

Análisis de las tareas sobre media aritmética presentados en un texto de primer año de educación secundaria

WILLY HERNÁN SALAZAR TORRES¹

AUGUSTA OSORIO GONZÁLES²

Resumen

Este artículo tiene como objetivo presentar parte del análisis realizado en las tareas sobre media aritmética presentadas en un texto del nivel secundario. Se presenta el análisis de las tareas mediante algunas herramientas que nos ofrece el enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). La metodología desarrollada es de tipo cualitativa bibliográfica. Para el análisis, se elaboró la configuración epistémica de referencia del objeto media, así como las configuraciones de las tareas. Finalmente, se realiza un análisis comparativo de dichas configuraciones. Se identifica con el análisis la ausencia en las tareas del trabajo con propiedades y argumentos, elementos relevantes en el desarrollo del tema de media aritmética.

Palabras-Clave: Media Aritmética; Textos Matemáticos; Configuración Epistémica.

Abstract

This article aims to present part of the analysis done in arithmetic mean presented in a high school level textbook. The analysis of the tasks is presented through some tools offered by the Onto-Semiotic Approach of mathematical cognition and instruction (OSA). The methodology developed is the bibliographical qualitative type. For the analysis, the reference epistemic configuration of the object mean was elaborated, as well as the configurations of the tasks. Finally, a comparative analysis of such configurations was done. With this analysis, its absence is identified in the tasks involving properties and arguments, relevant elements in the development of the arithmetic mean topic.

Keywords: Arithmetic Mean; Mathematics Texts; Epistemic Configuration.

Introducción

En los últimos años, la estadística está adquiriendo importancia en las diferentes áreas de estudio tales como ingeniería, medicina, economía, etc., así como también en aplicaciones de la vida cotidiana. Un tema importante en estadística es el estudio de las medidas de tendencia central. Estas nos permiten encontrar un valor que representa a un conjunto de datos, entre ellas una de las más importantes es la media aritmética.

Asimismo, los textos de estudio forman parte importante en el proceso de enseñanza aprendizaje, por lo que su análisis crítico, la evaluación de su pertinencia e idoneidad, es importante. Según Font & Godino (2006), los textos asumen una parte sustancial de la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje, por lo que su análisis es importante en

¹ Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – a20147008@pucp.pe

² Pontificia Universidad Católica del Perú – arosorio@pucp.edu.pe

el estudio didáctico de los proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También, Chevallard (citado por Cobo & Batanero, 2004) sugiere que los libros de texto ofrecen una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionalizan una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes.

En este artículo, presentamos el análisis de solo dos de las tareas sobre media aritmética propuestas en un texto de primer grado del nivel secundario (alumnos entre 11 y 12 años), que es parte de la investigación de Salazar (2015).

Para el análisis, primero elaboramos la configuración epistémica de referencia del objeto media aritmética; luego, obtenemos las configuraciones de las tareas propuestas; y, finalmente, hacemos un análisis comparativo de las configuraciones. Estos pasos nos permiten observar algunas ausencias de elementos que, de existir, podrían hacer más significativa la enseñanza de la media aritmética.

1. Marco teórico

El Enfoque Ontosemiótico (EOS), según Godino (2014), surge en el seno de la didáctica de las matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y su aprendizaje. Por tal motivo, adopta una óptica global, teniendo en cuenta las distintas dimensiones involucradas y las interacciones entre las mismas.

El conjunto de nociones teóricas que, en la actualidad, componen el EOS se han clasificado en cinco niveles, los cuales, de acuerdo a Godino (2012), son los siguientes:

- Sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas.
- Configuración de objetos y procesos matemáticos
- Configuraciones y trayectorias didácticas
- Dimensión normativa
- Idoneidad didáctica

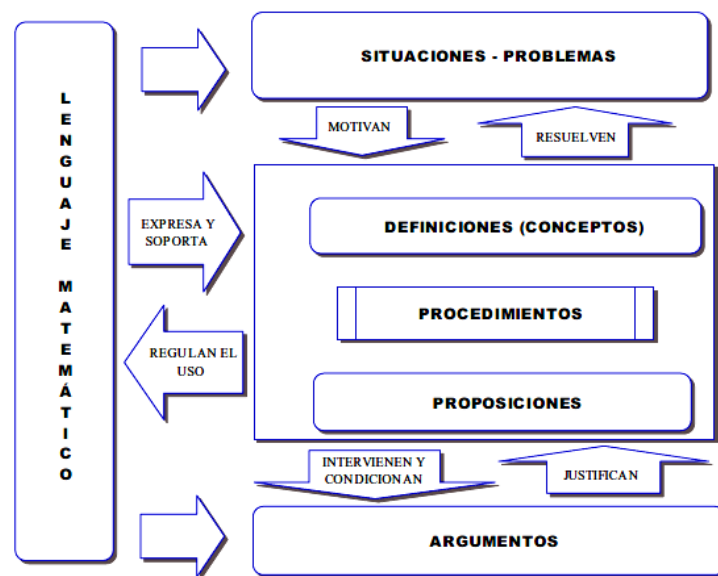
Según Godino, Batanero & Font (2009), desde el Enfoque Ontosemiótico, en el nivel de configuración de objetos y procesos matemáticos, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado de objetos formado por:

