

La función exponencial en la enseñanza media: Un Estado del Arte

RAY FLORES MANGHIERT¹

KATIA VIGO INGAR²

Resumen

El presente trabajo tiene por finalidad presentar un Estado del Arte de investigaciones cuyo foco sea la función exponencial en la enseñanza media, teniendo como antigüedad no más de 10 años, es decir, en el periodo 2009-2019. Esta metodología nos permitió poder mapear las investigaciones, la cual nos lleva a afirmar que existe un gran interés por investigar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático en la enseñanza media. Asimismo, observamos que hay una predominancia por utilizar la modelación matemática para introducir este concepto en los estudiantes.

Palabras-clave: *Función exponencial; Estado del Arte; Enseñanza Media.*

Abstract

This paper aims to present a State of the Art of researches that focus on exponential function in high school from the last 10 years, that is to say from 2009 to 2019. This methodology has allowed us to map these researches, which makes us believe that there is a great interest in researching the teaching and learning process of this mathematical object in high school; likewise, we observe that most of them use mathematical modeling to introduce this concept to students.

Keywords: *Exponential Function; State of the Art; High school.*

Introducción

En nuestra experiencia docente, hemos podido observar que existen diferentes dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en la enseñanza media (Estudiantes entre 15 y 18 años de edad) y es por ello que surgió el deseo de investigar sobre este objeto matemático, lo que conllevó a realizar una Tesis de Maestría en Enseñanza de la Matemática, como parte del programa de posgrado de la Pontificia Católica del Perú, y que motivó a realizar esta investigación con el propósito de saber cómo ha ido evolucionando el estudio de la función exponencial en la enseñanza media.

Es por ello que el Estado del Arte de investigaciones referentes a la función exponencial en la enseñanza media nos proporciona un mapeo para saber el estado actual del proceso de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático, dado que esta

¹ Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. IREM-PUCP – e-mail: flores.ray@pucp.edu.pe.

² Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. IREM-PUCP – e-mail: kvigo@pucp.edu.pe.

metodología nos permite ordenar y sistematizar las investigaciones. Para este fin, consideramos pertinente acotar la búsqueda de investigaciones a nuestra región, tales como Perú, Brasil, Colombia y Argentina, dando relevancia a las tesis de maestría y doctorado, pero también tomando algunos artículos de divulgación científica en revistas indexadas.

Por último, consideramos que este artículo será una ayuda para investigadores que deseen buscar trabajos referidos a la función exponencial en la enseñanza media. Para ello, la estructura de esta investigación inicia con la explicación de la metodología empleada; luego con una organización de las investigaciones halladas; siguiendo con el análisis y el fichaje de algunos de estos trabajos; para finalmente manifestar los resultados obtenidos al utilizar esta metodología.

1 Metodología

Según Brandão (Citado por Romanowski, y Ens 2006), un Estado del Arte tiene por objetivo realizar levantamientos de información a partir de investigaciones ya realizadas en una determinada área de conocimiento.

En ese sentido, Soares (Citado por Romanowski, & Ens 2006) manifiesta que un Estado del Arte tiene un carácter bibliográfico, cuyo objetivo es catalogar y estructurar la producción en algún área del conocimiento. Además, este método puede conllevar a la comprensión de un determinado saber respecto a su amplitud, metodología y postura teórica.

Para Romanowski & Ens (2006), un Estado del Arte puede contribuir de forma significativa en la constitución de un campo de estudio, ya que este método busca identificar los aportes en la construcción de la teoría y práctica pedagógica, así como determinar el campo en el que se mueve este conocimiento e identificar y dar solución a los diferentes problemas que se dan en la práctica.

Según Romanowski (Citado por Romanowski & Ens 2006), la metodología para realizar un Estado del Arte se da de la siguiente manera: Definición de palabras clave; localización de los bancos de investigación; establecimiento de criterios; levantamiento de las tesis catalogadas; recolección del material de investigación; lectura de las publicaciones; organización del informe del estudio componiendo la sistematización de la síntesis; analizar y elaborar las conclusiones preliminares.

Con respecto a la metodología, nos apoyamos en los criterios de Romanowski. Para los descriptores utilizamos las palabras clave: Función exponencial, enseñanza media; para la localización de los bancos de investigación, establecimos que sean tesis de maestría, de doctorado y artículos, siendo las bases de datos utilizadas, el banco de tesis de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), el banco de tesis y disertaciones de la Coordinación de Perfeccionamiento de Nivel Superior de Brasil (CAPES); así como los repositorios de otras universidades de la región, como la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN) y la Universidad de Antioquia (UdeA), además de los artículos de revistas indexadas de divulgación científica, tales como Latindex y Scielo.

2 Búsqueda y organización de las investigaciones

En la búsqueda de los trabajos de investigación, hemos priorizado las tesis de maestría y doctorado realizadas en algunos países de nuestra región, como Perú, Brasil, Argentina y Colombia, donde hemos delimitado nuestra búsqueda a investigaciones que no tengan más de 10 años de antigüedad y que el foco de estudio sea la función exponencial, es decir, que no esté relacionada a la función logarítmica.

Tal como se muestra en el cuadro 1, hemos tomado de referencia las universidades donde se han encontrado las investigaciones, pero, en el caso de Brasil, aludimos a la CAPES dado que abarca una gran cantidad de universidades de ese país.

