Os conhecimentos docentes e as operações matemáticas envolvendo o número zero[1]

ALINE TAFARELO TRACANELLA[2]

BARBARA LUTAIF BIANCHINI[3]

Resumo

O presente artigo é parte de uma dissertação de mestrado em desenvolvimento, que faz uma breve contextualização histórica acerca do número zero, envolvendo seus diversos sentidos e sua utilização nas operações fundamentais. No que se refere ao desenvolvimento da pesquisa, cabe destacar que na busca por elementos da parte histórica, descobrimos que o número zero deixava os matemáticos indianos com dúvidas quanto aos resultados das operações, e queremos investigar se isso ocorre com os alunos no início da aprendizagem das operações matemáticas básicas, para tanto, usamos a Teoria das Situações Didáticas e a estruturação do milieu, a fim de organizar uma situação adidática que explore a comparação e as operações com números decimais envolvendo o zero. Ocupamo-nos também dos conhecimentos docentes que o professor utiliza em cada nível da estruturação, para auxiliar a organização da situação proposta e a institucionalização do conhecimento construído pelos alunos.
Palavras-Chave*: Número zero; Estruturação do milieu; Conhecimentos docentes; Matemática.*

Abstract

This article is part of a developing master thesis that studies the historical context of the number zero, its multiples meanings and uses in fundamental math operations. In relation to the research development, it is important to emphasize that during the search for historical elements we discovered that the number zero raised doubts to the indians mathematicians about the results of the operations. Therefore, we investigated if this situation occurs to students that are in the beginning of their learning of basic mathematical operations. Then, for such purpose, we used the Theory of Didactical Situations and the milieu structure, in order to organize an adidactical situation that explores the comparison and the operations with decimal numbers involving the number zero. In addition, we examined the knowledge used by teachers in each level of the formation in order to help to organize the proposed situation and the institutionalization of the knowledge built by the students.
Keywords: *Number zero; Milieu structure; Teacher knowledge; Mathematics.*

Introdução

Este artigo é um recorte de uma investigação que faz parte de uma dissertação de mestrado em Educação Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), em andamento. No momento de sua entrega, encontramo-nos na composição do quadro teórico da pesquisa.

[1] Trabalho apresentado no V Encontro de Produção Discente dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e Afins, realizado em 26 de novembro de 2016, *campus* Marquês de Paranaguá, PUCSP.

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – alinett@ymail.com.

[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – barbara@pucsp.br.

O objetivo da pesquisa é verificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos do Ensino Fundamental I, relativas à presença do número zero nas operações básicas. Tendo em vista a formação do quadro teórico da investigação, fizemos uma breve contextualização histórica acerca do conhecimento e compreensão do numeral na civilização hindu, que adotou um símbolo para representa-lo; refletimos também a respeito de como essa sociedade realizava as operações, consideração que se encontra na próxima seção deste artigo.

Além de dominar o conteúdo, o professor precisa dispor de outros tipos de conhecimento para ensinar, denominados saberes docentes. Alguns autores abordam esse tema, como Tardif e Ball, porém, neste trabalho, utilizamos os pressupostos de Shulman (1987) para analisar quais conhecimentos docentes são fundamentais ao professor ao tratar das operações envolvendo o número zero com alunos do Ensino Fundamental I.

Para observar melhor os conhecimentos envolvidos em cada etapa, fizemos uma estruturação do *milieu*, de acordo com a proposta de Margolinas (1995), que se baseou na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1986), a fim de organizar as etapas da montagem de situações adidáticas a serem utilizadas em sala de aula e estudar a evolução dos alunos na resolução do problema apresentado.

Iniciaremos a discussão com uma breve contextualização histórica acerca do uso do zero nas operações matemáticas.

1. A questão do zero

Historicamente, poucas civilizações antigas apresentaram, em seus sistemas numéricos, um símbolo para representar o zero, situação que comprometia a realização das operações matemáticas nessas sociedades. Todavia, povos como os maias e os babilônios utilizavam o zero para marcar uma ordem vazia, apesar de não operarem com ele. É interessante ressaltar, que o número só foi aceito pela comunidade científica, aproximadamente, no século XVIII, e ainda hoje é causa de discussões, principalmente, no que diz respeito à sua utilização e significado.