- Situaciones-problemas: aplicaciones intra o extra matemáticas, tareas, ejercicios.

- Lenguaje: términos, expresiones, notaciones, gráficos; en sus diversos registros escrito, oral, gestual.
- Conceptos – definiciones: introducidos mediante definiciones o descripciones.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,
- Proposiciones: enunciados sobre conceptos, propiedades.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivo o de otro tipo.

En la figura 1, se muestra la manera como interrelacionan los diferentes objetos descritos.

FIGURA 1 - Configuración de objetos primarios



FUENTE: Godino, Batanero & Font (2009, p.7)

A este conglomerado de objetos se le llama *configuración*. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales), según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

Nuestro análisis tiene el propósito de aplicar la configuración epistémica, ya que nos permite hacer un análisis más amplio de los objetos matemáticos, en este caso, la media aritmética.

2. Análisis del texto

El texto en el que se realizó el análisis es el del primer año de educación secundaria, distribuido por el Ministerio de Educación (2012) a todas las instituciones educativas públicas de todo el Perú. Está estructurado en ocho unidades temáticas.

La unidad ocho está dividida en dos temas: estadística y combinatoria y azar. En la parte de estadística se trata el tema del promedio aritmético.

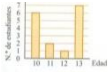
Se ha realizado una lectura minuciosa del capítulo que trata el tema, observando las definiciones, las propiedades, las representaciones y las justificaciones, tratando de determinar los elementos de significado que contiene el tema. La unidad comprendía un total de 11 problemas para el tema. A continuación, presentamos el trabajo sobre dos de ellos.

2.1. Configuración epistémica de referencia

Para determinar el significado de referencia, se revisó y analizó textos tales como Murray (1979), Córdova (2003) e investigaciones tales como Cobo y Batanero (2004) y Novaes (2011). El significado de referencia elaborado para esta investigación no coincide con ninguno de los textos antes mencionados, pero engloba a todos ellos y es un significado más acorde con lo estudiado en la educación secundaria.

La tabla 1 muestra los componentes de la configuración epistémica de referencia.

Situaciones-problema	<ul style="list-style-type: none">•Contextualizados.•Con contextos próximos a la realidad del alumno.•Con diferentes grado de complejidad.
Lenguaje	Verbal: Relacionados con el contexto de la situación problemática Términos matemáticos: Dato, muestra, medida de tendencia central, media aritmética, medida resumen, media ponderada, frecuencia, tabla de datos, suma, división, producto. Simbólico: Las notaciones simbólicas las utilizamos para referirnos a determinados conceptos de media aritmética. A continuación presentamos los más frecuentes: \bar{x} , x_i , f_i , $x_i \cdot f_i$, n , $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i$, $+$, $.$, $/$.

	<p>Gráfico:</p> 
Definiciones	<p>Dato: es la representación simbólica (numérica, alfabética, algorítmica, espacial) de un atributo o variable cuantitativa.</p> <p>Muestra: es un subconjunto representativo de la población a partir del cual se pretende realizar inferencias respecto a la población de donde procede.</p> <p>Medida de tendencia central: valores numéricos que localizan, en algún sentido, el centro de un conjunto de datos.</p> <p>Media aritmética: La media aritmética de una distribución es el valor alrededor del cual los otros valores se distribuyen (o se concentran), es decir, un valor de referencia para un conjunto de datos analizados.</p> <p>Frecuencia: cuando hablamos del número de veces que se repite un valor en una distribución de datos.</p> <p>Tabla de datos: conjunto de datos organizados en filas y columnas</p>
Procedimientos	<ul style="list-style-type: none"> • Para hallar la media aritmética de una variable discreta con datos aislados, se suma el total de los valores observados de una variable y se divide entre el número de observaciones. • Para hallar la media de una variable discreta con datos presentados en tablas de frecuencia se multiplican cada valor por su frecuencia, luego se suman los productos, el resultado se divide entre la suma total de las frecuencias • Para hallar la media ponderada se multiplica cada valor por su peso (ponderación) respectivo, luego se suman los productos y se divide entre la suma de todos los pesos. • Para hallar la media desde un gráfico de barras primero se identifica los valores y sus respectivas frecuencias luego se multiplican los valores con sus frecuencias y se divide entre la suma total de frecuencias. • Para hallar un dato desconocido de un conjunto de datos, dado su media, se resuelve la ecuación donde en uno de sus miembros aparece el dato desconocido.
Propiedades	<ul style="list-style-type: none"> • La media está localizada entre valores extremos • La suma de las desviaciones de la media es cero • La media se ve influenciada al añadir otros datos distintos de la media. • La media no es necesariamente igual un valor que se haya sumado.

