

# Propiedades del trapecio y aprehensiones en el registro figural: una secuencia didáctica con el uso del Geogebra con estudiantes de secundaria<sup>1</sup>

---

BEATRIZ PAULINA ESPINOZA PERALTA DE MANRIQUE<sup>2</sup>

JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR<sup>3</sup>

## Resumen

*Presentamos un recorte de la investigación de Espinoza (2015), la cual tomó como base teórica algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Esta teoría permitió analizar cómo estudiantes de secundaria movilizan la noción de trapecio en una secuencia didáctica en la que utilizaron el Geogebra. Participaron en la investigación quince estudiantes de 14 a 15 años de edad de un colegio nacional de Lima-Perú. Así mismo, consideramos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica como método. La actividad que presentamos en el artículo tiene como objetivo evidenciar la conversión del registro en lengua natural al figural que realiza la estudiante Rosario, en la que, por medio de las aprehensiones en este registro, identifica el tipo de trapecio y sus propiedades. El desarrollo de la actividad con el uso del Geogebra permitió tanto a Rosario como a los otros estudiantes movilizar nociones del trapecio.*

**Palabras-Clave:** Trapecio; Registro Figural; Aprehensiones.

## Abstract

*We present a part of the research by Espinoza (2015), who took some aspects of the Theory of Registers of Semiotic Representation as theoretical basis. This theory allowed analyzing how high school students mobilize the notion of trapezoid in a didactic sequence in which they used Geogebra. Fifteen 14 to 15-year-old students participated from a public school of Lima-Peru. In addition, we considered some aspects of Didactic Engineering as method. The activity we present in the article aims to evidence the conversion student Rosario does from the natural language register to the figural one, in which she identifies the type of trapezoid and its properties thanks to the apprehensions in this register. The use of Geogebra to develop the activity allowed Rosario, as well as the other students, to mobilize notions of the trapezoid.*

**Keywords:** Trapezoid; Figural Register; Apprehensions.

## Introducción

En la actualidad, existen diferentes investigaciones en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, las cuales nos señalan las dificultades que existen en el estudio de los cuadriláteros, la importancia de utilizar un *software* en la enseñanza de temas de Geometría y las dificultades que presentan en la utilización de un registro. En

---

<sup>1</sup> Este artículo forma parte del proyecto: *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT*, aprobado por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo*. Proceso: 2013/23228-7(FAPESP) y por PI0272 (IREM-PUCP).

<sup>2</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas–[bpepinzap@pucp.pe](mailto:bpepinzap@pucp.pe)

<sup>3</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú – [jvflores@pucp.pe](mailto:jvflores@pucp.pe)

este caso, cuando se trabaja temas de geometría, siempre se utilizan figuras y un lenguaje formal para enunciar propiedades y comunicar resultados. Por tanto, nos interesa analizar cómo los estudiantes, a partir del tratamiento en el registro figural, las aprehensiones que se desarrollan en ella y la conversión entre el registro de lengua natural al figural y viceversa, movilizan conocimientos previos e identifican las propiedades del trapecio a partir de su construcción.

Como estamos interesados en articular las aprehensiones en el registro figural, usamos la investigación de Salazar (2015), que señala la pertinencia del registro figural dinámico cuando se utilizan ambientes de Geometría Dinámica, como en nuestro caso que utilizamos el Geogebra. Es así que consideramos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación semiótica propuesta por Duval (1995), ya que ella nos brindará el sustento teórico para realizar el análisis de las acciones realizadas por los estudiantes al desarrollar la actividad.

Por lo mencionado anteriormente, hemos considerado mostrar en este artículo la pregunta 2 de la actividad 1 de la investigación de Espinoza (2015), porque ha sido diseñada con el propósito de que los estudiantes puedan construir el trapecio y, a partir de ello, puedan deducir e identificar el tipo de trapecio y sus propiedades para lo cual emplearán el *software* Geogebra.

## **1. Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica**

En la investigación, tomamos como base la Teoría de Registros de Representación Semiótica en la que Duval (2004a) considera que:

Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica.) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros (p.14).

