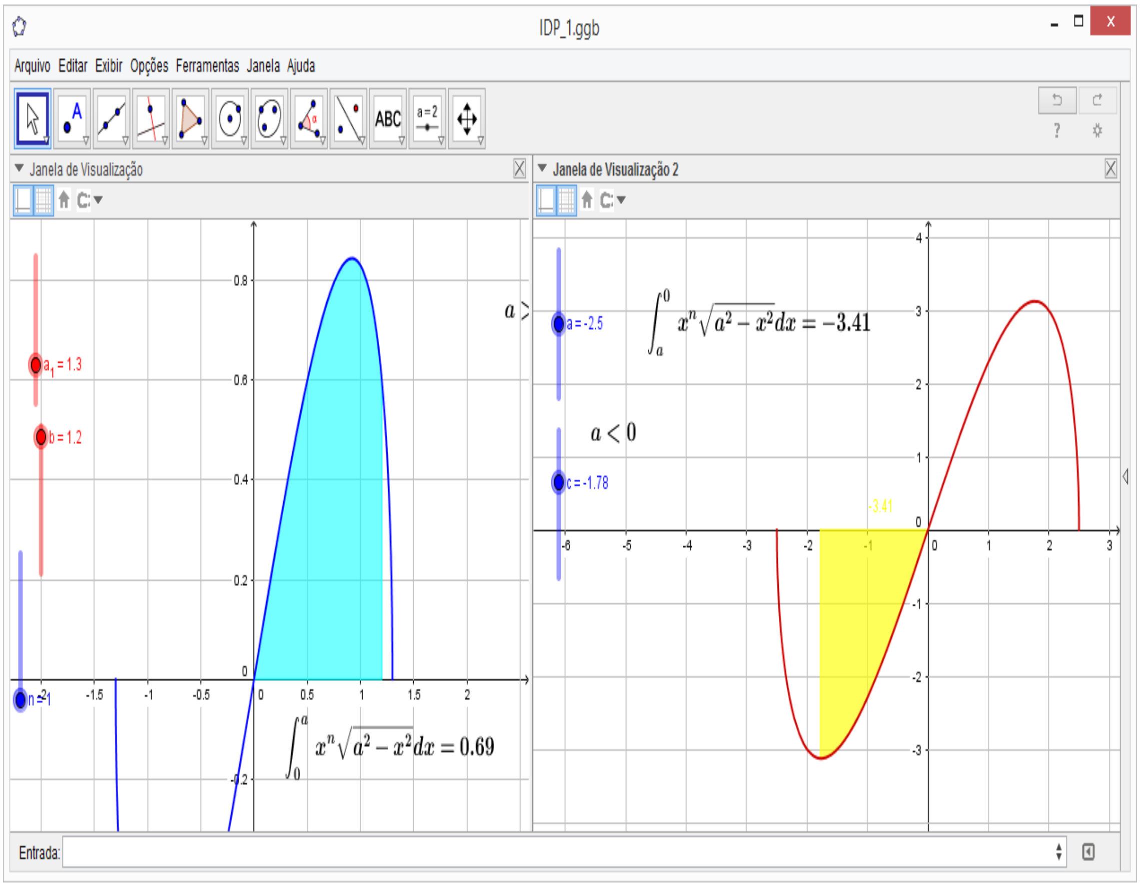
$$\int(sen\theta\cos^2\theta\,)d\theta = -\int u^2\,du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{cos^3\theta}{3}.$$

Por fim, deverão encontrar que:

$$I_1 = \frac{a^3\,cos^3\theta}{3} = \frac{a^3(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a})^3}{3} = \frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}, \text{ com a>0.}$$