	<ul style="list-style-type: none"> • La media puede ser una fracción que no sea posible en la realidad. • La media es un valor representativo de los valores que se están promediando.
Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> • Comprobación de casos particulares y contraejemplos: cuando para justificar una propiedad o la forma de hacer un cálculo, se muestra cómo se cumple dicha propiedad en un caso particular • Razonamientos verbales deductivos: este tipo de argumentos generalmente se utilizan para interpretar los resultados obtenidos en algún cálculo realizado. • Uso de gráficos como justificación: cuando la argumentación verbal o simbólica se apoya en las propiedades visuales de un gráfico auxiliar. Se aplica como validación cuando por medio del gráfico se muestra visualmente la verdad o falsedad de una propiedad o de una afirmación.

Tabla 1 - Configuración epistémica de referencia

Fuente: Adaptado de Salazar (2015, p. 57-58)

Esta configuración nos permite tener un sistema de referencia para el análisis de las tareas propuestas en el libro de texto del primer grado de educación secundaria seleccionado.

Los componentes de la configuración se muestran de manera tabular. Sin embargo, hay que tener en cuenta que dichos elementos están relacionados entre sí.

2.2. Configuración epistémica de las tareas propuestas en el texto

En este artículo, presentamos la configuración epistémica de dos tareas sobre media aritmética propuestas en Salazar (2015). Se ha considerado la contextualización y niveles de complejidad en el análisis.

Contextualizado: el problema se presenta dentro de un contexto.

No contextualizado: el problema se presenta solamente en términos matemáticos.

Nivel bajo de complejidad: si la solución del problema solamente requiere de la aplicación directa del algoritmo de la media aritmética.

Nivel medio de complejidad: si la solución del problema requiere de extraer los datos de tablas.

Nivel alto de complejidad: cuando la solución del problema requiere de aplicar el proceso inverso del algoritmo y también cuando la solución del problema requiera extraer los datos de gráficos.

SITUACIÓN PROBLEMA

Problema N° 4 propuesto (p 233)

Determinar la media en cada caso:

- Las notas de Matemática de un grupo de estudiantes son 12; 16; 18; 12; 15; 13; 16; 12; 18; 12; 16; 12; 14; 12; 11; 12.
- Las edades de un grupo de estudiantes son 11; 12; 10; 11; 12; 11; 10; 13; 11; 12; 11; 13; 12; 14; 12; 11.

Solución propuesta

a)

$$\bar{x} = \frac{12 + 16 + 18 + 12 + 15 + 13 + 16 + 12 + 18 + 12 + 16 + 12 + 14 + 12 + 11 + 12}{16}$$
$$= \frac{221}{16} = 13.81$$

Otra forma:

$$\bar{x} = \frac{11(1) + 12(7) + 13(1) + 14(1) + 15(1) + 16(3) + 18(2)}{1 + 7 + 1 + 1 + 1 + 3 + 2} = \frac{221}{16} = 13.81$$

b)

$$\bar{x} = \frac{11 + 12 + 10 + 11 + 12 + 11 + 10 + 13 + 11 + 12 + 11 + 13 + 12 + 14 + 12 + 11}{16}$$
$$= \frac{186}{16} = 11.63$$

Otra forma:

$$\bar{x} = \frac{10(2) + 11(6) + 12(5) + 13(2) + 14(1)}{2 + 6 + 5 + 2 + 1} = \frac{186}{16} = 11.63$$

Problema no contextualizado con bajo nivel de complejidad.

