

Construcción del cubo truncado con Cabri 3D: un análisis de las aprehensiones con estudiantes de secundaria¹

MARCO ANTONIO MOYA SILVESTRE²

JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR³

Resumen

El presente artículo tiene por objetivo analizar la articulación de aprehensiones en el registro figural que desarrollan 16 estudiantes de secundaria (15 – 17 años) de una institución educativa de la ciudad de Huanta-Perú en una secuencia de dos actividades encaminadas a la construcción del sólido arquimediano cubo truncado en el ambiente del Cabri 3D. Para ello, se tomó aspectos la Teoría de Registros de Representación Semiótica referidos al registro figural y a las cuatro aprehensiones que en ella se presentan. Además, como marco metodológico, se consideró aspectos de la Ingeniería Didáctica. Los resultados evidencian que los estudiantes logran articular dichas aprehensiones mientras construyen el cubo truncado y, a la vez, movilizan nociones de geometría plana y espacial como rectas, planos, polígonos, cubo, tetraedro, pirámide, entre otros.

Palabras-Clave: Cubo truncado; Aprehensiones; Cabri 3D.

Abstract

The present article aims to analyze the articulation of apprehensions in the figural register, developed by 16 high school students (aged 15 – 17) of an educational institution in the city of Huanta-Peru, in a sequence of two activities aimed at building the Archimedean solid truncated cube in the Cabri 3D environment. To do this, aspects of the Theory of Registers of Semiotic Representation were taken in reference to the figural register and to the four apprehensions presented in it. In addition, aspects of Didactic Engineering were considered as methodological framework. The results show that students manage to articulate such apprehensions while building the truncated cube and, at the same time, they mobilize notions of plane and spatial geometry like straight lines, planes, polygons, cube, tetrahedron, pyramid, among others.

Keywords: Truncated Cube; Apprehensions; Cabri 3D.

Introducción

Este artículo presenta un recorte de la investigación de Moya (2015) en lo referido al estudio y análisis del desarrollo y articulación de las aprehensiones del registro figural en un grupo de estudiantes del nivel secundario al realizar la construcción del sólido arquimediano cubo truncado y al movilizar nociones geométricas inherentes a este proceso en el ambiente del Cabri 3D.

¹ Este artículo forma parte del proyecto: *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT*, aprobado por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo*. Proceso: 2013/23228-7(FAPESP) y por PI0272 (IREM-PUCP).

² Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas—marco.moya@pucp.pe

³ Pontificia Universidad Católica del Perú – jvflores@pucp.pe

En ese sentido, Moya (2015) señala que la enseñanza de la geometría (plana y espacial) es importante en la formación académica del estudiante, puesto que, entre otras razones, le permite hacer conjeturas, generalizar y resolver problemas asociados a figuras geométricas. Sin embargo, como lo manifiestan Salazar, Silva & Almeida (2011), existen diversas razones por las cuales la enseñanza de contenidos matemáticos, en especial de geometría, no han ofrecido recursos suficientes para que los estudiantes superen, entre otros aspectos, sus dificultades de hacer conjeturas. Se considera que esta afirmación es respaldada con lo señalado por Duval (2004), quien menciona que la actividad cognitiva que requiere la geometría es más exigente en relación a otras áreas de la matemática.

En base a ello, se reconoce que la enseñanza de la geometría y, de manera particular, la geometría espacial, merece un análisis y reflexión diferente, ya que el dibujo de representaciones de figuras de tres dimensiones, hechas en la pizarra o en papel, no permite al estudiante observar a plenitud las características y propiedades que estas puedan presentar debido a la dificultad que se presenta al intentar construir una representación de un objeto de tres dimensiones en un ambiente de dos dimensiones. Por esa razón, Moya (2015), a partir de las investigaciones de Kosa & Karakus (2010) y Gisele, Verbanek & Goldoni (2013), precisa que el uso de ambientes de geometría dinámica (AGD) es una alternativa muy importante e interesante que el profesor debe tener en cuenta para la enseñanza de la geometría espacial en las aulas. Además, como nos interesa articular las aprehensiones en el registro figural, tomamos el aporte de Salazar (2015), quien precisa la pertinencia del registro figural dinámico cuando se utiliza ambientes de Geometría Dinámica.

