Reconfiguración del trapecio isósceles en una malla cuadriculada: una investigación con estudiantes peruanos de segundo grado de educación secundaria[1]

ISELA PATRICIA BORJA RUEDA[2]

VERÓNICA NEIRA FERNÁNDEZ[3]

Resumen

El presente artículo es parte de la tesis de Borja (2015) cuyo objetivo es presentar una investigación con estudiantes peruanos de Educación Secundaria (12 a 15 años) acerca de la reconfiguración del trapecio isósceles que está ubicado en una malla cuadriculada para hallar su medida de área. El trabajo se basa en aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y en la metodología de la Ingeniería Didáctica. En la investigación, se observa que los estudiantes realizan la descomposición heterogénea del trapecio isósceles para transformarlo en un rectángulo, es decir, la reconfiguración y el conteo de los cuadrados completados en la malla cuadriculada, considerados como unidad de área para determinar su medida de área. Entonces, el soporte perceptivo de la malla cuadriculada influye en la reconfiguración.

Palabras-clave*: reconfiguración; trapecio isósceles; medida de área*.

Abstract

The present article is part of the investigation by Borja (2015), whose aim is to present a research with Peruvian, high school students (aged 12 to 15) about the reconfiguration of the isosceles trapezoid, which is on a grid, to find its area measurement. The work is based on aspects of the Theory of Registers of Semiotic Representation and the methodology of Didactic Engineering. It is observed that students decompose the isosceles trapezoid heterogeneously to transform it in a rectangle; that is, they reconfigure and count full squares in the grid, which are considered area units, to determine its area measurement. Therefore, the perceptive support of the grid influences the reconfiguration.

Keywords*: Reconfiguration; Isosceles Trapezoid; Area Measurement.*

Introducción

A partir de la investigación de Borja (2015), puede verse que los estudiantes peruanos del segundo grado de Educación Secundaria de una institución educativa pública, con edades comprendidas entre los 12 y 15 años de edad, utilizan la fórmula para hallar la medida del área del trapecio, la cual, muchas veces, es memorizada y utilizada solo de

[1] Este articulo forma parte del proyecto: *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT*, aprobado por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo*. Proceso: 2013/23228-7(FAPESP) y por PI0272 (IREM-PUCP).

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas– isela.borjar@pucp.pe

[3] Pontificia Universidad Católica del Perú – vneira@pucp.pe

manera mecánica por los estudiantes. En vista de esta situación, se desarrolla una investigación con estos estudiantes, la que consistió en utilizar la reconfiguración para que los estudiantes puedan determinar la medida del área del trapecio. La investigación se lleva a cabo en base a ciertos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) y también de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) como metodología de la investigación cualitativa.

Para el presente artículo, consideramos el análisis a priori y a posteriori respecto de un trapecio isósceles de la actividad 1. Trabajamos con la malla cuadriculada tomada de la investigación de Borja (2015), porque esta figura geométrica está presente en el texto de Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012). Se ha definido el trapecio isósceles como un cuadrilátero que tiene uno y solo un par de lados paralelos, llamados bases, y dos lados no paralelos que, a su vez, son congruentes (Hemmerling, 1971). Douady & Perrín-Glorian (1987) mencionan que los inconvenientes que presentan los estudiantes con relación a la medida de área se deben al uso prematuro de fórmulas. Por ello, es importante mostrar cómo dichos estudiantes pueden obtener la medida de área del trapecio isósceles en una malla cuadriculada a través de la operación de reconfiguración sin recurrir a la fórmula del área del trapecio.

1. Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

La Teoría de Registros de Representación Semiótica es propuesta en el año 1995. Duval (2004) la presenta de la siguiente manera: para aprender matemáticas, se requiere de las representaciones porque los objetos matemáticos no son reales, a diferencia de otras ciencias en que los objetos de estudio son reales, como, por ejemplo, en Biología o Física. Las representaciones son producidas por el sujeto y, luego, son expresadas, es decir, las representaciones son semióticas. Asimismo, el investigador señala que, cuando estas representaciones semióticas cuentan con tres actividades cognitivas, a saber, la formación, el tratamiento y la conversión, son consideradas *registros*.