Cuadro 1: Investigaciones de Maestría y Doctorado

PAÍS	PERÚ	BRASIL	ARGENTINA	COLOMBIA
AÑO	PUCP	CAPES	UNICEN	UdeA
2009	0	1	0	0
2010	0	1	0	0
2011	0	1	0	0
2012	0	1	1	0
2013	1	2	0	0
2014	1	3	0	1
2015	0	8	0	0
2016	0	2	0	0
2017	0	3	0	0
2018	1	5	0	0
2019	1	0	0	0
total	4	27	1	1

Fuente: Elaboración del Investigador

Como podemos observar en el cuadro 1, la mayor cantidad de investigaciones se

encuentran en Brasil y todas las investigaciones encontradas están referidas a la enseñanza media, enseñanza superior, formaciones de profesores o al análisis de libros didácticos y textos. En ese sentido, manifestamos que no hemos encontrado en Perú alguna investigación referida a la enseñanza media.

Asimismo, de estas investigaciones, las únicas tesis doctorales que encontramos fueron dos y esto lo podemos observar en el cuadro 2.

Cuadro 2: Tesis Doctorales

Título	Autor	Institución	Año
Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos	Sureda Figueroa, Diana Patricia	UNICEN	2012
Expectativas Institucionais relacionadas à transição entre o ensino médio e ensino superior para o caso da noção de função exponencial	Andrade, Sirlene Neves de	Universidade Anhanguera de São Paulo	2012

Fuente: Elaboración del Investigador

Las tesis doctorales que se observan en el cuadro 2 fueron realizadas en Argentina y Brasil respectivamente y ambas se publicaron en el mismo año.

Dado que nuestro foco de estudio es la función exponencial en la enseñanza media, hemos organizado los datos encontrados comparándolo con las otras investigaciones halladas referidas a la enseñanza superior, formación de profesores y análisis de libros didácticos y textos, tal como se observa en el cuadro 3.

Cuadro 3: Clasificación de las investigaciones por sujetos de estudio y análisis de textos

AÑO	Enseñanza media	Enseñanza Superior	Formación de profesores	Análisis de libros didácticos y textos
2009	1	0	0	0
2010	0	0	0	1
2011	1	0	0	0
2012	2	0	0	0
2013	1	1	0	1
2014	3	1	1	0
2015	7	0	1	0
2016	1	0	0	1
2017	3	0	0	0
2018	4	0	1	1
2019	0	1	0	0
total	23	3	3	4

Fuente: Elaboración del investigador

Se puede ver, en el cuadro 3, que la mayoría de investigaciones se realizaron respecto a la enseñanza media y que la mayor producción de estos se dio en el año 2015. En ese sentido, dado que nuestro foco de estudio es la función exponencial en la enseñanza media, consideramos importante mostrar las investigaciones hechas en este nivel, tal como se puede observar en el cuadro 4.

Cuadro 4: Tesis de Maestría y Doctorado respecto a la enseñanza media

Enseñanza Media		
Año	Autor	Título
2009	Angiolin, Alexandra Garrote	Trajelórias hipotéticas de aprendizagem sobre funções exponenciais'
2011	Brucki, Cristina Maria	O uso de modelagem no ensino de função exponencial
2012	Sureda Figueroa, Diana Patricia	Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos
	Andrade, Sirlene Neves de	Expectativas Institucionais relacionadas à transição entre o ensino médio e ensino superior para o caso da noção de função exponencial
2013	Oliveira, Antonio Josimario Soares De	O Ensino e a Aprendizagem de Função Exponencial em um ambiente de Modelagem Matemática'
2014	Obando Montoya, Jorge Didier Sánchez Betancur, John Fredy	Construcción de modelos matemáticos en un contexto cafetero
	Fonzar, Gloria Marcy Bastos	Crescimento e Decaimento Exponencial
	Sena, Anderson Silva	Progressão Geométrica Integrada à Função Exponencial: uma abordagem ao ensino médio'
2015	Rozanski, Emilene Funez	Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da teoria das situações didáticas
	Pérez, Luis Eduardo Reyes	Función exponencial en el aula: praxeologías matemáticas en enseñanza media
	Silva, Ricardo jose aguiar	Contexto e Aplicações das Funções Exponenciais no ensino médio: uma abordagem interdisciplinar
	Oliveira, Rafael Henrique de	Um Estudo sobre a Função Exponencial
	Martinez, Daniela Alves	Função Exponencial e seu ensino através da Resolução de Problemas
	Silva, Claudenor Ancelmo da	A Torre de hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas
	Bonotto, Aline Kempa	Ensino e aprendizagem da função exponencial por meio de atividades investigativas e do uso de objeto de aprendizagem
2016	Sousa, Isabela Ramos da Silva de	Relação entre função exponencial e progressão geométrica
2017	Maia, Lina Flavia Morete de	Modelação matemática na sala de aula: o

	Queiros	conceito de função exponencial numa sequência de atividades para o 1o ano do ensino médio'
	Barra, Raimundo do Socorro Coelho	Uma proposta de ensino envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica
	Mendonca, Mariana Silva	Tecnologias digitais e registro de representação semiótica na aprendizagem de função exponencial
2018	Santos, Jaqueline dos	Introdução ao conceito da função exponencial: um olhar para a educação inclusiva
	Toledo, Luciana Alcantara de.	Ensino da função exponencial: análise de resultados
	Oliveira, Marconni Augusto Pock de	Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial
	Menezes, Jose Augusto Freitas de	O Ensino da Função Exponencial por meio de atividades

Fuente: Elaboración del Investigador

3 Discusión de los resultados de las investigaciones

Como vimos anteriormente, la mayor cantidad de investigaciones se han dado respecto a la enseñanza media. Esto nos dice que deben existir diferentes problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en este nivel educativo y es por ello que la diferencia es significativa en la cantidad de investigaciones en comparación con las otras.

