

Noções de pensamento matemático avançado utilizados em pesquisas na área de educação matemática¹

PAULO FERREIRA DO CARMO ²

SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI ³

Resumo

Após um certo período de publicações sobre um determinado tema, pesquisadores sentem a necessidade de analisá-las para verificar tendências dessas publicações. O objetivo deste artigo é apresentar uma análise preliminar de algumas pesquisas que utilizaram noções de pensamento matemático avançado, de acordo com as ideias de David Tall e Tommy Dreyfus, em seus referenciais teóricos. Para isso são utilizadas quatro dissertações e uma tese destacando-se aspectos considerados importantes dessas pesquisas. Esta investigação é parte de uma pesquisa de doutorado, que visa analisar as diversas concepções do pensamento matemático avançado em algumas publicações. A metodologia utilizada em nossa análise segue as orientações da Análise de Conteúdo desenvolvida Laurence Bardin. Constatou-se, nas análises preliminares, que as pesquisas se concentraram no Ensino Superior e que a maioria foi de caráter documental mostrando a potencialidade desta teoria cognitivista para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Palavras-Chave: Educação Matemática; Teoria Cognitivista; Pensamento Matemático Avançado; Três Mundos da Matemática.

Abstract

After a certain period of publications on a topic, researchers feel the necessity of to analyzing them to check trends in those publications. The purpose of this article is to present a preliminary analysis of some researches that used notions of Advanced Mathematical Thinking according to the ideas of David Tall and Tommy Dreyfus in their theoretical references. For this, four master's thesis and one doctoral dissertation are used to highlight important aspects of these researches. This article is part of a doctoral research, which aims to analyze the various conceptions of Advanced Mathematical Thinking in some publications. The methodology used in our analysis follows the guidelines of Content Analysis developed by Laurence Bardin. It was found in the preliminary analyzes that the research was concentrated in Higher Education and that most of these researches were documentary in nature, showing the potentiality of this cognitive theory for the teaching and learning of Mathematics.

Keywords: Mathematics Education; Cognitive Theory; Advanced Mathematical Thinking; Three Worlds of Mathematics.

Introdução

A sociedade contemporânea exige dos indivíduos escolhas e tomada de decisões em diversas situações. A Matemática exerce uma função importante para essas tomadas de decisões, mais do que simples técnica de efetuar operações e medidas. É necessário

¹ Trabalho apresentado no V Encontro de Produção Discente dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e Afins, realizado em 26 de novembro de 2016, *campus* Marquês de Paranaguá, PUCSP.

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – paulo2012carmo@gmail.com.

³ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – sigliori@pucsp.br.

organizar o pensamento, estruturar dados e informações, fazer previsões para decidir, avaliar riscos quantitativamente, relacionar os conhecimentos e aplicá-los em novas situações.

O conhecimento matemático pode ser entendido como uma forma de pensamento a ser desenvolvido nos indivíduos. Constitui-se em um sistema de expressão pelo qual podemos organizar, interpretar e dar significado a certos aspectos da realidade que nos rodeia.

É nas escolas que o pensamento matemático é formalizado: classificação, contagem, ordenação, operações aritméticas, operações algébricas, operações geométricas etc. são processos que fazem parte do pensamento matemático. O pensamento matemático pode ser classificado em elementar e avançado, de acordo com Dreyfus e Tall: o pensamento matemático elementar tem a característica de manipular e operar os objetos matemáticos, já o pensamento matemático avançado parte da definição dos objetos matemáticos para defini-los por meio de conceitos matemáticos.

De acordo com as pesquisas, que foram utilizadas neste artigo, a transição entre pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado têm ocasionado dificuldades de aprendizagem para muitos estudantes de Educação Básica e Ensino Superior.

As pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior têm crescido significativamente nas últimas três décadas, e muitas dessas utilizaram o pensamento matemático avançado em seus referenciais teóricos, mas não há um consenso sobre essa forma de pensamento – há uma diversidade de concepções sobre pensamento matemático avançado nessas pesquisas (IGLIORI, 2012).