Ora, as duas situações propostas devem estimular o debate inicial com os estudantes, posto que, precisam perceber/investigar o caráter de convergência das integrais. Ademais, tendo em vista a ritualística do modelo de Indução Matemática, cabe a obtenção de mais dados para o avanço das etapas dialéticas ulteriores da TSD. Antes, porém, os estudantes poderão iniciar um debate científico e confrontar os dados anteriores com os aspectos qualitativos que registramos na figura 4. Com efeito, ao lado esquerdo, com recurso ao *software Geogebra*, os estudantes podem apreciar a descrição geométrica para as integrais discutidas no quadro analítico anterior. Acrescentamos, todavia, a integral $I_1 = \int_a^0 x^n \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, com $a < 0$ ao lado direito, cuja região (na cor amarela) corresponde ao seu valor aproximado. No caso abaixo, os alunos podem desenvolver sua exploração para valores $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Figura 4 – Comparação de informações dos quadros gráficos e numéricos no Sotware GeoGebra



Fonte: Elaboração dos autores

Situação de formulação: Como acentua Artigue (1984, p. 7) prevemos na fase atual que "o aluno poderá justificar suas escolhas, todavia, a situação não exige". Ou seja, com origem em um debate coletivo, os estudantes poderão, com arrimo dos dados coligidos e impressões colhidas nas fases dialéticas anteriores, indicar o método de integração que acreditarem possibilitar maiores chances de êxito.

No rol dos métodos conhecidos para a integração, o modelo esperado constitui o método de integração por partes. Assim, deve-se escolher adequadamente os elementos da identidade $\int u(x)dv(x) = = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$. Por outro lado, no modelo que lidamos, devem considerar ainda $\int u(x,n)dv(x,n) = u(x,n)v(x,n) - \int v(x,n)du(x,n)$, ou seja, a dependência de um parâmetro nos argumentos dedutivos.

Situação de validação: Nesse momento, o professor deve estimular o emprego do processo indutivo, posto que, diferentemente da etapa anterior, se mostra necessário "provar o que foi afirmado na fase anterior" (ARTIGUE, 1984, p. 7 – 8). Dessa forma, devem considerar $I_n = \int_0^a x^n \sqrt{a^2 - \mathrm{x}^2}dx$ onde $u = x^n$ e $du = nx^{n-1}$. Portanto, teremos $dv = \sqrt{a^2 - x^2}dx$ e $v = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Agora, passam a resolver a integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ utilizando o mesmo procedimento realizado quando discutimos na fase anterior o caso $n = 0$ e posteriormente retoma os limites de integração. Assim: $x = asen\theta \Rightarrow dx = acos\theta d\theta$ onde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ quando $x \geq 0$. Temos que: $x = asen\theta \ \Rightarrow sen\theta = \frac{x}{a} \ \Rightarrow \theta = arcsen\frac{x}{a}$. Logo: $\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2} = \sqrt{\mathrm{a}^2 - (\mathrm{asen}\theta)^2} = \sqrt{\mathrm{a}^2(1 - \mathrm{sen}^2\theta)} = \sqrt{\mathrm{a}^2(\cos^2\theta)}$. Ora, como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, então: $\sqrt{(\cos^2\theta)} = \cos\theta$.

Dessa forma, poderemos assumir que $\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2} = \mathrm{a}\cos\theta$, $v = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $\mathrm{v} = \int \mathrm{a}\cos\theta acos\theta d\theta$. Segue, pois, que: $\mathrm{v} = \int \mathrm{a}^2 cos^2\theta d\theta = \mathrm{a}^2 \int cos^2\theta d\theta$. Mas, sabemos que: $cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2}$, substituindo na integral, temos: $\mathrm{v} = \mathrm{a}^2 \int \frac{1+cos2\theta}{2} d\theta = \frac{\mathrm{a}^2}{2}\int(1 + cos2\theta)d\theta = \frac{\mathrm{a}^2}{2}(\theta + \frac{1}{2}sen2\theta)$.

