

Génesis instrumental del circuncentro con el uso del Geogebra

MARYCRUZ SILVA PUENTE ARNAO¹

JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR²

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo analizar el proceso de génesis instrumental del circuncentro en estudiantes del tercer grado de Educación Secundaria (14 y 15 años de edad), de un colegio privado de Lima-Perú, por medio de una secuencia de actividades en la que utiliza el Geogebra. Para el desarrollo de la investigación tomamos como marco teórico al Enfoque Instrumental y como marco metodológico aspectos de la Ingeniería Didáctica. Como deseamos analizar el proceso de Génesis Instrumental del Circuncentro, presentamos en este artículo el análisis a priori y a posteriori de una de las tres actividades de la investigación en la cual analizamos las acciones de un estudiante. Observamos que en el análisis de la actividad presentada, que el estudiante movilizó sus esquemas de utilización (de uso y de acción instrumentada) al construir el circuncentro de un triángulo cualquiera y explorar su posición, relación con el diámetro de la circunferencia circunscrita.

Palabras-Clave: *Circuncentro; Instrumentación; Instrumentalización; Geogebra.*

Abstract

The present research aims to analyze the process of instrumental genesis of the Circumcenter in secondary school students (14 and 15 years old), a private school in Lima-Peru, through a sequence of activities in which uses Geogebra. For its development, we take as theoretical framework the Instrumental Approach and the methodology of Didactic Engineering. We desire to analyze the Circumcenter Genesis Instrumental process, so this article shows the a priori and a posteriori analysis of one of the three research activities in which we analyze the actions of a student. In the analysis of the activity presented, the student mobilized his schemes of use (of use and instrumented action) when constructing the circumcenter of any triangle, to explore its position and its relation with the diameter of the circumscribed circumference.

Keywords: *Circumcenter; Instrumentation; Instrumentation; Geogebra.*

Introducción

Como estamos interesados en el proceso de génesis instrumental del circuncentro con el uso del Geogebra en estudiantes peruanos del tercer grado del nivel secundario, (14 y 15 años) buscamos investigaciones de referencia del área de Educación Matemática, que nos sirvan de base para nuestro estudio, relacionadas con el uso de tecnología, con el objeto de estudio y con el referencial teórico.

En cuanto al uso de tecnología, la investigación de Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2005) señala que el uso de tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se configuran en un objeto actual de investigación. En ese mismo sentido,

¹Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – a20123563@pucp.pe

² Pontificia Universidad Católica del Perú – jvflores@pucp.pe

Trouche (2002) afirma que:

La aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico acerca de transformar los artefactos en verdaderos instrumentos de actividad matemática y no como “recursos que resuelven y solucionan” problemas en el aprendizaje (p. 1).

En la misma línea de pensamiento, Barrera, Barahona y Vaca (2015) mencionan que,

Las tecnologías son herramientas que permiten a los maestros revolucionar los modelos pedagógicos e incursionar en nuevos paradigmas que generen la anhelada formación de calidad. Este paradigma cambia el rol del profesor, motiva el uso eficiente de las tecnologías (p. 3).

Los investigadores afirman que el Geogebra facilita a los estudiantes hacer conjeturas sobre las propiedades y características de los objetos matemáticos representados.

Por otro lado, en cuanto a contenidos relacionados con el objeto que nos interesa investigar, el trabajo de León (2012) presenta un estudio con un grupo de estudiantes peruanos de 2^{do} grado de educación secundaria (edades entre 11 y 12 años) para el que utiliza un cuestionario sobre el tema de triángulos y en base a éste analiza las respuestas de los estudiantes. Una de las preguntas hacía referencia a la existencia de un triángulo, la cual fue respondida de manera diferente de lo que había supuesto el investigador. Basado en el diagnóstico de la encuesta el autor se propuso desarrollar una sesión con el uso del Geogebra para que los estudiantes, en grupos, conjeturen la propiedad de la existencia de triángulos.

El autor señala que en la actividad, se obtuvieron respuestas grupales de los estudiantes, las cuales eran presentadas en hojas de acuerdo a lo que habían realizado usando el Geogebra. Además, que las respuestas, en su mayoría, fueron las esperadas a priori. También señala que se promovió la comprensión de la propiedad de existencia de triángulos al hacer que los estudiantes interactúen con el Geogebra.