Asimismo, en la mayoría de investigaciones, predomina el hecho de relacionar la función exponencial a una situación cuyo contexto pueda ser matematizado, por lo que predomina como referencial teórico la Modelación Matemática.

Siguiendo este camino, también está la teoría de Situaciones Didáctica y la teoría Antropológica de lo Didáctico, esta última utilizada en algunas investigaciones para poder tener una referencia a partir del análisis de textos y después poder construir una secuencia de actividades con el propósito de que los estudiantes puedan construir modelos matemáticos a partir de situaciones obtenidas de la realidad, como analizar el crecimiento poblacional, el decaimiento radiactivo o el utilizar el interés compuesto.

Otro punto importante en las investigaciones analizadas, referentes a la enseñanza media, es con respecto a la tecnología, ya que hemos observado que la mayoría utiliza la tecnología, sea herramientas de Excel o el Software libre GeoGebra, como herramientas para facilitar procedimientos o cálculos, pero no para movilizar conocimientos en el estudiante.

4 Análisis de las investigaciones

Para la selección y análisis de las investigaciones, se estableció como criterio los trabajos donde los sujetos de estudio fueran estudiantes pertenecientes a la enseñanza media (15 a 18 años). Siendo así considerados los siguientes trabajos: Sureda (2012), Rozanski (2015), Perez (2015), Obando y Sánchez (2014) y Brucki (2011).

Nos apoyaremos en la investigación de Amorim (2012) para el fichaje de las investigaciones, tomando algunos ítems de los propuestos por la investigadora, los cuales son: Tipo de Investigación, Autor, Título de la investigación, Año de defensa o año de publicación, Sujetos de Investigación, Metodología, Marco Teórico, Tecnologías de Información o Comunicación. Además, los trabajos tomados en cuenta no tendrán una antigüedad mayor de 10 años.

A continuación, mostraremos el fichaje y resumen de cada uno de las investigaciones consideradas de las cuales hemos considerado prioridad a las tesis de maestría y doctorado; no obstante, hemos adicionado artículos, pues consideramos que puede brindarnos ideas adicionales sobre la ubicación de nuestro objeto matemático en el ámbito científico.

Elaboración de ficha respecto a tesis de doctorado

Ficha 1

Cuadro 4: Elaboración de ficha 1

Tipo de Investigación	Tesis de Doctorado
Autor	Diana Patricia Sureda Figueroa
Título	Metodologia de Ensino do Conceito de Função Exponencial à Luz da Teoria das Situações Didáticas
Año de sustentación o Año de publicación	2012
Sujetos de Investigación	Estudiantes pertenecientes al 4to y 5to año de Educación Secundaria cuyas edades están entre los 15 y 16 años.
Metodología	Trabajo exploratorio
Marco Teórico	-Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud -Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard.
Tecnologías de Información o Comunicación	-Lápiz y papel -Planillas de Excel

Fuente: Elaboración del Investigador

La tesis doctoral de Sureda (2012) es un trabajo que analiza el proceso de conceptualización de los estudiantes de quinto de secundaria en el proceso de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) referente a la función exponencial.

La autora, como parte de este trabajo, menciona algunas dificultades y obstáculos presentes en el estudio de la función exponencial, el cual viene siendo introducida en las escuelas secundarias y ligando a situaciones cada vez más concretas, como es el caso del crecimiento de una deuda de alguna tarjeta de crédito, el crecimiento de un virus o la durabilidad de la radiación en el medio ambiente. Es así que, desde esta perspectiva, la investigadora menciona una dificultad en el estudio de la función exponencial, la cual consiste en utilizar modelos lineales a situaciones que requiere de modelos no lineales, debido a que diversas situaciones cotidianas se resuelven mediante modelos lineales.

En ese sentido, la autora afirma la necesidad de estudiar qué situaciones contribuyen o no al proceso de conceptualización de las funciones exponenciales, por lo que se utiliza la teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard para construir las AEI, para hacer frente al proceso de *monumentalización* del saber, siendo este proceso parte de la enseñanza tradicional, el cual consiste en darles a los estudiantes los conocimientos ya establecidos, es decir, teoría más problemas.

La investigadora expresa que hace uso de dos referenciales teóricos:

-Didáctico: La TAD que se utiliza para diseñar e implementar las AEI.

-Cognitivo: La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, que contribuye al análisis del proceso de conceptualización. Además, Vergnaud (Citado por Sureda 2012) señala que un concepto es un triplete formado por un grupo de situaciones, de invariantes operatorios y de formas simbólicas que permiten representar simbólicamente el concepto.

Con respecto al desarrollo de la investigación, Sureda (2012) señala que es un trabajo exploratorio en el que se realiza tres actividades entre el 2008 y el 2011, en donde la actividad del 2009 fue aplicada a estudiantes del 4to año de educación secundaria y estaba conformada por 12 situaciones y una evaluación final; la segunda actividad, también aplicada el 2009, tuvo la misma cantidad de situaciones y la última actividad, aplicada el 2011, solo contenía cuatro situaciones. La investigadora, en su trabajo, se centra sobre todo en el análisis de la actividad del 2009.