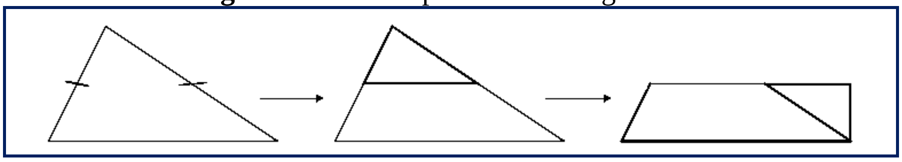
En Duval (2001), se expresa que existen dos grandes tipos de transformaciones en los registros de representación semiótica que son el tratamiento y la conversión. El primero es una transformación que se da dentro de un mismo registro; por ejemplo, la reconfiguración en el registro figural que veremos en este trabajo. La segunda es una transformación que se da de un registro a otro registro.

Duval también indica que son cuatro los registros de representación semiótica que movilizan las matemáticas: el registro de lengua natural, el registro algebraico, el registro figural y el registro gráfico. En este artículo, nos referiremos al registro figural. Según Duval (1994), hay cuatro maneras de aprehender este registro en geometría: la aprehensión perceptiva, la aprehensión discursiva, la aprehensión secuencial y la aprehensión operatoria, que es la que ocurre cuando el estudiante realiza modificaciones en la figura, como la mereológica, que consiste en dividir o fraccionar en varias sub-figuras a la figura inicial para reagruparlas a través de la operación de reconfiguración.

Cabe señalar que la reconfiguración “es una operación que consiste en reorganizar una o varias sub-figuras diferentes de una figura dada en otra figura” (Duval, 2004, p. 165). Además, según el investigador, esta operación no se presenta de manera espontánea y evidente, ya que pueden existir factores de soporte, como la cuadrícula de fondo en la malla cuadriculada que permitirá a los estudiantes tener un soporte perceptivo para realizar la operación de reconfiguración. De esta manera, “permite iniciar, de inmediato, tratamientos como, la medida de área” (Duval, 1988, p. 64, traducción nuestra). Así se obtiene una nueva figura de contorno diferente a la figura inicial, pero que mantiene la misma medida de área.

Asimismo, para obtener estas sub-figuras se tiene que descomponer la figura inicial. Los tipos de descomposición, de acuerdo a Duval (2005), son tres: la descomposición estrictamente homogénea, la descomposición homogénea y la descomposición heterogénea. En este trabajo, nos referiremos a la descomposición heterogénea, la que se da en la figura cuando obtenemos unidades figurales de formas diferentes entre ellas (Figura 1).

Figura 1 - Descomposición heterogénea



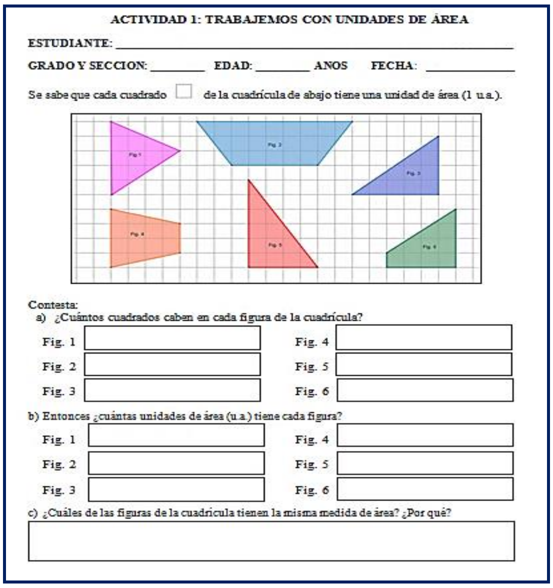
Fuente: Duval (2005, p. 22)

Según Duval (2004), las unidades figurales son el cruce de los valores de la variable visual cualitativa con la variable de dimensión. Para el caso del trapecio isósceles, el contorno cerrado de su superficie es una variable cualitativa y el área es una variable de dimensión dos.