Os hindus foram o povo que mais próximo chegou de fazer uso do zero nas operações matemáticas, e para representa-lo, utilizavam a palavra “sunya” (vazio), de sua língua materna, uma vez que não dispunham de um símbolo que pudesse representar o número.

Apesar de utilizarem um sistema aditivo e de base dez, os símbolos que adotavam não eram suficientes para escrever números grandes, empregados na astronomia, por isso, começaram a representar os números por meio da escrita em língua materna, atribuindo um nome para cada número inteiro de 1 a 9 e para os múltiplos de dez. A escrita era feita da esquerda para a direita.

Ainda assim, esse sistema dificultava a realização das operações matemáticas, e para solucionar essa problemática, passaram a usar o ábaco de colunas, nas quais eram escritos os símbolos que inventaram para representar os números antes da escrita, deixando uma coluna vazia na falta de alguma ordem, e assim, conseguiam operar com esses símbolos. Com o passar do tempo, perceberam que poderiam fazer os mesmos cálculos trocando as palavras pelos símbolos e criando uma representação para o zero, desta maneira, surge o sistema de numeração posicional indiano. (GUIMARÃES, 2008)

Uma vez estabelecido o sistema de numeração posicional, eles começaram a praticar os cálculos aritméticos a partir desse novo sistema. Surgiram as primeiras observações relacionadas ao comportamento dos números nas operações, inclusive ao do zero. Kaplan (2001) afirma que os matemáticos indianos queriam compreender a relação do zero com os outros números, e não somente estabelecer um símbolo para o nada, por isso, começaram a descrever o comportamento do zero relacionado aos outros números e dos números entre si, criando leis de interação entre eles. “Mahavira explica isso de forma expressiva quando diz que ‘o zero se torna o mesmo que é adicionado a ele’” (KAPLAN, 2001, p. 76).

Os matemáticos indianos foram os primeiros a tentar estabelecer essas relações numéricas. Temos como exemplo Brahmagupta, que por volta de 600 d.C. dizia que um número subtraído dele mesmo teria zero como resultado, já Mahavira, aproximadamente em 850 d.C., afirmava que a multiplicação de qualquer número por zero tem como resultado o zero e que a subtração por zero mantém o número sem alterações.

Em relação à divisão, há controvérsias de pensamento entre eles, uma vez que Mahavira assegurava que na divisão de um número por zero, o resultado seria o próprio número. Segundo Gundlach (1992)

> Essa afirmação parece conter já a essência do conceito de zero como ‘elemento neutro da adição’, e é interessante observar que Mahavira considera que a divisão por zero tem o mesmo efeito que a adição e a

> subtração de zero – ou seja, que não tem nenhum efeito sobre o número sobre o qual opera, como divisor. (p. 13)

Bhaskara, 300 anos após Mahavira, anunciava que a divisão de qualquer número por zero obteria como resposta o infinito, contrapondo-se à afirmação de Mahavira. Os matemáticos da época evitavam fazer assertivas sobre a divisão, principalmente por zero, pois diziam que não havia sentido.

Nota-se que, desde seus primórdios, o zero era motivo de discórdia e de dúvidas entre os estudiosos, principalmente no que se refere às operações matemáticas, justamente por essa razão, tornou-se nosso objeto de estudo. Para ensinar sobre o tema, porém, o educador precisa ter alguns conhecimentos que vão além das especificidades da disciplina a ser ensinada, os quais são abordados a seguir.

1. Conhecimentos docentes

Os conhecimentos docentes envolvem as instruções necessárias para que os professores exerçam sua função, trata-se dos saberes fundamentais para o trabalho com os alunos em sala de aula e fora dela. Alguns autores discutem esse assunto, como Tardif, Ball, Fiorentini, Nacarato, contudo, neste texto trabalharemos com a ideia de tipos de conhecimentos docentes, de acordo com os pressupostos de Shulman (1987).

