

Caracterizaciones de los paralelogramos para el primer grado de secundaria según el modelo de Van Hiele

LUZ MARÍA JARA PEREDA¹

ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE²

Resumen

La investigación tiene como objetivo mostrar caracterizaciones para los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele en relación a los paralelogramos. Para ello, se realizó un trabajo experimental con estudiantes de primer año de secundaria de una institución educativa en Lima, Perú, que siguió el método de estudio de casos, Se consideraron tres momentos: la descripción de la actividad, el análisis de la misma y la interpretación de los resultados. A través del estudio de las respuestas que brindaron los estudiantes a diversas actividades sobre paralelogramos, se hicieron ajustes a la propuesta teórica inicial que caracterizaba los tres primeros niveles de comprensión.

Palabras-Clave: Niveles de Razonamiento; Paralelogramos; Modelo Van Hiele.

Abstract

The investigation aims to show characterizations for the first three levels of reasoning by Van Hiele in relation to parallelograms. For this, an experimental work was done with students of the first year of high school of an educational institution in Lima-Peru, following the case study as a method. Three moments were considered: the description of the activity, its analysis, and the interpretation of results. After studying the answers provided by the students to different activities on parallelograms, the initial theoretical proposal that characterized the first three levels of understanding was adjusted.

Keywords: Levels of Reasoning; Parallelograms; Van Hiele Model.

Introducción

En las últimas cinco décadas, diversos investigadores utilizaron teorías para tratar de describir y explicar los diferentes niveles de desarrollo cognitivo. En particular, el modelo de Van Hiele (1955) surge como una herramienta que permite identificar qué dificultades enfrentan los estudiantes cuando desarrollan actividades en el área de geometría y propone niveles para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Dicho modelo explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico a través de tres los primeros niveles. Estos son la visualización, el análisis y la deducción informal. La secuencia de los niveles se inicia desde el reconocimiento de figuras de manera global y finaliza con definiciones formales.

¹ Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – a20146956@puccp.pe

² Pontificia Universidad Católica del Perú – cgaita@puccp.edu.pe

En esa misma línea, se consideraron las investigaciones de Gutiérrez & Jaime (1991), en las que se introduce el concepto de “grados de adquisición” y se profundiza en la forma en que se produce la evolución y en la manera de ayudar a los estudiantes a mejorar su capacidad de razonamiento para alcanzar un nivel superior de pensamiento.

También se ha considerado el trabajo de Jaime, Chapa & Gutiérrez (1992), basado en la teoría de Van Hiele, en el que se señala que un estudiante inicia su razonamiento cuando construye una imagen mental, es decir, cuando desarrolla su destreza visual, sin tomar en cuenta elementos y propiedades de los objetos.

Posteriormente, Jaime (1993) y Gutiérrez et al. (1991) realizan aportes importantes al modelo, señalando que los estudiantes pueden razonar simultáneamente en dos niveles consecutivos.

Asimismo, Corberán et al. (1994) utilizó el modelo de Van Hiele en su investigación y determinó que los estudiantes no se encontraban preparados para el curso de geometría, porque sus resultados mostraron diferentes niveles de razonamiento. Esto le permitió sugerir a los docentes que desarrollen procedimientos adecuados para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, Guillén (1997) utiliza para su investigación el modelo de Van Hiele y establece una serie de descriptores que le permitieron caracterizar los tres primeros niveles de pensamiento geométrico para sólidos.

Más recientemente, en el trabajo de Morales y Maje (2011) se señala que una de las características más relevantes del proceso de comprensión en geometría es la relación que se establece entre los esquemas mentales supeditados a figuras prototípicas y su apariencia global. Estos le permiten identificar, nombrar y comparar.

1. Niveles de razonamiento de Van Hiele

Para el presente artículo, se tomó como referencia el modelo de Van Hiele (1955), en el cual se presenta una propuesta teórica para explicar la evolución en la comprensión en geometría. Así, se consideran cinco niveles de razonamiento: visualización, análisis, deducción formal, deducción informal y rigor.