Nuestra posición se afianza con lo señalado por Peñalosa (2013) cuando refiere, respecto al uso de los AGD, que

... favorece un ambiente de aprendizaje en la enseñanza de la geometría, como un reto a enfrentar por parte de aquellos docentes que limitan con el uso de lápiz y papel los procesos en el alumno, como el reconocimiento, clasificación, conjeturación, generalización, abstracción, comprobación y demostración, los cuales pueden ser alcanzados mediante la manipulación de figuras geométricas al utilizar software de geometría dinámica. Además, permite al alumno interactuar con otros ambientes que puede desarrollar en él responsabilidad sobre su aprendizaje, donde adquiere habilidades y responsabilidades sobre su propio aprendizaje, de esta manera, es capaz de autorregular los conocimientos, habilidades y destrezas necesarios para su desarrollo intelectual y social. El avance

tecnológico obliga a buscar nuevas estrategias didácticas, ya que se debe integrar herramientas tecnológicas en la práctica docente, como el Cabri. (p.i)

A partir de lo descrito, y como resultado también de nuestra práctica docente, en la que se han observado las dificultades que los estudiantes de secundaria presentan cuando estudian figuras geométricas espaciales, nace el interés por investigar la articulación de las aprehensiones del registro figural en la construcción del sólido arquimediano cubo truncado en el ambiente del Cabri 3D.

La importancia de esta investigación radica en que, durante el proceso de articulación de las aprehensiones, los estudiantes desarrollan procesos cognitivos como los de visualización, demostración, construcción y razonamiento. Estos procesos contribuyen a que los estudiantes puedan apropiarse de las características y propiedades de un objeto matemático y puedan afrontar con éxito problemas de geometría.

Esta afirmación se respalda con lo que señala Moretti (2013), cuando afirma, a partir de una síntesis de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, que en el aprendizaje de la geometría se encuentran envueltos las cuatro aprehensiones de una figura relacionados a la resolución de problemas.

En base a lo señalado, en este artículo se muestra el análisis de una actividad relacionada al desarrollo y articulación de tres aprehensiones del registro figural: secuencial, perceptiva y operatoria en el marco de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

1. Elementos teóricos y metodológicos

En esta investigación, se toma aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Dichos aspectos son los relacionados al registro figural, un tipo de registro especial según Duval (2004) y a las aprehensiones que este registro presenta, las cuales son aprehensión perceptiva, secuencial, operatoria y discursiva.

Este autor señala, respecto al registro figural, que una figura geométrica es una configuración (dibujo) asociada a dos tipos de variaciones, las cuales son la variación dimensional y la variación cualitativa; estas variaciones constituyen las unidades figurales elementales presentes en toda figura geométrica. En ese sentido, una figura geométrica es siempre la combinación de al menos dos unidades figurales elementales.

Por otro lado, Duval (2012) precisa que el registro figural origina interpretaciones autónomas denominadas *aprehensiones*, las cuales son la aprehensión secuencial, la perceptiva, la discursiva y la operatoria. También manifiesta que, en el proceso de resolución de problemas de geometría, están envueltos procesos cognitivos como los de la visualización, la construcción, la demostración, etc. Dichos procesos están asociados al desarrollo y, sobre todo, a la articulación de las aprehensiones del registro figural.

Moya (2015), a partir de lo señalado en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, resalta, respecto a las aprehensiones, que la aprehensión secuencial es aquella que se presenta en actividades de construcción destinada a reproducir la representación de una figura geométrica; que la aprehensión perceptiva es la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del estudiante y la primera que utiliza en la etapa escolar; además, esta aprehensión permite que el estudiante, de manera automática, perciba las formas de la representación de una determinada figura geométrica.

Respecto a la aprehensión operatoria, el investigador agrega que esta se desarrolla cuando el estudiante realiza modificaciones a la representación de una figura geométrica. Tales modificaciones son las siguientes: la modificación mereológica, que consiste en descomponer la representación de una figura en unidades figurales elementales o en realizar trazos auxiliares que le permitan resolver un problema dado; la modificación óptica, que se manifiesta cuando se realizan variaciones en las dimensiones de la representación de una figura; y la modificación posicional, que ocurre cuando se realizan cambios de posición por rotación o traslación de la representación de una figura.