Shulman (1987, *apud* MIZUKAMI, 2004) realizou pesquisas tanto com professores iniciantes quanto com os que possuíam mais tempo de carreira, para levantar os conhecimentos adquiridos e utilizados por eles em sala de aula, visto que estava preocupado com a profissionalização docente, e, portanto, com os saberes necessários ao exercício da profissão.

De acordo com Fiorentini (2005), há três décadas, duas categorias embasavam a formação inicial do conhecimento docente sobre o conteúdo a ser ensinado, a do conhecimento específico e a do conhecimento pedagógico. Após suas pesquisas, Shulman (1986, *apud* FIORENTINI, 2005) inseriu mais uma categoria, a do conhecimento do conteúdo no ensino, que envolvia o conhecimento da disciplina, sua didática e seu currículo.

Um tempo depois, Shulman (1986, *apud* FIORENTINI, 2005) expandiu os seus três eixos, incluindo os conhecimentos provenientes da experiência, dos alunos e contextos. Sendo assim, Shulman (1987, *apud* Moreira e David, 2003) ampliou as categorias dos saberes docentes em tipos de conhecimento, sendo eles

> - conhecimento do conteúdo;
>
> - conhecimento curricular, envolvendo os programas e materiais curriculares;
>
> - conhecimento pedagógico geral, com referência especial aos princípios e estratégias de manejo de classe e de organização que parecem transcender ao conhecimento do conteúdo;
>
> - conhecimento pedagógico do conteúdo, aquele amálgama especial entre conteúdo e pedagogia que constitui uma forma de entendimento profissional da disciplina e que é específica dos professores;
>
> - conhecimento das características cognitivas dos alunos;
>
> - conhecimento do contexto educacional, incluindo a composição do grupo de alunos em sala de aula, a comunidade escolar mais ampla, as suas particularidades culturais, etc.;
>
> - conhecimento dos fins educacionais, propósitos e valores, seus fundamentos filosóficos e históricos. (p. 69)

Outros pesquisadores basearam-se na categorização de Shulman e criaram categorias com denominações diferentes, como Ball, por exemplo, que aprofundou os conhecimentos propostos por Shulman.

Shulman (1987, *apud* MOREIRA e DAVID, 2003) ressalta a importância do conhecimento pedagógico do conteúdo, uma vez que possibilita ao professor modificar o conteúdo e utilizar sua pedagogia para facilitar o ensino, propiciando melhor compreensão do objeto a ser ensinado aos educandos. Trata-se de um conhecimento construído pelo professor mediante sua prática em sala de aula e para ser utilizado nesse mesmo espaço, por isso, pode ser considerado um saber individual, ou seja, cada professor o constrói no seu cotidiano escolar, apoiado em experiências vivenciadas anteriormente, seja como aluno ou como professor.

Shulman afirma que

> Ele [o conhecimento pedagógico do conteúdo] pode ser entendido como a forma profissional com que o professor concebe o seu objeto de ensino e, ao mesmo tempo, a forma prática com que ele opera a organização, a representação e a apresentação do saber numa determinada disciplina escolar. (1987, *apud* MOREIRA e DAVID, p.71, 2003)

Desse modo, baseando-se em experiências anteriores, o professor é capaz de saber quais são as maiores dúvidas e erros de seus alunos em relação a determinado conteúdo, e pode, então, utilizar exemplos, metáforas, analogias que facilitam a compreensão do assunto, partindo dos conhecimentos prévios que educandos de certa faixa etária costumam levar para a escola.

A compreensão das teorias que fundamentam a prática em sala de aula é indispensável ao professor, visto que integralizam os conhecimentos pedagógicos que o docente precisa dominar. Considerando essa afirmação, abordaremos a Teoria das Situações Didáticas para a análise didática da atividade que propomos.

2. Teoria Das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi idealizada por Brousseau, objetivando a criação de um modelo das interações que ocorrem durante as aulas de Matemática, envolvendo o saber, o educando e o *milieu*. Uma tradução mais próxima desse termo para o português seria "meio", mas optamos por assumir que *milieu* é um termo que abrange situações em sala de aula, conhecimentos prévios dos alunos, conhecimentos dos parceiros na resolução de problemas e conhecimentos que interagem por meios computacionais, e não somente aspectos físicos, como se entende pelo significado usual do termo em português. O *milieu* envolve as relações entre os alunos, entre professor e aluno, e os instrumentos utilizados para promover a aprendizagem.