A continuación, se presentan las principales características de cada uno de ellos:

a) Nivel 1 (Visualización). El estudiante identifica, nombra y compara figuras de

manera global y no reconoce sus elementos. Utiliza a su vez un vocabulario básico para describir una figura.

- b) **Nivel 2 (Análisis).** El estudiante reconoce que las figuras están compuestas por elementos y propiedades, pero tiene dificultad en establecer relación entre sus propiedades.
- c) **Nivel 3 (Clasificación).** El estudiante relaciona y clasifica figuras de manera sencilla; entiende demostraciones, pero tienen dificultad en demostrarlas por sí mismo.
- d) **Nivel 4 (Deducción formal).** El estudiante realiza demostraciones formales, entiende axiomas y teoremas. Utiliza diferentes formas de demostración.
- e) **Nivel 5 (Rigor).** El estudiante trabaja con una variedad de sistemas axiomáticos.

2. Caracterización de los niveles de razonamiento para los paralelogramos

Para nuestra investigación, se tomó como referencia la propuesta didáctica de Corberán et al. (1989) para polígonos, triángulos y cuadriláteros, bajo el enfoque de las fases de aprendizaje de Van Hiele. Además, para reconocer el nivel en que se encuentra el estudiante, se consideró una serie de descriptores que permitieron caracterizar cada uno de los niveles de Van Hiele.

Se adaptaron los tres primeros niveles de Van Hiele para el caso particular de los paralelogramos. A continuación, se presentan las caracterizaciones para los tres primeros niveles de razonamiento adaptado para los paralelogramos.

Nivel 1 Visualización

Se espera que el estudiante, en este nivel, utilice destrezas visuales que le permitan identificar los paralelogramos dentro de un grupo de figuras, aunque desconozca sus propiedades.

Las características asociadas a este nivel son:

- a) Reconoce a los romboides dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia; no reconoce sus elementos ni sus características.
- b) Reconoce a los rectángulos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia

visual; no reconoce sus elementos ni sus características.

- c) Reconoce a los rombos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual; no reconoce sus elementos ni sus características.
- d) Reconoce a los cuadrados dentro de un grupo de figuras por su apariencia visual, pero todavía no concibe al cuadrado ni como rectángulo ni como un rombo.
- e) Utiliza expresiones ambiguas o imprecisas para mencionar características de los paralelogramos.

Por ejemplo:

Cuando describe un romboide como la figura que tiene lados verticales, queriendo referirse a lados paralelos.

- f) Incluye atributos irrelevantes para describir clases de paralelogramos.

Por ejemplo:

Un cuadrado tiene dos lados horizontales.

- g) Dibuja diversas clases de paralelogramos, pero no menciona sus elementos ni sus propiedades.
- h) Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.
- i) Muestra limitaciones para describir diversas clases de paralelogramos.
- j) Realiza comparaciones basándose en su apariencia global.

Nivel 2: Análisis

En este nivel, se espera que el estudiante pueda combinar los aspectos visuales y las propiedades de las figuras y que reconozca los elementos y propiedades de los paralelogramos, aunque muestre dificultad para establecer relaciones entre los diversos tipos de paralelogramos.

Las características asociadas a este nivel son:

- a) Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.

Por ejemplo:

- Reconoce que un cuadrado es un paralelogramo que tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales.
 - Reconoce que un rectángulo es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos y diagonales.
 - Reconoce que un rombo tiene cuatro lados iguales y ángulos opuestos iguales.
 - Reconoce que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.
 - Reconoce que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
 - Reconoce que el romboide no tiene cuatro lados iguales y no tiene ángulos rectos
- b) Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos

Por ejemplo:

- No reconocerá que un cuadrado es un rectángulo o que un cuadrado es un rombo.
- c) Reconoce características generales para todos los paralelogramos
- El tener lados paralelos.
 - El tener ángulos opuestos iguales.
- d) Define un tipo de paralelogramo mencionando más condiciones de las que se requieren.