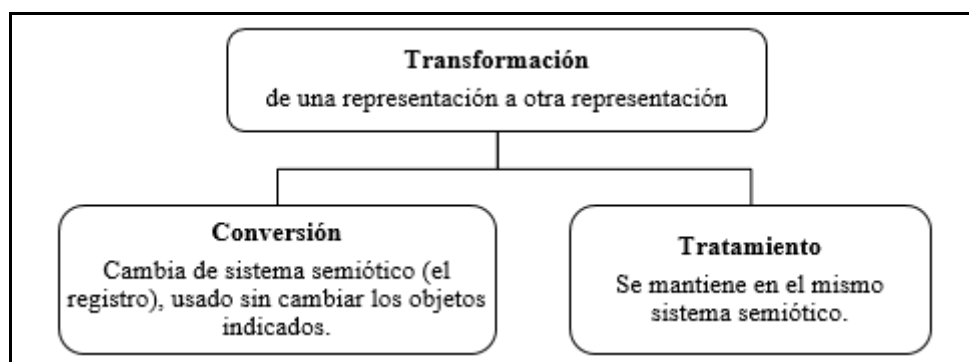
Así mismo, el investigador señala que las representaciones semióticas no solo son necesarias para comunicar algo, sino que también son importantes en el desarrollo de actividades matemáticas. Los aspectos de la teoría considerados para el desarrollo de la investigación son los siguientes.

### **Registros de Representación Semiótica**

El autor señala que un Registro de Representación Semiótica debe cumplir las tres

actividades cognitivas ligadas a la Semiosis (formación, tratamiento y conversión). Así, manifiesta que, en la actividad matemática, se realizan dos transformaciones: el tratamiento y la conversión. En la figura 1, mostramos en qué consiste cada una de ellas.

**FIGURA 1** – Transformación de Representación Semiótica



FUENTE: Espinoza (2015, p. 34).

Tipos de registros de representación semiótica:

- a) **Registro en lengua natural:** de acuerdo con el autor, es el acto de comunicar o enunciar, en forma ordinaria y textual, un teorema o una definición, y explicar y argumentar algo sobre un objeto matemático en estudio.
- b) **Registro figural:** de acuerdo con Duval (2004b), representa formas, estructuras y la organización entre ellas. Está relacionado con la percepción visual y un discurso teórico y simbólico. El autor señala cuatro aprehensiones cognitivas que se desarrollan en el tratamiento en el registro figural: secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva.
- c) **Aprehensión perceptiva:** es la aprehensión que corresponde a la observación de la figura, la cual permite identificar y reconocer un objeto matemático en el plano o en el espacio.
- d) **Aprehensión operatoria:** es “una aprehensión centrada sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y por consiguiente sobre las organizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen” (Duval, 2004a, p.162). Estas modificaciones pueden ser:

- Mereológicas: división de figuras en sub figuras y su reagrupación.
- Ópticas: operación de deformación de una figura, la que, en geometría, se conoce como *homotecia*.
- De posición: cambio de posición o la orientación de una figura con respecto al plano en el que se muestra.

e) **Aprehensión discursiva:** está aprehensión se sujeta a las propiedades relacionadas a una hipótesis en la cual la figura es parte del discurso teórico.

Además, el autor señala que, en la actividad matemática, el tránsito entre los diferentes registros de representación semiótica es importante, ya que este permite al estudiante adquirir conocimiento suficiente sobre el objeto matemático en estudio.

## 2. Aspectos de la Ingeniería Didáctica

Para el desarrollo y el análisis de la actividad presentada en este artículo, hemos considerado algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica propuesta por Artigue (1995), tales como el análisis a priori, el análisis a posteriori y la validación. A continuación, explicamos en qué consiste cada uno de ellos.

El análisis a priori permite realizar “un conjunto de hipótesis sobre el comportamiento y acciones que harán los estudiantes en relación a los registros de representación, la conversión, el tratamiento en el registro figural y la coordinación entre las aprehensiones desde la perspectiva de Duval” (Espinoza, 2015, p.154).

Así mismo, la validación se realiza mediante el contraste entre el análisis a priori, que son las acciones que se esperaba que los estudiantes realizaran, y el análisis a posteriori, que son las acciones que los estudiantes realmente hicieron en el desarrollo de la actividad propuesta.