2. Metodología empleada en la investigación

Borja (2015) utiliza aspectos de la metodología de la Ingeniería Didáctica para realizar una secuencia de tres actividades que son *Trabajemos con la malla cuadriculada*, *Trabajemos con el Geogebra* y *Hallemos la medida del área*, esta última como actividad de cierre. Diez estudiantes del segundo grado de Educación Secundaria de la Institución Educativa Básica Regular Andahuasi, acompañados por la investigadora, llevaron a cabo actividades desarrolladas de manera individual. En el análisis a priori, se menciona lo que se espera que los estudiantes realicen en el desarrollo de las actividades y, en el análisis a posteriori, lo realmente realizado por los estudiantes en dichas actividades. En la investigación, se consideró el análisis a posteriori de dos estudiantes, a saber, Melissa y Viviana. El contraste entre el análisis a priori y el análisis a posteriori brinda la validación interna de la investigación. En este artículo se presenta el análisis a posteriori de la estudiante Melissa respecto de una de las figuras geométricas y las dos primeras respuestas de la actividad 1 (Figura 2), pues ello responde al objetivo de este artículo. Para la actividad, se emplearon los siguientes recursos: Ficha de la actividad 1, lápiz 2B y borrador.

Figura 2 - Actividad 1: Trabajemos con la malla cuadriculada


ACTIVIDAD 1: TRABAJEMOS CON UNIDADES DE ÁREA

ESTUDIANTE: ____________________

GRADO Y SECCION: ________ EDAD: ________ ANOS FECHA: ________

Se sabe que cada cuadrado de la cuadrícula de abajo tiene una unidad de área (1 u.a.).

Contesta:

a) ¿Cuántos cuadrados caben en cada figura de la cuadrícula?

Fig. 1 · Fig. 2 · Fig. 3 · Fig. 4 · Fig. 5 · Fig. 6

b) Entonces ¿cuántas unidades de área (u.a.) tiene cada figura?

Fig. 1 · Fig. 2 · Fig. 3 · Fig. 4 · Fig. 5 · Fig. 6

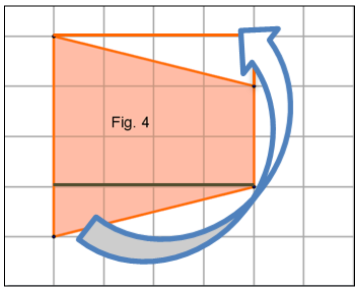
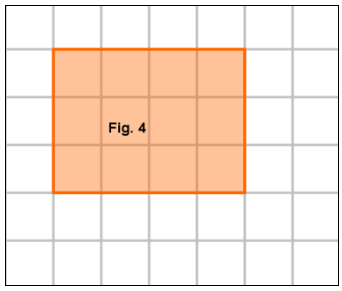
c) ¿Cuáles de las figuras de la cuadrícula tienen la misma medida de área? ¿Por qué?

Fuente: **Borja (2015, p. 49).**

3. Desarrollo de la investigación

Para este aspecto, partiendo de la investigación de Borja (2015), consideramos el análisis de un trapecio isósceles identificado como la Fig. 4 como los ítems (a) y (b) de la Actividad 1: Trabajemos con la malla cuadriculada. Luego, en el análisis a priori, esperamos que los estudiantes realicen una modificación mereológica en esta figura geométrica de dimensión dos al fraccionarla o dividirla en dos sub-figuras heterogéneas (triángulo rectángulo y trapecio rectángulo) con un trazo. Después, se espera que realicen la reconfiguración al trasladar el triángulo rectángulo, según indica la flecha, hacia el lado no paralelo ni perpendicular del trapecio rectángulo donde los cuadrados de la malla cuadriculada, considerados como unidad de área, puedan ser completados para formar un rectángulo de doce cuadrados de unidad de área (ver Figura 3).

Figura 3 - Posible reconfiguración del trapecio isósceles

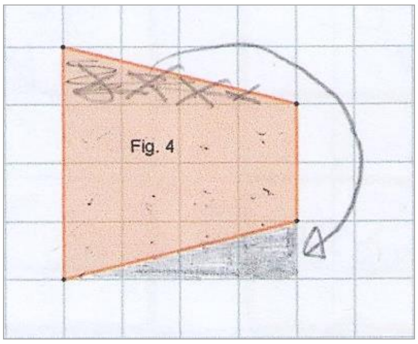
Reconfiguración Inicial	Reconfiguración Final
	

Fuente: Borja (2015, p. 51)

Seguidamente, se espera que los estudiantes contesten en la ficha de la actividad 1 el ítem (a) ¿cuántos cuadrados caben en cada figura de la cuadrícula?; y también el ítem (b) ¿cuántas unidades de área (u.a.) tiene cada figura? En relación al trapecio isósceles, las respuestas esperadas son “12 cuadrados” y “12 u.a.”, respectivamente.

