

# Comprensión de las propiedades de la función cuadrática mediada por los registros algebraico y gráfico

---

ELDEN TOCTO NÚÑEZ<sup>1</sup>

CAROLINA RITA REAÑO PAREDES<sup>2</sup>

## Resumen

*El presente artículo analiza cómo el tránsito del registro de representación semiótica algebraico al gráfico favorece la comprensión de las propiedades de función cuadrática en estudiantes de quinto grado de educación secundaria. Para el análisis, se consideraron algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y se utilizó la ingeniería didáctica como metodología. A partir de los resultados de los estudiantes, concluimos que el transitar por los registros de representación semiótica algebraico y gráfico, realizando las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, favoreció el que la mayoría de estudiantes movilizaran las propiedades de la función cuadrática.*

**Palabras-Clave:** Registros de Representación Semiótica; Tratamientos; Conversiones.

## Abstract

*The present article analyzes how the transit from the register of semiotic representation to the graphic one favors the understanding of the properties of quadratic function in students of the fifth grade of high school education. For the analysis, some aspects of the Theory of Registers of Semiotic Representation were considered, and the didactic engineering was used as methodology. From the students' results, we conclude that passing through the algebraic and graphic registers of semiotic representation, doing the cognitive activities of treatment and conversion, favored most students' mobilization of the properties of quadratic function.*

**Keywords:** Registers of Semiotic Representation; Treatments; Conversions.

## Introducción

Los aspectos tratados en este artículo forman parte de la investigación de Tocto (2015), la cual tuvo el propósito de analizar cómo el tránsito entre diferentes registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función cuadrática en estudiantes de quinto año de secundaria.

El punto de partida de este trabajo se sitúa en las dificultades que muestran los estudiantes para realizar la conversión del objeto matemático función cuadrática desde un registro de representación hacia otro. En este sentido, en este artículo se analizó cómo se da el tránsito entre el registro algebraico y el registro gráfico a partir de variaciones realizadas a un problema contextualizado de función cuadrática. Así, se aplicó una actividad a siete alumnos de la Institución Educativa “Tito Cusi Yupanqui”,

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – a20147009@pucp.pe

<sup>2</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú – creano@pucp.edu.pe

en la cual los estudiantes tuvieron la necesidad de transitar por el registro algebraico y por el registro grafico de la función cuadrática.

Por otro lado, Tocto (2015) afirma que el contenido de funciones en general está presente desde el primero al quinto grado de Educación Secundaria. En este sentido, en el Diseño Curricular Básico (Perú, 2009), se sostiene que el concepto de función es un elemento unificador, generalizador y de naturaleza modelizadora, ya que permite modelar problemas en un contexto extra matemático y, además, contribuye a que los conocimientos matemáticos se vayan construyendo a lo largo del proceso educativo.

Asimismo, investigadores como Ospina (2012), Guzmán (1998) y Rivera (2009) ratifican la importancia del uso de los registros de representación semiótica en la comprensión y el aprendizaje del objeto matemático funciones. Sostienen que los estudiantes, al transitar por los distintos registros de representación semiótica (verbal, tabular, grafico, algebraico), realizan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, lo que favorece la comprensión del concepto de funciones.

Por otro lado, los estudiantes presentan dificultades para utilizar esta noción, pues no han logrado la comprensión de este concepto como regla para calcular imágenes y/o pre imágenes, tampoco como una correspondencia entre dos variables ni como un medio para modelar situaciones.

## **1. Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica**

Este trabajo se sustenta en aspectos de la Teoría de Registros de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1999). Este investigador sostiene que las representaciones semióticas se expresan mediante un sistema de signos (iconos, símbolos, índices) engranados que se rigen por reglas explícitas o implícitas. Estas reglas se asocian y combinan. De este modo, se efectúan en su interior transformaciones de representación y de expresión.

En esta misma línea, los registros de representación semiótica son sistemas particulares de representaciones semióticas. Por ejemplo, el objeto matemático función cuadrática se puede representar en los siguientes registros: lengua natural, registro tabular, registro algebraico y registro gráfico. Además, estos registros deben permitir tres actividades cognitivas: formación de una representación, tratamiento y conversión.