Las actividades se apoyaron en los conocimientos previos de los estudiantes sobre

porcentajes e interés simple, para que puedan construir el modelo de interés compuesto. En las demás actividades, la autora busca que construyan el modelo $f(x) = k \cdot a^x$, para luego extenderlo a los modelos $f(x) = k \cdot a^{x+b}$ o $f(x) = k \cdot a^x + b$.

La investigadora afirma que los estudiantes consiguieron diferenciar a la función exponencial en diferentes sistemas de representación, siendo ellos: *Algebraico*, *numérico*, *verbal* y *gráfico*, donde inicialmente utilizaban rectas (Estrategia lineal) en problemas que se necesitaba utilizar curvas, para después emerger la resolución del tipo exponencial a partir de la utilización de Softwares y mediante el uso de graficadores se consiguió que se facilitara el estudio del objeto matemático función exponencial al realizar cambios en las escalas o el dominio, además de ayudar en la identificación de la asíntota de la función exponencial.

A nuestro criterio, esta investigación es importante, ya que propone una serie de actividades ligadas a situaciones concretas para que el estudiante, a partir de sus conocimientos preliminares, puedan construir el concepto de función exponencial, teniendo como referente los criterios de Vergnaud para la comprensión de un concepto, todo esto como respuesta al proceso de *monumentalización* del saber. Además, se pudo conseguir que los estudiantes diferenciaran en distintos sistemas de representación la función exponencial.

Elaboración de fichas respecto a tesis de maestría

Ficha 2

Cuadro 5: Elaboración de ficha 2

Tipo de Investigación	Tesis de Maestría
Autor	Emilene Funez Rozanski
Título	Metodologia de Ensino do Conceito de Função Exponencial à Luz da Teoria das Situações Didáticas
Año de defensa o Año de publicación	2015
Sujetos de Investigación	12 estudiantes del 1er año de enseñanza media, cuyas edades estaban entre los 15 y 16 años.
Metodología	Ingeniería Didáctica
Marco Teórico	-Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, -Teoría Antropológica de lo Didáctico -Teoría de Registros de Representación Semiótica.
Tecnologías de Información o Comunicación	Lápiz y papel

Fuente: Elaboración del Investigador

En la investigación de Rozanski (2015), se manifiesta que los docentes suelen presentar primero el conocimiento matemático que se desea enseñar para luego presentar algunos ejemplos y después que los estudiantes resuelvan algunos problemas, lo que hace que se mecanice al estudiante. Adicional a esto, la autora menciona ciertas dificultades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes que ha observado en su práctica docente, como el significado de función o diferenciar la variable dependiente de la independiente y frente a ello propone una metodología para la enseñanza de la función exponencial.

Para este fin, la investigación tiene como marco teórico la teoría de Situaciones Didácticas, además de algunos aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica. Para el análisis de los libros didácticos, utiliza la teoría Antropológica de lo Didáctico y, para darle estructura a su investigación, se apoya en la metodología de la Ingeniería Didáctica.

La secuencia didáctica estuvo conformada por cinco situaciones didácticas, entendiendo que una situación didáctica está relacionada a un conocimiento, un *milieu*, que establece las interrelaciones entre el estudiante, el profesor y el conocimiento que se desea enseñar. En cada una de estas, se aplica la Ingeniería Didáctica, ya que realiza el análisis *a priori*, experimentación, análisis *a posteriori*.

El primer encuentro está formado por tres actividades en la que se les propone a los estudiantes que mencionen todo lo que saben sobre la palabra función, exponencial y función exponencial, con el fin de tener una idea sobre los conocimientos previos por parte de los estudiantes. Todas estas actividades y las siguientes fueron analizadas desde el marco teórico mediante las dialécticas de acción, formulación, validación e institucionalización.

En el segundo encuentro, Rozanski (2015) busca que los estudiantes puedan construir el modelo de la función exponencial a partir de una actividad que consistía en relacionar el número de rectángulos con el número de dobleces al doblar un papel por la mitad y realizar esta acción continuamente. En el tercer encuentro, se les vuelve a pedir a los estudiantes que definan una función exponencial con el propósito de que relacionen las actividades anteriores para poder redefinir este concepto.

En el cuarto encuentro, se les propone a los estudiantes que inventen un problema aplicando la función exponencial con el objetivo de que puedan reflexionar nuevamente sobre este objeto matemático. El quinto encuentro tiene como propósito que los

estudiantes trabajen en grupo y analicen la función exponencial, pero de característica decreciente.

En el sexto encuentro, se les pide a los estudiantes que mencionen las características de una función exponencial, previa definición de la misma. Finalmente, el séptimo encuentro tiene como objetivo que los estudiantes utilicen todos los conocimientos adquiridos anteriormente.

La investigadora afirma que, con la secuencia didáctica propuesta, los estudiantes se apropiaron del objeto matemático “función exponencial”, además que, el haberles propuesto que crearan problemas, contribuyó a reforzar dicho conocimiento. Finalmente, la autora propone emplear esta metodología, pero desde la parte gráfica, que no fue utilizada en ninguna de las actividades de esta investigación.

Consideramos que esta investigación contribuye en la enseñanza de la función exponencial, ya que la autora, desde la perspectiva de Brousseau, realiza una ruptura de contrato didáctico, dado a que rompe con la enseñanza tradicional. Es por ello que, en una de sus actividades, utiliza material concreto para que luego los estudiantes deduzcan el modelo de ese fenómeno representado por una función exponencial.