Neste artigo investigaremos algumas noções de pensamento matemático avançado utilizadas em quatro dissertações e uma tese e também analisaremos os principais aspectos dessas pesquisas.

1. O Pensamento Matemático Avançado

Para Dreyfus (2002), a forma sob a qual pode ser concebida a compreensão na mente do estudante, é estruturada em uma sequência de atividades, na qual acontece a interação entre os processos mentais e seus componentes (representação, visualização, generalização, classificação, indução, análise, sintetização, abstração e formalização) de

maneira intrincada, para que se estabeleça a compreensão na aprendizagem. De acordo com o pesquisador, a interação entre esses diferentes componentes é denominada pensamento matemático avançado e sinalizam a forma como ocorre esse processo de compreensão na mente do estudante.

Para esse pesquisador é possível pensar sobre tópicos de matemática avançada de uma forma elementar e a distinção entre as duas formas de pensamento reside na complexidade e na forma como se lida com essa complexidade. Para Dreyfus (2002) há pouca distinção entre pensamento matemático elementar e pensamento matemático avançado – a matemática avançada foca nas abstrações de definição e deduções.

De acordo com Dreyfus (2002), dentre os processos envolvidos no desenvolvimento do pensamento matemático avançado, o mais importante é a abstração, “pois se um estudante desenvolve a habilidade de, conscientemente, fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado do pensamento matemático”. O pesquisador diz que a abstração e a representação são processos complementares que possuem direções opostas. Dreyfus (2002) afirma que, um conceito muitas vezes é abstraído de suas várias representações por outro conceito e essas representações advêm de um conceito abstrato.

Já para Tall (2002), o pensamento matemático avançado envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma grande variedade de atividades matemáticas para o desenvolvimento de novas ideias que fundamentam e ampliam o crescente sistema de teoremas demonstrados. O desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o avançado em um indivíduo parte das “percepções de” e “ações sobre” objetos em um mundo exterior, construído por meio de dois desenvolvimentos paralelos: um do visual-espacial para o formal-dedutivo; e outro de sucessivas encapsulações do processo para o conceito usando a manipulação simbólica. Esses dois desenvolvimentos inspiram o pensamento criativo baseado em objetos formalmente definidos e em provas sistemáticas. O pesquisador diz que muitas das atividades que ocorrem no pensamento matemático avançado também ocorrem no pensamento matemático elementar, mas a possibilidade de definição formal e de dedução é um fator que os diferenciam.

A passagem do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado envolve a transição: do descrever para o definir, do convencer para o provar de uma maneira lógica com base nas definições. [...] é a transição da coerência da matemática elementar

para a consequência da matemática avançada, com base em entidades abstratas que o indivíduo precisa construir através de deduções das definições formais (TALL, 2002, p. 20).

Para esse pesquisador o pensamento matemático avançado é desenvolvido no Ensino Superior e para Dreyfus o pensamento matemático avançado pode ser desenvolvido em qualquer nível de Ensino.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a formação de conceitos é um tópico de maior importância na Psicologia da Aprendizagem. Mas surgem muitas dificuldades nessa formação, pois é muito difícil ter a noção do próprio conceito e saber quando um conceito está corretamente formado na mente de um estudante.

Esses dois pesquisadores desenvolveram a ideia de conceito imagem (*concept image*) e conceito definição (*concept definition*), na formação de conceitos matemáticos por parte dos estudantes. O conceito imagem é qualquer coisa não verbal associada na mente de um estudante ao nome do conceito; é assim usado para descrever a estrutura cognitiva total associada ao conceito e que inclui todas as imagens mentais, todas as propriedades e todos os processos que lhe estão associados. Já o conceito definição, de acordo com os pesquisadores, explica o conceito de modo exato e de uma forma não circular. De acordo com Tall e Vinner o conhecimento da definição pelo estudante não garante a compreensão do conceito e para isso o estudante precisa ter um conceito imagem.