Por ejemplo:

- Define un cuadrado con más condiciones de las que necesitan como: tienen cuatro lados iguales, cuatro ángulos iguales, cuatro ángulos opuestos iguales, lados opuestos paralelos
- e) Utiliza un lenguaje adecuado para referirse a las propiedades de los paralelogramos, pero incluye expresiones informales.

Por ejemplo:

- Dice lados iguales.

- f) Tiene dificultad para seguir demostraciones.

Nivel 3: Deducción Informal

En este nivel, se espera que los estudiantes interpreten los enunciados verbales que involucran propiedades de paralelogramos y reconozcan las condiciones suficientes que los definen y siguen demostraciones deductivas. Por ejemplo, en este nivel se usaría “lados congruentes”.

La caracterización de este nivel está dada por lo siguiente:

- a) Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo y puede establecer relaciones de inclusión entre los distintos tipos de paralelogramos.

Por ejemplo:

- Reconoce que un cuadrado es un rombo o que un cuadrado es un rectángulo.

- b) Reconoce propiedades comunes y diferencias entre los distintos tipos de paralelogramos.

Por ejemplo:

- Tanto el cuadrado como el rombo tienen diagonales perpendiculares.
- Tanto el rectángulo y el romboide tienen diagonales que se intersecan en su punto medio.
- Establece relaciones de semejanzas y diferencias entre el cuadrado y rombo.
- Establece relaciones de semejanzas y diferencias entre el rectángulo y romboide.
- Establece relaciones de semejanzas y diferencias entre el rectángulo y rombo.

- c) Define un tipo de paralelogramo mencionando solo condiciones suficientes.

Por ejemplo:

- Para definir al paralelogramo, solo hace referencia a que es un cuadrilátero que posee dos pares de lados paralelos.
 - Para definir al rectángulo sólo hace referencia a que es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos.
- d) Reconoce que hay propiedades que se desprenden de las definiciones.
- Por ejemplo:
- En un rectángulo, las diagonales miden igual.
 - En un cuadrado, las diagonales son perpendiculares.
- e) Utiliza un lenguaje adecuado para referirse a las propiedades de los paralelogramos, incluyendo expresiones formales como:
- Para referirse a lados iguales, emplea expresiones como *lados congruentes* o *lados de igual medida*.
 - Para referirse a los ángulos, emplea expresiones como *ángulos congruentes* o *ángulos de igual medida*.
- f) Puede seguir demostraciones.

3. Actividades diseñadas según la base teórica

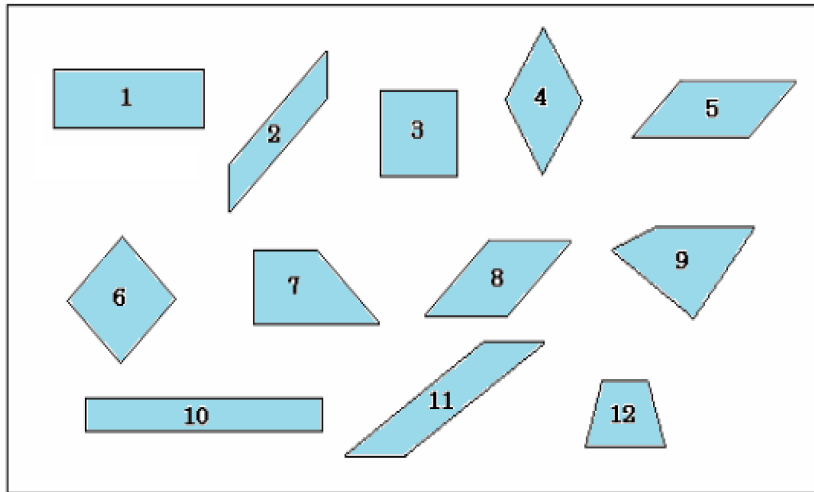
A partir de la caracterización presentada para los tres primeros niveles de Van Hiele respecto a los paralelogramos, se diseñaron actividades. Se tuvieron también en cuenta los indicadores de desempeño del mapa de progreso de geometría, que explica el desarrollo progresivo de la competencia en geometría. A continuación, se muestran dichas actividades y se realiza un breve comentario sobre los niveles de comprensión identificados en las respuestas y los conocimientos matemáticos (definiciones y propiedades) identificados en ellas.