Ficha 3

Cuadro 6: Elaboración de ficha 3

Tipo de Investigación	Tesis de Maestría
Autor	Luis Eduardo Reyes Pérez
Título	Función Exponencial en el Aula: Praxeologías Matemáticas en Enseñanza Media
Año de defensa o Año de publicación	2015
Sujetos de Investigación	23 estudiantes pertenecientes al décimo grado cuyas edades tienen una media de 15 años
Metodología	Ingeniería Didáctica
Marco Teórico	Teoría Antropológica de lo Didáctico
Tecnologías de Información o Comunicación	-Lápiz y papel -Planillas de Excel -Geogebra

Fuente: Elaboración del Investigador

La investigación de Pérez (2015) tiene como objetivo formular praxeologías a partir de la identificación de las técnicas asociada a un tipo de tarea por parte de los estudiantes, así como las tecnologías asociadas a estas técnicas y por ultimo las teorías. Por ello, utiliza como marco teórico la teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y formula

como pregunta de investigación: ¿Qué tipos de praxeologías puntuales surgen en el momento de realizar actividades acerca de la función exponencial?

El autor manifiesta que una praxeología lo que hace es romper con la estructura común teoría-praxis para utilizar la estructura praxis-teoría, siendo la praxeología puntual, según Chevallard (Citado por Pérez 2015), un conjunto formado por $[T/\tau/\theta/\Theta]$, teniendo asociado a una T , al menos una técnica τ , quien a su vez está asociada a una tecnología θ y esta a una teoría Θ . Es por ello que el autor propone, a partir de la identificación de las praxeologías puntuales, mejorarlas y convertirlas en praxeologías contextualizadas para una determinada institución para que puedan ser utilizadas por el profesor y, con el paso del tiempo, lleguen a ser una herramienta empleada cotidianamente y contribuya a la mejora de la enseñanza de la Matemática.

La metodología empleada es de naturaleza cualitativa, siendo esta la Ingeniería Didáctica que le permitió al investigador tener una estructura adecuada para el desarrollo de la investigación. Si bien los sujetos de investigación lo conforman 23 estudiantes, el análisis y recojo de la información se dio en solo tres estudiantes.

El investigador propuso cinco actividades, siendo tomadas estas como tipos de tareas, las cuales fueron asociadas a diferentes técnicas utilizadas por cada uno de estos estudiantes y que a su vez estaban vinculadas a una determinada tecnología. Asimismo, el investigador señala que no hay teoría presente, pues considera la presencia de teoría cuando un sujeto es capaz de distinguir y generalizar situaciones ya vividas y utiliza los conceptos matemáticos en su vida diaria.

Finalmente, el investigador menciona que identificó en los estudiantes la utilización de procesos mecánicos para dar solución a las tareas propuestas, debido al aprendizaje tradicional que es más informativo y menos formativo, siendo, en la actualidad, más importante plantear y resolver problemas. Además, señala que los estudiantes no lograron aportar o potencializar las praxeologías, puesto que el teoricismo arraigado en ellos hace que haya una ruptura entre el bloque práctico-técnico y el tecnológico-teórico de las organizaciones matemáticas.

Esta investigación es relevante por la propuesta de actividades dado a que no realiza un análisis de algún texto perteneciente al nivel educativo de estudio, sino que propone unos tipos de tareas, para que a partir de estas se pueda analizar las estrategias que utilizan los estudiantes y, luego de esto, organizar las técnicas o tecnologías presentes en

la resolución de las mismas. Además, esta propuesta que busca el investigador no queda solamente en el ámbito teórico, sino que su deseo es llevarlo a la práctica e implementarlo en la práctica docente, lo que nos parece sumamente importante, ya que busca obtener un producto, lo que no se da en la mayoría de las investigaciones que utilizan como marco teórico la TAD.

Ficha 4

Cuadro 7: Elaboración de ficha 4

Tipo de Investigación	Tesis de Maestría
Autor	Jorge Didier Obando Montoya y John Fredy Sánchez Betancur
Título	Construcción de Modelos Matemáticos en un Contexto Cafetero
Año de defensa o Año de publicación	2014
Sujetos de Investigación	Cinco estudiantes del décimo grado, cuyas edades están entre los 15 y 17 años.
Metodología	Estudio de Casos
Marco Teórico	Modelación Matemática
Tecnologías de Información o Comunicación	-Lápiz y papel -Planillas de Excel

Fuente: Elaboración del Investigador

Obando y Sánchez (2014) manifiestan que una de las razones de realizar esta investigación es el hecho de observar que existe una disociación entre la Matemática que se enseña en las escuelas y el contexto de los estudiantes. Para la ratificación de este hecho, los autores hacen un levantamiento de investigaciones referidos a esta problemática.

Asimismo, partiendo del hecho de que los estudiantes conocen su entorno, pero tienen problemas en poder matematizar ciertas situaciones reales, es que los investigadores se proponen como objetivo de esta investigación: “Describir el proceso de modelamiento matemático realizado por los estudiantes de la reproducción de la broca en un contexto cafetero” (p.30), siendo la broca una plaga que afecta el cultivo de Café.

Los investigadores afirman que la modelación matemática permitirá que los estudiantes puedan construir el modelo matemático que dé respuesta a los datos obtenidos con respecto a la reproducción de la broca en el contexto cafetero, así como la metodología empleada, siendo esta el Estudio de Casos, sea la que permitirá realizar el proceso de

descripción de la modelación referida a la reproducción de la broca.