Na década de 1990, Gray e Tall, de acordo com seus estudos, criaram o termo proceito (*procept*) identificando a dualidade de símbolos matemáticos, hora processo, hora conceito/objeto e definiram proceito da seguinte forma: “Um proceito elementar é a amálgama de três componentes: um processo que produz um objeto matemático e um símbolo que é utilizado para representar um processo ou um objeto” (GRAY; TALL, 1994). De acordo com os pesquisadores um proceito consiste em uma coleção de proceitos elementares que tenham o mesmo objeto/conceito em comum.

Uma pista para a maneira pela qual o processo e o conceito (*procept = process + concept*) são combinados em uma única noção podem ser encontradas nas práticas de trabalho dos matemáticos profissionais e todos aqueles estudantes que são bem sucedidos em Matemática. Eles empregam um dispositivo simples de utilizar a mesma notação para representar simultaneamente um processo e o conceito desse processo. Esta definição preliminar permite o simbolismo de evocar um ou outro processo ou conceito, de modo a que um símbolo, tal como $2 + 3$, pode ser evocado tanto o processo

de adição dos dois números, quanto o conceito de soma.

Atualmente Tall começou a construir uma estrutura simples a partir da herança genética da criança recém-nascida que é ampla o suficiente para cobrir o espectro de desenvolvimento dos diferentes indivíduos à medida que crescem. Na raiz desta crescente sofisticação está o uso da linguagem para comprimir um fenômeno complexo em um conceito, cujo significado pode ser pensável e refinado, por uma experiência discutida e conectada a outros conceitos pensáveis ricos em esquemas cognitivos (WATSON; TALL, 2002).

Esse quadro é baseado em três diferentes, mas interligados, mundos de desenvolvimento do pensamento matemático, dois dos quais dominam a matemática elementar, e o terceiro que se desenvolve na matemática avançada, são eles:

- Mundo conceitual-corporificado: com base na percepção e reflexão sobre as propriedades de objetos;
- Mundo proceitual-simbólico: que cresce fora do mundo corporificado por meio de ação e simbolização em conceitos pensáveis;
- Mundo axiomático-formal: com base em definições formais e prova; que inverte a seqüência de construção de significado a partir de definições, com base em conceitos formais conhecidos e em um conjunto de definições de uma teoria.

A partir dessas concepções de pensamento matemático avançado, iremos analisar quatro dissertações e uma tese que utilizaram algumas noções dessa teoria cognitiva em seus referenciais teóricos e para inferir nos resultados apresentados por elas.

2. Pesquisas que utilizaram noções de pensamento matemático avançado em seus referenciais teóricos

Almeida (2013), em sua dissertação intitulada “Um panorama de artigos sobre a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva de David Tall”, teve como objetivo elaborar um panorama de proposições teóricas sobre a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral existentes em artigos publicados por Tall e colaboradores, realizar sínteses de resultados e evidenciar elementos teóricos.

Suas questões de pesquisas foram: Quais são os elementos teóricos utilizados em artigos

de autoria ou com a colaboração de Tall na análise de dificuldades de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral? Quais foram nesses artigos as abordagens desenvolvidas por Tall para o ensino dos tópicos: Infinito, Números Reais, Limite, Derivada e Integral?

Almeida (2013) concluiu após as análises dos artigos que foram expostas abordagens de ensino. Posteriormente, Tall e seus colaboradores produziram um amplo quadro teórico que possibilitou a elaboração de modelos, que descrevem as operações cognitivas dos sujeitos (conceito imagem e conceito definição; noção de proceito).

Campos (2014), em sua dissertação intitulada “Algoritmos para fatoração e primalidade como ferramenta didática para o ensino de Matemática”, teve como objetivo: construir e implementar algoritmos para fatoração e primalidade como ferramenta didática que possibilite o desenvolvimento das capacidades de generalização e abstração, juntamente com conceitos sobre variáveis, funções e alguns temas introdutórios sobre teoria dos números. Usou como aportes teóricos em sua pesquisa a teoria Construcionista segundo Seymour Papert (1994) e a teoria cognitivista sobre o pensamento matemático avançado segundo Dreyfus (2002).