También consideramos relevante la investigación de Gamboa, Fernández, Borrego y Carmenate (2005) que presenta una secuencia de actividades referida a las líneas y puntos notables de triángulos. A partir de un triángulo dibujado en la pizarra, los autores indican que se traza y se ubica cada una de las líneas y puntos notables de un triángulo. Los investigadores afirman que el uso de tecnología digital, como son los softwares de representaciones dinámicas, permite que los trazos de las construcciones sean más exactos con respecto a los trazos obtenidos por medio del lápiz y papel.

Otra investigación que guarda relación con las anteriores es la de Cotic (2014), que sugiere que el uso de software de representaciones dinámicas permite a los estudiantes conjeturar propiedades, así como encontrar relaciones entre elementos de las figuras representadas.

También, la investigación de Gómez (2014) muestra la relación que existe entre la mediatriz como objeto de estudio y el Geogebra, que nos interesa utilizar en la investigación. En este trabajo, la autora presenta una actividad en la que un grupo de estudiantes peruanos de 2^{do} grado de educación secundaria (edades entre 11 y 12 años) realizan un viaje a la ciudad del Cusco-Perú, en donde a partir de un problema deducen la condición geométrica de la mediatriz, la cual consiste en ubicar un hotel que se encuentre a la misma distancia de tres lugares turísticos en la ciudad del Cusco. Para ello, utilizan herramientas del Geogebra, como: compas, recta, mediatriz, etc.) y la aplicación de *google maps*. Además de utilizar las herramientas tecnológicas antes mencionadas, para ubicar los tres lugares turísticos del Cusco, los estudiantes movilizaron nociones de mediatriz, intersección de rectas y circuncentro.

Asimismo, como estamos interesados en investigar el proceso de génesis instrumental del circuncentro encontramos investigaciones relacionadas con el Enfoque Instrumental como la de García-Cuéllar (2014), que tiene como objetivo propiciar la instrumentación de la noción simetría axial mediado por el Geogebra en estudiantes de primer grado de educación secundaria; la de Chumpitaz (2013) que analiza, por medio del Enfoque Instrumental de Rabardel, las acciones de los estudiantes de los cursos de Análisis Matemático I en una secuencia de aprendizaje de la función definida por tramos mediada por el Geogebra y; la de León (2014) en la que también se utilizó el Enfoque Instrumental y que de acuerdo con el autor le permitió la elaboración de construcciones geométricas, la interacción, exploración y manipulación de las actividades propuestas.

En las investigaciones que hemos buscado en repositorios de tesis y bases de datos hemos encontrado investigaciones que no profundizan el estudio hacia el cuál queremos apuntar. En ese sentido, pensamos que la noción de circuncentro necesita ser investigada debido a que no hemos encontrado, por lo menos en el Perú, investigaciones que estudien este objeto, también porque es un contenido de la Educación Básica Regular del Perú, como lo muestran los documentos oficiales del Ministerio de Educación del Perú.

Por todo eso, nuestra investigación tiene por objetivo analizar el proceso de génesis instrumental del circuncentro en estudiantes del tercer grado de Educación Secundaria (14 y 15 años de edad) por medio de una secuencia de actividades en la que utiliza el Geogebra.

A continuación, presentamos aspectos teóricos y metodológicos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995) que permiten el desarrollo y análisis de nuestro trabajo.

1. Aspectos del Enfoque Instrumental y de la Ingeniería Didáctica en nuestro estudio

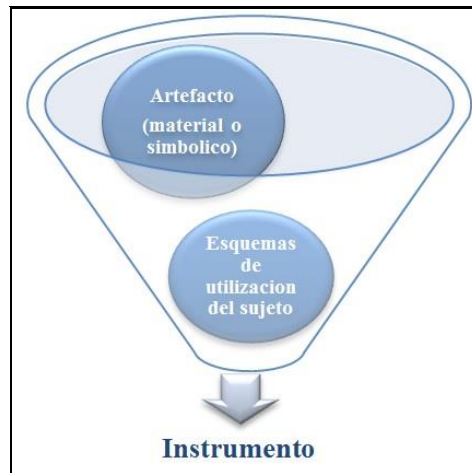
El Enfoque Instrumental aborda la dimensión tecnológica de la educación matemáticas de una manera nueva y la problematiza, articulando los aspectos importantes de la integración tecnológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los desarrollos más recientes de este enfoque se interesan a nuevos objetos tecnológicos.