Para el presente artículo, hemos considerado presentar la pregunta 2 de la actividad 1 propuesta en la investigación, pues ella ha sido diseñada con la intención de que los estudiantes realicen la conversión del registro en lengua natural al figural, así como también tratamientos en el registro figural, que darán lugar al desarrollo de las aprehensiones (perceptiva, operatoria y discursiva). De esta manera, los estudiantes pueden movilizar conocimientos sobre la noción de trapecio e identificar el tipo de trapecio y sus propiedades. La actividad que presentamos en este artículo fue trabajada

con quince estudiantes de cuarto grado de secundaria de un colegio nacional de Lima, Perú. Entre ellos, presentaremos lo trabajado por la estudiante llamada Rosario.

### 3. Desarrollo de la investigación

En esta sección, mostramos los siguientes aspectos: la actividad seleccionada para el presente artículo, el análisis a priori y el correspondiente análisis a posteriori.

#### Actividad

##### **2. Parte A:**

Con ayuda del software Geogebra, construye el trapecio ABCD, con el lado AB paralelo a CD.

Mediante el siguiente procedimiento:

- 1) Trazar un segmento AB.
- 2) Ubicar un punto C exterior al segmento AB.
- 3) Trazar una recta paralela al segmento AB que pase por C.
- 4) Luego ubicar un punto D (con la herramienta punto en objeto) en la recta. De esta forma, nos aseguramos que el segmento CD será siempre paralelo al segmento AB.)
- 5) Seleccionar la opción Polígono y marcar el cuadrilátero ABCD.

*Guardar el archivo con el nombre Trapecio1\_apellido\_nombre (en la carpeta PUCP\_2015).*

##### **Parte B:**

Mediante el arrastre, mueva uno de los vértices del trapecio ABCD construido, luego nombra el tipo de trapecio que se forma y señale sus propiedades. Explique detalladamente.

Esta actividad tuvo como objetivo construir la representación figural del trapecio, identificar el tipo de trapecio y sus propiedades.

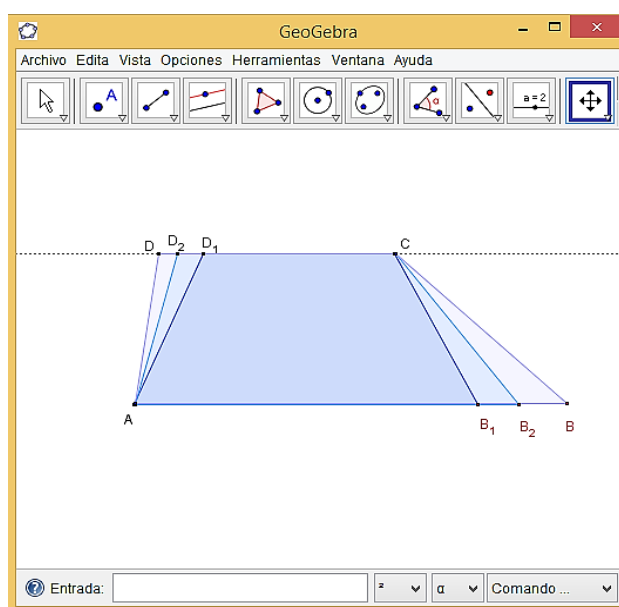
#### *Análisis a priori*

Espinoza (2015) considera que los estudiantes, al desarrollar esta actividad, realizarán la conversión del registro en lengua natural al figural y, luego, a partir de su representación, identificarán el tipo de trapecio construido y sus propiedades.

Esta actividad consta de dos partes. En la parte A, esperamos que los estudiantes, con la ayuda de las herramientas del *software* Geogebra, construyan cada uno de los elementos geométricos que conforman el trapecio, de acuerdo con los procedimientos establecidos en la actividad. En la parte B, creemos que los estudiantes realizarán tratamientos en la representación figural del trapecio, los cuales darán muestra de las aprehensiones desarrolladas. Así mismo, pensamos que el estudiante, al hacer uso de la función

*arrastre* del Geogebra, modificará la configuración inicial del trapecio, de modo que, al mover uno de sus vértices, podrá observar una nueva configuración. Así mismo, Espinoza (2015) señala que los estudiantes, al relacionar las propiedades invariantes en la figura, podrán identificar el tipo de trapecio y sus propiedades. De esta manera, pensamos que los estudiantes articularán sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva. A continuación, mostramos dos posibles tratamientos en el registro figural que realizarían los estudiantes al arrastrar el vértice B y mover la figura construida del trapecio.

