

# Conocimientos didáctico-matemáticos de un profesor de educación secundaria sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la mediatriz

---

ELMER GUEVARA VÁSQUEZ<sup>1</sup>

NORMA RUBIO<sup>2</sup>

## Resumen

*En el presente trabajo, el cual se basa en una parte de una tesis de maestría, se pretende identificar los conocimientos de un profesor de educación secundaria sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la mediatriz. Para ello, se utiliza cuatro de las preguntas propuestas en uno de los cuestionarios aplicados en la mencionada investigación. Para el análisis, se aplican algunas herramientas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS). En esta investigación, se aplica una metodología cualitativa del tipo estudio de casos, la que nos ayuda a describir las prácticas realizadas por un profesor al resolver tareas relacionadas al objeto matemático mediatriz. Los resultados a los que se arriba en este estudio indican que el sujeto de investigación tiene un conocimiento común del contenido.*

**Palabras-clave:** *conocimientos didácticos-matemáticos, Enfoque Ontosemiótico, mediatriz.*

## Abstract

*This paper, which is based on an aspect of a master's thesis, pretends to identify the knowledge of a high school teacher on the teaching-learning process of the perpendicular bisector. To do this, we use four of the questions proposed in one of the questionnaires applied in the aforementioned research. For the analysis, we apply some tools proposed by the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA). In this investigation, we apply a qualitative methodology with case studies, which helps us to describe the practices performed by a teacher when solving tasks related to the mathematical object of perpendicular bisector. The results we reached in this study indicate that the subject of research has a common knowledge of the content.*

**Keywords:** *Didactic-Mathematical Knowledge, Onto-Semiotic Approach, Perpendicular Bisector.*

## Introducción

El interés creciente por estudiar los conocimientos que debe tener un profesor para realizar su práctica docente efectiva se evidencia al revisar la literatura relacionada con investigaciones sobre la formación de profesores. Shulman (1987) realiza un gran aporte en el desarrollo de investigaciones e implementaciones curriculares al proponer siete categorías de conocimientos que posibilitan el proceso de instrucción realizado por el profesor. La categoría del “conocimiento pedagógico del contenido” propuesta por

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – a20147003@pucp.pe

<sup>2</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú – nrubio@pucp.edu.pe

Shulman se ha mantenido vigente por más de 20 años. Ball, Lubienski & Mewborn (2001) proponen una nueva noción: “conocimiento matemático para la enseñanza” o MKT<sup>3</sup>, que se basa en la observación del trabajo de los profesores en el aula y que se entiende como aquel conocimiento que emplea el profesor en la clase para producir la instrucción y el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, los modelos que pretenden investigar sobre este conocimiento incluyen categorías aún muy generales. Godino (2009) propone un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor que amplía los modelos descritos anteriormente.

En este trabajo, se presenta parte de un estudio en el cual se describen las prácticas realizadas por un profesor al resolver tareas relacionadas con la mediatriz y en el que se analizan dichas prácticas, objetos y procesos mediante el primer nivel de análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero & Font 2009). Así mismo, se toma en cuenta el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) propuesto por Godino (2009) para identificar los conocimientos del profesor.

A continuación, se muestra la estructura de la investigación, la cual está constituida por los siguientes apartados. En el apartado 1, se presenta una breve descripción del marco teórico que da sustento a esta investigación; en el apartado 2, las cuatro tareas con sus respectivas respuestas esperadas, las que han sido categorizadas en función al conocimiento común y especializado del contenido; finalmente, en el apartado 3, se muestran las respuestas y el análisis de las tareas planteadas, teniendo en cuenta los tipos de conocimiento didáctico del contenido.

## **1. Marco teórico**

### **Enfoque Ontosemiótico**

Según Godino (2011), el Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con la finalidad de articular diferentes aportes teóricos de la didáctica y el conocimiento matemático para que contribuyan a mejorar la calidad de su enseñanza y aprendizaje. El EOS formula una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática: como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida; como lenguaje simbólico; y como sistema lógicamente organizado (Godino, Batanero & Font, 2009).

---

<sup>3</sup> Siglas que corresponden a la expresión en inglés “Mathematical Knowledge for Teaching”.