Actividad 1

La primera pregunta propuesta buscaba que los estudiantes agruparan figuras con características comunes a sus lados opuestos paralelos y ángulos opuestos iguales; luego, que reconocieran figuras con ángulos rectos y, finalmente, figuras con dos pares de lados opuestos paralelos. Los resultados evidenciaron que el estudiante agrupó

figuras por su apariencia visual, desconociendo elementos y propiedades.

FIGURA 1 – Paralelogramos



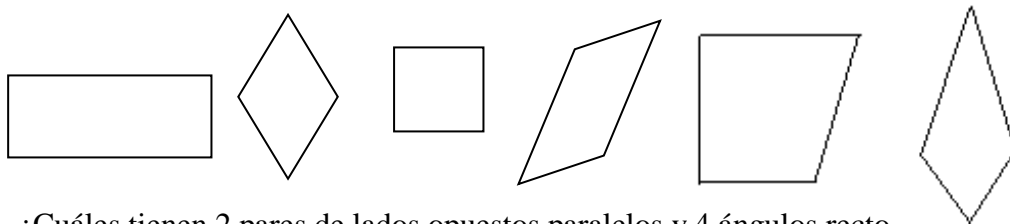
FUENTE: adaptada de Corberán (1994, p. 48).

Actividad 2

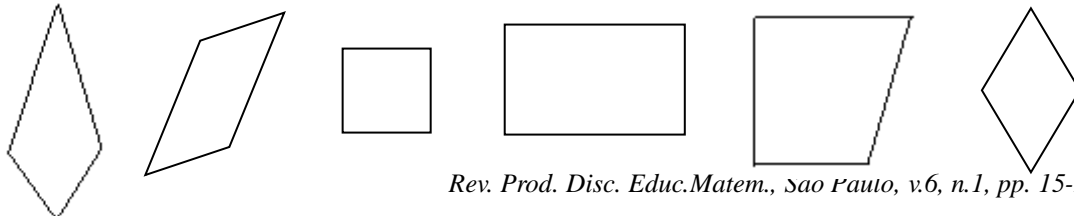
En esta actividad, los resultados mostraron que la mayor parte de los estudiantes reconoció figuras de dos pares de lados opuestos paralelos; sin embargo, no pudieron ubicar al cuadrilátero que no tenía ni ángulos ni lados congruentes.

Señala los cuadriláteros que respondan a cada pregunta (JARA, 2015, p. 103):

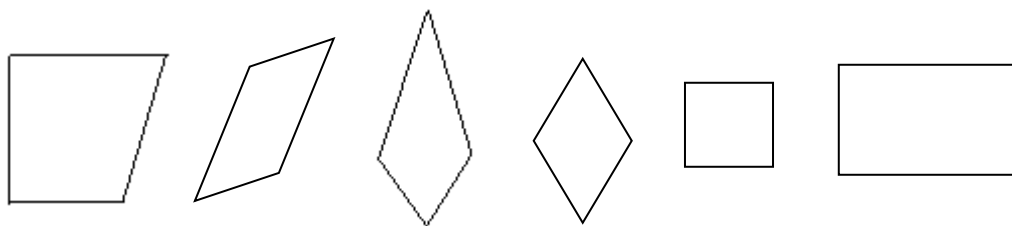
- a) ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros presentan 2 pares de lados opuestos paralelos?