Por su parte, la aprehensión discursiva es aquella que asocia la representación de una figura con un enunciado matemático (propiedad, fórmula, teorema). Para conseguir una comunicación entre la representación de una figura y el enunciado matemático, es preciso subordinar la aprehensión perceptiva a la discursiva, ya que un enunciado puede expresar más que la sola representación de los trazos o formas de una figura.

En cuanto al marco metodológico, en la investigación se ha tomado elementos de la Ingeniería Didáctica. Estos han permitido realizar el análisis a priori y a posteriori de la investigación; así como realizar el estudio bibliográfico del objeto matemático cubo truncado. Por lo tanto, y luego de todo lo señalado, se precisa que en este artículo se pretende analizar el desarrollo y articulación de tres de estas aprehensiones

principalmente: secuencial, perceptiva y operatoria en una actividad (actividad N° 1) que va a servir de insumo para realizar la construcción del cubo truncado.

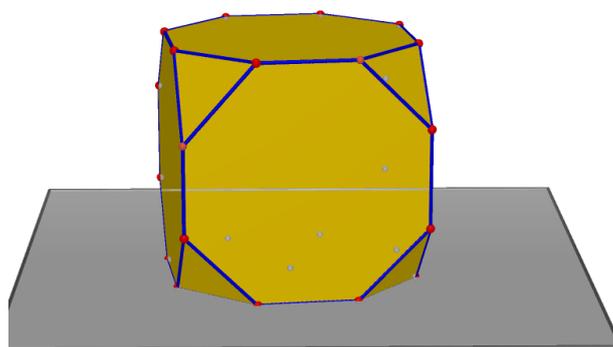
Cubo truncado

En lo referido al objeto matemático, Moya (2015), en base a las ideas de Villarreal (1912), Rangel (1982), Guillen (2010) y Almeida (2011), puntualiza que el cubo truncado es uno de los trece sólidos inventados por Arquímedes, denominados por esa razón *sólidos arquimedianos* o semi-regulares. El cubo truncado está formado por 14 caras, las cuales son polígonos regulares.

Los polígonos que forman las caras del cubo truncado son triángulos regulares, en un número de ocho, y octógonos regulares, en un número de seis. Por otro lado, el cubo truncado tiene 36 aristas, 24 vértices y 120 diagonales; además, en cada uno de sus vértices concurren tres aristas y en todos los vértices se juntan tres caras.

Asimismo, las caras con el menor número de lados (caras triangulares), están bordeadas por las caras de la otra clase (caras octogonales) y las caras con el mayor número de lados (caras octogonales) están bordeadas de manera alternada por las caras de ambas clases (caras triangulares y octogonales). La figura 1 muestra la construcción de la representación del cubo truncado con Cabri 3D.

Figura 1 – Cubo truncado



Fuente: Moya (2015, p.70)

2. Desarrollo de la investigación

La investigación de Moya (2015) se ha desarrollado con 16 estudiantes del nivel secundario (15-17 años) de una institución educativa pública del distrito de Huanta en la región de Ayacucho, Perú. En ese sentido, se ha elaborado una secuencia de dos actividades, dividida en 6 partes, tres de las cuales obedecen a construcciones en el

Cabri 3D y las otras tres, a preguntas asociadas a cada construcción.

En este artículo, se presentan los resultados de la primera y la tercera parte de actividad N° 2 de la estudiante Rosa. Esta actividad se denomina *Construcción del cubo truncado*, y tiene por objetivo identificar el desarrollo y articulación de las aprehensiones secuencial, perceptiva y operatoria del registro figural mientras se movilizan nociones de puntos, rectas, planos, polígonos, tetraedros y cubo en el proceso de construcción con el Cabri 3D.

Además de lo señalado, en esta actividad, la estudiante se familiariza con algunas herramientas del Cabri 3D, las cuales son de utilidad para la construcción del cubo truncado.

La primera y tercera parte de la actividad N° 2 las constituye la construcción que se muestra a continuación.