En la actividad, primeramente, se les dio a los estudiantes una lectura que contenía datos estadísticos referentes a la reproducción de la broca, con el fin de que los estudiantes matematicen los datos de la lectura. Con esto se buscó que los estudiantes, mediante sus conocimientos previos, puedan construir funciones exponenciales, las cuales aún no son conocidas por los estudiantes.

En un segundo momento de la actividad, Obando y Sánchez (2014) plantean a los estudiantes salir al campo y recoger datos con respecto a la reproducción de la broca, con lo que concluyeron que, en promedio, hay 22 brocas en un cultivo. Es con este dato con el que trabajan los estudiantes para luego construir el modelo representado por una función exponencial, el cual describe la reproducción de las brocas hembras.

Finalmente, los autores rescatan la importancia de realizar la experiencia en el campo, ya que los estudiantes conocen esa realidad y esto despertó el interés en el estudio de la reproducción de la broca para luego ser modelizados matemáticamente mediante una función exponencial. Además, la salida al campo contribuyó a que se diera un conglomerado de ideas en los estudiantes, pasando primero por procesos aritméticos, para luego llegar a una regularidad, lo que derivó en la construcción de una función exponencial que explicara el proceso de reproducción de la broca.

La presente investigación es relevante porque, en el proceso de enseñanza de la función exponencial, los investigadores recurrieron a la experiencia misma, lo que contribuyó a que los estudiantes se interesen o den significado a la noción de función exponencial.

Ficha 5

Cuadro 8: Elaboración de ficha 5

Tipo de Investigación	Tesis de Maestría
Autor	Cristina Maria Brucki
Título	O uso de Modelagem no ensino de função exponencial
Año de defensa o Año de publicación	2011
Sujetos de Investigación	14 estudiantes entre 16 a 18 años del 1ro de enseñanza media
Metodología	Investigación Cualitativa-Observación participante
Marco Teórico	-Modelación Matemática de Jonei Cerqueira -Teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel
Tecnologías de Información o Comunicación	-Lápiz y papel

Fuente: Elaboración del Investigador

En la investigación de Brucki (2011), se manifiestan algunas dificultades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes al estudiar la función exponencial, como el hecho que la variable sea un exponente o que el exponente sea un entero negativo o un racional, además que los estudiantes no muestran interés en este objeto matemático, ya que no ven alguna aplicación. Por estas razones es que la investigadora propone un nuevo método en la enseñanza de la función exponencial utilizando la modelación matemática.

El objetivo de la investigación es constatar si la aplicación de la modelación y el utilizar la progresión geométrica, como eslabón previo, propicia un aprendizaje significativo del concepto de función exponencial. Para este fin, se apoya en los referentes teóricos de la Teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel y la Modelación Matemática de Jonei Cerqueira, siendo la investigación de carácter cualitativo; sin embargo, debemos mencionar que, en el trabajo, la autora señala como aporte teórico la teoría de Ausubel y como metodología la modelación.

Adicionalmente, la investigadora manifiesta que los sujetos de estudio son 14 estudiantes entre 16 y 18 años pertenecientes al primer año de enseñanza media, teniendo como conocimientos previos el diferenciar entre una función afín y una función cuadrática, así como la realización de graficas de funciones; sin embargo, los estudiantes no han trabajado problemas que se puedan contextualizar.

La autora realiza un análisis a priori, teniendo en cuenta las acciones esperadas de los estudiantes frente a las situaciones planteadas, siendo estas referentes a la utilización de la radiactividad como recurso para combatir células cancerígenas o, en el caso contrario, como lo propuesto por la investigadora, en un problema relacionado al accidente de centrales nucleares en Japón, lo que conllevó a que en esa zona hubiera altos niveles de radiación.

En todas las actividades se buscó que los estudiantes relacionaran los datos mostrados con una progresión geométrica para luego realizar un modelo del fenómeno, el cual es una función exponencial, pero en todos los casos fueron referidos a la vida media del Cesio y del Iodo, lo que generó que solo se estudiara el decrecimiento de la función. Además, se trabajó la representación gráfica, pues en un momento se les pide a los estudiantes que los valores obtenidos en el problema de la desintegración del Iodo lo plasmaran en un gráfico.

Finalmente, Brucki (2011) manifiesta algunas dificultades en el transcurso de la

actividad, como explicarles a los estudiantes lo que significa vida media. Esto demandó un tiempo adicional, además que la utilización de la modelación para crear un modelo de una determinada situación no significa necesariamente que va a ser del interés inmediato del estudiante, pero en el transcurso de la actividad sí se motivaron con la situación planteada. Asimismo, la investigadora advierte que esta propuesta debería aplicarse a determinados temas, ya que demanda mucho tiempo y propone que las actividades de modelación deberían relacionarse con otras disciplinas.

Elaboración de fichas respecto a artículos

Ficha 6

Cuadro 9: Elaboración de ficha 6

Tipo de Investigación	Artículo
Autor	Sarah B. Bush, Katie Gibbons, Karen S. Karp, y Fred Dillon
Título	Epidemics, Exponential Functions, and Modeling
Año de defensa o Año de publicación	2015
Sujetos de Investigación	Estudiantes de octavo grado
Metodología	Investigación Cualitativa-Observación participante
Marco Teórico	-Modelación Matemática
Tecnologías de Información o Comunicación	-Lápiz y papel -Software TI-SmartView™

Fuente: Elaboración del Investigador

En la investigación de Bush et all. (2015), se tiene como objetivo que los estudiantes enlacen sus conocimientos previos, es decir, la función lineal y cuadrática. Lo que se quiere enseñar, en este caso, es la función exponencial a partir del estudio de epidemias o, en otras palabras, se quiere conectar la parte matemática con un contexto real.