LENGUAJE

Verbal:

Relacionados al contexto: notas de matemática, edades de estudiantes.
Términos matemáticos: media, suma, producto, división,

Simbólico:

\bar{x} , ., +, /

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Definición de la media aritmética como algoritmo de cálculo: suma de todos los valores dividida por el número de valores.

Definición de media ponderada.
PROCEDIMIENTOS
<p>Cálculo de la media de una variable con datos aislados.</p> <p>Para hallar la media: Se suman todos los datos y se divide entre el número total de datos.</p> <p>Para hallar la media ponderada: Se multiplica cada dato por el número de veces que se repite, se suman los productos y se divide entre el número total de datos.</p>
PROPOSICIONES - PROPIEDADES
<p>En el cálculo de la media intervienen todos los datos.</p> <p>La media de un conjunto de datos es siempre un valor perteneciente al rango de la variable.</p> <p>La media es un representante de un colectivo.</p>

Tabla 2 - Configuración epistémica del problema 4 del texto MED
Fuente: Salazar (2015, p. 51-52)

La configuración presentada en la tabla 2 nos informa sobre la estructura de la tarea propuesta. Así, podemos evidenciar que es un problema descontextualizado. Para que un problema sea contextualizado, no basta con darle un nombre a la variable estadística, como se presenta en este problema, sino que también comprende el conjunto del que se recogieron los datos. Por otro lado, este problema presenta un bajo nivel de complejidad, donde se aplica directamente el algoritmo de la media aritmética.

El lenguaje empleado en el planteamiento como en el desarrollo del problema se evidencia un lenguaje variado, tanto verbal como simbólico. Asimismo, de la solución del problema emerge la definición de media aritmética como operador que asocia a un conjunto de datos un único valor.

El tema de media aritmética propuesto en el texto no presenta explícitamente las propiedades del objeto matemático, pero hay propiedades que emergen del desarrollo del problema.

El desarrollo del problema no permite argumentar, ya que en este se pide hallar la media aritmética del conjunto de datos y no se pregunta, por ejemplo, ¿cuál sería la mejor estimación de las notas del grupo de estudiantes? y ¿cuál sería la mejor estimación de las edades del grupo de estudiantes?, así el estudiante podría argumentar por qué usar la

SITUACIÓN PROBLEMA

Problema N° 11 propuesto (p 234)

Analiza el pictograma y responde

N.º de pacientes atendidos en enero en la clínica Buena Salud

Pediatría	Dra. Díaz	
Ortopedia	Dra. Tito	
General	Dr. Aguirre	
Cardiología	Dr. Lozano	

Cada \uparrow representa 10 pacientes atendidos.

- ¿Cuántos pacientes atendió cada especialista?
- ¿Cuántos pacientes más atendió la doctora Tito que el doctor Lozano en enero?

En promedio, ¿cuántos pacientes atendió un médico de la clínica Buena Salud en el mes de enero?

Si cada consulta en la clínica Buena Salud tiene un costo de S/. 80, ¿cuánto dinero recibió por atención médica durante el mes de enero?

Solución propuesta

Cada especialista atendió:

Pediatría : $8(10) = 80$ pacientes

Ortopedia: $7(10) = 70$ pacientes

General: $5(10) = 50$ pacientes

Cardiología: $3(10) = 30$ pacientes

La doctora Tito atendió: 70 pacientes

El doctor Lozano atendió: 30 pacientes

$70 - 30 = 40$ pacientes más atendió la doctora Tito.

Promedio de pacientes atendidos por un médico en la clínica Buena Salud.

$$\bar{x} = \frac{80+70+50+30}{4} = \frac{230}{4} = 57.5 \text{ pacientes.}$$

Cantidad total recibida por atención médica durante el mes de enero:

$$230(80) = \text{S/. } 18400$$

Problema contextualizado con nivel alto de complejidad.

LENGUAJE
<p>Verbal:</p> <p>Relacionados con el contexto: pacientes, clínica, pediatría, ortopedia, general, cardiología, especialista.</p> <p>Términos matemáticos: pictograma, promedio.</p> <p>Simbólico:</p> <p>\bar{x}, ., +, -, /, =</p>
DEFINICIONES Y CONCEPTOS
Promedio
PROCEDIMIENTOS
<p>Para hallar el promedio de pacientes atendidos por un médico:</p> <p>Se suman las cantidades de pacientes atendidos por cada especialista y se divide entre el número de especialistas.</p>
PROPOSICIONES - PROPIEDADES
<p>En el cálculo de la media intervienen todos los valores de los datos.</p> <p>La media puede ser una fracción que no sea posible en la realidad.</p>

Tabla 3 - Configuración epistémica del problema 11 del texto MED

Fuente: Salazar (2015, p. 57-58)

En la configuración presentada en la tabla 3, podemos evidenciar que es un problema contextualizado, con un contexto sobre médicos y pacientes, que es un tema conocido por los estudiantes. Por otro lado, este problema presenta un alto nivel de complejidad, donde se plantean varias preguntas, entre ellas, hallar el promedio de pacientes que atiende un médico en un mes. Para hallar el promedio, es necesario realizar otros cálculos previamente.