- *Abra el Cabri 3D*
- *Construya un cubo*
- *Elija una cara del cubo y nómbrelo con las letras ABCD.*
- *Ubique el centro de la cara ABCD y nómbrelo con la letra "O"*
- *Construya una circunferencia en la cara ABCD, tomando como centro el vértice "A" y punto de paso "O"*
- *Marque los puntos de intersección de la circunferencia con las aristas y nómbrelo con las letras M y N (M en AB y N en AD).*
- *Construya tres circunferencias adicionales en la misma cara ABCD del cubo, las cuales deben tener como centros los vértices B, C y D y como punto de paso el punto "O".*
- *Marque los puntos de intersección de las circunferencias con las aristas (no le asigne letras a dichos puntos).*
- *Oculte las circunferencias construidas.*
- *En todas las aristas restantes de la representación del cubo ubique los puntos como en la cara ABCD siguiendo el mismo procedimiento u otro que usted crea conveniente.*
- *Oculte todas las circunferencias.*
- *Recorte todas las esquinas de la representación del cubo utilizando como referencia los puntos encontrados.*

Análisis a priori

Se cree que, para construir la representación del cubo, la estudiante hará uso de la herramienta *cubo*. Luego, se piensa que elegirá la cara superior a la que denotará con las letras A, B, C y D para construir ahí representaciones de circunferencias con las indicaciones dadas. En esta etapa de la construcción, se evidenciará la **aprehensión secuencial**. Se piensa que la estructura diádica que constituye esta aprehensión no interrumpirá el desarrollo de la misma.

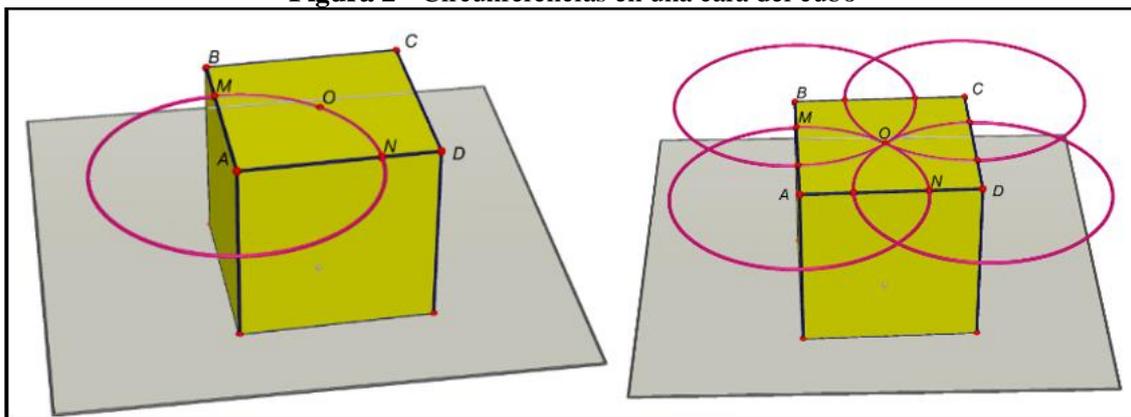
Los pasos mostrados previamente para la construcción de representaciones de distintos

objetos en Cabri 3D y la realización de los mismos son los sustentan el desarrollo de la aprehensión secuencial. Luego, para ubicar el punto medio de la cara, se piensa que ubicará el punto medio con la herramienta *punto medio* entre dos vértices opuestos de la cara. Por otro lado, podría trazar las dos diagonales y marcar el punto de intersección. En seguida, se cree que, para construir la representación de la circunferencia, la estudiante podría tener dificultades en definir la cara, no por desconocimiento, sino por no recordar este paso.

Finalmente, en la intersección de la circunferencia con las aristas, se estima que utilizará la herramienta *puntos de intersección*. Las aprehensiones que se piensa articulará son las **aprehensiones perceptiva y operatoria**, en vista de que existirá una relación directa entre la percepción de la estudiante sobre un cuadrado como unidad figural de dimensión dos y que forma parte del cubo que es una unidad figural de dimensión tres, y el hecho de realizar reconfiguraciones (trazos de diagonales posiblemente) en dicha cara para ubicar el punto medio de ella.

Por otro lado, movilizará nociones de punto, segmento, cuadrado y sus propiedades. La figura 2 muestra una posible construcción de Rosa.