Mas, como $\frac{1}{2}sen2\theta = \frac{1}{2}(2sen\theta cos\theta) = \frac{x}{a}\frac{\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}}{a} = \frac{x\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}}{\mathrm{a}^2}$, retornando a variável x, vamos fazer a substituição em v, de $\theta = arcsen\frac{x}{a}$ e $\frac{1}{2}sen2\theta = \frac{x\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}}{\mathrm{a}^2}$, assim teremos ainda:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{a}^2}{2}\left(arcsen\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}}{\mathrm{a}^2}\right) = \frac{1}{2}x\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2} + \frac{\mathrm{a}^2}{2}.arcsen(\frac{x}{a}).$$

Agora retomando a integral por partes, temos:

$I_n = \int_0^a x^n\sqrt{a^2 - \mathrm{x}^2}dx$ e, desde que $\int udv = uv - \int vdu$ descreve a integração por partes, segue:

$I_n = \int_0^a x^n \sqrt{a^2 - x^2}dx$, ou ainda:

$$I_n = x^n \left(\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)\Bigg|_0^a - \int_0^a \left(\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right).nx^{n-1}dx$$

Temos que:

$$x^n \left(\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)\Bigg|_0^a = a^n.\frac{a^2}{2} arcsen(1) = \frac{1}{2}a^{n+2}.\frac{\pi}{2}.$$

E também:

$$\int_0^a \left(\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right).nx^{n-1}dx =$$

$$\int_0^a \left(\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right).nx^{n-1}dx = \frac{n}{2}\int_0^a \left(x^n \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx + \int_0^a \left(\frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right).nx^{n-1}\right)dx$$

$$\int_0^a (\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)).nx^{n-1}dx = \frac{n}{2}I_n + \frac{1}{2}a^2 n \int_0^a (x^{n-1} arcsen\left(\frac{x}{a}\right))dx$$

Portanto:

$$I_n = \frac{1}{2}a^{n+2}.\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2}I_n - \frac{1}{2}a^2 n \int_0^a \left(x^{n-1} arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx$$

Seja $K_n = \int_0^a (x^{n-1} arcsen\left(\frac{x}{a}\right))dx$, assim:

$I_n = \frac{1}{2}a^{n+2}.\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2}I_n - \frac{1}{2}a^2 nK_n$ e $(1 + \frac{n}{2})I_n = \frac{\pi}{4}a^{n+2} - \frac{1}{2}a^2 nK_n$.

Agora, considerando uma segunda integração por partes, temos:

$u_1 = x^{n-1} = du_1 = (n-1).x^{n-2}dx,$

$dv_1 = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx \Rightarrow v_1 = \int arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx.$

Por outro lado, precisam resolver a seguinte integral $\int arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx$. Mas, basta observarem que $w = \frac{x}{a} \Rightarrow dw = \frac{1}{a}dx \Rightarrow dx = adw$. Segue, pois, que:

$\int arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx = \int(arcsenw)adw = a\int arcsenwdw = a\big(warcsen(w) + \sqrt{1-w^2}\big)$. Fazendo, em seguida a substituição de w temos:

$$\int arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\left(\frac{x}{a}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right).$$

Finalmente, devem encontrar $\int arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx = xarcsen\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{a^2-x^2}$. Para concluir, observamos que:

$$\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx \;=\; x^{n-1}.$$
$$\left(xarcsen\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a - \int_0^a \left(xarcsen\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{a^2-x^2}\right)(n-1).x^{n-2}$$

$$= \int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = a^n\frac{\pi}{2} - \left[(n-1)\int_0^a x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx + (n-1)\int_0^a (x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2})dx\right]$$
$$= \int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx + (n-1)\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = a^n\frac{\pi}{2} - (n-1)\int_0^a \left(x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$$
$$= (1+n-1)\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = a^n.\frac{\pi}{2} - (n-1)\int_0^a \left(x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$$
$$= n\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = a^n.\frac{\pi}{2} - (n-1)\underbrace{\int_0^a \left(x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx}_{I_{n-2}}$$
$$= \int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = \frac{1}{n}\left(a^n\frac{\pi}{2} - (n-1)I_{n-2}\right)$$

Assim:

$$K_n = \int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = \frac{1}{n}\left(a^n\frac{\pi}{2} - (n-1)I_{n-2}\right).$$