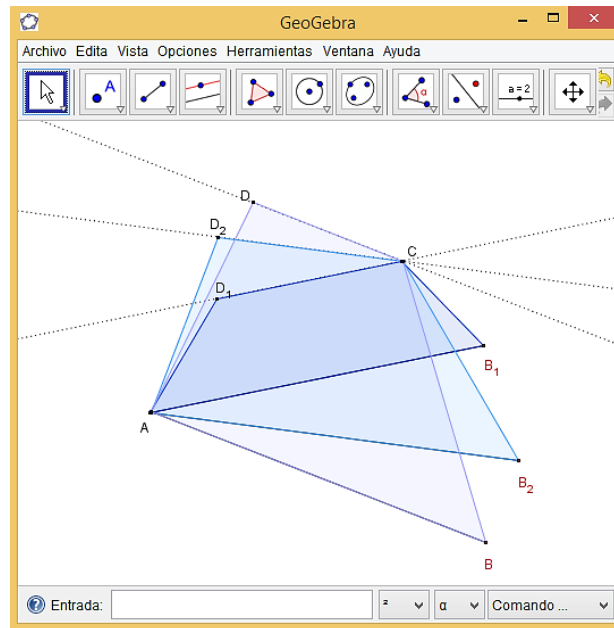
**FIGURA 2** – Tratamiento en el registro figural



En la figura 2, se muestra la primera posibilidad que, pensamos, pueden realizar los estudiantes. Al arrastrar el vértice B, modificarán la configuración inicial del trapecio, tal como se observa en la figura 2. A partir de estas acciones, los estudiantes observarán los cambios de longitud de los lados del trapecio ABCD y, de esta manera, en cada una de las nuevas configuraciones, las dimensiones serán diferentes. Esto corresponde, de acuerdo con Duval (1995), a una aprehensión de tipo óptica.

En la figura 3, se muestra la segunda posibilidad de tratamiento que, pensamos, pueden realizar los estudiantes al desarrollar la actividad.

**FIGURA 3** – Tratamiento en el registro figural



En este caso, Espinoza (2015) considera que los estudiantes, al arrastrar el vértice B, cambiarán la posición de la figura con respecto a la orientación inicial. Así mismo, observarán el cambio de dimensión de cada una de las configuraciones obtenidas del trapecio ABCD. De esta manera, creemos que los estudiantes desarrollarán su aprehensión operatoria de tipo óptica y posicional, ya que, tal como lo afirma Duval (1995), estas se dan al modificar la posición o la orientación de una figura de partida con respecto al plano en el que se la representa. La autora señala también que estas acciones permitirán al estudiante observar y enunciar, mediante el registro en lengua natural, las propiedades invariantes en la representación figural del trapecio y podrán identificar el tipo de trapecio de acuerdo a las propiedades que poseen. De esta forma, evidenciarían la coordinación entre sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva.

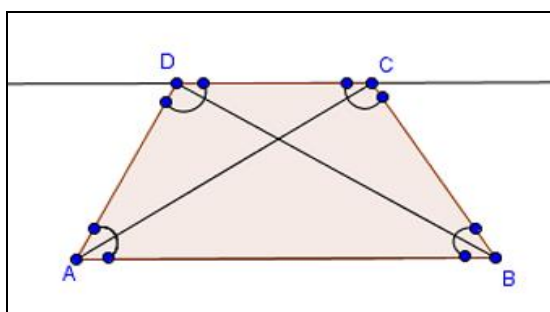
### ***Análisis a posteriori***

Reiteramos que, en esta parte, consideramos presentar el desarrollo de la actividad realizada por Rosario, una de las estudiantes con quien se llevó a cabo la experimentación.

### Análisis de las acciones de Rosario

Con respecto a lo previsto en el análisis a priori, Espinoza (2015) señala que Rosario logró realizar lo esperado en la parte A de la actividad, porque realizó la construcción del trapecio de acuerdo a los procedimientos previstos. De esta manera efectuó la conversión del registro en lengua natural al registro figural (ver figura 4).