## **El análisis didáctico**

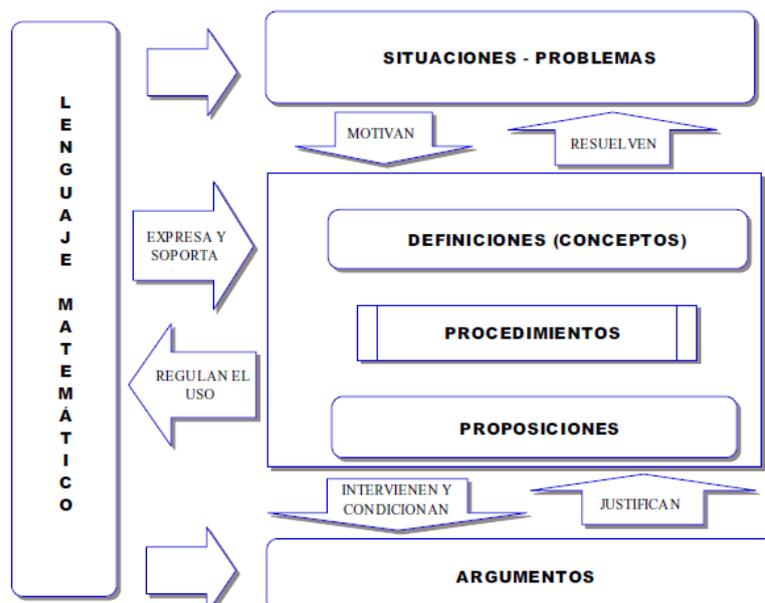
En Font, Planas & Godino (2010) se señalan los diversos trabajos realizados en el marco del EOS en los que se han propuesto cinco niveles para el análisis de procesos de instrucción: (1) análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas; (2) elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; (3) análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; (4) identificación del sistema de normas y metanormas; y (5) valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. Este tipo de análisis ayudará a responder preguntas como: ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? y ¿qué se debería mejorar? Por otro lado, en el trabajo de Rubio (2012), se muestra que la competencia profesional clave para el profesor de matemáticas es la competencia de análisis didáctico de procesos de instrucción y se muestran ciclos formativos en los cuales se aplica el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Pino (2013), a su vez, realiza una investigación relacionada con la evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático, en la que se aplica el análisis didáctico. De esta manera, con la aplicación del análisis didáctico propuesto por el EOS, se puede tender un puente entre la didáctica Descriptiva- Explicativa con la aplicación y evaluación de procesos educativos.

En el presente estudio, se tendrá en cuenta el nivel correspondiente a la elaboración de las configuraciones de objetos matemáticos intervinientes en la actividad matemática.

### **Primer Nivel. - configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.**

Siguiendo a Godino, Batanero & Font (2009), para llevar a cabo una determinada práctica e interpretar los resultados, es necesario activar ciertos conocimientos. Entre estos está el uso del lenguaje verbal o simbólico, que conforma la parte ostensiva de los conceptos, proposiciones y procedimientos. Estos, a su vez, intervienen en la elaboración de argumentos que permiten decidir si las acciones simples que componen las prácticas matemáticas son satisfactorias o no. La movilización de elementos como lenguajes, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones corresponde a lo que en el EOS se denomina *configuraciones*. Estas serán cognitivas, si se trata de objetos personales, y serán epistémicas, si se trata de objetos institucionales. En la figura 1, se muestra cómo interactúan estos elementos.