Figura 2 - Circunferencias en una cara del cubo

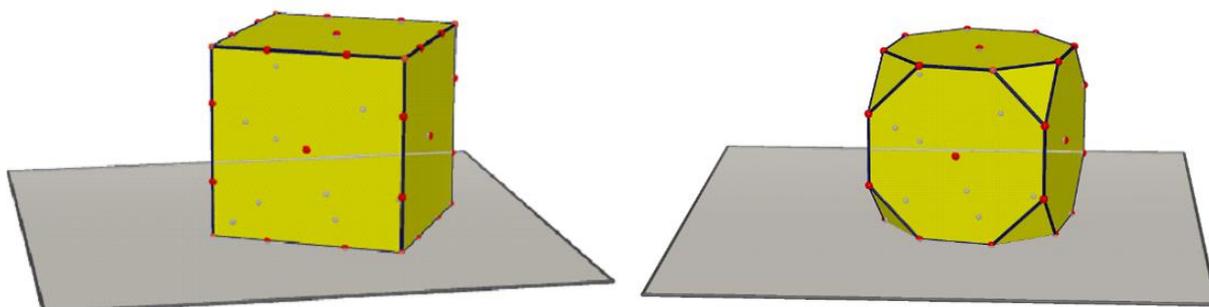


Fuente: Moya (2015, p. 95)

Continuando con la construcción, creemos que Rosa utilizará la herramienta *ocultar/mostrar* para ocultar las circunferencias. A continuación, construirá en cada cara de la representación del cubo circunferencias para ubicar y marcar los puntos en las aristas. En seguida, se piensa que construirá representaciones de planos en cada esquina del cubo por medio de tres puntos, que ya están marcados, y con la herramienta *recorte de poliedro* procederá a recortar dichas esquinas. La estudiante articulará en esta

construcción las **aprehensiones perceptiva y operatoria (modificación mereológica y posicional)**, ya que deberán distinguir elementos figurales como punto y plano, además de cambiar la posición a la representación del cubo cada vez que pretenda realizar el recorte de alguna esquina. Se piensa que podría presentar dificultad en el momento de clicar primero al plano, pues podría intentar directamente clicar la parte que desea cortar sin definir el plano que lo cortará. A pesar de ello, se estima que logrará recortar todas las esquinas. Las nociones que se movilizarán son plano, circunferencia, tetraedro, cubo y propiedades del cuadrado. La figura 3 es una posible construcción de Rosa.

Figura 3 1- Puntos determinados en las aristas para truncar el cubo



Fuente: Moya (2015, p.107)

Análisis a posteriori

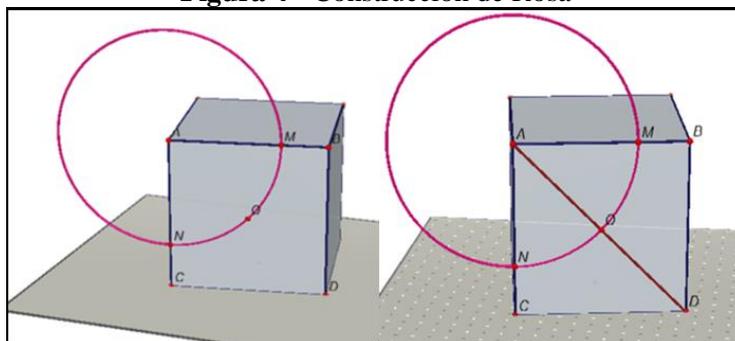
Acciones de la estudiante Rosa

La estudiante Rosa, de acuerdo con lo señalado en el a priori, construyó la representación del cubo con la herramienta *cubo*; luego, eligió una cara y la denotó con las letras ABCD, pero se equivocó en el orden, ya que ella lo denotó como ABDC (es decir no colocó las letras en forma consecutiva en los vértices de la cara elegida), lo cual no se pensó en el a priori, e hizo suponer que existió una interferencia entre la **aprehensión perceptiva** que tiene sobre el cuadrado y el enunciado asociado a esta unidad figural. En seguida, ubicó el punto medio "O" de la cara elegida con la herramienta *punto medio*; de tal manera, que encontró dicho punto medio de la forma descrita en el a priori que es a partir de dos vértices opuestos de la cara del cubo. Este punto en realidad, es el centro de la diagonal, que aunque ella no lo traza, pensamos que la asume. También, construyó la circunferencia con centro en el vértice "A" y punto de paso "O".