Al respecto, Duval (2004, citado en Tocto, 2015) señala que:

**La formación** de una representación identificable, sea esta una frase, un dibujo, una fórmula, o un esquema implica una selección de un conjunto de caracteres (rasgos y datos) de un contenido percibido que se pueden representar en función de las posibilidades propias del registro hecho. [...] **El tratamiento**, son transformaciones que producen otra representación, en el mismo registro, respecto a una cuestión, un problema o una necesidad. El tratamiento es una transformación estrictamente interna a un registro. [...] **La conversión**, es la transformación de la representación de un objeto matemático, dado en un registro, en una representación de este mismo objeto, en otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial, es una transformación de carácter externo (pp. 28-29).

Asimismo, estas actividades cognitivas, tanto de tratamiento como de conversión, están presentes en la actividad matemática y se dan en distintas etapas del proceso de resolución de problemas. Por ejemplo, tenemos como tratamientos la realización de cálculos, resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones, la paráfrasis o las reformulaciones en lengua natural. Por otra parte, la conversión se produce al representar el enunciado de un problema a través de una ecuación, al cambiar de la representación algebraica de la función cuadrática a su representación gráfica (parábola).

Por otra parte, la TRRS se basa en la utilización de las representaciones semióticas para la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos, ya que, en matemática, podemos acceder a los objetos matemáticos a través de sus diferentes formas de representación. De hecho, la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación. En este sentido, Duval (2006) sostiene que “La comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva” (p.166).

En la misma línea, el investigador antes mencionado sostiene que no existe noesis (adquisición conceptual de un objeto) sin semiosis (representación por medio de signos), es decir, no hay aprendizaje de un concepto matemático sin pasar por el tratamiento y conversión de diferentes registros de representación. Además, propone que, en el aprendizaje, se debe considerar la relación entre noesis y semiosis, y se debe proponer a los estudiantes tareas específicas de conversión de registros.

Asimismo, el investigador afirma que, para lograr la comprensión conceptual, es esencial no confundir los objetos matemáticos con su representación, es decir, el objeto

tiene que ser reconocido en cada una de sus diversas representaciones. Por ejemplo, el objeto matemático función cuadrática tiene que ser reconocido por sus diversos registros de representación semiótica (lengua natural, tabular, algebraico y gráfico). En consecuencia, se muestra la noción de función cuadrática con sus diversas propiedades.

## **2. Metodología de la investigación**

La metodología considerada en la investigación de Tocto (2015) está basada en el enfoque cualitativo, utilizando la metodología de la ingeniería didáctica.

Según Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), la ingeniería didáctica se caracteriza por (y se ubica en) los estudios de casos, y fundamenta su validez de manera interna a través de la confrontación entre el análisis a priori (lo que se planificó) y a posteriori (lo que realmente sucedió). Esta metodología consta de cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori. En este artículo, enfatizamos en el análisis a priori y el análisis a posteriori de la producción de los estudiantes.

## **3. Desarrollo de la investigación**

En esta investigación participaron siete estudiantes de quinto grado de Educación Secundaria de la Institución Educativa “Tito Cusi Yupanqui” (15 a 17 años) de la provincia de San Ignacio, Cajamarca.

Este trabajo se desarrolló en dos días consecutivos, de acuerdo con el horario escolar de la institución educativa. Dicho trabajo consistió en una secuencia de tres actividades que les permitieron a los estudiantes movilizar los elementos y propiedades de la función cuadrática.

Las dos primeras actividades tuvieron como objetivo que los estudiantes movilizan la noción de función cuadrática y transiten por los diversos registros de representación semiótica (lengua natural, tabular, gráfica y algebraica) a partir de un problema contextualizado. En relación a este artículo, vamos a mostrar las respuestas de la tercera actividad. En esta actividad, se trabajó con el término independiente de la función cuadrática, y se propusieron preguntas para que los estudiantes establecieran relaciones entre el registro algebraico (término independiente) y el registro de representación gráfico (variables visuales) a partir de modificaciones a un problema contextualizado.

A continuación, mostramos la tercera actividad de la investigación de Tocto (2016) que

es objeto de análisis del presente artículo. En cuanto al análisis, presentamos una visión general de lo realizado por los estudiantes y, en especial, se analizaron las acciones de Roberto, un alumno participante de esta investigación.

