Material de apoio para o ensino de função[1]

MARCIO VIEIRA DE ALMEIDA [2]

SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI [3]

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um material de apoio para o ensino de função, tendo por referenciais teóricos constructos da Gênese Documental referentes à elaboração de documentos por um professor para o trabalho em sala de aula, e de Tall sobre cuidados com a exploração do conceito de função quando se utiliza o computador. Os procedimentos metodológicos propiciam o material resultante a pretender se inserir no conjunto de recursos de um professor. A pesquisa é parte de uma tese doutoramento que visa a contribuir com professores de Cálculo apresentado materiais referenciados em pesquisas, com vistas a favorecer a integração teoria e prática no campo de pesquisa em Educação Matemática.
***Palavras-Chave**: Ensino de Cálculo; Funções; Gênese Documental.*

Abstract

The aim of this work is to present a support material for teaching function. The theoretical framework is elements of Documentational Genesis relating to the preparation of documents for a teacher to work in the classroom and theoretical elements developed by Tall relating to caring for the exploration of the concept of function when the computer is used in teaching. The methodological procedures provide the resulting material is done to fit in the set of resources of a teacher. The research is part of a doctoral dissertation which aims to contribute with teachers of Calculus for presenting teaching materials referenced in research, in order to encourage the integration theory and practice in the field of research in Mathematics Education.
***Keywords:** Teaching of Calculus; Functions; Documentational Genesis.*

Introdução

Este artigo está inserido no âmbito das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Superior, em especial no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Ciências Exatas. O objetivo é apresentar um material de apoio para o ensino de função que possam vir a se constituir um recurso para um professor. Esse material faz parte de uma pesquisa ampla que tem o objetivo desenvolver um conjunto de materiais para o ensino de conceitos de Cálculo.

A problemática desta pesquisa está relacionada à necessidade de produzir materiais de ensino para conceitos de Cálculo baseados em resultados de pesquisas.

[1] Trabalho apresentado no V Encontro de Produção Discente dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e Afins, realizado em 26 de novembro de 2016, *campus* Marquês de Paranaguá, PUCSP.

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – marcioalmeidasp@gmail.com.

[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – sigliori@pucsp.br.

Para Rasmussen, Marrangelle e Borba “é fundamentalmente importante que o corpo de pesquisa em ensino, aprendizagem e entendimento do Cálculo contribua com a prática educacional de estudantes que estão matriculados em cursos de Cálculo a cada ano” (RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014, p. 507, tradução nossa). Além disso, eles entendem que em vista da profundidade do que é conhecido sobre a aprendizagem dos alunos, obtidos a partir das pesquisas anteriores, especialmente, aquelas conduzidas nas décadas de 80 e 90, se faz necessário que pesquisadores do campo da Educação Matemática, no Ensino Superior, se engajem no desenvolvimento de projetos de pesquisa abrangentes, nos quais matemáticos e educadores matemáticos trabalhem em conjunto com vistas a abordarem questões relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo tanto de natureza teórica quanto de natureza pragmática.

Em Robert e Speer (2001) é reforçada a urgência da integração teoria e prática nas pesquisas do ensino de Cálculo. No trabalho dessas autoras foram destacadas duas categorias de pesquisa para o ensino e aprendizagem do Cálculo e da Análise. A primeira incluía pesquisas guiadas por teorias, e a outra por pesquisas guiadas pela prática. Essa categorização não implicava numa separação, uma vez que Robert e Speer entendem que essas duas abordagens são complementares e que o campo de pesquisa da Educação Matemática “vai fazer progressos no ensino e na aprendizagem, de maneira eficaz, só se tratar, de forma significativa, com as questões teóricas e pragmáticas simultaneamente” (ROBERT; SPEER, 2001, p. 297, tradução nossa).

É possível detectar nos dois trabalhos expostos (ROBERT; SPEER, 2001; RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014) a seguinte constatação: a necessidade de se valorizar, nas pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo, a produção de conhecimento para a melhoria da prática.