En el planteamiento como en el desarrollo del problema, se muestra un lenguaje variado tanto verbal como simbólico y gráfico.

Asimismo, de la solución del problema emerge la definición de frecuencia y de media aritmética como la suma de todos los valores dividida por el número de valores.

El tema de media aritmética propuesto en el texto no presenta explícitamente las

propiedades del objeto matemático, pero, como en el problema anterior, hay propiedades que emergen del desarrollo del problema.

El desarrollo de este problema, como en la mayoría de los problemas planteados en el texto, se pide hallar la media aritmética del conjunto de datos y no permiten que el alumno argumente el uso de propiedades y fórmulas.

Conclusiones

De los 11 problemas presentados en el texto indicado, seis no son contextualizados. Por otro lado, tres de los problemas presentados tienen bajo nivel de complejidad, donde se aplica directamente el algoritmo de la media aritmética; dos tienen un nivel medio de complejidad, pues, para su solución, se requiere extraer los datos de la variable de tablas de frecuencia; cinco problemas presentan un nivel alto de complejidad, pues en ellos se requiere extraer datos de gráficos y, en otros casos, aplicar el proceso inverso del algoritmo de cálculo de la media aritmética.

Asimismo, de la solución de todos los problemas emergen las definiciones de media aritmética o de media ponderada. Hay que tener en cuenta que, en el texto, no se presentan las propiedades de la media aritmética, pero, en algunos de los problemas, emergen propiedades. La propiedad que más emerge es esta: en el cálculo de la media, intervienen todos los valores de los datos.

Son pocos los problemas presentados en los que hay que argumentar, ya que directamente se les pide hallar la media aritmética del conjunto de datos o la media ponderada. El análisis de las tareas del texto indicado muestra ausencia de algunos elementos de la configuración epistémica, tales como propiedades y argumentos, que podrían hacer la enseñanza más significativa. También se evidencia que, en las tareas, se da mucha más importancia al cálculo de la media que al estudio de sus propiedades. Una consecuencia de esto puede ser que, aunque los estudiantes sepan realizar perfectamente los procedimientos de cálculo, pueden no llegar a alcanzar una comprensión completa de media aritmética.

Queremos resaltar que el uso de herramientas teóricas propuestas por el EOS, como la configuración epistémica, resulta útil para el análisis de textos matemáticos.

Agradecimientos

El presente artículo ha sido posible gracias al apoyo de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas-Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Agradecemos al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC) que, mediante su beca “Presidente de la República”, permitió seguir estudios en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Referencias

COBO, B.; BATANERO, C. Significado de la media en los libros de texto de secundaria. **Revista enseñanza de las ciencias**, v. 22, n. 1, p. 5-17, 2004. Recuperado de <http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/view/21957/21791>.

CÓRDOVA, M. **Estadística descriptiva e inferencial** 5ta ed. Lima: Moshera, 2003.

FONT, V.; GODINO, D. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Universidad de Granada, 2006. Recuperado de [file:///c:/users/sistemas/downloads/538-1469-1-pb%20\(2\).pdf](file:///c:/users/sistemas/downloads/538-1469-1-pb%20(2).pdf).

GODINO, D. Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. Universidad de Granada, 2012. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_eos_baeza_2012.pdf

_____. Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada, 2014. Recuperado de www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_eos_24agosto14.pdf.

GODINO, D.; BATANERO, C.; FONT, V. El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Universidad de Granada, 2009. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/poster_EOS_19diciembre08.pdf

MURRAY, R. **Teoría y problemas de estadística**. Mc Graw-Hill, 1979.

NOVAES, D. **Concepções de professores da Educação Básica sobre variabilidade estatística**. Tesis doctoral, Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2011.

PERÚ, MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática 1° de secundaria**. Lima: Norma, 2012.

SALAZAR, W. **Idoneidad de las tareas sobre media aritmética en textos de primer grado de educación secundaria**. Tesis de Maestría en enseñanza de las matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2015.