**Figura 1** - Configuraciones de objetos primarios.



**Fuente:** Godino, Batanero & Font (2009, p. 7).

### **Conocimiento del profesor de matemática**

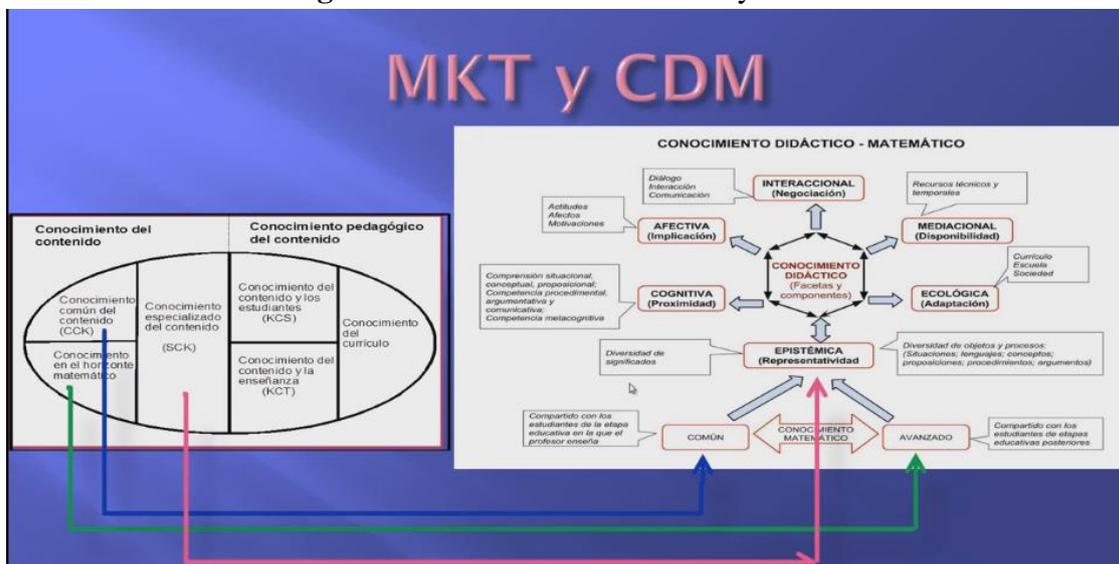
Shulman (1986) realizó uno de los trabajos pioneros en didáctica de la matemática en el que se aborda un modelo para los conocimientos necesarios que un profesor debe tener para ejercer como tal. Este modelo consta de tres categorías del conocimiento del contenido: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK) y conocimiento curricular. Posteriormente, en Shulman (1987) se propone siete categorías de conocimiento que hacen posible la enseñanza; estas son: (1) conocimiento del contenido, (2) conocimiento pedagógico general, (3) conocimiento del currículo, (4) conocimiento pedagógico del contenido (PCK), (5) conocimiento de los estudiantes y sus características, (6) conocimiento de los contextos educativos y (7) conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Recientemente, en los trabajos de Ball y colaboradores, se ha introducido la noción de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching* MKT) (Ball, 2000; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001, Hill, Ball, & Schilling 2008). Los análisis de trabajos de profesores llevaron a clasificar los conocimientos en dos grandes grupos: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido.

Finalmente, para este trabajos se adopta el modelo propuesto en Godino (2009), en el cual se proponen las categorías del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM). Este

modelo viene siendo utilizado en diversas investigaciones para el análisis de protocolos de respuestas proporcionadas por sujetos en investigación, y se caracteriza por tener estrechas relaciones con el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Godino & Pino, 2014) como se puede apreciar en la figura número 2.

**Figura 2 - Relación entre el MKT y el CDM**



**Fuente:** Godino & Pino (2014, p. 1)

Seguendo a Godino & Pino (2014), el término *conocimiento* implica comprensión y competencia. Estas son categorías primarias del conocimiento, las cuales se combinan para formar conocimientos más especializados. Como se puede apreciar en la figura 2, el conocimiento común del contenido y el conocimiento en el horizonte matemático correspondiente al MKT pueden ser equiparados con el conocimiento común y el conocimiento avanzado en el CDM, los mismos que corresponden a la faceta epistémica del conocimiento en el EOS.

De acuerdo con Godino (2009), así como con Godino & Pino (2014), en esta investigación se considera como conocimiento común al conocimiento necesario para resolver la tarea en el nivel al que se dirige y puede ser adquirido en los textos correspondientes a ese nivel. Por otro lado, llamaremos conocimiento especializado al conocimiento correspondiente a niveles superiores al que se enseña y, además, a las adaptaciones que se hagan de acuerdo a cada nivel.

## **1. Metodología**

Por tratarse de una investigación cualitativa y del tipo estudio de casos, se ha adaptado el esquema propuesto por La Torre & cols. (2003). En este esquema, se toman en cuenta seis fases: (1) exploratoria o de reflexión; (2) planificación; (3) entrada al escenario; (4) recolección y análisis de la información; (5) retirada del escenario; y (6) elaboración del informe.