Entendemos que é com o desenvolvimento de materiais de apoio, referenciados em constructos de Gueudet e Trouche (2009), uma maneira de tornar acessível o que foi produzido pelos pesquisadores, aos professores e produzir conhecimento para a melhoria da prática. Essa preocupação encontra respaldo no que foi discuto por Fey (1994) sobre a implicação dos estudos psicológicos para o ensino e aprendizagem da Matemática escolar, ao dizer que:

> No entanto, longe de fornecer uma orientação clara para a construção de estratégias de ensino e ambientes de aprendizagem adequados, os resultados são mais sugestivos do que prescritivos – incompletos e

> muitas vezes contraditórios. Um desenvolvedor de currículo ou professor que se volta para a Psicologia para insights sobre o ensino de ideias matemáticas e métodos fundamentais de raciocínio vai encontrar teorias provocativas, mas também um grande desafio para traduzir essas teorias em práticas de sala de aula (FEY, 1994, p. 20, tradução nossa).

Com base nos elementos apresentados é assumido que uma maneira de traduzir teorias em práticas de sala de aula é elaborar materiais de apoio para o ensino de conceitos do Cálculo. O processo de produção é fundamentado na Gênese Documental, proposta por Gueudet e Trouche (2009) que compõe o quadro teórico deste, apresentado na próxima seção.

1. Quadro teórico

O quadro teórico apresentado é composto por constructos da Gênese Documental.

Esse quadro embasa a maneira pela qual os recursos destinados para o ensino de função, objetivado neste artigo, são produzidos. Segundo Gueudet e Trouche (2009), a documentação elaborada por professores, para preparar sua aula, está no cerne tanto das atividades quanto do desenvolvimento profissional. O trabalho de documentação, definido pelos autores, constitui-se em: buscar por novos recursos, selecionar e criar tarefas matemáticas, planejar sequências nas quais as atividades serão desenvolvidas, gerenciar o tempo disponível e a administração dos artefatos disponíveis.

O processo de Gênese Documental produz o que é chamado de documento e pode ser representado pela expressão:

$$\textit{Documentos} = \textit{Recursos} + \textit{Esquema de utilização} \qquad (1)$$

O termo recurso, para Gueudet e Trouche, é utilizado para descrever uma variedade artefatos e outros elementos que podem ser utilizados por um professor, como o material de apoio produzido por esta pesquisa. Um recurso pode ser, por exemplo, um livro texto, uma aplicação produzida num *software*, uma lista de exercícios que será resolvida pelos alunos, uma discussão com outros professores, etc. Um recurso nunca é isolado, mas sim um conjunto de recursos, e o professor esboça num conjunto de recursos seu trabalho de documentação.

De maneira complementar,

> [...] um recurso pode ser um artefato, ou seja, o resultado da atividade humana elaborada por uma atividade humana, com um objetivo preciso. Mas os recursos superam artefatos: a reação de um estudante,

> uma vara de madeira no chão, também podem se constituir como recursos por um professor que os adote em sua atividade (GUEUDET; TROUCHE, 2012, p. 204, tradução nossa).

O esquema de utilização é um componente psicológico definido por Vergnaud "como uma organização invariante do comportamento do sujeito para uma classe de situações" (VERGNAUD, 1998, p. 229). Num esquema estão compreendidas metas e submetas, antecipações, regras de ação, para coletar informações e exercer controle, e possíveis inferências. Esse esquema é estruturado por invariantes operatórios, que consistem em conhecimento implícito construído por meio de vários contextos nos quais o documento foi utilizado, sendo que esses invariantes podem ser tanto de natureza didática quanto matemática.

O processo de Gênese Documental não pode ser considerado como uma transformação na qual um conjunto de recursos é dado como entrada e um documento como saída (GUEUDET; TROUCHE, 2009). Esse processo é contínuo cujo desenvolvimento ocorre durante a utilização de determinado documento. Gueudet e Trouche defendem a existência de uma relação dialética entre os recursos e os documentos e que a elaboração de documentos é dada em longo prazo.

Durante o processo de Gênese Documental, devem ser levados em consideração três componentes, que são entrelaçados, para a descrição de um conjunto de recursos: material; matemática e a didática.

O componente material é composto por materiais que serão utilizados para o desenvolvimento de uma atividade, por exemplo, papel, computador, fichários, etc.

As noções matemática envolvidas, tarefas e técnicas matemáticas necessárias compõem o componente matemático de um dado conjunto de recursos, ou documento.

Na componente didática estão aspectos institucionais que influenciam o trabalho do professor em sala de aula. Gueudet e Trouche definem que essa componente inclui "elementos organizacionais, que vão desde o mapeamento do ano ao planejamento de uma única sessão de uma hora" (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 207, tradução nossa).