Segundo Almouloud (2007), a essência dessa teoria não é o indivíduo que aprende, mas sim as situações didáticas que favorecem as relações entre educador, educando e saber. A teoria se apoia em três hipóteses, que são: o aluno aprende no processo de adaptação a um *milieu* que causa desequilíbrio no conhecimento do sujeito, gerando novas aprendizagens; o *milieu* precisa ser criado e organizado pelo professor para facilitar a aquisição de novas aprendizagens matemáticas; o *milieu* e as situações didáticas precisam estar muito bem relacionados com os conhecimentos matemáticos que se pretende desenvolver.

O centro dessa teoria está baseado nas situações didáticas, que podem ser definidas como um conjunto de relações explícitas ou implícitas entre alunos, *milieu* e professor, para auxiliar da melhor maneira possível a construção de novos conhecimentos pelos alunos. Contidas nesse conceito, estão também as situações adidáticas, que ocorrem quando o professor tem uma intencionalidade educativa, porém não a compartilha com o aluno, que só descobrirá posteriormente que aquela situação pode se transformar em novos saberes.

Para Brousseau, uma situação adidática precisa conter um problema matemático que estimule o indivíduo a refletir e evoluir na aprendizagem. Sendo assim, o educador é o mediador que origina situações nas quais os alunos são os sujeitos ativos do processo de construção da aprendizagem a partir das atividades propostas. Cada conhecimento possui uma situação adidática que apresenta seu sentido mais próximo do científico, chamada de situação fundamental.

Brousseau decompõe o processo de aprendizagem em quatro fases, nas quais as funções do conhecimento e dos alunos estão em constante mudança. A primeira foi denominada de dialética de ação, na qual o problema é apresentado ao aluno e este age resgatando seus conhecimentos prévios e se mobilizando para tentar encontrar uma solução. A segunda fase é conhecida como dialética de formulação, na qual os alunos explicam os procedimentos utilizados para encontrar a resolução da situação proposta, seja ela escrita ou oral, objetivando a troca de informações entre os integrantes do grupo de alunos.

A terceira fase é a dialética da validação, em que os sujeitos discutem a validade de seus argumentos e dos modelos matemáticos por eles criados para solucionar a situação apresentada, esse debate entre o *milieu* e os educandos visa à certeza das respostas encontradas, organizando as interações entre eles, por isso, essa fase caracteriza-se como *milieu* de comprovação de provas ou de rejeição. A dialética da institucionalização, quarta fase do processo de aprendizagem, ocorre quando o professor atua diretamente, fixando o conteúdo que foi o objeto de estudo na situação didática, tornando-o saber matemático da classe, que poderá utilizá-lo em outros contextos adequados ao tema.

Para que essas fases dialéticas sejam realmente eficientes, é preciso fazer a estruturação do *milieu*, que auxilia nas articulações entre os educandos, os conhecimentos e as situações ou entre os saberes e as situações.

3. Estruturação do *milieu* adidático

Margolinas (1995, *apud* ALMOULOUD, 2007) desenvolveu dois tipos de análises possíveis do *milieu*: a ascendente, que busca caracterizar a atividade do aluno, e a descendente, que procura indicar a atividade do professor na elaboração e aplicação de uma sequência adidática. Essas análises possuem níveis que apresentam as fases da elaboração da aula pelo professor (descendente) e as possíveis atitudes dos alunos (ascendente) diante do problema proposto.

A análise descendente inicia-se no nível +3, no qual o professor pensa sobre o ensino de matemática de maneira geral e determina um tema a ser trabalhado; no +2, elenca as teorias que embasam o ensino do tema que foi escolhido previamente e faz o refinamento para o conteúdo mais específico dentro do tema geral. Após construir o embasamento nos dois níveis anteriores, chega ao nível + 1, em que faz o planejamento da aula, selecionando as atividades a serem aplicadas. O momento seguinte é, justamente, o da aplicação da atividade em sala de aula (fase de devolução), que conduz aos níveis da análise ascendente correspondente à participação do aluno.