Cabe resaltar que los estudiantes, antes de resolver esta actividad, resolvieron las dos primeras actividades, en las cuales desarrollaron un modelo matemático que les permitió realizar la conversión del registro de representación lengua natural al tabular, al algebraico y al gráfico a partir de un problema contextualizado. Para entender la tercera actividad, mostramos el problema contextualizado trabajado en las dos primeras actividades (ver figura 1).

**FIGURA 1** - Problema contextualizado de función cuadrática

**Problema contextualizado**

El señor Roberto, comerciante de la provincia de San Ignacio, transporta a la ciudad de Chiclayo 50 kilos de naranjilla para la venta a S/. 6 el kilo. En el trayecto a la ciudad Chiclayo, el camión se quedó parado en el distrito de Pucará, debido a las constantes lluvias que causaron derrumbes e interrumpieron la carretera en varios tramos. Por esta razón, se presume que tardará varios días en llegar a Chiclayo. El señor Roberto deduce que por cada día que pasa en la carretera se malogra un kilo de naranjilla, por lo que decide aumentar el precio de cada kilo en 0,20 soles por cada kilo que se malogra. ¿Cuántos días tienen que pasar para que el comerciante al vender todas las naranjillas en buen estado obtenga un máximo ingreso?

**FUENTE:** Tocto (2015, p. 54)

### **Preguntas de la tercera actividad**

- a) Ahora, retomaremos el problema y modificaremos algunos datos como la cantidad de kilos y el precio. Si el comerciante solo tiene 40 kilos de naranjilla y vende cada kilo a 4 soles, ¿cómo sería la representación algebraica de la función cuadrática  $f$ , considerando estas modificaciones?
- b) ¿Qué término ha variado en la nueva función en relación a la función encontrada en la pregunta 2a?
- c) Al variar el término independiente de la función  $f$ , ¿cómo se modificó la representación gráfica? Para esto, realiza la representación gráfica y compárala con la representación gráfica en la parte 3a.

### **Análisis a priori**

En relación al ítem (a), esperamos que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación en lengua natural al registro de representación algebraica,

considerando la modificación del enunciado, es decir, que comprendan el problema y desarrollen un modelo matemático de la situación, expresándola como  $f(x) = (40 - x)[(4 + x(0,20))]$ . Además, se espera que los estudiantes realicen el tratamiento en el registro algebraico y denoten la función como  $f(x) = -0,2x^2 + 4x + 160$ .

### Análisis a posteriori

A partir del análisis, hemos observado que cuatro de los siete estudiantes han contestado como lo habíamos previsto en el análisis a priori. En la figura 2, observamos que Roberto ha contestado en forma correcta esta pregunta, pero ha empleado un procedimiento diferente al que habíamos previsto en el análisis a priori. En este sentido, notamos que ha organizado la información en una tabla con cuatro columnas. En la primera, hace referencia al número de días que pasan; en la segunda, al número de kilos que van quedando; en la tercera, registra el precio; y, en la cuarta, escribe el ingreso del comerciante. Además, ha realizado un ejemplo considerando si pasan 0 días, el número de kilos es  $40 - 0$  y el precio que va asumiendo la naranjilla es  $[4 + (0,2)0]$ ; de este modo se obtiene como ingreso  $(40 - 0)(4 + 0,2x) = 160$ . También, ha generalizado: si pasan  $x$  días, el número de kilos es  $40 - x$ , el precio como  $4 + 0,2x$ , y el ingreso como  $(40 - 0,2x)(4 + 0,2x)$ . Del mismo modo, se observa que realizó en forma correcta el tratamiento de tipo algorítmico y ha encontrado la representación algebraica de la función cuadrática  $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x + 160$ . A partir de las respuestas de Roberto, pensamos que el registro de representación tabular es fundamental para realizar la conversión al registro de representación algebraica en este tipo de problemas.