Com esse elemento teórico é pretendido organizar o desenvolvimento de um recurso para o ensino de funções reais. Eventualmente, é possível sugerir que pesquisas, desenvolvidas por pesquisadores da Educação Matemática, podem ser incluídas no repertório de recursos de um professor. Ademais, é possível que resultados de pesquisas possam auxiliar na formulação de uma justificativa para o desenvolvimento de determinado recurso.

2. Material de Apoio Para o Conceito de Função

No que segue apresentamos o material de apoio pretendido neste artigo. Ele é objetivado para o aprofundamento do estudo do conceito de função. A maneira como apresentaremos é a seguinte: inicialmente apresentamos a classe de situações para o qual este material foi elaborado e em seguida destacamos as três componentes (material, matemática e didática) do conjunto.

A componente matemática é a definição de função enunciada em linguagem natural, do seguinte modo: uma função é uma relação entre dois conjuntos, de modo que a todo elemento do primeiro conjunto está associado um único elemento do segundo conjunto. Ou seja, uma função é uma terna (f, A, B) sendo que A e B são dois conjuntos não vazios e f uma relação entre esses dois conjuntos.

Com relação à natureza da regra que define a relação, ela não é necessariamente em regular e está sujeita a duas condições: não devem existir exceções, ou seja, se $x \in A$ então deverá existir um valor y em B tal que $y = f(x)$, e a segunda é que não devem existir ambiguidades, ou seja, a cada $x \in A$ deve fazer corresponder um único $f(x) \in B$.

E uma consequência dessa a igualdade entre duas funções f_1: $A \rightarrow B$ e f_2: $A' \rightarrow B'$ é estabelecida se, e somente se, $A = A'$, $B = B'$ e $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in A$. Ou seja, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

A componente material é composta pelo o *software* GeoGebra e os comandos 'Função' e o booleano 'Se' desse *software*.

Com comando 'Função' é possível esboçar gráficos de funções definidas em intervalos fechados. Esse comando é dado pela estrutura: 'Função[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]'. Cada parâmetro dessa estrutura corresponde ao seguinte: <Função> corresponde à sentença que define a função; <Valor de x Inicial> é o extremo inicial do intervalo e o <Valor de x Final> é o extremo final do intervalo.

Para exemplificar considere a função $f: [-2,1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela sentença $f(x) = x^2$. Para esboçar o gráfico dessa função é necessário digitar o seguinte, no campo de *Entrada*: ‘Função[x^2, -2, 1]’.

O comando booleano ‘Se*’* pode ser utilizado para o esboço de gráficos de funções cujo domínio é um subconjunto contínuo dos números reais, diferente de um intervalo fechado, e funções reais definidas por mais de uma sentença.

Esse comando possui as seguintes variações: ‘Se[<Condição>, <Então>]’; ‘Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]’.

A variação do comando ‘Se[<Condição>, <Então>]’ possibilita o esboço do gráfico de uma função real cujo domínio é um subconjunto contínuo dos números reais do seguinte modo: no argumento <Condição> deve ser digitado o conjunto, que será o domínio da função, e em <Então> deve ser colocada a sentença da função.

Para exemplificar, vamos construir a representação gráfica de uma função cujo domínio é a reunião de dois intervalos. Considere a função $g : X \to \mathbb{R}$, sendo que $X = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \,\}$, dada pela sentença $g(x) = (x-2)^2$. Para escrever o conjunto *X* de maneira que seja uma entrada válida para o argumento <Condição> será necessário utilizar operações booleanas, descritas em Hohenwarter e Hohenwarter (2009), em que o comando ‘&&’ representa o ‘*e*’ lógico, e || (duas barras verticais) representa o ‘*ou*’ lógico. Com esses operadores lógicos o conjunto *X* pode ser descrito como: 0 ≤ *x* ≤ 1 || 2 ≤ *x* ≤ 3. Para representar graficamente a função *g* é necessário digitar os seguintes comandos, no campo de *Entrada*: *g*(*x*) = Se [0 ≤ *x* ≤ 1 || 2 ≤ *x* ≤ 3, (*x* – 2)^2][4]

Com a variação ‘Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]’ é possível esboçar gráficos de funções definidas por duas sentenças, pois os valores reais, que não satisfizerem a <Condição>, satisfarão a condição <Senão>. Para exemplificar, considera a função *h*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada pelas seguintes sentenças,

$$h(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

---

[4] No GeoGebra, para acrescentar o símbolo ≤ (ou ≥), pode ser feito de duas maneiras: a primeira é digitar, no campo *Entrada*, o seguinte: “<=” (ou “>=”), ; e a segunda é, com o cursor no campo Entrada, clicar no botão , localizado no canto direito desse mesmo campo, e clicar no símbolo ≤ (ou ≥).