En el análisis a posteriori, la estudiante Melissa, a diferencia de lo previsto en el a priori, realiza cuatro aspas y trazos con el lápiz para realizar la modificación mereológica en el trapecio isósceles y obtiene cinco sub-figuras que son cuatro trapecios rectángulos y un triángulo rectángulo. Luego, realiza la operación de reconfiguración al reagrupar estas sub-figuras y formar un rectángulo. Para ello, traslada hacia el lado inferior no paralelo ni perpendicular del trapecio isósceles, las sub-figuras que señaló con aspa (tres trapecios rectángulos y un triángulo rectángulo), como indica la flecha trazada con lápiz por la estudiante y también se observa que ella realiza pequeñas marcas con el lápiz después de completar los cuadrados de la cuadrícula (ver Figura 4).

Figura 4 - Descomposición heterogénea del trapecio isósceles



Fuente: Adaptado de Borja (2015, p. 54)

Borja (2015), indica que la estudiante Melissa responde a los ítems (a) y (b) de la actividad 1: Trabajemos con la malla cuadriculada según lo previsto en el a priori (ver Tabla 1).

a)	¿Cuántos cuadrados caben en cada figura de la cuadrícula?	
	Fig. 4	12
b)	Entonces ¿cuántas unidades de área (u.a.) tiene cada figura?	
	Fig. 4	12 u.a

Tabla 1. Respuestas de Melissa con respecto al trapecio isósceles de la actividad
Fuente: Adaptado de Borja (2015, p. 49)

De esta manera, la estudiante Melissa contesta correctamente en la ficha de la actividad 1, Trabajemos con la malla cuadriculada, con respecto al trapecio isósceles, identificado como Fig. 4.

Conclusiones

Podemos mencionar que la malla cuadriculada le permitió a la estudiante Melissa, del segundo grado de Educación Secundaria de la Institución Educativa Básica Regular Andahuasi, obtener cinco sub-figuras geométricas más de las previstas en el análisis a priori cuando realiza la modificación mereológica, debido a su percepción. Luego, realiza la operación de reconfiguración cuando forma el rectángulo por reagrupación de las sub-figuras que obtuvo y, con la estrategia del conteo de los cuadrados completos, considerados como unidades de área, halló la medida del área del trapecio isósceles. Es decir, realizó tratamiento en el registro figural como la operación de reconfiguración.

Como menciona Borja (2015), no solo se puede hallar la medida del área del trapecio isósceles con uso de la fórmula del área, “sino también con realizar tratamientos en la figura como la operación de reconfiguración” (p. 76).

Agradecimientos

El presente artículo ha sido posible gracias al apoyo de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas-Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Agradecemos al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC) que, mediante su beca “Presidente de la República”, permitió seguir estudios en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

A los grupos de investigación Didáctica de las Matemáticas DIMAT- IREM/PUCP y *Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática* - PEAMAT de la PUC-SP/Brasil, por permitirnos formar parte del proyecto *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT.*

Referencias

ARTIGUE, M. **Ingeniería didáctica en educación Matemática.** Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo. Bogotá: Editorial Iberoamérica, 1995.

BORJA, I. **Reconfiguración del trapecio para determinar la medida del área de dicho objeto matemático con estudiantes del segundo grado de educación secundaria**. Tesis de Maestría en Enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, 2015.

DOUADY, R. & PERRIN-GLORIAN, M. Um processus d’apprentissage du concept d’aire de surface plane. **Cahier de didactique des mathématiques-IREM**, v. 37, 1987. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS00015.pdf

DUVAL, R. Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. **IREM**, v. 1, p. 57-74, 1988. Recuperado de https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_01/adsc1_1988-004.pdf.

_____. Les différents fonctionnements d’une figure dans une demarche géométrique. **Repères-IREM**, v. 17, p. 121-138. 1994. Recuperado de http://www.univirem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf.

_____. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo**. Trad. Myriam Vega. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2001. (Obra original publicada en 1999).

_____. **Semiosis y pensamiento humano.** Trad. Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004. (Obra original publicada en 1999).

_____. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Repères-IREM**, v. 10, , p. 5-53, 2005. Recuperado de https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_10/adsc10-2005_001.pdf.

HEMMERLING, E. **Geometría elemental**. México: Limusa-Willey S.A., 1971.

PERÚ, MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática 2 Secundaria**. Lima, Perú: Norma, 2012.