No Quadro 1 podemos observar a estruturação do *milieu* adidático descendente de acordo com o tema da pesquisa.

Na análise ascendente, temos o nível -3, que corresponde ao momento em que o professor faz a proposta para os alunos, apresentando a situação a ser trabalhada e assumindo o papel de observador, neste nível, o aluno toma ciência do problema proposto e inicia uma busca por elementos do *milieu* que possam conduzi-lo na construção de uma estratégia eficaz para resolver o problema. Já no nível -2, os educandos iniciam as tentativas de resolução da situação, buscando conhecimentos anteriores para ancorar suas hipóteses, neste nível, o educador observa e media as ações dos alunos, depreendendo as interferências que deverá fazer no nível 0 (institucionalização). No nível -1, os alunos testam as suposições e verificam que necessitam de mais conhecimento para conseguir concluir o problema.

Finalmente, temos o nível 0 (descrito no Quadro 1), no qual o professor atua diretamente, fazendo a institucionalização dos conhecimentos matemáticos desenvolvidos pelos alunos por meio das atividades. É o nível em que ocorre a maior interação entre todos os sujeitos envolvidos no processo de aprendizagem, o *milieu*, o educando e o educador. Nesse momento o professor formaliza o objeto matemático, ampliando o conhecimento dos alunos.

No Quadro 2 podemos ver a estruturação do *milieu* adidático ascendente.

Analisando os Quadros 1 e 2, podemos perceber que todas as categorias dos conhecimentos docentes estão presentes em cada nível, todavia, quando um dado conhecimento representa o mesmo significado do nível anterior, este não é explicitado novamente no quadro, mas somente fica indicado qual o tipo de conhecimento. Quando o conhecimento tem seu sentido alterado, optamos por explica-lo novamente no nível correspondente. Dependendo dos níveis da estruturação, alguns dos tipos de conhecimento podem se sobressair aos demais.

<table>
<tr><th>NÍVEIS</th><th>ESTRUTURAÇÃO DO MILIEU</th><th rowspan="2">CONHECIMENTOS DOCENTES ENVOLVIDOS</th></tr>
<tr><th colspan="2">Docente – Análise descendente</th></tr>
<tr><td>+3
(Noosfera)</td><td>- Álgebra: Conhecimentos aritméticos
- Bloco de conteúdo (PCN): Números e operações</td><td>- Currículo: da Educação Básica
- Conteúdo
- Fins educacionais</td></tr>
<tr><td>+2
(Construção)</td><td>- Projeto de ensino: Operações do Campo aditivo e multiplicativo envolvendo números decimais no sistema monetário. Comparação de valores na moeda vigente (Real).
- Abordagem: Resolução de situações problema, envolvendo casos de compra.
- Alunos do 5º ano do Ensino Fundamental I</td><td>- Pedagógico: Teoria das Situações Didáticas
- Conteúdo: Números decimais, sistema monetário e operações com os decimais.
- Alunos: Conhecimentos prévios e características cognitivas da faixa etária.</td></tr>
<tr><td>+1
(Projeto)</td><td>A situação adidática é construída envolvendo:
- Operações com números decimais envolvendo a questão do zero
- Comparações entre números decimais que apresentem o zero</td><td>- Pedagógico
- Conteúdo
- Alunos: Conhecimentos prévios e particularidades do grupo de educandos.
- Pedagógico geral: Atividade desenvolvida em pequenos grupos e funcionamento da sala como um todo.</td></tr>
<tr><td>0
(Didático)</td><td>Institucionalização:
- Compreender a utilização do zero nas operações com números decimais
- Realizar comparações entre números decimais com o zero</td><td>- Conteúdo
- Pedagógico
- Alunos
- Pedagógico do conteúdo: Maneiras de relacionar o conteúdo específico (números decimais) com as resoluções que os alunos trouxeram das situações e torna-lo um conhecimento válido para a sala.</td></tr>
</table>

Quadro 1: Estruturação do *milieu* adidático descendente e as categorias dos saberes docentes de acordo com Shulman (1987, *apud* MOREIRA e DAVID, 2003) envolvidos em cada nível.
Fonte: Margolinas (1995, *apud* ALMOULOUD, 2007).