Los investigadores conectaron el objeto matemático de estudio con cuestiones históricas, como la gran plaga de Londres, videos y libros de literatura adolescente ligados a epidemias.

Partiendo de una serie de interrogantes, los investigadores consiguieron que los estudiantes vayan encontrando modelos con que puedan explicar ciertos fenómenos, tales como problemas en los cuales se inician con una cantidad de infectados y estos se van duplicando. A partir de esto, el objetivo es buscar la cantidad de infectados al cabo de un tiempo determinado y para ello los estudiantes se apoyaron en tablas y tecnología,

ya que utilizaron el *Software TI-SmartView™*, el cual es un emulador de calculadoras gráficas, que sirve de apoyo para encontrar el modelo matemático y está referido a una función exponencial.

En la experiencia, hubo estudiantes que lograron encontrar el modelo matemático y, después de la actividad, se discutió con los mismos los elementos del modelo $f(x) = b \cdot a^x$. Además, trabajaron la parte gráfica, donde discutieron si la curva representada por ellos era una parábola, lo cual los llevó a pensar una relación con la función cuadrática. Asimismo, concluyeron que la parte tecnológica, si bien ayudó, tiene sus limitaciones cuando son números muy grandes.

En esta investigación, podemos rescatar la importancia de relacionar la función exponencial con otras disciplinas, como es el caso de la Historia y la Literatura. Esto despertó el interés en los estudiantes, además de la movilización de sus conocimientos previos y es allí donde se evidencia que no diferencian en la curva graficada por ellos a la función cuadrática de otro tipo de función, siendo, en este caso, la función exponencial.

Ficha 7

Cuadro 10: Elaboración de ficha 7

Tipo de Investigación	Artículo
Autor	Aline Kempa Bonotto , Eleni Bisognin
Título	Contribuições de um Objeto de Aprendizagem e dos Registros de Representações Semióticas no Estudo da Função Exponencial
Año de defensa o Año de publicación	2015
Sujetos de Investigación	20 estudiantes de enseñanza media
Metodología	Investigación Cualitativa
Marco Teórico	Registros de Representación Semiótica
Tecnologías de Información o Comunicación	-Software “Potencializando sus Conocimientos” -Geogebra

Fuente: Elaboración del Investigador

Bonotto y Bisognin (2015) realizan una investigación cuyo objetivo es analizar cómo contribuye la utilización de un Objeto de Aprendizaje (OA) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial, siendo los objetos de aprendizaje herramientas digitales que pueden ser reutilizadas para ayudar en la enseñanza.

Este OA “Potencializando sus Conocimientos” es un mediador para que los estudiantes construyan el modelo de interés compuesto, $M = C(1 + i)^t$, pues en la interacción con el Software, este le brinda preguntas relacionadas a compras llevándolos a la construcción del modelo antes mencionado, siendo este un tipo de función exponencial.

La utilización de gráficos, figuras y simulaciones hace que se transite entre diferentes registros. Es por ello que los investigadores usan, como referente teórico, la Teoría de Registros de Representación Semiótica. También se utiliza el GeoGebra para analizar los parámetros de la función exponencial $f(x) = b(a)^{cx}$, con lo cual los estudiantes lograron identificar diferentes propiedades, expresándolas en los registros algebraicos y gráficos, lo que evidencia una conversión entre estos registros.

Finalmente, los investigadores manifiestan que la utilización de los OA ayudó en la construcción de la función exponencial. En ese sentido, colaboró en superar algunas dificultades al transitar del registro algebraico al gráfico y consiguieron describir el comportamiento grafico de la función exponencial.

Ficha 8

Cuadro 11: Elaboración de ficha 8

Tipo de Investigación	Artículo
Autor	Diego Bittencourt Gonçalves; Denice Aparecida Fontana Nisxota Menegais
Título	A Modelagem Matemática no Estudo de Funções Exponenciais
Año de defensa o Año de publicación	2016
Sujetos de Investigación	Estudiantes de 1ro de enseñanza media
Metodología	Investigación Cualitativa
Marco Teórico	Modelación Matemática
Tecnologías de Información o Comunicación	-Lápiz y papel

Fuente: Elaboración del Investigador

El trabajo de Goncalves y Menegais (2016) tiene como objetivo comunicar la experiencia obtenida de implementar la modelación matemática en la enseñanza de la función exponencial con estudiantes pertenecientes al primero de enseñanza media y así incentivar a los docentes el implementarlo en sus clases.

La aplicación de la actividad se dio en dos momentos, donde los autores manifiestan

que utilizaron situaciones problemas en ambos y entre el transcurso de estos momentos se impartió una clase del concepto de función exponencial.

La primera actividad tiene como objetivo introducir la idea de función exponencial. Asimismo, que los estudiantes construyan el modelo de la función exponencial, la cual está ligada a una progresión geométrica, ya que consiste en duplicar un premio a medida que avanza el tiempo. Los investigadores, mediante preguntas, van trazándole un norte a los estudiantes para poder cumplir con su objetivo y así estos utilizaron tablas para ordenar los datos obtenidos.