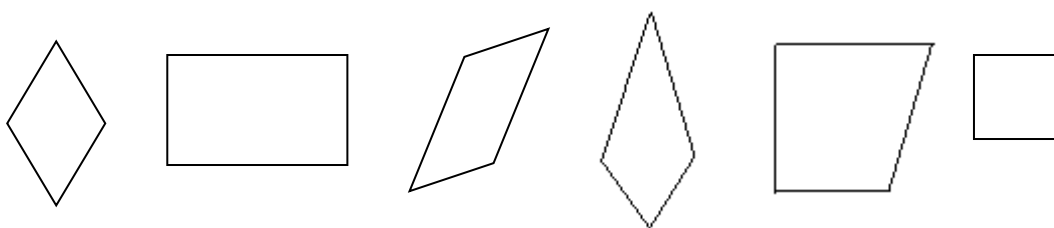
- b) ¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos recto?



c) ¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 lados congruentes?



d) ¿Cuáles son figuras con 2 pares de lados opuestos paralelos y sin ángulos congruentes y sin lados congruentes?



4. Resultados de acuerdo a las caracterizaciones

A través del trabajo realizado, se logró describir los niveles de comprensión, se analizaron las respuestas y se interpretaron a la luz de los niveles descritos teóricamente. También se identificaron las características del nivel predominante en los razonamientos.

A modo de ejemplo, en la tabla 1 se describen las respuestas de un estudiante a las actividades propuestas y se interpretan a la luz de la propuesta teórica considerada.

ESTUDIANTE 1		
ACTIVIDADES	DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA	INTERPRETACIÓN DE LAS RESPUESTAS.
<p>Actividad 1</p> <p>Se presentaron doce figuras y se pidió a los estudiantes que las reunieran de acuerdo a características comunes.</p> <p>(Ver anexo 117)</p>	<p><i>Agrupar de la siguiente manera señalando las razones para ello:</i></p> <p>El estudiante 1, señaló que las figuras: 2 y 11; 6 y 4; 5 y 8; 1 y 3, eran parecidas y que tenían lados paralelos. Hizo el mismo con las figuras: 6 y 4; 1 y 10; 5</p>	<p>El que el estudiante haya agrupado a las figuras 2 y 11 muestra que se está basando en atributos visuales, ya que ambos tienen la forma de romboides.</p> <p>Sin embargo, no incluyó en este grupo a las figuras 5 y 8 que también eran romboides. Probablemente no lo hizo porque consideró que eran diferentes, ya que las longitudes de los lados “horizontales” eran más pequeñas que la del otro par de lados. Es decir, tuvo en cuenta un atributo irrelevante al hacer la</p>