Após apresentar e discutir uma sequência didática em sua pesquisa, Campos (2014) concluiu que a sequência didática proposta pode potencializar a aprendizagem dos conceitos de variável e função como meios de relacionar grandezas, utilizando-se programação de algoritmos para discutir temas da teoria dos números, com o uso das linguagens Python e Scratch. O pesquisador concluiu também que, a sequência didática pode possibilitar o desenvolvimento da capacidade de generalizar e abstrair, sob a perspectiva do pensamento matemático avançado.

Gereti (2014), em sua dissertação intitulada “Processos do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do Enade”, teve como objetivo descrever e discutir indícios/características dos processos do pensamento matemático avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao resolverem questões discursivas do Enade. Em suas análises utilizou a metodologia de Análise de Conteúdo, segundo Bardin, e embasou-se na teoria cognitivista sobre o pensamento matemático avançado, segundo Dreyfus.

Sua questão de pesquisa foi: Que processos do pensamento matemático avançado são evidenciados por estudantes de Matemática ao resolverem questões discursivas do Enade?

Gereti (2014) após a aplicação das questões e análise das resoluções dos estudantes concluiu que os mesmos processos evidenciados nas respostas padrão do Enade foram mobilizados nas resoluções de alguns estudantes, com exceção do processo de visualização. De um total de treze: onze estudantes mobilizaram o processo de representação simbólica, três estudantes mobilizaram o processo de visualização, sete estudantes mobilizaram o processo de mudança de representações e tradução entre elas, dois estudantes mobilizaram o processo de modelação, sete estudantes mobilizaram o processo de sintetização e dois estudantes mobilizaram o processo de generalização. No entanto, nenhum estudante mobilizou todos os processos mentais do pensamento matemático avançado, segundo Dreyfus, nas resoluções das quatro questões propostas; dos treze estudantes, dois não resolveram nenhuma questão.

Leme (2016), em sua tese intitulada “Aprendizagem da derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento”, teve como objetivo investigar os fluxos de pensamento na formação do pensamento matemático na aprendizagem do conceito de derivada, tendo por base a teoria dos Três Mundos da Matemática, de David Tall (2013), com vistas a identificação de meios que potencializem a aprendizagem desse conceito matemático.

Sua questão de pesquisa foi: quais são os fluxos de pensamento, embasados na teoria dos Três Mundos da Matemática, envolvidos na aprendizagem da derivada?

Desenvolveu nove combinações entre os três diferentes Mundos da Matemática (corporificado, simbólico e formal) e assim denominou-as de fluxos de pensamento.

Leme (2016) concluiu sua tese entendendo que o desenvolvimento dos fluxos de pensamento relacionados à aprendizagem da derivada foi uma grande contribuição que sua pesquisa ofereceu ao campo da Educação Matemática, pois propiciou um modo diferenciado das publicações até aquele momento, em questões relacionadas ao desenvolvimento do pensamento matemático de um indivíduo.

Mação (2014), em sua pesquisa de mestrado intitulada “Uma proposta de ensino para o conceito de derivada”, teve como objetivo apresentar abordagens para o ensino de derivada. Utilizou a teoria dos Três Mundos da Matemática, de acordo com Tall (2013), e

as concepções de derivada, de acordo com Thurston (1994) - geométrica, taxa e aproximação.

Suas questões de pesquisas foram: Quais abordagens aparecem em livros didáticos de Cálculo usados em algumas universidades do estado de São Paulo? Quais características dos Três Mundos da Matemática são contempladas nessas abordagens? É possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada, pela concepção geométrica, com o objetivo de inserir o sujeito na construção de seu conhecimento e com a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito? É possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada, pela concepção taxa, com o objetivo de inserir o sujeito na construção de seu conhecimento e com a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito? É possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada, pela concepção aproximação, com o objetivo de inserir o sujeito na construção de seu conhecimento e com a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito?