Rabardel (1995) plantea un enfoque teórico que pretende dar cuenta de la naturaleza compleja de la construcción de un instrumento y el proceso de génesis del mismo por el sujeto. Plantea que los instrumentos por ser desarrollos de la historia social y cultural, presentan una fuerte influencia en el sujeto, por tanto, constituyen estructuras cognitivas que median la construcción del conocimiento. Es decir, que el proceso de Génesis Instrumental (proceso de estudio central de este enfoque) estudia la transformación de artefacto en instrumento.

Como observamos en la figura 1, el autor señala que el instrumento es una entidad mixta, que incluye una componente artefactual (un artefacto, una fracción de artefacto o un conjunto de artefactos) y una componente cognitiva (el o los esquemas de utilización del sujeto).

En este enfoque, la noción de instrumento involucra tanto al artefacto como a los esquemas mentales desarrollados por el sujeto cuando realiza una(s) de tarea(s) específicas.

FIGURA 1 - Componentes de un instrumento



Rabardel (1995) estipula que el instrumento no existe en sí, sino es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, como medio para la misma. En nuestro caso, el artefacto simbólico es el circuncentro de un triángulo. El autor señala que el artefacto pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes.

En cuanto a los esquemas de utilización que el sujeto moviliza o desarrolla, el investigador considera dos dimensiones, los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada. Los esquemas de uso son los relativos a las tareas segundas, a operaciones, es decir a la manipulación técnica del artefacto. Son relativas a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto. Mientras que los esquemas de acción instrumentada están referidos a las actividades primeras, aquellas que se orientan al objeto de la actividad para las que el artefacto sea un medio de realización. Son los relativos a la utilización de un artefacto en vista de realizar una acción.

En cuanto al proceso de Génesis Instrumental, éste se genera en dos dimensiones: instrumentación e instrumentalización. El autor indica que,

Los procesos de instrumentalización están dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc. [...] los procesos de Instrumentación están relacionados con el sujeto: con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos

nuevos a los esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 1995, p. 215).

En el sentido, Rabardel (1995), entendemos que la instrumentalización se refiere a la aparición y a la evolución de los componentes artefacto del instrumento, mientras que la instrumentación se refiere a la adaptación del sujeto a las dificultades que constituyen el artefacto y sus funciones constitutivas. Es relativa a la aparición y a la evolución de los esquemas de utilización.

En lo referente a la caracterización de los procesos de instrumentalización, el investigador señala que puede definirse como un proceso de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Este proceso se basa en las características y propiedades intrínsecas del artefacto. Dichas propiedades constituyen para el sujeto una propiedad permanente del artefacto. Mientras que la función adquirida es una propiedad extrínseca, la cual es atribuida por el sujeto para que el artefacto pueda ser constitutivo de un instrumento. El autor distingue dos niveles de instrumentalización por atribución de función a un artefacto,

En un primer nivel, la instrumentalización es local, relacionada con una acción singular y con circunstancias de su desarrollo. El artefacto es instrumentalizado momentáneamente [...] en un segundo nivel, la función adquirida se conserva de manera durable como propiedad del artefacto en relación con una clase de acciones, de objetos de la actividad y de situaciones. La instrumentalización es durable o permanente (Rabardel, 1995, p. 217).

En cuanto a la metodología, utilizaremos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico, la autora asegura que,

[...] para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico [...] Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (Artigue 1995, p. 33).

Al igual que un ingeniero, Artigue (1995) afirma que el profesor concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un contenido matemático determinado por un grupo específico de estudiantes.

2. Experimento y análisis

En la investigación desarrollamos la parte experimental en la sala de informática de una Institución Educativa particular de Lima-Perú. Cabe resaltar que la parte experimental no se dio dentro del horario escolar, para ello se realizó un taller extra-clase en donde voluntariamente se inscribieron cinco estudiantes de 14 y 15 años de edad del tercero de secundaria. La tabla 1 hace referencia a las tres actividades propuestas en la investigación.