**FIGURA 4** – Respuesta A



**FUENTE:** Espinoza (2015, p. 66)

Así mismo, Espinoza (2015) considera que, de acuerdo a lo que se observa en la figura 4, la estudiante identificó los ángulos interiores  $\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle BCD$ ,  $\sphericalangle CDA$  y  $\sphericalangle DAB$  del trapecio ABCD y trazó líneas auxiliares para identificar las diagonales  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  del mismo. Señala también que estas acciones realizadas por el estudiante ponen de manifiesto el desarrollo de su aprehensión operatoria de tipo mereológica (trazos auxiliares). La autora manifiesta que la estudiante, luego de haber realizado la construcción del trapecio, arrastró el vértice B de la figura en distintas direcciones, observó los cambios de dimensión con respecto a la configuración inicial del trapecio ABCD e identificó al trapecio como escaleno. Así mismo, identificó sus propiedades y las dio a conocer mediante el registro en lengua natural (ver figura 5).



**FIGURA 5 – Respuesta B**

**Parte B:**  
Mediante el arrastre, mueva uno de los vértices del trapecio ABCD construido, luego nombra el tipo de trapecio que se forma y señale sus propiedades. Explique detalladamente.

TRAPECIO ESEALEAN

tiene 4 lados

tiene altura

tiene 2 lados paralelos

tiene 2 lados no paralelos

tiene 2 bases congruentes

tiene 2 diagonales

tiene 2 ángulos opuestos por el vértice

**FUENTE:** Espinoza (2015, p. 67)

Espinoza (2015) considera que, de acuerdo a la figura 5, el tipo de trapecio que identificó Rosario coincide con el análisis a priori. Sin embargo, dentro de las propiedades que enuncia, la autora observó los siguientes: “tiene dos bases congruentes” y “tiene dos ángulos opuestos por el vértice”. Con respecto a la primera afirmación, pensamos que la estudiante no tiene claro el significado de *congruencia* y, sobre la segunda afirmación, creemos que la estudiante estableció relaciones entre los segmentos que forman las diagonales e identificó un punto en común entre ellas para afirmar que existen ángulos opuestos por el vértice. De esta manera, la autora señala que la estudiante desarrolló su aprehensión operatoria y perceptiva, y realizó la coordinación entre la aprehensión operatoria y discursiva.

### **Consideraciones finales**

En el desarrollo de las actividades propuestas en la investigación, los estudiantes han logrado realizar la conversión de un registro a otro. También realizaron tratamientos en el registro figural.

Por otro lado, el uso del *software* Geogebra permitió a Rosario y a los demás estudiantes desarrollar su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva, así como también la coordinación entre ellas. Así mismo, observamos errores frecuentes que cometen los estudiantes al considerar propiedades que no corresponden a una determinada clasificación de trapecios, lo cual significa que estos conocimientos no han sido consolidados de manera eficaz en su estructura cognitiva.

## Agradecimientos

El presente artículo ha sido posible gracias al apoyo de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas-Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Agradecemos al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC) que, mediante su beca “Presidente de la República”, permitió seguir estudios en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

A los grupos de investigación Didáctica de las Matemáticas DIMAT- IREM/PUCP y *Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática* - PEAMAT de la PUC-SP/Brasil, por permitirnos formar parte del proyecto *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT*.

## Referencias

ARTIGUE, M. et al. **Ingeniería didáctica en educación matemática**. Grupo editorial Iberoamérica, 1995.

DUVAL, R. Les Differentes Fonction nemensposables d'une démarches géométrique. **Reperes-IREM**, v. 17, p. 121-138, 1994. Recuperado de [http://www.uni-irem.fr/reperes/articles/17\\_article\\_119, pdf](http://www.uni-irem.fr/reperes/articles/17_article_119.pdf).

\_\_\_\_\_. Geometrical Pictures: Kinds of Representation and specific Processings. Recuperado de [http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-57771-0\\_10#page-1](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-57771-0_10#page-1)

\_\_\_\_\_. **Semiosis y pensamiento humano**. Trad. Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004a. (Obra original publicada en 1995).

\_\_\_\_\_. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo**. Trad. Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004b. (Obra original publicada en 1999).

\_\_\_\_\_. Registros de Representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. **Revista Electrónica de Educación Matemática. REVEMAT**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>

ESPINOZA, B. **Base media del trapecio y aprehensiones en el registro figural: una secuencia didáctica con el uso del Geogebra con estudiantes del nivel secundario**. Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2015.

SALAZAR, J. V. F. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 7, n. 1, p. 919-941, 2015. Recuperado de <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26325/18904>