Concluiu que a maneira de entender a derivada como uma abordagem geométrica foi a mais usada nos dois livros didáticos de Cálculo analisados, seguida pela taxa e que as demais concepções de derivadas, de acordo com Thurston, não aparecem como abordagem, apenas como complementação em outro tópico.

Pela sua análise dos caminhos percorridos pelos livros de Cálculo, à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, verificou quais características dos três mundos poderiam estar presentes nas abordagens adotadas e concluiu que ambos apresentaram características dos três mundos: corporificado, simbólico e formal.

Concluiu também que é possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada pela concepção geométrica com o objetivo de inserir o sujeito na construção de seu conhecimento e com a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito.

Para responder sua próxima questão de pesquisa, Mação (2014) partiu da discussão da velocidade média e colocou a questão norteadora que sugere o uso da velocidade média para o cálculo da velocidade instantânea. De acordo com o autor, foi possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada, pela concepção taxa, com a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito.

E por fim, para o conceito de derivada a partir da concepção aproximação, Mação (2014) propôs uma situação problema em que foi utilizada uma reta para calcular valores aproximados de uma função f , em pontos próximos. E partir dessa proposta verificou que foi possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada pela concepção aproximação.

Após essa sucinta revisão bibliográfica sobre a utilização, por parte de algumas pesquisas, da teoria cognitiva sobre o pensamento matemático avançado, iremos apresentar nossas análises preliminares. A metodologia utilizada em nossas análises segue as orientações da Análise de Conteúdo desenvolvida Laurence Bardin (2011), que a define como um conjunto de técnicas e de análises das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e com objetivo de descrição do conteúdo das mensagens; com base no tratamento dos resultados pode-se propor inferências e verificar tendências (p. 44).

3. Análises Preliminares

A partir do estudo dessas pesquisas relatadas neste artigo, que utilizaram noções do pensamento matemático avançado, de acordo com David Tall e Tommy Dreyfus, elaboramos o Quadro 1 com as principais características dessas pesquisas; desde os temas/conteúdos, os referenciais teóricos, sujeitos de pesquisas/materiais, modalidade de ensino e conclusões com intuito de indicar quais aspectos dessas noções são levados em conta nessas pesquisas.

O Quadro 1 indica que a maior parte das pesquisas analisadas foi de caráter documental envolvendo análise de artigos publicados e propostas para o ensino e aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos (4 publicações e só 1 com sujeitos de pesquisa).

Duas pesquisas analisadas utilizaram o conceito de processos mentais, de acordo com Dreyfus (2002), que afirma que o pensamento matemático avançado consiste em uma grande variedade de interação entre processos mentais e que as principais interações que caracterizam o pensamento matemático avançado são a abstração, a representação e a generalização e três pesquisas utilizaram conceitos da teoria do pensamento matemático avançado, de acordo com Tall et al. (1981, 1994, 2002, 2013), que afirma que o pensamento matemático avançado envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma grande variedade de atividades matemáticas para o desenvolvimento de novas ideias que fundamentam e ampliam o crescente sistema de teoremas demonstrados,

mostrando a importância e o potencial dessa teoria cognitivista para as pesquisas, no ensino e aprendizagem de Matemática. Dessas três pesquisas citadas, duas utilizaram conceitos dos Três Mundos da Matemática em seus referenciais teóricos para propor meios de potencializar o ensino e a aprendizagem do conceito de derivada, mostrando a potencialidade desta teoria para o Ensino Superior.