Não obstante, já vimos que $(1+\frac{n}{2})I_n = \frac{\pi}{4}a^{n+2} - \frac{1}{2}a^2nK_n$ e, substituindo a expressão correspondente ao termo K_n, devem encontrar que:

$$(1+\frac{n}{2})I_n = \frac{\pi}{4}a^{n+2} - \frac{1}{2}a^2n\frac{1}{n}\left(a^n\frac{\pi}{2}-(n-1)I_{n-2}\right),$$

ou ainda:

$$(1+\frac{n}{2})I_n = \frac{\pi}{4}a^{n+2} - \frac{\pi}{4}a^{n+2} + \frac{a^2(n-1)}{2}I_{n-2}.$$

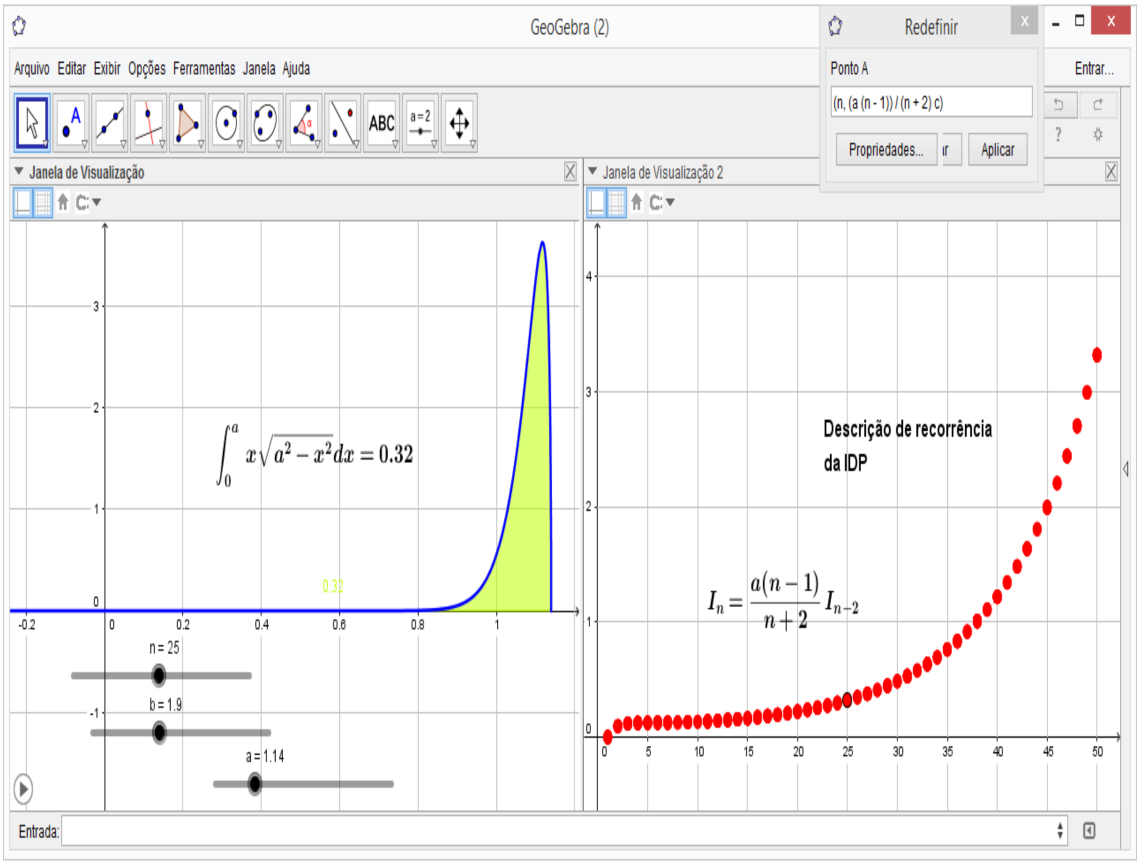
Por fim, o resultado esperado deverá ser descrito pela seguinte expressão $I_n = \frac{(a^2(n-1))}{n+2}I_{(n-2)}$, com $n \geq 2$.

Situação de Institucionalização: Nessa fase, os alunos deverão desenvolver um olhar de transição que envolve a modificação do *status* de instrumento matemático para objeto.