A continuación, se presentan las características del sujeto de estudio, el diseño de los cuestionarios, la recolección y el análisis de la información al aplicarse los cuestionarios (a partir de los cuales se toma en cuenta, para la presente investigación, cuatro de las actividades ahí propuestas) y un análisis comparativo y reflexivo de la información recogida. Todo esto ha llevado a obtener los resultados que se muestran en el presente artículo.

### **Características del sujeto de estudio**

El profesor sujeto de investigación es egresado del Instituto Superior Pedagógico Público Nuestra Señora de Chota, de la provincia de Chota, región Cajamarca. Cuenta con una experiencia de ocho años laborando en instituciones educativas de nivel secundario. Durante este periodo, ha enseñado matemática en los cinco grados, correspondientes al VI y VII ciclos de la educación básica regular del Perú. Se desempeña, en condición de contratado en la Institución Educativa Jorge Berrios Alarcón del centro poblado de Yuracyacu, correspondiente a la Unidad de Gestión Educativa Local (UGEL) de Chota, de la región Cajamarca, y enseña matemática en los grados primero, segundo, tercero y cuarto de secundaria.

### **Diseño de los cuestionarios**

Con la finalidad de identificar los conocimientos matemáticos y didácticos que el profesor pone de manifiesto durante el proceso de enseñanza - aprendizaje, y teniendo como insumos al marco teórico y significado institucional del objeto matemático descrito en Guevara (2015), se ha elaborado dos cuestionarios. Las actividades de cada cuestionario tienen en cuenta las relaciones entre el conocimiento común del contenido (mediatriz y significados) y el conocimiento didáctico especializado.

El primer cuestionario consta de quince ítems. Las primeras ocho preguntas están destinadas a recoger información general del profesor; por ejemplo, el nivel educativo al que pertenece, la institución educativa superior de la que egresó, sus años de experiencia

enseñando el área de matemática, los ciclos y grados a los que ha enseñado últimamente y el tipo de institución educativa en la que viene laborando. Esta información nos permitió describir las características del sujeto de investigación. Las siguientes siete preguntas tienen como finalidad identificar el nivel de conocimiento que tiene el profesor sobre el objeto matemático mediatrix, sus diferentes usos y propiedades, así como los argumentos que usa para demostrar las propiedades y resolver problemas.

El segundo cuestionario consta de seis actividades, las cuales fueron resueltas por el profesor. A partir de sus respuestas, analizamos si el profesor tiene un conocimiento común o un conocimiento especializado del contenido.

### **Criterios a tener en cuenta para el análisis de respuestas**

Para el análisis de las respuestas, se ha tenido en cuenta lo siguiente: (1) las respuestas esperadas en cada pregunta o actividad y (2) una guía de consignas sobre el conocimiento didáctico matemático propuestas en Godino (2009), la cuales pueden ser usadas por un observador externo para evaluar procesos de estudios implementados. A continuación, mostramos, en la tabla 1, los aspectos referidos al conocimiento común, especializado y ampliado.

| <b>Faceta epistémica</b>       | <b>Cognitiva</b>  |
|--------------------------------|---|
| Conocimiento común:            | Resuelve la tarea   |
| Conocimiento especializado:    | Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas: |
| - Tipos de problemas           | Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.  |
| - Lenguajes (representaciones) | Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.   |
| - Procedimientos               | Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos, formales).  |
| - Argumentos                   | Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.<br>Explica y justifica las soluciones.             |
| Conocimiento ampliado:         |   |
| - Conexiones                   | Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.                                  |

**Tabla 1 - Conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado)**

Fuente: Godino (2009, p. 25)

## 2. Diseño de las tareas y análisis a priori de las respuestas esperadas

### Campo de problemas como contexto para la investigación

Para poder seleccionar las tareas relacionadas a la mediatriz, se elaboró un campo de problemas, teniendo como insumo los textos de secundaria proporcionados por el Ministerio de Educación de Perú, los textos de Matemática para Todos de la editorial Apoyo y dos textos de educación superior, los cuales han sido desarrollados en (Guevara, 2015). Para este trabajo, se ha adaptado el campo de problemas relacionado a los diferentes significados y usos de la mediatriz en educación secundaria, la demostración de la propiedad de la mediatriz, la resolución de problemas de contexto extramatemático y las conexiones que pueden existir entre estos contenidos y otros temas correspondientes a un nivel superior.