En esta parte de su construcción, podemos notar que la estudiante movilizó nociones de

cuadrado, diagonal del cuadrado, circunferencia y cubo, lo cual concuerda con las nociones que mencionamos en nuestro a priori. Además, evidenció la **aprehensión operatoria (modificación posicional)** ya que, a pesar de no estar previsto en el a priori, manipuló y cambió constantemente la posición del cubo representado, porque quiso ubicar con precisión el centro de la circunferencia y observó esta representación desde diversas posiciones. Por otro lado, aunque tampoco se precisó en el a priori, la estudiante manipuló la representación del cubo, creemos que para intentar percibir (**aprehensión perceptiva**) qué segmento o segmentos representan el radio de dicha circunferencia. Luego, realizó una reconfiguración con el acto de hacer el trazo del segmento AD (diagonal de la cara) lo que evidenció una **aprehensión operatoria: modificación mereológica**, a la vez que movilizó nociones de segmento, radio y diagonal de un cuadrado. La figura 4 muestra esta parte de su construcción.

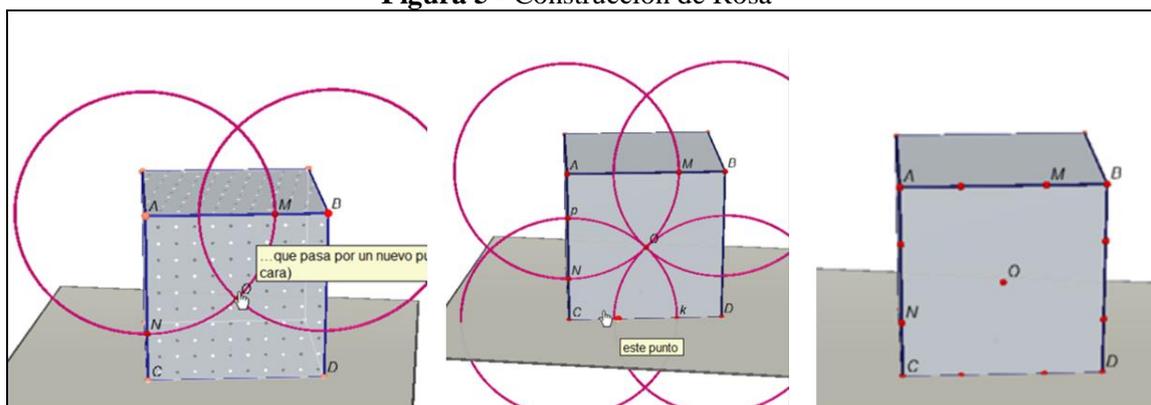
Figura 4 - Construcción de Rosa



Fuente: Moya (2015, p. 96)

Continuó el proceso de construcción y, tal como lo presentamos en el a priori, la estudiante, mediante circunferencias, halló los demás puntos de corte en las aristas de dicha cara, lo cual puso de manifiesto la **aprehensión secuencial**, presente en cada parte de cada construcción (ver figura 5).

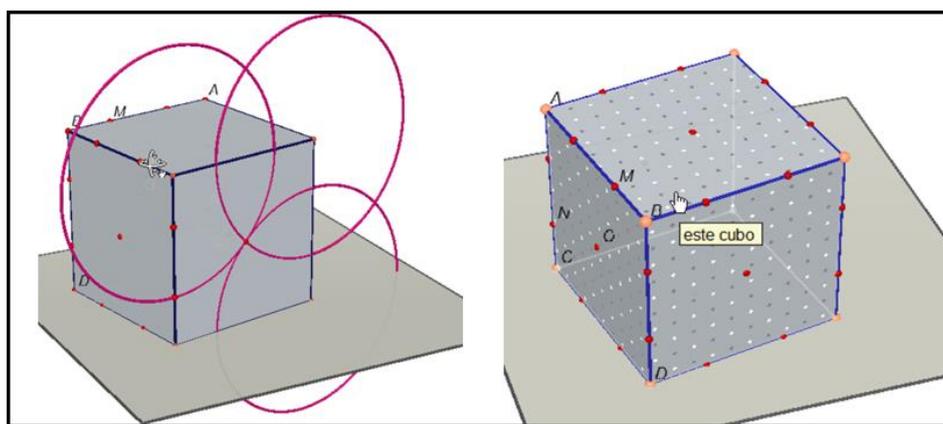
Figura 5 - Construcción de Rosa



Fuente: Moya (2015, p. 97)

La estudiante continúa con la construcción después de haber encontrado los puntos de corte en la cara ABCD de la representación del cubo. Luego, tal como lo imaginamos en el a priori, siguió el procedimiento realizado en dicha cara y ubicó los puntos de corte en las demás aristas (ver figura 6). Esta acción desarrolló la **aprehensión secuencial** de la estudiante, en vista de que siguió los pasos y procesos como inicialmente se le indicaron y como señalamos en el a priori.