O professor deverá assinalar a presença da seguinte função $f(n)=\frac{(a^2(n-1))}{n+2}$, em consonância com o que observa Dana-Picard (2005, p. 4) quando deparamos relações do tipo $I_n = f(\text{n})\cdot I_{(n-2)}$, em que a função é uma homografia, com ‘n’ número inteiro, garante que, os cálculos analíticos envolvem cálculos menos complexos.

Não obstante, a relação anterior, do ponto de vista da perspectiva do aprendiz, deverá surgir nos momentos finais da investigação. Dessa forma, o professor pode antever o modelo pretendido, tendo em vista que, conhece as relações formais presentes, tanto na parte inicial da situação problema, como também os dados que devem ser perspectivados ao final da incursão investigativa. Reparemos, ainda, na figura 5, ao lado direito, que para todo número $a > 0$ escolhido pelo aluno, o professor poderá fornecer a relação numérica correspondente ao comportamento da sequência de IDP´s que indicamos por $I_n = f(\text{n})\cdot I_{(n-2)}$, para $n \geq 2$.

Figura 5 – Exploração da noção de vizinhança cognitiva com o *software Geogebra*



Fonte: Elaboração dos autores

Assim, as contribuições de área ao lado esquerdo sempre correspondem a um número real, cuja informação é obtida com o *software*. Por outro lado, apesar da sequência em vermelho manifestar um comportamento crescente, um número correspondente ao valor da área pode ser sempre determinado e, portanto, a convergência da integral: $I_n = \int_0^a x^n\sqrt{a^2 - \mathrm{x}^2}dx$. Alves & Lopes (2013) advertem a predileção dos estudantes por padrões algébricos e analíticos vinculados e condicionados pelos métodos de integração. Como assinalado por esses autores, com o *software Geogebra*, os estudantes passam a vivenciar e identificar padrões gráficos-geométricos relacionados com cada tipo de método. Ora, nas figuras 3 e 5 vislumbramos alguns padrões gráficos-geométricos condicionados pelo processo de integração de IDP´s, recorrentemente não contempladas nos compêndios especializados.

Considerações parciais e perspectivas

Abordamos a descrição das fases inicias previstas por um *design* de investigação em Didática da Matemática, que possibilita a obtenção de conhecimentos didáticos acerca de alguns conteúdos matemáticos. Em nosso caso, recordamos que “o término da Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos” (DOUADY, 1995, p. 62).

Assinalamos também uma perspectiva de Dana-Picard (2005b, 2005c) que nos permite a concepção de situações de ensino, envolvendo a noção de IDP´s, de modo que possam proporcionar relações conceituais da integrais do tipo $\int_a^b f(x,t)dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx$ bem mais amplas do que àquelas costumeiramente acentuadas por autores de livros de Cálculo que consultamos até a etapa atual de nossa investigação. Posto isso, este estudo pretende realizar a experimentação de situações semelhantes como as que trouxemos neste escrito, bem como outras, de modo que os elementos constituintes de uma vizinhança cognitiva (*cognitive neighborhood*) sejam explorados ao decurso de uma experimentação.

Desse modo, com o tema Integrais Dependentes de Parâmetros – IDP’s e com uma mediação afetada e alterada pelo uso da tecnologia, apontamos os elementos que consideramos importantes cuja exploração, nas fases dialéticas previstas pela TSD, se tornarão indubitavelmente imprescindíveis, tendo em vista a verificação empírica e a obtenção de dados que tencionamos coletar ao decurso de nossa investigação.

Ademais, assumimos posição concorde com Alves & Lopes (2013) na medida em que os estudantes necessitam do entendimento dos padrões gráficos-geométricos atinentes aos processos de integração de funções. Assim, a sistemática de investigação proporcionada pela ED deverá indicar um percurso científico que perquirimos e, assim, poderemos acumular conhecimentos didáticos-metodológicos acerca do tema Integrais Dependentes de Parâmetros – IDP’s.

Referências

ALMOULOUD, A. S. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias intuitivas do Cálculo a Várias Variáveis.** Tese de doutorado. Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, 2011.