### Las tareas seleccionadas para la investigación

En la investigación de Guevara (2015), se aplicaron dos cuestionarios con la finalidad de identificar los conocimientos didácticos y matemáticos de un profesor de educación secundaria sobre el proceso de enseñanza- aprendizaje de la mediatriz. En este trabajo, se presentan algunas de las preguntas del cuestionario 01, los que servirán para recoger las respuestas del profesor. Posteriormente, se aplica el modelo propuesto por Godino (2009) al protocolo de respuestas obtenidas.

#### **Tarea 01**

- a) ¿Qué entiende por mediatriz de un segmento?
- b) ¿Cómo define la mediatriz de un segmento en una sesión de aprendizaje a sus alumnos?

Fuente: Guevara (2015, p. 71)

**Respuesta esperada.** Se espera que el profesor responda una o más de las siguientes respuestas.

- a) *Se llama mediatriz de un segmento a la recta perpendicular al segmento que lo corta en su punto medio.*
- b) *La mediatriz de un segmento  $\overline{AB}$  en el plano es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos, que son los extremos de dicho segmento.*
- c) *La mediatriz de un segmento es el eje de simetría de dicho segmento.*

Responder al ítem a) con una o más de las respuestas esperadas nos daría evidencia de

un conocimiento común del contenido. Responder al ítem b) implica tener en cuenta el nivel al que se va enseñar y eso nos da evidencia de un conocimiento didáctico especializado.

**Tarea 02**

Demuestre el teorema relacionado con la mediatriz.

*La mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento.*

**Fuente:** Guevara (2015), p. 71

**Respuesta esperada.** A continuación presentamos una posible solución a la tarea.

**Demostración:**

Hipótesis:  $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$ ;  $AM=MB$ ;  $\overleftrightarrow{CD} \cap \overline{AB} = \{M\}$ , P es un punto cualquiera sobre  $\overleftrightarrow{CD}$ ,  $C \neq M$ .

Tesis:  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

| Proposiciones   | Razones   |
|---|---|
| $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$ ; $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ | Hipótesis   |
| $\sphericalangle AMC$ y $\sphericalangle BMC$ son $\sphericalangle S$ rectos.       | Debido a que: $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$ (1)   |
| Trazar $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ .  | Postulado de la existencia de una sola recta que contiene a dos puntos; determinando un segmento entre ellos. |
| $\overline{CM} \cong \overline{MC}$ .   | Propiedad reflexiva.  |
| $\triangle AMC \cong \triangle BMC$   | Si dos triángulos rectángulos tienen dos catetos congruentes, entonces son congruentes.                       |
| $\therefore \overline{AC} \cong \overline{BC}$                                      | Como $\triangle AMC \cong \triangle BMC$ , $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (5)                            |

**Fuente:** Guevara (2015, p. 71)

Resolver esta actividad implica tener un conocimiento especializado del contenido, puesto que, en los textos usados para la enseñanza en el nivel secundario, no se trabajan las demostraciones. Esto implica que el profesor debe tener conocimientos de un nivel superior. Además, debe realizar conexiones entre los aspectos del tema y diferentes acciones y teoremas.

**Tarea 03**

¿Dónde aplica o utiliza el concepto de mediatriz?

**Fuente:** Guevara (2015), p. 72

**Respuesta esperada.** Se espera que el profesor responda con diversos usos de la mediatriz. Entre los más importantes, están los siguientes: para determinar el punto medio de un segmento, para determinar el circuncentro de un triángulo cualquiera, para

graficar una circunferencia circunscrita a un triángulo, como eje de simetría, para construir el simétrico de una figura, para dividir un arco de circunferencia en dos partes iguales, para trazar un perpendicular a una recta que pase por un punto dado en la recta, para construir el arco capaz, como el concepto del vecino más próximo, para encontrar la ecuación de la recta mediatriz de un segmento conociendo las coordenadas de sus extremos, como aplicación para la resolución de problemas de contexto extramatemático, etc.

La respuesta a la pregunta nos permitirá conocer si el profesor solo tiene un conocimiento común del contenido o un conocimiento especializado y ampliado del contenido (adecuación al grado que enseña y conocimiento de niveles superiores al que enseña).