Figura 6 - Construcción de Rosa



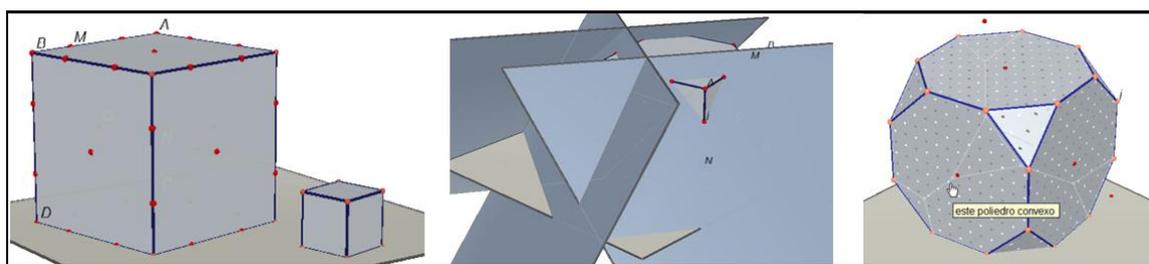
Fuente: Moya (2015, p. 108)

A continuación, la estudiante, con la finalidad de recortar una esquina del cubo, realizó un acción no pensada en nuestro a priori, y construyó otro cubo; creemos que para intentar recortar primero éste y luego ya el original. Esta acción desarrolló en la estudiante la **aprehension operatoria de modificación óptica**. Luego, ella logró recortar adecuadamente el cubo inicial.

Por último, la estudiante realizó los demás cortes, como supusimos en el a priori, sobre las esquinas del cubo sin ninguna dificultad. En este proceso se articularon las **aprehensiones secuencial y la aprehensión perceptiva**. Se debe precisar sobre la aprehensión secuencial, que esta es inherente a toda la construcción.

La aprehension perceptiva se manifestó en vista de que la estudiante debió manipular la representación del cubo para percibir dónde construir los planos e iniciar el recorte de las esquinas. Como resultado, y tal como lo pensamos en el a priori, la estudiante logró construir la representación del cubo truncado como se puede observar en la figura 7.

Figura 7 - Construcción de Rosa



Fuente: Moya (2015, p. 109)

3. Algunos resultados

La primera y tercera parte de la actividad N°2, las que corresponden a las construcciones mostradas, han permitido movilizar herramientas del Cabri 3D (puntos, planos, rectas, segmentos, polígonos, punto medio, recorte de poliedros, entre otros) necesarias para la construcción del cubo truncado. Esta actividad también movilizó nociones de geometría, tales como punto, recta, segmento, punto medio de un segmento, triángulos, polígonos, tetraedro y cubo. En ese sentido, la estudiante, al ubicar los puntos de corte en las aristas de la representación del cubo y, luego, al realizar el recorte de dichas aristas para obtener el arquimediano cubo truncado, logró movilizar estas nociones tal como se había previsto en el a priori.

Por otro lado, se debe resaltar que la estudiante, en el proceso de construcción, desarrolló las aprehensiones secuencial, perceptiva y operatoria (modificación posicional y mereológica) tal como consideramos en el a priori. Sin embargo, la estudiante también desarrolló la aprehensión operatoria (modificación óptica), la cual no se estimó en el a priori. Sin embargo, es pertinente avistar que se observó que la estudiante utilizó la función del arrastre y manipulación de manera escasa. Es pertinente realizar esta precisión para alertar a investigadores posteriores sobre el uso de estas funciones tan importantes con que cuenta el Cabri 3D.

Consideraciones finales

En relación a los resultados obtenidos, los cuales presentamos en este artículo, y que se basa en la investigación de Moya (2015), podemos proponer algunas conclusiones.