Encuentros	I	II
Actividades	<i>Actividad 0</i>	<u><i>Actividad 1</i></u> <i>Actividad 2</i>
Contenido de cada actividad	<i>Introducción al Geogebra</i>	<i>Intersección de las mediatrices (circuncentro)</i> <i>Problema</i>

Tabla1. Descripción de las actividades

Breve comentario de las actividades:

En el primer encuentro se desarrolla la actividad 0 que permite a los estudiantes explorar algunas herramientas del Geogebra y construir la mediatriz de un segmento, esta actividad se realiza con el objetivo de movilizar nociones que serán utilizadas en las otras actividades.

En el segundo encuentro, se realiza la actividad 1 que tiene como finalidad que los estudiantes movilen y/o creen esquemas de utilización (de uso y de acción instrumentada) al construir el circuncentro de un triángulo cualquiera y explorar su posición, relación con el diámetro de la circunferencia circunscrita, etc.

La actividad 2 que es una actividad en la que plantea un problema con el fin de que los estudiantes movilen la noción de circuncentro de un triángulo y puedan vincularlo con situaciones de la vida cotidiana.

Para el artículo presentamos la actividad 1 y analizaremos las acciones un estudiante al que llamaremos Diego para guardar su identidad.

La actividad:

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes movilicen y/o creen esquemas de utilización (esquemas de uso/ esquemas de acción instrumentada) al intersectar las mediatrices de un triángulo cualquiera y ubicar su punto de intersección. A continuación, presentamos la ficha de trabajo correspondiente a la actividad 1.

FIGURA 2 – Ficha de la actividad 1.

Actividad 1: Intersección de las mediatrices	
NOTA: Use cualquier herramienta del Geogebra para realizar las construcciones. Luego de realizar cada construcción, grabe su archivo en el escritorio en la carpeta Geogebra.	
1)	Con la herramienta “circunferencia dados tres de sus puntos”, construya una circunferencia por tres puntos ABC. En seguida, construya el triángulo inscrito ABC. Explique su procedimiento de construcción:

2)	Trace las mediatrices del triángulo ABC. Explique su procedimiento de construcción:

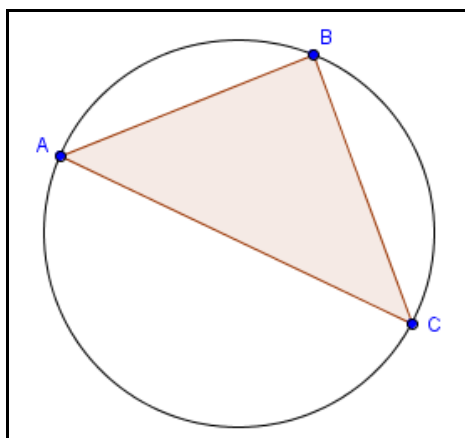
3)	Marque el punto D que es el punto de intersección de las tres mediatrices. Ahora arrastre cualquiera de los vértices del triángulo ABC. ¿Dónde se ubica el punto D? Explique.

4)	¿Cuál es la relación entre los segmentos AD, BD y CD, con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC?

A priori (ítem 1):

Creemos que los estudiantes con la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos, construirán una circunferencia por tres puntos y en seguida, con la herramienta polígono construirán un triángulo ABC, tal como lo muestra la figura 3.

FIGURA 3 – Circunferencia por tres puntos



Pensamos que señalarán que utilizaron dichas herramientas del Geogebra para realizar sus construcciones. Esperamos, a priori, que movilicen sus esquemas de uso: circunferencia, triángulo, puntos.

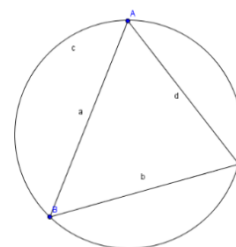
A posteriori (ítem 1):

El estudiante Diego utilizó la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos. Luego construyó un triángulo ABC a partir de 3 segmentos (ver figura 4). Movilizó esquemas de uso: circunferencia, segmentos, triángulo, puntos.

FIGURA 4 – Respuesta de Diego en la actividad 1. Ítem 1.