Seguidamente, se imparte la definición de la función exponencial, propiedades y gráficas para luego finalizar con una segunda actividad, la cual es una situación problema referida al famoso problema de las casillas de Ajedrez y los granos. Debemos señalar que la investigación es cualitativa y consideramos que tienen algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica, la cual no menciona como metodología, pero manifiesta lo que se espera que el responda el estudiante en cada ítem. Además, explica los posibles errores que puedan ocurrir y expresa la respuesta correcta para finalmente dar una especie de validación, donde manifiesta lo que consiguieron los estudiantes.

Como parte de las consideraciones finales, las autoras, manifiestan que se cumplió el objetivo, ya que los estudiantes lograron construir la función utilizando la modelación matemática. Además, pudieron lograr que los estudiantes investigaran y reflexionaran sobre las posibles soluciones frente a las situaciones problemas planteadas. Por último, la modelación matemática permitió que los estudiantes relacionen aspectos cotidianos con la función exponencial.

Esta investigación es relevante, ya que usa diferentes estrategias para dirigir al estudiante hacia el objetivo, el cual es, en un principio, introducir el concepto de función exponencial. Para ello, utiliza otros conceptos, como la descomposición de números en factores primos y la potenciación y, posteriormente, con los conocimientos adquiridos en la primera actividad y después de la explicación del concepto, se les presentó una nueva situación donde aplicaron todo lo aprendido.

Conclusiones

Dado que nuestro objetivo en esta investigación fue conocer cuál es la situación del proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial, consideramos que la metodología del Estado del Arte nos permitió saber cómo han ido evolucionando las

investigaciones respecto a este objeto matemático. Por ello, podemos afirmar, en primer lugar, que el foco está en la enseñanza media y sustentamos esto por la cantidad de investigaciones halladas respecto a este nivel de enseñanza, delimitando las investigaciones referidas a nuestra región.

En segundo lugar, el proceso de enseñanza de la función exponencial está influenciado por la modelación matemática. Esto es para poder introducir al estudiante en el estudio de la función exponencial; sin embargo, hemos hallado, en la mayoría de las investigaciones, que solo los estudiantes construyen el modelo $f(x) = b \cdot a^x$, partiendo de una progresión geométrica hasta llegar al modelo que se quiere obtener, pero lo que no se hace es ir más allá, es decir, buscar que los estudiantes, por medio de las situaciones planteadas, identifiquen las propiedades de la función exponencial, como el crecimiento o decrecimiento de esta, dependiendo de la base de la función.

Finalmente, con respecto a la tecnología, podemos manifestar que no hay muchas investigaciones en las que se esté tomando a la tecnología como un instrumento que permita movilizar los conocimientos en los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en la enseñanza media, ya que no hemos encontrado investigaciones, en este nivel, donde se utilice, por ejemplo, el Enfoque Instrumental de Rabardel. Por esta razón, podemos sugerir que se podrían llevar a cabo investigaciones en las cuales la tecnología sea un instrumento fundamental en el proceso de enseñanza de este objeto matemático y que, a su vez, mediante este, los estudiantes puedan identificar las diferentes propiedades que tiene la función exponencial.

Agradecimientos

Agradecemos a la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú – PUCP – especialmente a la maestría Enseñanza de las Matemáticas, línea investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática – TecVEM, por el apoyo brindado para concretizar la presente investigación.

Referencias

AMORIM, S. R. C. **Números inteiros: Panorama de Pesquisas Produzidas de 2001 a 2010**. 2012. 128 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontificia Universidad Católica, São Paulo, 2012.

BONOTTO, A. K.; BISOGNIN, E. Contribuições de um Objeto de Aprendizagem e dos Registros de Representações Semióticas no Estudo da Função

- Exponencial. **RENOTE**, v. 13, n. 2, 2015. Disponível em:
<<https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/61443/36330>>
- BUSH, S. B. et al. Epidemics, Exponential Functions, and Modeling. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 21, n. 2, p. 90-97, 2015. Available in:
<https://www.nctm.org/Publications/Mathematics-Teaching-in-Middle-School/2015/Vol21/Issue2/mtms2015-09-90a_pdf/>
- GONÇALVES, D. B.; MENEGAIS, D. A. F. N. A Modelagem Matemática no Estudo de Funções Exponenciais. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 6, n. 2, 2016. Disponível em:
<<http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/3340/2146>>
- OBANDO, J. D.; SÁNCHEZ, J. F. **Construcción de modelos matemáticos en un contexto cafetero**. Tesis (Maestría en Educación Matemática), Universidad de Antioquia, 2014.
- PÉREZ, L. E. R. **Función exponencial en el aula: Praxeologías Matemáticas en Enseñanza Media**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática), Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.
- ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo “Estado da Arte”. **Diálogos Educacionais**, v. 6, n. 6, p. 37–50, 2006. Disponível em:
<<http://docente.ifrn.edu.br/albinonunes/disciplinas/pesquisa-em-ensino-pos.0242-posensino/romanowski-j.-p.-ens-r.-t.-as-pesquisas-denominadas-do-tipo-201cestado-da-arte201d.-dialogos-educacionais-v.-6-n.-6-p.-37201350-2006/view>>
- ROZANSKI, E. F. **Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da teoria das situações didáticas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática), Universidad Tecnológica Federal de Paraná, 2015.
- SUREDA, P. **Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos**. Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2012.