En primer lugar, se ha observado que la estudiante logró familiarizarse oportunamente con las herramientas del Cabri 3D, a pesar de que era la primera vez que interactuaba

con este ambiente.

En segundo lugar, esta actividad ha permitido que la estudiante desarrolle sobre todo las aprehensiones secuencial y operatoria; y el Cabri 3D se ha presentado como un ambiente que ha contribuido a que ella pueda desarrollar su aprehensión perceptiva de manera satisfactoria, ya que, gracias, sobre todo, a la función de manipulación del Cabri 3D, la estudiante pudo distinguir las unidades figurales de las que se componía su construcción.

En tercer lugar, esta actividad de construcción ha coadyuvado a que la estudiante movilice nociones geométricas como puntos, planos, rectas, segmentos y polígonos, tetraedro y cubo. Estas nociones han sido estudiadas en grados anteriores y se han puesto en práctica en el desarrollo de esta actividad de una manera más aplicativa y no tanto algorítmica, como se suele realizar comúnmente en las aulas.

En cuarto lugar, el Cabri 3D se presentó como un ambiente propicio para realizar este tipo de construcciones. Sus funciones de manipulación y arrastre son fundamentales para que el estudiante pueda desarrollar sobre todo la aprehensión perceptiva, ya que la manipulación ayuda a visualizar (en términos de Duval) las unidades figurales de manera adecuada y distinguir sus dimensiones.

Por último, como producto de esta secuencia, se ha comprobado que el proceso de desarrollo y articulación de las aprehensiones ha permitido que la estudiante se apropie de contenidos geométricos, como los descritos, y articule las aprehensiones previstas. Sin embargo, ha sido también fuente para observar y anotar acciones no previstas en el a priori, lo que nos llevar a reflexionar sobre actividades futuras para consolidar el aprendizaje vía la articulación de aprehensiones.

Agradecimientos

El presente artículo ha sido posible gracias al apoyo de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas-Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Agradecemos al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC) que, mediante su beca “Presidente de la República”, permitió seguir estudios en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

A los grupos de investigación Didáctica de las Matemáticas DIMAT- IREM/PUCP y *Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática* - PEAMAT de la PUC-SP/Brasil,

por permitirnos formar parte del proyecto: *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT*.

Referencias

ALMEIDA, T. **Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estúdio de truncaturas baseadas no renascimento**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, São Paulo, 2010.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**. Cali: Editorial Merlín, 2004.

_____. Abordaje cognitivo de problemas de geometría en términos de congruencia. **REVEMAT**, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118>.

GISELE, B., VERBANEK, V. & GOLDONI, E. Poliedros arquimedianos: materiais manipuláveis e o software Poly como alternativa didática. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática – XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, p. 01-10, 2013. Recuperado de http://sbem.esquiro.ghost.net/anais/XIENEM/pdf/2518_1018_ID.pdf.

GUILLEN, G. **El mundo de los poliedros**. Madrid: Editorial Síntesis S.A., 1997.

KÖSA, T. & KARAKUS, F. Using dynamic geometry software Cabri 3D for teaching analytic geometry. **Procedia Social and Behavioral Sciences**, p. 1385-1389, 2010. Recuperado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/>.

MOYA, M. A. **Articulación de las aprehensiones en la construcción del cubo truncado con Cabri 3D en estudiantes del quinto de secundaria**. Tesis de Maestría Profesional en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2015.

MORETTI, M. T. Estudo das apreensões e dos olhares em geometria. **VI Congresso Internacional de ensino da matemática**, p. 1-8, 2013. Recuperado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/>.

PEÑALOZA, E. **Geometría dinámica como herramienta de apoyo para el docente en algunos temas de geometría del bachillerato de la UAQ**. Tesis de Maestría en Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México, 2013.

RANGEL, A. **Poliedros**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos y Científicos S.A., 1982.

SALAZAR, J.V.F., SILVA, M. J. F. & ALMEIDA, T. Geometria dinâmica: uma alternativa informática para o ensino de geometria espacial. **XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática-CIAEM 2011**, p. 01-06, 2011.

SALAZAR, J.V.F. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 7, n. 1, p. 919-941, 2015. Recuperado de

<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26325/18904>.

VILLARREAL, F. **Poliedros regulares y semi-regulares**. Lima: Imprenta de la Escuela de Ingenieros, 1912.