_____. Visualizing in Polar Coordinates with Geogebra. In: **Geogebra International of Romania**. p. 21-30, 2013a.

_____. Exploring L´Hospital Rule with the Geogebra. In: **Geogebra International of Romania**. p.15-20, 2013b.

_____. A noção de integral generalizada: sua exploração apoiada na tecnologia e no contexto histórico. **Anais do VI HTEM**, pp. 1-19, 2013c.

_____. Visualização de integrais impróprias em um parâmetro com o auxílio do Geogebra. **Revista# TEAR Educação, Ciência e Tecnologia**, v. 3, n. 1, p. 1-15, 2014.

ALVES, F. R. V.; LOPES, M. A. Métodos de Integração: uma discussão do seu ensino com apoio no software Geogebra. **Revista do GeoGebra Internacional de São Paulo**. v.2, n. 1, p. 6 – 21, 2013.

_____. Métodos de Integração: uma discussão do seu ensino com apoio no software Geogebra. **Revista do Geogebra Internacional de São Paulo**, v. 2, n. 2, p. 5-21, 2013.

ARTIGUE, M. Épistémologie et Didactiques. **Recherche en Didactiques des Mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 241-286, 1990.

_____. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. **Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques**, v. 8, n. 1), p. 1-38, 1984.

_____. El lugar de la didáctica en la formation de profesores. In: GOMEZ, P. (org.) **Ingeniería didáctica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p. 7-25.

_____. La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: GOMEZ, P. (org.) **Ingeniería didáctica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p. 97-40.

_____. Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nível Universitário? **Boletín de La Asociatíon Venezolana**, v. X, n. 2, p. 117-134, 2003.

_____. Ingeniería didáctica. In: GOMEZ, P. (org.) **Ingeniería didáctica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p. 33-61.

BOS, H. J. **Origens e desenvolvimento do Cálculo**. Brasília: Editora de Brasília, 1985.

BOTTAZZINI, U. **The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass**. New York: Springer-Verlag, 1986.

BOYER, C. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. New York: Dover Publications, 1949.

BOURBAKI, N. **Éléments d´Histoire des Mathematiques**. Paris: Masson, 1984.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**: didactiques des mathématiques 1970 – 1990. London: Klumer Academic Publishers, 2002.

DANA-PICARD, T. Explicit closed forms for parametric integrals. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, n. 35, p. 456 - 467, 2004a.

_____. Parametric integrals and Catalan numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, n. 36, p, 410-414, 2004b.

_____. Technology-assisted discovery of conceptual connections within the cognitive neighborhood of a mathematical topic. **CERME**, p. 979-988, 2005a.

_____. Sequences of Definite Integrals, Factorials and Double Factorials. **Journal of Integer Sequences**, v. 8, 2005b.

_____. Technology-assisted discovery of conceptual connections within the cognitive neighborhood of a mathematical topic. In: **Proceedings of CERME 4**, p. 1-9, 2005c.

_____. Integral presentations of Catalan Numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 41, n. 1, p. 63-138, 2010.

DANA-PICARD, T.; ZEITOUN, D. G. Parametric improper integrals, Wallis formula and Catalan numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 43, n. 4, p. 515-520, 2012a.

_____. Sequences of definite integrals, infinite series and Stirling numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 43, n. 4, p. 515-520, 2012b.

DIEUDONNE, J. **Pour l´honneur de l´esprit humain: le mathematique aujourd´hui**. Paris: Hachette, 1987.

_____. **A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960**. Berlin: Birkhäuseur, 1989.

DOUADY, R. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. In: GOMEZ, P. (org.) **Ingeniería didáctica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p. 1-7.

_____. La ingeniería didáctica y la evolución de su relacioón con el conocimiento. In: GOMEZ, P. (org.) **Ingeniería didáctica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p. 61-97.

HAIRER, E.; WANNER, G. **Analysis by its History**. New York: Springer, 2008.

MEDVEDEV, F. A. **Scenes from the History of real functions**. Birkhäuser Verlag: Berlim, 1991.

ZAJTA, A. J.; GOEL, S. K. Parametric integration tecnhiques. **Mathematical Magazine**. v. 62, n. 5, 1989.