- 1) Con la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos, construya una circunferencia por tres puntos. En seguida, construya el triángulo ABC. Explique su procedimiento de construcción:

Selecciono la herramienta: Circunferencia con 3 puntos, luego trazo los segmentos uniendo así los puntos.

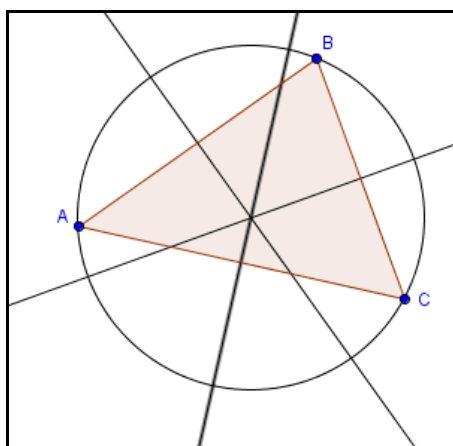


Movilizó de modo parcial los esquemas previstos en el análisis a priori, ya que también consideró el esquema de uso de segmentos.

A priori (ítem 2):

Suponemos que los estudiantes utilizarán la herramienta mediatriz para trazar las tres mediatrices del triángulo (ver figura 5), señalando en su ficha de trabajo que utilizaron dicha herramienta.

FIGURA 5 – Mediatrices del triángulo ABC

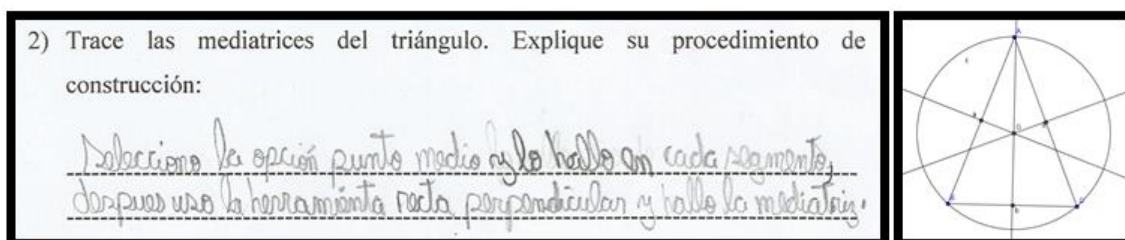


Esperamos, a priori, que movilicen sus esquemas de uso: mediatriz de un segmento, triángulo.

A posteriori (ítem 2):

El estudiante utilizó las herramientas: punto medio y recta perpendicular para construir las mediatrices del triángulo (ver figura 6).

FIGURA 6 – Respuesta de Diego en la actividad 1. Ítem 2

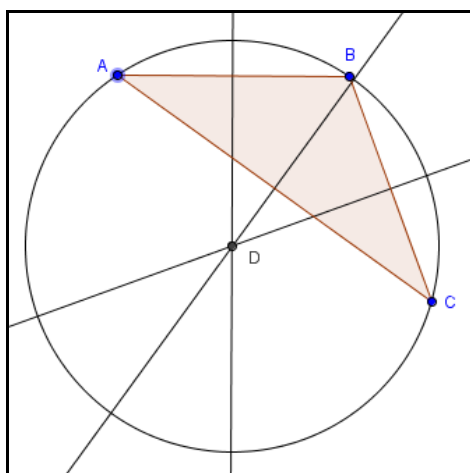


Sus acciones nos muestran que movilizó esquemas de utilización pre-existentes diferentes de los que habíamos previsto a priori.

A priori (ítem 3):

Pensamos que los estudiantes utilizarán la herramienta intersección de dos objetos para ubicar el punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo y arrastrarán el vértice A del triángulo ABC como mostramos en la figura 7. Además, creemos que mencionarán que el punto de intersección de las mediatrices puede estar dentro, fuera o en el mismo triángulo.