**Figura 3** - respuesta a la pregunta número 2

**Tarea 04**  
 Se conoce que la casa de Carlos (C) está a la misma distancia lineal de Sebastián(S) y Beatriz (B). Señalar tres ubicaciones donde se localizaría la casa de Carlos.  
 ¿Qué concepto matemático esta de tras de este problema?



S



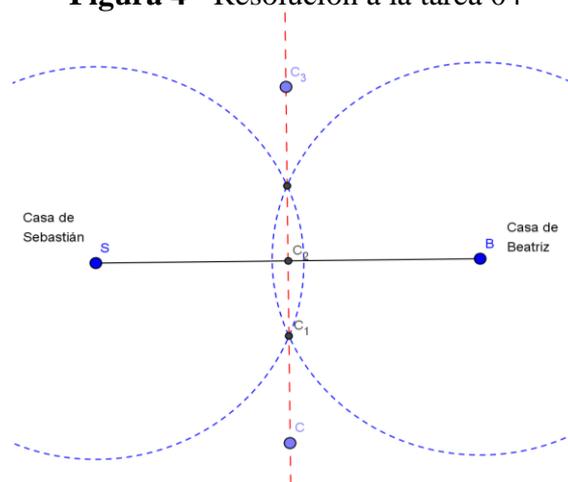
B

Fuente: Guevara (2015, p. 73)

**Respuesta esperada.**

Se espera que en este problema se proporcione una solución que se aproxime a la siguiente:

**Figura 4** - Resolución a la tarea 04



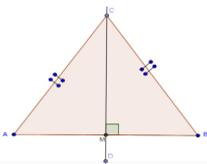
Fuente: Guevara (2015, p. 74)

Representamos la casa Sebastián con el punto  $S$  y la casa de Beatriz, con la letra  $B$ . Se traza el segmento  $\overline{SB}$  y, luego, construimos la mediatriz de dicho segmento. Finalmente, la casa de Carlos puede estar ubicada sobre cualquier punto de la mediatriz, como se puede apreciar en la figura.

La solución a este problema nos dará evidencia de un conocimiento común del contenido. Además, identificar el concepto que está detrás de la solución y definirlo de acuerdo al nivel educativo implica un manejo de un conocimiento especializado del contenido.

### Campo de problemas como contexto para la investigación

Con la finalidad de analizar la interrelación de los diferentes objetos primarios necesarios para resolver las tareas propuestas, elaboramos una configuración epistémica relacionada al campo de problemas anteriormente mencionado. Esta configuración la realizamos debido a que los conocimientos, común y especializado corresponden a la faceta epistémica del CMD propuesto por Godino (2009), y esta faceta es la que principalmente se aborda en la presente investigación.

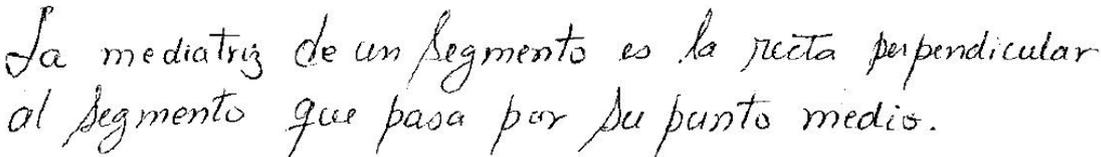
|   |
|---|
| <b>Situación problema</b>   |
| Problemas relacionados a las definiciones, demostración de la propiedad de la mediatriz y problemas de contexto extra matemático  |
| <b>Lenguaje</b>   |
| <b>Verbal:</b> Punto, recta punto en un segmento, punto fuera del segmento, mediatriz de un segmento, propiedad de la mediatriz de un segmento, triángulo, tipo de triángulo, congruencia de triángulos, demostración |
| <b>Simbólico</b><br>$A;B, \overline{AB}, \Delta AMC \cong \Delta BMC, \overline{CM} \cong \overline{MC}, \overline{CD} \perp \overline{AB}, \overline{CD} \cap \overline{AB} = \{M\}, , C \neq M$                     |
| <b>Gráfico:</b> Por ejemplo   |
|    |
| <b>Conceptos (definiciones)</b>   |
| <b>Previos</b>  |
| Segmento, recta perpendicular, punto medio, triángulos rectángulos, congruencia de triángulos   |
| Mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento)  |
| Mediatriz de un segmento (definida como el lugar geométrico)  |
| <b>Emergentes</b>   |
| Propiedad de la mediatriz un segmento: “Todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo”.  |