Observando a análise descendente (Quadro 1), percebemos que o professor necessita de diferentes conhecimentos para organizar uma situação adidática, possuindo, na estruturação do *milieu*, uma ferramenta didática importante e eficaz. O conhecimento de conteúdo é essencial, mas, em sala de aula, outros saberes também são primordiais, por isso, o educador não deve conduzir uma aula, cuja intenção seja favorecer a aprendizagem, sem atentar antes ao conhecimento das características cognitivas dos alunos, por exemplo, assim como à posição do conteúdo em relação à grade curricular, às "regras" vigentes na escola, entre outros.

Discente – Análise ascendente		**CONHECIMENTOS DOCENTES**
NÍVEIS	**ESTRUTURAÇÃO DO *MILIEU***	**Observação dos alunos**
-3	- Ler e interpretar o problema - Mobilizar conhecimentos prévios: números decimais e operações.	O professor não participa desse nível na análise ascendente.
-2	- Levantar hipóteses. - Elaborar estratégias de resolução.	- Alunos: observação das discussões e da construção do pensamento matemático. - Conteúdo: observação do levantamento de conhecimentos prévios.
-1	- Discutir entre si as resoluções propostas pelo grupo. - Verificar a veracidade das hipóteses.	- Alunos - Conteúdo - Pedagógico do conteúdo: observação das respostas dos alunos e organização mental dos assuntos a serem abordados na institucionalização.

Quadro 2: Estruturação do *milieu* adidático ascendente e as categorias dos saberes docentes de acordo com Shulman (1987, *apud* MOREIRA e DAVID, 2003) envolvidos em cada nível.
Fonte: Margolinas (1995, *apud* ALMOULOUD, 2007)

Considerações Finais

De acordo com a história da matemática, o número zero demorou a ser incorporado nos sistemas numéricos e nas operações matemáticas, pois não havia concordância com a maneira com que esse número se comporta na resolução dos cálculos, principalmente na divisão, contudo, sabemos que ele é primordial para a formação do sistema de numeração posicional e para a realização de cálculos matemáticos.

Os conhecimentos docentes contribuem com o trabalho do professor, uma vez que o auxiliam no acompanhamento do aprendizado e desenvolvimento dos alunos em sala de aula. Através deles, o educador tenta prever possíveis dúvidas, procura analisar os métodos de resolução encontrados pelos educandos e busca ajudar os alunos na construção do conhecimento matemático trabalhado.

Sendo assim, a estruturação do *milieu* adidático, baseada na Teoria das Situações Didáticas, é uma ferramenta de suma importância no que se refere ao planejamento das aulas de matemática, pois ajuda o educador a se organizar e a se preparar didaticamente para lidar com as diversas questões que podem surgir durante a aplicação da situação adidática.

A pesquisa teórica que compõe este artigo será utilizada como ferramenta principal para analisar um instrumento a ser aplicado a alunos do 5º ano do Ensino Fundamental I, que tem por objetivo o levantamento das potenciais dificuldades que os educandos apresentam quando o número zero aparece nos cálculos matemáticos.

Agradecimentos

Agradecemos a contribuição significativa das professoras Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Dra. Eloiza Gomes no desenvolvimento deste texto. Pesquisa financiada pela CAPES.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

FIORENTINI, D. **A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática**. Revista de Educação PUC-Campinas, Campinas, n. 18, p. 107-115, 2005.

GUIMARÃES, F. **O sentido do zero**. 2008. 112 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais**. São Paulo: Atual, 1992.

KAPLAN, R. **O Nada que existe:** Uma história natural do Zero. 1 ed. Rio de Janeiro: Rocco, 2001.

MIZUKAMI, M. G. N. **Aprendizagem da docência**: algumas contribuições de L. S. Shulman. Revista Educação, Santa Maria, v.29, n.2, p. 33-49, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores.** Zetetiké, Campinas, v.11, n.19, p.57-79, 2003.