Para representar graficamente essa função é necessário digitar os seguintes comandos, no campo *Entrada*: $h(x)$ = Se [$x \leq 1$, 2 – x, x^2].

Para exemplificar uma função definida por três sentenças, considere a função $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$i(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Para representar graficamente essa função é necessário "encaixar" dois comandos 'Se' do seguinte modo: o primeiro comando 'Se' possui a primeira parte da sentença da função i, ou seja, o parâmetro <Condição> recebe "$x < -1$" e o parâmetro <Então> recebe "$x + 2$". A condição <Senão> será outro comando 'Se', na variação 'Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]', receberá como <Condição> a restrição da segunda sentença da função, $-1 \leq x \leq 1$, <Então> recebe a segunda sentença "x^2" e <Senão> recebe a terceira sentença "x". E deve ser digitado no campo *Entrada*: $i(x)$ = Se [$x < -1$, $x + 2$, Se [$-1 \leq x \leq 1$, x^2, x]]

O processo de "encaixe" de comandos 'Se' pode ser repetido de acordo com o número de sentenças que constituem a lei de definição da função.

Outro elemento da componente material é um conjunto de quatro atividades elaboradas.

A primeira atividade está relacionada à identificação da igualdade entre duas funções. Para a primeira questão considere as funções $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_1(x) = x^2$ e $f_2: [-2, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $f_2(x) = x^2$. Pergunta-se: as funções f_1 e f_2 são iguais? Conjecture qual seria a diferença entre as representações gráficas das funções f_1 e f_2?

A partir das questões da primeira atividade seria possível detectar um sujeito que não distingue que duas funções que têm mesma sentença, porém, domínios diferentes, não são iguais.

Em seguida, sugere-se que seja mostrado como podemos utilizar o GeoGebra para obter representações gráficas de funções f_1 e f_2, obtidas na atividade anterior. Essas podem ser obtidas digitando-se no campo *Entrada* o seguinte:

f_1(x) = x^2 e f_2(x) = Função[x^2, -2, 1].

Para que seja percebido que uma relação funcional pode ser expressa por mais uma sentença a segunda atividade é a seguinte: considere a função *h*: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela seguinte regra:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Ao apresentar a função *h*, a seguinte questão pode ser feita: conjecture qual será a representação gráfica da função *h*? A representação dessa função pode ser obtida digitando o seguinte, no campo Entrada: h(x) = Se [x ≤ 1, 1 – x, x^2].

Para a terceira atividade, considera se a função *i*: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$i(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Para representar graficamente essa função é necessário "encaixar" dois comandos "Se". Observe o que deve ser digitado no campo *Entrada*: "*i*(*x*) = Se [*x* < –1, *x* + 2, Se [–1 ≤ *x* ≤ 1, *x*^2, *x*]]"

A quarta atividade é objetivado apresentar uma função cujo domínio da função é a reunião de dois intervalos. Para isso considere a função $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que $X = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \}$, dada pela sentença $g(x) = (x-2)^2$. Apresente como se representa o conjunto *X* no GeoGebra, ou seja, 0 ≤ *x* ≤ 1 || 2 ≤ *x* ≤ 3. A representação gráfica dessa função é obtida por meio dos seguintes comandos: "*g*(*x*) = Se [0 ≤ *x* ≤ 1 || 2 ≤ *x* ≤ 3, (*x* – 2)^2]".

A componente didática é composta por indicações de Tall sobre o ensino do conceito de função, em especial, na compreensão da definição formal do conceito de função. Segundo Tall,

> As funções apresentadas na escola têm várias características familiares que afetam o significado do conceito de função. Por exemplo, uma função é dada geralmente por uma fórmula composta de polinômios, funções trigonométricas, exponenciais e logaritmos – todas que possuem aspectos reconhecíveis. Na transição da Escola Básica para o Ensino Superior esses *met-befores* podem sugerir propriedades implícitas que uma função deve ter, por exemplo, uma única fórmula e estudantes raramente tem contato com funções de uma função que tem sentenças distintas em diferentes partes do domínio (TALL, 2013, p.