|  |
|--|
| <b>Propiedades</b>   |
| <p><b>Previas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La mediatriz corta al segmento en su punto medio.</li> <li>- La mediatriz divide al segmento en dos segmentos congruentes.</li> <li>- La recta perpendicular a un segmento forma cuatro ángulos congruentes e iguales a <math>90^\circ</math> con el segmento.</li> </ul> <p><b>Emergentes</b></p> <p>Propiedad de la mediatriz de un segmento: “todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo” (demostración).</p>  |
| <b>Procedimientos</b>  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Conjeturar sobre la equidistancia de los puntos que pertenecen a la mediatriz y, luego, generalizar la propiedad. Demostrar la propiedad.</li> <li>- Resolver problemas.</li> </ul>   |
| <b>Argumentos</b>  |
| <p><b>Tesis 1:</b> “La mediatriz de un segmento corta al segmento en su punto medio”.</p> <p><b>Justificación:</b> definición por la definición de mediatriz de un segmento.</p> <p><b>Tesis 2:</b> “Todo punto sobre la mediatriz del segmento rectilíneo equidista de los extremos del segmento”</p> <p><b>Justificación:</b> conjunto de pasos ordenados para demostrar que <math>\overline{AC} \cong \overline{BC}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Postulado de la existencia de un segmento entre dos puntos</li> <li>- Definición de mediatriz de un segmento</li> <li>- Propiedad reflexiva</li> <li>- Postulados de congruencia de triángulos rectángulos</li> </ul> |

### 3. Análisis de las prácticas a partir del protocolo de respuestas

A continuación, presentamos las respuestas dadas por el profesor:

**Figura 5** - respuesta a la pregunta número 2

|   |
|---|
| <p><b>Respuesta tarea 01</b></p>  |
|---|

**Fuente:** Guevara (2015, p. 94)

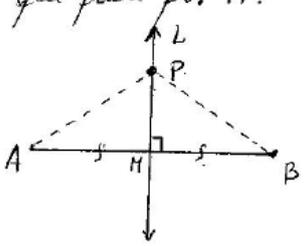
Esta respuesta nos permite afirmar que el profesor posee un conocimiento común del contenido en relación a la mediatriz, puesto que no define de diferentes maneras al objeto matemático en estudio y tampoco explica cómo debería enseñar este objeto matemático a su clase.

**Figura 6** - respuesta a la pregunta número 2

**Respuesta tarea 02**

Sea  $\overline{AB}$  y  $M$  punto medio de  $\overline{AB}$ .  
Sea  $\vec{L}$  una recta perpendicular a  $\overline{AB}$  que pasa por  $M$ .  
Sea  $P$  un punto de  $\vec{L}$ .  
demostraremos que  $PA = PB$ .

i) Si  $M$  es punto medio  $\rightarrow AM = MB$   
ii)  $\triangle AHP \cong \triangle BMP$  (L-A-L)  
 $\therefore \underline{PA = PB}$  l.g.l



Fuente: Guevara (2015, p. 94)

En esta respuesta se puede apreciar que el profesor realiza una demostración, lo que nos daría indicios de un conocimiento especializado del contenido. Sin embargo, al ser entrevistado, manifestó que enseñar el proceso de demostración no es muy importante en el nivel secundario, ya que, para él, es más importante la aplicación mecánica de fórmulas y teoremas que la resolución de problemas.

**Figura 7** - respuesta a la pregunta número 2

**Respuesta tarea 03**

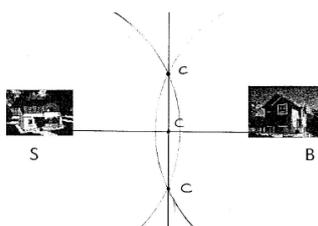
$\rightarrow$  Para encontrar el Centro de una Circunferencia.  
 $\rightarrow$  Para encontrar el Circuncentro de un triángulo.