	<p>y 8, e indicó que tenían dos pares de lados paralelos. Finalmente, señaló las figuras: 1; 3 y 10, y mencionó que tenían por lo menos un ángulo recto.</p>	<p>agrupación. De otro lado, en cada agrupación que realizó, sí mencionó un atributo relevante: las figuras presentaban lados paralelos. Es decir, ha reconocido una característica común entre figuras de apariencia diferente. Su respuesta evidencia características del nivel 1, como:</p> <p>En el último ejercicio el estudiante agrupó a las figuras 1, 3 y 10 señalando un atributo que hacía referencia a sus elementos y no a su apariencia: todas ellas tenían por lo menos un ángulo recto.</p> <p>Las respuestas del estudiante, mostró tres características del nivel 1 y una característica del nivel 2 como:</p> <p><i>1.a. Reconoce a los romboides dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1.f. Incluye atributos irrelevantes para describir clases de paralelogramos</i></p> <p><i>1.k. Realiza comparaciones basándose en su apariencia global</i></p> <p><i>2. b. Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>La percepción del estudiante al inicio de la actividad fue visual, pero luego reconoce una característica importante para todos los paralelogramos. Transita por dos niveles 1 y 2, pero no mostró ninguna evidencia del nivel 3.</p>
<p>Actividad 2</p> <p>Se presentó cuatro preguntas que estaban enfocadas a reconocer paralelogramos teniendo en cuenta sus características.</p> <p>(Ver anexo 119)</p>	<p>Señala las razones de su elección para cada una de figuras.</p> <p>El estudiante 1, en la primera pregunta reconoció al rectángulo, rombo, cuadrado y romboide como figuras que tienen dos pares de lados paralelos.</p> <p>En la segunda pregunta reconoció al cuadrado y el rectángulo como figuras que tienen dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos.</p> <p>En la tercera pregunta reconoció al cuadrado y el rombo como figuras que tienen dos pares de lados paralelos y cuatro lados congruentes.</p>	<p>El estudiante consideró un atributo importante para estas figuras, que era el de tener dos pares de lados paralelos opuestos.</p> <p>Reconoció ángulos rectos en cuadrados y rectángulos; de la misma manera lo hizo para el cuadrado y el rombo al reconocer lados congruentes.</p> <p>Demostró aún mayor conocimiento al reconocer al romboide como la única figura que no tenía ni lados ni ángulos congruentes. De acuerdo a su respuesta, el estudiante mostró dos características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a. Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2c. Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>En esta actividad, la percepción ya no sólo es visual; reconoce dos características importantes que lo ubican en el nivel 2.</p>

	<p>En la cuarta pregunta reconoció al romboide como una que tiene dos pares de lados paralelos sin lados ni ángulos congruentes.</p>	
--	---	--

Tabla 1 - Interpretación de las respuestas del estudiante en las dos primeras actividades
Fuente: Jara (2015), p. 64-65.

Conclusiones

Es importante que el maestro, antes de iniciar su sesión de clase, diseñe actividades que vayan desde el reconocimiento de figuras hasta la apropiación de conceptos formales. Para tal efecto, se le sugiere utilizar el modelo teórico de Van Hiele. Este modelo le proporcionará las herramientas necesarias para contribuir a que el estudiante desarrolle su capacidad de razonamiento geométrico, tal como se ha evidenciado en este trabajo.

Agradecimientos

El presente artículo ha sido posible gracias al apoyo de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas-Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Agradecemos al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC) que, mediante su beca “Presidente de la República”, permitió seguir estudios en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Referencias

ALFONSO, M. Sobre los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele y la formación de profesores en actividad. **Revista Números**, v. 58, p. 2-35, 2004.

_____. **Los niveles de pensamiento geométrico de van Hiele**. Tesis de doctorado, Universidad de la Laguna, España, 2003. Recuperado de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/58/Articulo01.pdf>

CORBERÁN, R. et al. **Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele**. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia España, 1994. Recuperado de <http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=ACqLekjJuBIC&oi=fnd&pg>

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A.; FORTUNY, J. Un paradigma alternativo para evaluar la adquisición de los niveles de Van Hiele. **Diario de Investigación en Educación Matemática**, v. 3, p. 237-251, 1991. Recuperado de

<http://edumat.uab.cat/GutJaiFor91.pdf>

JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. **Colección Ciencias de la Educación**, v. 4, p. 295-384, 1990. Recuperado de <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>

JARA, L. **Niveles de razonamiento según el modelo de Van Hiele que alcanzan los estudiantes del primer año de secundaria al abordar actividades sobre paralelogramos**. Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2015.

LASTRA, S. **Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas**. Tesis de Maestría, Universidad de Chile, 2005. Recuperado de: www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2005/lastra

MORALES, C.; MAJÉ, R. **Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros**. Tesis de maestría, Universidad de la Amazonia, Colombia, 2011. Recuperado de http://scholar.google.es/scholar?cites=5388631841299045951&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=es