E por fim, as pesquisas analisadas se concentraram no Ensino Superior, o que está de acordo com David Tall, que afirma que o pensamento matemático avançado é desenvolvido nesta modalidade de ensino

Pesquisa	Tema/Conteúdo	Referencial teórico	Sujeitos/Materiais	Ensino	Conclusão
Almeida (2013) Mestrado Acad. PUC/SP	Artigos de Tall / Aprendizagem de CDI	Tall et al. (1981; 1994)	Artigos publicados por Tall	Superior	Tall e seus colaboradores produziram um amplo quadro teórico.
Campos (2014) Mestrado Prof. UNIR/RO	Sequência Didática / Divisibilidade, fatoração e números primos	Papert (1994) e Dreyfus (2002)	Sequência Didática	Médio	A sequência didática proposta pode contribuir para a aprendizagem dos conceitos de variável e de função.
Gereti (2014) Mestrado Acad. UEL/PR	Processos do PMA / Questões do Enade	Dreyfus (2002)	13 estudantes do curso de Matemática	Superior	Que de um total de 13 estudantes nenhum mobilizou todos os processos mentais.
Leme (2016) Doutorado PUC/SP	Fluxos de pensamento / Aprendizagem do conceito de derivada	Tall (2013)	Livro publicado por Tall	Superior	O desenvolvimento dos fluxos de pensamento pode potencializar o ensino e aprendizagem do conceito de derivada.
Mação (2014) Mestrado Acad. Anhaguera/SP	Concepções de derivada / Proposta de Ensino	Tall (2013) e Thurston (1994)	Sequência didática	Superior	Foi possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada pelas concepções: geométrica, aproximação e taxa.

Quadro 1: Principais características das pesquisas analisadas neste artigo

Fonte: Quadro desenvolvido pelos autores

Considerações Finais

Constatou-se, nas análises preliminares, que as pesquisas se concentraram no Ensino Superior e que a maioria destas pesquisas foram de caráter documental mostrando a potencialidade desta teoria cognitivista para o ensino e a aprendizagem de Matemática e

a necessidade de produzir mais pesquisas de natureza empírica, visto que a maioria das pesquisas consideradas neste artigo foram teóricas.

E também podemos afirmar, de acordo com as pesquisas analisadas, que os professores de matemática podem diversificar a metodologia de aulas para facilitar o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, de acordo com a teoria dos pesquisadores David Tall e Tommy Dreyfus, e que o uso da tecnologia pode facilitar a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado possibilitando melhorias na aprendizagem dos estudantes.

Referências

- ALMEIDA, M. V. **Um panorama de artigos sobre a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva de David Tall**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP, 2013.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Almedina: Edições 70, 2011.
- CAMPOS, J. P. **Algoritmos para fatoração e primalidade como ferramenta didática para o ensino de Matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional-ProfMat). Rio de Janeiro: UNIR/RO, 2014.
- DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Process. In D. O. (ed.) **Advanced Mathematical Thinking**, p. 25-41. Dordrecht: Kluwer, 2002.
- GERETI, L. C. V. **Processos do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do Enade**. Dissertação de mestrado (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Londrina: UEL/PR, 2014.
- GRAY, E. M.; TALL, D. O. Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. **Journal for research in Mathematics Education**, 1994.
- IGLIORI, S. B. C. Pensamento Avançado Matemático: em debate. **RELME**, 2012.
- LEME, J. C. M. **Aprendizagem da derivada: Uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP, 2016.
- MAÇÃO, D. P. **Uma proposta de ensino para o conceito de derivada**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). São Paulo: Anhanguera/SP, 2014.
- PAPERT, S. **A Máquina das Crianças – Repensando a Escola na Era da Informática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.
- TALL, D. O. **How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the three**

worlds of mathematics. Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O. The psychology of advanced mathematical thinking. In D. O. (ed.). **Advanced Mathematical Thinking**, p. 3-20. Dordrecht: Kluwer, 2002.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational studies in mathematics**, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

THURSTON, W. P. On the proof and Progress in Mathematics. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 30, n. 2, p. 161-177, 1994.

WATSON, A.; TALL, D. O. Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. In: Anne D. Cockburn & Elena Nardi (eds.). **Proceedings of the 26 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 4, p. 369-376. Norwich: UK, 2002.