258, tradução nossa).

Além disso, dependendo da maneira que se trabalha o conceito de função, por meio de um *software* que plota gráfico, as propriedades implícitas, apontadas por Tall, podem ser reforçadas. O pesquisador inglês indica a importância de utilizar computadores no ensino da Matemática ressaltando que eles, quando munidos de determinado *software*, podem ser utilizados na visualização de representações de conceitos matemáticos. Com tais representações é possível que os alunos desenvolvam de maneira significativa determinados conceitos da Matemática. Contudo, o pesquisador alerta para um perigo, existente na utilização de determinados *software*, que plotam gráficos, pois eles podem levar o sujeito a desenvolver um conceito imagem limitado, visto que podem ser utilizados para "desenhar gráficos razoavelmente suaves dados por uma fórmula" (TALL, 1993, p. 2, tradução nossa).

Justamente esse alerta que norteia as atividades do conjunto de recursos produzidos, pois apresentar apenas exemplos de funções definidas por uma sentença pode causar um conflito com relação à definição formal do conceito de função, que ressalta que a natureza da regra que define a função é arbitrária. Por esse motivo nos recursos desenvolvidos são apresentados comandos do GeoGebra que esboçam funções reais definidas por mais de uma sentença e funções reais cujo domínio são subconjuntos dos números reais, diferentes de um intervalo, com vistas a evitar tal conflito.

Considerações Finais

Neste artigo foi apresentado um material respaldado teoricamente pela noção de recurso no sentido de Trouche, para o ensino do conceito de função composto por quatro atividades. Para tal foram levados em conta resultados de pesquisas e elementos teóricos desenvolvidos por Tall. O que se apresenta neste artigo insere-se na perspectiva de atender à necessidade apontada por pesquisadores da construção de material para o ensino da Matemática em geral, que seja embasada em teorias cognitivistas, como é o caso da teoria de Tall. No caso, por exemplo, do conceito de função, Tall destaca aspectos que devem ser levados em conta, como a exploração de exemplos em que a lei de definição da função seja apresentada por mais de uma sentença.

A pesquisa na qual se insere este artigo tem como alvo contribuir com a ampliação do conjunto de recursos para o ensino de Cálculo embasado em teorias que sustentem o uso de instrumentos computacionais como vantajoso para a aprendizagem.

E, por fim, espera-se que a demonstração, de ferramentas, comandos e funções predefinidas, disponíveis num *software*, como o GeoGebra, na construção de atividades para o ensino, possa contribuir tanto com a pesquisa em Educação Matemática, quanto com a prática docente, pois motiva a elaboração de novos materiais que podem potencializar a aprendizagem da Matemática.

Agradecimentos

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro disponibilizado.

Referências

BAKAR, M; TALL, D. Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. **International Journal of Mathematics Education in Science & Technology**, n. 23, vol. 1, p. 39–50, 1992. Disponível em: <http://wrap.warwick.ac.uk/511/1/WRAP_Tall_dot1992c-bakar-ijmest.pdf>. Acesso em 28 jun. 2015.

FEY, J. Y. Eclectic approaches to elementarization: cases of curriculum construction in the United States. BIEHLER, R. et al. (Orgs) **Didatics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 15 – 26, 1994.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199-218, 2009.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. In: GUEDET, G; PEPIN, B.; TROUCHE, L. **From Text to 'Lived' Resources**: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012. p. 23 - 41. (Mathematics Teacher Education). Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-1966-8_2>. Acesso em: 28 jun. 2015.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M. Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2. Tradução e adaptação para português (de Portugal) de António Ribeiro. 2009. Disponível em: <http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2015.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM**, v. 46, n. 4, p. 507 - 515, 2014.

ROBERT, A.; SPEER, N. Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analsys. In: HOLTON, D. (Ed.) **The Teaching and Learning of Mathematics at University Level – an ICMI study**, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 283 – 299.

TALL, D. Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. In: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN COLLEGE

MATHEMATICS TEACHING, 5., 1993, **Procedings**…, Addison-Wesley, p. 243 – 258, 1993. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993h-real-rat-cmplx.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2015.

________. **How humans learn to think mathematically:** exploring the three worlds of mathematics. New York: Cambridge University Press, 2013.