**FIGURA 2** – Respuesta – Actividad 3 – Estudiante Roberto

a. Ahora retomaremos el problema y modificaremos algunos datos como la cantidad de kilos y el precio. Si el comerciante solo tiene 40 kilos de naranjilla y vende cada kilo a 4 soles, ¿cómo sería la representación algebraica de la función de la función  $f$ , considerando estas modificaciones?

n: de días que pasan	n: de kilos	precio	Ingreso
0	$40 - 0$	$4 + (0,2)(0)$	160
$x$	$40 - x$	$4 + 0,2x$	$(40 - x)(4 + 0,2x)$

$f(x) = (40 - x)(4 + 0,2x)$   
 $f(x) = 160 + 8x - 4x - \frac{1}{5}x^2$   
 $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x + 160$

FUENTE: Tocto (2015, p. 93)

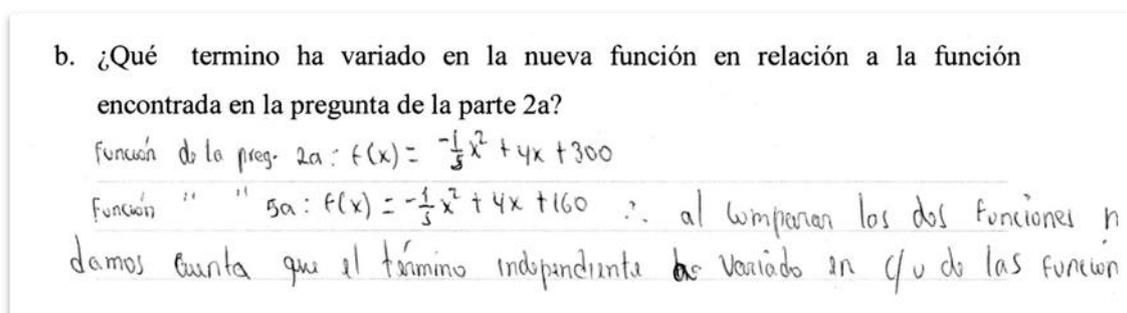
### Análisis a priori

En relación al ítem (b), esperamos que los estudiantes comparen la expresión algebraica de la función cuadrática hallada en el ítem (a) con la expresión algebraica de la función cuadrática del ítem de la pregunta de la parte 2a de la segunda actividad, y que identifiquen que la variación de algunos datos del enunciado ha producido una variación en el término independiente de 300 a 160.

### Análisis a posteriori

A partir del análisis de las respuestas de los estudiantes, en general se observa que cinco de los siete estudiantes han contestado como habíamos planificado en el análisis a priori. En la figura 3, se observa que Roberto ha identificado que el término independiente ha variado, pero le ha faltado escribir cuál ha sido la variación. Creemos que Roberto, a partir de las variaciones en el enunciado del problema contextualizado, ha establecido relaciones entre el registro de representación en lengua natural y el algebraico, es decir, al realizar las variación del número de kilos de 50 a 40 y también al variar el precio de S/. 6 a S/. 4, ha identificado que se ha producido una variación en el término independiente de la representación algebraica de la función cuadrática.

**FIGURA 3** - Respuesta – Actividad 3 – Estudiante Roberto



**FUENTE:** Tocto (2015, p. 93)

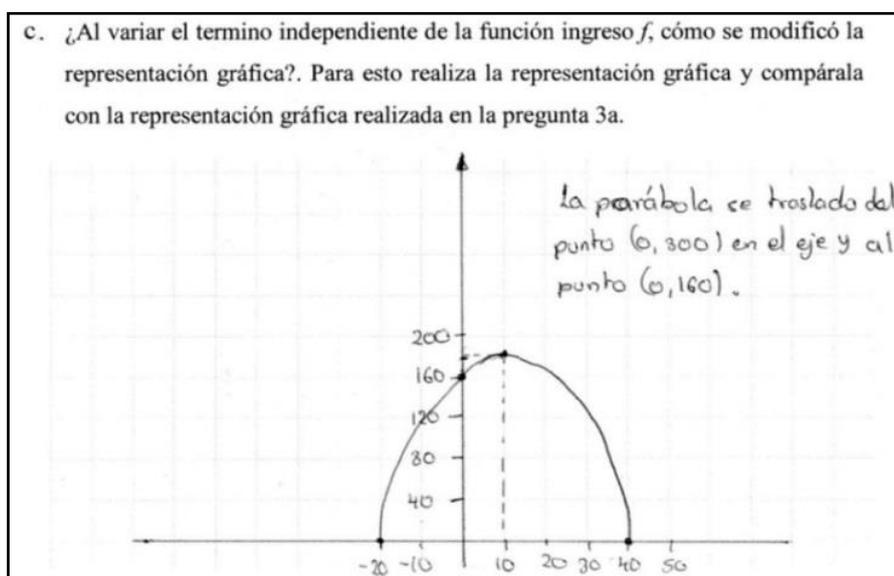
### Análisis a priori

En relación al ítem (c), esperamos que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación algebraico al gráfico y, además, que establezcan relaciones entre estos dos registros al vincular el valor del término independiente con el desplazamiento vertical de la parábola de 300 a 160 en el eje y.