Fuente: Guevara (2015, p. 95)

A partir de estas respuestas, podemos observar que son muy escasos los usos que conoce el profesor de la mediatriz. Esto también nos da evidencia de que el profesor tiene un conocimiento común del contenido.

**Figura 8** - respuesta a la pregunta número 2

**Respuesta tarea 04**



En este problema se está aplicando el concepto de Mediatriz de un Segmento.

**Fuente:** Guevara (2015, p. 96)

A partir de la respuesta, podemos apreciar que el profesor sí tiene la noción intuitiva de mediatriz como un lugar geométrico, pero no la define como tal, lo que también nos da evidencia de un conocimiento común del objeto matemático. Además, sus argumentos para la resolución son del tipo gráfico solamente.

## Resultados y conclusiones

A través del estudio, se logró identificar los conocimientos del profesor. Por eso, podemos afirmar que el profesor tiene un conocimiento común de la enseñanza y aprendizaje de la mediatriz, mas no posee un conocimiento especializado del tema. El profesor resuelve la tarea usando métodos gráficos y las justificaciones son justificaciones empíricas que parten de los gráficos; no utiliza diferentes formas de representación, no usa diferentes procedimientos para resolver la tarea e identifica pocos usos y significados del objeto matemático. Teniendo en cuenta a lo planteado en Godino (2009) y Godino & Pino (2014), todas estas características nos dan evidencia de que el sujeto tiene un conocimiento común del contenido.

Por otro lado, es evidente que el profesor no tiene un conocimiento especializado del objeto matemático debido a que no realiza una reflexión sobre su práctica; tampoco realiza conexiones con otras ramas de la matemática y tampoco elabora configuraciones de objetos y procesos relacionados al objeto matemático.

## Agradecimientos

El presente artículo ha sido posible gracias al apoyo de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas-Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Agradecemos al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC) que,

mediante su beca “Presidente de la República”, permitió seguir estudios en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

## Referencias

BALL, D. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, v. 51, p. 214-247, 2000.

BALL, D.; LUBIENSKI, S.T.; MEWBORN, D.S. Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers’ mathematical knowledge. In: RICHARDSON, V. (Ed.). **Handbook of research on teaching**. 4<sup>th</sup> ed., p. 433-456, 2001.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, v. 33, n. 2, p. 89-105, 2010.

GODINO, J. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 20, p. 13-31, 2009. Recuperado de:

[http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/20/Union\\_020\\_007.pdf](http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/20/Union_020_007.pdf)

\_\_\_\_\_. **Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**. 2011. Recuperado de: [http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino\\_indicadores\\_idoneidad.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf)

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. **Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática**. 2009, Recuperado de [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis\\_eos\\_10marzo08.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf)

GODINO, J. D.; PINO-FAN, L. Del conocimiento matemático para la enseñanza al conocimiento didáctico-matemático. **Investigación en Educación Matemática XVIII**, p. 591, 2014. Recuperado de: [http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/09/Godino-Pino-Fan-2014\\_Del-MKT-al-CDM.pdf](http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/09/Godino-Pino-Fan-2014_Del-MKT-al-CDM.pdf)

GUEVARA, E. **Conocimientos de un profesor de educación secundaria sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la mediatriz bajo el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: un estudio de casos**. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, 2015.

HILL, H.; BALL, D.; SCHILLING, G. Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 39, n. 4, p. 372-400, 2008.

PINO, L. **Evaluación de La faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada**. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España, 2013. Recuperado de: [https://dl.dropboxusercontent.com/u/3280703/TesisDoctoral\\_LuisPino.pdf](https://dl.dropboxusercontent.com/u/3280703/TesisDoctoral_LuisPino.pdf)

LATORRE, A. y cols. **Bases metodológicas de la investigación educativa GR92**. Monterrey-México, 1996.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

\_\_\_\_\_. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard**

**Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SOSA, L.; FLORES-MEDRANO, E.; CARRILLO, J. Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 33, n. 2, p. 173-189, 2015. Recuperado de: [file:///C:/Users/i413.IDP/Downloads/293271-407226-1-PB%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/i413.IDP/Downloads/293271-407226-1-PB%20(1).pdf)

RUBIO, N. **Competencias del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos**. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, España, 2012.