FIGURA 7 – Punto de intersección de las mediatrices

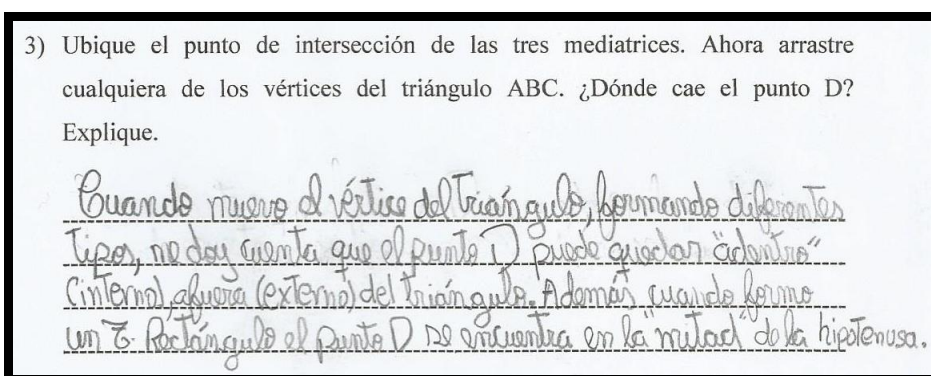


Creemos, a priori, que movilicen sus esquemas de uso: punto de intersección, mediatrices, vértices, triángulo, puntos.

A posteriori (ítem 3):

Tal como lo previsto a priori, Diego ubicó el punto de intersección de las mediatrices y utilizó la función arrastre, para “mover” el vértice A del triángulo ABC. Luego, responde tal y como se muestra en la figura 8.

FIGURA 8 – Respuesta de Diego en la actividad 1. Ítem 3

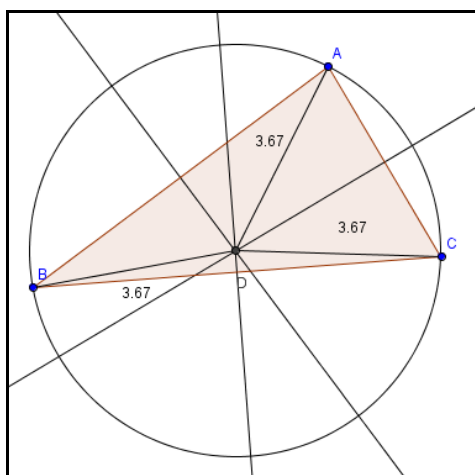


Observamos en las acciones de Diego que movilizó sus esquemas de uso como: tipos de triángulos, punto de intersección, triángulo rectángulo. Además, pensamos que desarrolló un posible esquema de acción instrumentada, como lo habíamos previsto a priori, ya que percibió que como el arrastre le permite generar diferentes tipos de triángulos, el punto D (intersección de las tres mediatrices-*circuncentro*) puede estar en diferentes posiciones: dentro, fuera o en la hipotenusa del triángulo ABC.

A priori (ítem 4):

Posiblemente los estudiantes utilizaran la herramienta segmento entre dos puntos para crear los segmentos AD, BD y CD y los medirán utilizando la herramienta distancia. Pensamos que los estudiantes concluirán que los segmentos AD, BD y CD tienen la misma medida y corresponden al radio de la circunferencia con centro en el punto de intersección de las tres mediatrices, dándose cuenta que dicha circunferencia pasa por los tres vértices del triángulo y el punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo siempre coincide con el centro de la circunferencia circunscrita a éste (ver figura 9).

FIGURA 9 – Circunferencia circunscrita al triángulo



A priori, un posible esquema de acción instrumentada podría ser la ubicación del punto de intersección de las tres mediatrices (circuncentro). También esperamos que movilicen sus esquemas de uso: segmentos, circunferencia, distancia, radio, punto de intersección, mediatrices, vértices, centro de la circunferencia.

A posteriori (ítem 4):

En el ítem 4, Diego trazó y midió los segmentos AD, BD y CD. Además señaló que dichos segmentos son los radios de la circunferencia (Figura 10), tal como se había previsto en el análisis a priori. Las acciones de Diego muestran que movilizó sus esquemas de uso, al igual que en ítem anterior y además otro esquema: comparación de medidas.

FIGURA 10 – Respuesta de Diego en la actividad 1. Ítem 4.