### Análisis a posteriori

En relación a la pregunta del ítem (c), se constató que cuatro de los siete estudiantes contestaron como habíamos planificado en el análisis a priori. Se observa que Roberto ha realizado la conversión del registro de representación algebraica al gráfico y, además, ha identificado que, al modificar el término independiente, la parábola se ha desplazado del punto  $(0; 300)$  al punto  $(0; 160)$  en el eje  $y$  y al compararla con la respuesta obtenida en la pregunta 3a de la segunda actividad. Sin embargo, le ha faltado mencionar tanto el eje  $x$  como el eje  $y$ . Pensamos que Roberto no anota los ejes porque los asume como algo tácito. Además, se observa que le faltó prolongar la parábola para que el rango asuma valores negativos. Creemos que esto se debe a que le faltó identificar que el rango también puede tomar valores negativos.

**FIGURA 4** – Respuesta – Actividad 3 – Estudiante Roberto



**FUENTE:** Tocto (2015, p. 95)

A partir de los resultados, se constató que los estudiantes, al variar enunciados en el registro en lengua natural, llegaron a establecer relaciones entre el registro gráfico y algebraico, lo que les permitió comprender las propiedades de la noción función cuadrática.

## Conclusiones

Se observa que, en general, el trabajar con situaciones problemáticas cercanas a las actividades de los estudiantes favorece la comprensión de los objetos matemáticos a partir de sus diversas representaciones semióticas. Por otra parte, se concluye que el realizar modificaciones al problema contextualizado favoreció la comprensión de las

propiedades de la función cuadrática al relacionar el registro de representación algebraico con el gráfico.

Se puede concluir que la conversión del registro de representación tabular al registro de representación algebraico se produjo bajo la forma de una codificación en la que los estudiantes, a partir de la representación tabular, generalizaron los resultados y establecieron la regla que asocia tanto la variable dependiente como la variable independiente.

En relación a la variable didáctica término independiente, se constata que la mayoría de estudiantes logró establecer relaciones entre el registro de representación algebraico con el registro de representación gráfico. Esto se evidenció al relacionar el término independiente con los valores visuales (la gráfica se desplaza verticalmente) de la representación gráfica de la función cuadrática.

## **Agradecimientos**

El presente artículo ha sido posible gracias al apoyo de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas-Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Agradecemos al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC) que, mediante su beca “Presidente de la República”, permitió seguir estudios en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

## **Referencias**

ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GOMEZ, P. **Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica, 1995.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática, 2004.

\_\_\_\_\_. Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. **Revista la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española**, v. 9, n. 1, p. 143-168, 2006. Recuperado de [bit.ly/204USft](http://bit.ly/204USft)

\_\_\_\_\_. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo**. Cali: Editorial Merlín I.D, 1999.

GUZMÁN, I. Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. **Revista Latinoamericana de Investigación en**

**Matemática Educativa RELIME**, v.1, n. 1), p. 5-21, 1998. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf>

OSPINA, D. **Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal**. Tesis de Maestría con mención en Enseñanza de la Matemática. Universidad Autónoma de Manizales, Colombia, 2012. Recuperado de [bit.ly/1Q5oxOx](http://bit.ly/1Q5oxOx)

PERÚ, MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Diseño Curricular Nacional, 2009**. Recuperado de <http://destp.minedu.gob.pe/secundaria/nwdes/discurnal.htm>

RIVERA, J. **Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal Mixta “Pedro Nufio”**. Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras, 2009. Recuperado de <http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmc698z8>.

TOCTO, E. **Comprensión de la noción de función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria**. Tesis de Maestría con mención en Enseñanza de la Matemática, Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú, 2015.