<p>4) ¿Cuál es la relación entre los segmentos AD, BD y CD, con la circunferencia?</p> <p>La relación sería que los 3 son radios de la circunferencia, ya que nacen desde el punto central y acaban en un punto de la circunferencia.</p>	
---	--

También pensamos que Diego desarrolló un esquema de acción instrumentada, que no habíamos previsto a priori, ya que al construir los segmentos AD, BD y CD y utilizar la función “arrastre” percibió que cualquiera sea el tipo de triángulo que se genere con esta acción, el centro de la circunferencia es siempre el punto de intersección de las tres mediatrices (circuncentro) del triángulo ABC.

3. Interacciones docente-investigador/estudiantes

Luego de la actividad 1 aclaramos las dudas de los estudiantes. A través del arrastre de un vértice del triángulo ABC, fuimos mostrando a los estudiantes donde puede caer el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo. Luego, al medir los segmentos que unen el punto de intersección de las mediatrices y los vértices de un triángulo, los estudiantes notaron que éstos tienen las mismas medidas y que forman el radio de la circunferencia. A partir de ello, aclaramos las dudas que habían presentado los estudiantes en la actividad 1. Además, hicimos una formalización del saber matemático que está en juego. Es decir, hicimos una formalización del circuncentro a partir de las conclusiones de los estudiantes al desarrollar la actividad 1.

4. Algunas consideraciones

Como la investigación está en proceso de desarrollo lo que hemos presentado es una primera reflexión sobre cómo se realiza el proceso de Génesis Instrumental del Circuncentro, específicamente en un estudiante de tercero de secundaria (14 años) al que llamamos Diego.

Esta primera aproximación realizada en el análisis de las acciones de Diego, nos hacen percibir que debemos aun profundizar más en los aspectos teóricos que fundamenta nuestro estudio. No obstante, en el breve análisis de las acciones del estudiante Diego notamos que el objetivo de la actividad: *Se quiere que los estudiantes movilicen y/o creen esquemas de utilización (de uso y de acción instrumentada) al construir el circuncentro de un triángulo cualquiera y explorar su posición, relación con el diámetro de la circunferencia circunscrita*, fue alcanzado.

Sin embargo, también notamos no en todos los ítems el estudiante procedió como lo habíamos previsto a priori. Porque sus acciones mostraron que desarrolló otros esquemas (uso/acción instrumentada) que no habíamos previsto.

Finalmente, podemos afirmar que el proceso de génesis instrumental de circuncentro se está realizando.

Agradecimientos

Agradezco al Programa de Apoyo a la Investigación para Estudiantes de Posgrado (PAIP), al Vicerrectorado de Investigación por el apoyo económico en mi proceso de formación para la investigación como estudiante de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP y por estimular la elaboración de mi tesis.

A la Maestría Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (línea de investigación: Tecnologías y Visualización en Educación Matemática) por haber contribuido en mi formación académica y contar con un excelente equipo de profesores del más alto nivel.

Referencias

ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L.& GOMEZ, P. **Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica, 1995.

BARRERA, O., BARAHONA, F. Y VACA, B. Geogebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. En: **Congreso Internacional de Educación y Tecnología desde una visión transformadora**. pp.1-11, 2015.

CHUMPITAZ, L. **La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería**. Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2013. Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4514>

COTIC, N. Geogebra como puente para aprender matemática. In: **Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación**. p.1-9, 2014.

GAMBOA, M; FERNÁNDEZ, H; BORREGO, A; CARMENATE, O. Pizarra, papel y computadora. In: **V Congreso Internacional Virtual de Educación**. p. 1-21, 2005.

GARCÍA, D. **Simetría axial mediado por el Geogebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación Secundaria**. Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2014. Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5651>

GÓMEZ, C. Buscando el hotel más cercano. In: **Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas**. p. 580-588, 2014.

LAGRANGE, J; ARTIGUE, M; LABORDE, C; TROUCHE, L. Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. In: **Memorias Primer Seminario Internacional de Tecnologías en Educación Matemática**. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, 2005.

LEÓN, M. Comprendiendo la existencia de un triángulo usando Geogebra como recurso didáctico. In: **Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas**, p. 249-257,

2012.

LEÓN, J. Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en estudiantes de arquitectura y administración de proyectos. Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2014. Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5652>

RABARDEL, P. Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains. Université Paris. Armand Colin, 1995. Recuperado de <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/>

TROUCHE, L. Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, 2002.